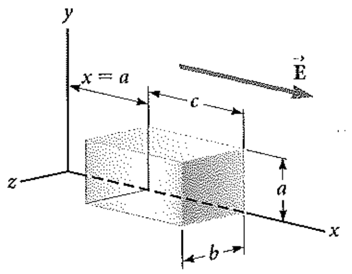
σκεται στη θέση $x = a$. Το ηλεκτρικό πεδίο σε ολόκληρη την περιοχή δεν είναι ομογενές και δίνεται από τη σχέση $\vec{\mathbf{E}} = (3.00 + 2.00x^2)\hat{\mathbf{i}}$ N/C, όπου το x μετριέται σε μέτρα. (α) Υπολογίστε τη συνολική ηλεκτρική ροή που εξέρχεται από την κλειστή επιφάνεια. (β) Πόσο είναι το συνολικό φορτίο που περιέχει η επιφάνεια;

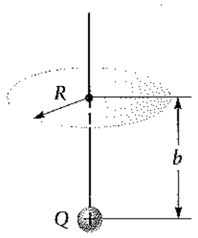


Εικόνα Π Η2.61

62. Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας R έχει ανομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου που μεταβάλλεται ως συνάρτηση του r σύμφωνα με τη σχέση $\rho = Ar^2$, όπου το A είναι μια σταθερά και το $r < R$ μετριέται από το κέντρο της σφαίρας. (α) Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου έξω από τη σφαίρα ($r > R$) είναι $E = AR^5/5\epsilon_0 r^2$. (β) Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ($r < R$) της σφαίρας είναι $E = Ar^3/5\epsilon_0$. *Σημείωση:* Ο στοιχειώδης όγκος dV για ένα σφαιρικό κέλυφος ακτίνας r και πάχους dr ισούται με $4\pi r^2 dr$.

63. Μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου έχει πυκνότητα φορτίου ίση με $\rho = a/r$, όπου a σταθερά. Εκφράστε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κατανομή του φορτίου ως συνάρτηση του r. *Σημείωση:* Ο στοιχειώδης όγκος dV για ένα σφαιρικό κέλυφος ακτίνας r και πάχους dr ισούται με $4\pi r^2 dr$.

64. Ένα σωματίδιο με φορτίο Q βρίσκεται στον άξονα ενός κύκλου ακτίνας R σε απόσταση b από το επίπεδο του κύκλου (Εικ. Π Η2.64). Δείξτε ότι αν το ένα τέταρτο της ηλεκτρικής ροής που δημιουργεί το φορτίο διέρχεται από τον κύκλο, τότε $R = \sqrt{3}b$.



Εικόνα Π Η2.64

65. Ένας μονωτικός κύλινδρος, άπειρου μήκους και ακτίνας R, έχει χωρική πυκνότητα φορτίου που μεταβάλλεται ως συνάρτηση της ακτίνας ως εξής

$$\rho = \rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)$$

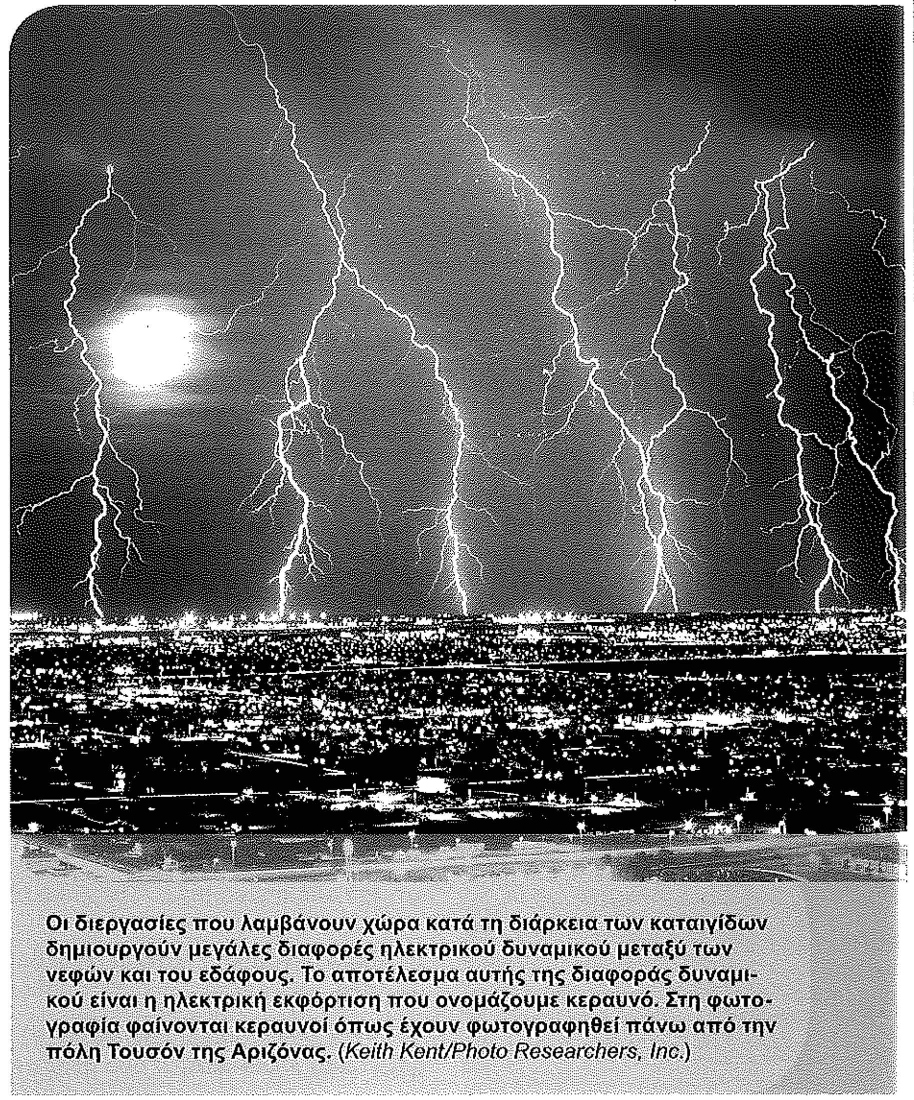
όπου τα ρ_0, a, και b είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Προσδιορίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στις ακτινικές αποστάσεις (α) $r < R$ και (β) $r > R$.

66. **Ανασκόπηση.** Μια πλάκα από μονωτικό υλικό (άπειρων διαστάσεων στους άξονες y και z) έχει πάχος d και ομοιόμορφη θετική πυκνότητα φορτίου ρ. Στην Εικόνα Π Η2.59 βλέπετε μια πλάγια όψη της πλάκας. (α) Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση x από το κέντρο του και στο εσωτερικό της πλάκας είναι $E = \rho x/\epsilon_0$. (β) **Κι αν...;** Υποθέστε ότι ένα ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$ και μάζα m_e μπορεί να μετακινείται ελεύθερα στο εσωτερικό της πλάκας. Το ηλεκτρόνιο αφήνεται ελεύθερο από κατάσταση ηρεμίας σε απόσταση x από το κέντρο. Δείξτε ότι το ηλεκτρόνιο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{m_e \epsilon_0}}$$

κεφάλαιο Η3

Ηλεκτρικό δυναμικό



Οι διεργασίες που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια των καταιγίδων δημιουργούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ των νεφών και του εδάφους. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς δυναμικού είναι η ηλεκτρική εκφόρτιση που ονομάζουμε κεραυνό. Στη φωτογραφία φαίνονται κεραυνοί όπως έχουν φωτογραφηθεί πάνω από την πόλη Τουσόν της Αριζόνας. *(Keith Kent/Photo Researchers, Inc.)*

Στο Κεφάλαιο Η1 συνδέσαμε τη μελέτη του ηλεκτρομαγνητισμού με τις προγενέστερες γνώσεις μας σχετικά με τις δυνάμεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα συνδέσουμε τον ηλεκτρομαγνητισμό με τις προγενέστερες γνώσεις μας σχετικά με την ενέργεια. Στο Κεφάλαιο Μ7, στη θεματική ενότητα της Μηχανικής, παρουσιάζουμε την έννοια της δυναμικής ενέργειας στο πλαίσιο των συντηρητικών δυνάμεων, όπως είναι οι δυνάμεις της βαρύτητας και των ελατηρίων. Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορούμε να λύνουμε διάφορα προβλήματα μηχανικής, τα οποία δεν είναι δυνατόν να λυθούν με μεθόδους που χρησιμοποιούν την έννοια της δύναμης. Αλλά η έννοια της δυναμικής ενέργειας είναι πολύ χρήσιμη και στη μελέτη του ηλεκτρισμού. Επειδή η ηλεκτροστατική δύναμη είναι συντηρητική, μπορούμε να περιγράψουμε τα ηλεκτροστατικά φαινόμενα χρησιμοποιώντας την έννοια της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας. Αυτή η έννοια μας επιτρέπει να ορίσουμε το μέγεθος του *ηλεκτρικού δυναμικού*. Επειδή το ηλεκτρικό δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του ηλεκτρικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος, μπορούμε να το χρησιμοποιούμε για να περιγράφουμε ηλεκτροστατικά φαινόμενα πιο απλά απ' ό,τι αν βασιζόμασταν μόνο στο ηλεκτρικό πεδίο και τις ηλεκτροστατικές δυνάμεις. Η έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού έχει μεγάλη πρακτική χρησιμότητα στη λειτουργία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και συσκευών, που θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Η3.1 Ηλεκτρικό δυναμικό και διαφορά δυναμικού

Όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 εισάγεται στο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ που δημιουργεί μια κατανομή φορτίου, τότε η ηλεκτρική δύναμη που δέχεται το δοκιμαστικό φορτίο είναι $q_0\vec{\mathbf{E}}$. Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_e = q_0\vec{\mathbf{E}}$ είναι συντηρητική επειδή η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ φορτίων και περιγράφεται από τον νόμο του Coulomb είναι επίσης συντηρητική. Όταν το δοκιμαστικό φορτίο μετακινείται μέσα στο πεδίο υπό την επίδραση κάποιου εξωτερικού παράγοντα, τότε το έργο που παράγει το πεδίο στο φορτίο είναι ίσο και αντίθετο με το έργο που παράγει η εξωτερική επίδραση η οποία προκαλεί τη μετατόπιση. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με την ανύψωση ενός αντικειμένου με ορισμένη μάζα μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο: το έργο της εξωτερικής επίδρασης είναι mgh, ενώ το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι $-mgh$.

Στη μελέτη των ηλεκτρικών και των μαγνητικών πεδίων, αποτελεί κοινή πρακτική να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $d\vec{\mathbf{s}}$ για να συμβολίζουμε ένα απειροστό διάνυσμα μετατόπισης το οποίο έχει διεύθυνση εφαπτόμενη μιας διαδρομής στον χώρο. Η διαδρομή αυτή μπορεί να είναι ευθεία ή καμπύλη, και το ολοκλήρωμα σε αυτή τη διαδρομή ονομάζεται *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα*.

Για μια απειροστή μετατόπιση $d\vec{\mathbf{s}}$ του σημειακού φορτίου q_0, το οποίο βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο στο φορτίο μέσα στο σύστημα φορτίου-πεδίου είναι $W_{\text{εσωτ.}} = \vec{\mathbf{F}}_e \cdot d\vec{\mathbf{s}} = q_0\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Επειδή το έργο αυτό παράγεται από το πεδίο, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίου-πεδίου μεταβάλλεται κατά $dU = -W_{\text{εσωτ.}} = -q_0\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Για μια πεπερασμένη μετατόπιση του φορτίου από το σημείο Ⓐ στο σημείο Ⓑ, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος $\Delta U = U_{Ⓑ} - U_{Ⓐ}$ είναι

Η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος ▶

$$\Delta U = -q_0 \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \textbf{(Η3.1)}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται στη διαδρομή που ακολουθεί το q_0 καθώς μετακινείται από το Ⓐ στο Ⓑ. Επειδή η δύναμη $q_0\vec{\mathbf{E}}$ είναι συντηρητική, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τη διαδρομή μετακίνησης από το Ⓐ στο Ⓑ.

Για μια ορισμένη θέση του δοκιμαστικού φορτίου στο πεδίο, το σύστημα φορτίου-πεδίου έχει δυναμική ενέργεια U σε σχέση με τη δυναμική ενέργεια $U = 0$ που έχει το σύστημα στη διάταξη αναφοράς. Διαιρώντας τη δυναμική ενέργεια με την τιμή του δοκιμαστικού φορτίου παίρνουμε ένα φυσικό μέγεθος που εξαρτάται μόνο από την αρχική κατανομή φορτίου και έχει συγκεκριμένη τιμή σε κάθε σημείο του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτό το μέγεθος ονομάζεται **ηλεκτρικό δυναμικό** (ή απλώς **δυναμικό**) V:

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad \textbf{(Η3.2)}$$

Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι βαθμωτό μέγεθος, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι επίσης βαθμωτό μέγεθος.

Όπως δείχνει η Εξίσωση Η3.1, αν το δοκιμαστικό φορτίο μετακινηθεί μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο θέσεων Ⓐ και Ⓑ, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίου-πεδίου θα μεταβληθεί. Εξ ορισμού, η **διαφορά δυναμικού** $\Delta V = V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ}$ μεταξύ δύο σημείων Ⓐ και Ⓑ ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ο λόγος της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του συστήματος κατά τη μετατόπιση ενός δοκιμαστικού φορτίου q_0 μεταξύ αυτών των σημείων προς την τιμή του δοκιμαστικού φορτίου:

Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ▶

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \textbf{(Η3.3)}$$

Στον ορισμό αυτό, η απειροστή μετατόπιση $d\vec{\mathbf{s}}$ μπορεί να εκληφθεί ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων του χώρου αντί ως μετατόπιση ενός σημειακού φορτίου, όπως στην Εξίσωση Η3.1.

Αποφυγή παγίδων Η3.1
Δυναμικό και δυναμική ενέργεια
Το δυναμικό είναι χαρακτηριστικό μόνο του πεδίου, δεν εξαρτάται από το φορτισμένο δοκιμαστικό σωματίδιο που ενδέχεται να τοποθετηθεί μέσα στο πεδίο. *Η δυναμική ενέργεια είναι χαρακτηριστικό του συστήματος φορτίου-πεδίου* και δημιουργείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ του πεδίου και ενός φορτισμένου σωματιδίου που θα τοποθετηθεί μέσα σε αυτό.

Όπως και στην περίπτωση της δυναμικής ενέργειας, μόνο οι *διαφορές* του ηλεκτρικού δυναμικού έχουν σημασία. Συχνά θεωρούμε αυθαίρετα ότι σε κάποιο κατάλληλο σημείο του ηλεκτρικού πεδίου η τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού είναι ίση με μηδέν.

Η διαφορά δυναμικού δεν πρέπει να συγχέεται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Ⓐ και Ⓑ οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη ενός φορτίου-πηγής και εξαρτάται από την αρχική κατανομή του φορτίου (θεωρούμε τα σημεία Ⓐ και Ⓑ *χωρίς* την ύπαρξη του δοκιμαστικού φορτίου). Προκειμένου να υπάρχει δυναμική ενέργεια, πρέπει να έχουμε ένα *σύστημα* με δύο ή περισσότερα φορτία. Η δυναμική ενέργεια ανήκει στο σύστημα και μεταβάλλεται μόνο όταν ένα φορτίο μετακινείται σε σχέση με το υπόλοιπο σύστημα.

Αν μια εξωτερική επίδραση προκαλεί τη μετατόπιση ενός δοκιμαστικού φορτίου από το Ⓐ στο Ⓑ χωρίς να μεταβάλλει την κινητική ενέργειά του, τότε παράγεται έργο που μεταβάλλει τη δυναμική ενέργεια του συστήματος: $W = \Delta U$. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο φορτίο q, το οποίο βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Από την Εξίσωση Η3.3, το έργο της εξωτερικής επίδρασης για τη μετακίνηση του φορτίου q μέσα σε ένα πεδίο με σταθερή ταχύτητα είναι

$$W = q\,\Delta V \qquad \textbf{(Η3.4)}$$

Επειδή το ηλεκτρικό δυναμικό αποτελεί μέτρο της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα φορτίου, η μονάδα τόσο του ηλεκτρικού δυναμικού όσο και της διαφοράς δυναμικού στο σύστημα SI είναι το joule ανά coulomb, το οποίο ορίζεται ως **volt** (V):

$$1\ \text{V} \equiv 1\ \text{J/C}$$

Δηλαδή, για τη μετακίνηση φορτίου 1 C μεταξύ δύο θέσεων με διαφορά δυναμικού 1 V απαιτείται έργο 1 J.

Η Εξίσωση Η3.3 δείχνει ότι η διαφορά δυναμικού μετριέται σε μονάδες ηλεκτρικού πεδίου πολλαπλασιασμένες με μονάδες απόστασης. Επομένως, η μονάδα του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα SI (N/C) μπορεί επίσης να εκφραστεί σε volt ανά μέτρο:

$$1\ \text{N/C} = 1\ \text{V/m}$$

Συνεπώς, μπορούμε να εκλάβουμε το ηλεκτρικό πεδίο ως ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής του ηλεκτρικού δυναμικού ως συνάρτηση της απόστασης.

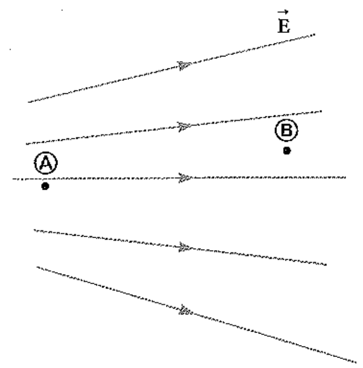
Στην ατομική και πυρηνική φυσική συχνά χρησιμοποιείται η μονάδα ενέργειας **ηλεκτρονιοβόλτ** (electron volt, eV), που ορίζεται ως η ενέργεια την οποία προσλαμβάνει ή χάνει ένα σύστημα φορτίου-πεδίου όταν ένα φορτίο με τιμή e (δηλαδή ένα πρωτόνιο ή ηλεκτρόνιο) κινείται μεταξύ δύο θέσεων με διαφορά δυναμικού 1 V. Επειδή 1 V = 1 J/C και επειδή το στοιχειώδες φορτίο είναι ίσο με 1.60×10^{-19} C, η σχέση που έχει το ηλεκτρονιοβόλτ με το joule είναι:

$$1\ \text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\ \text{C} \cdot \text{V} = 1.60 \times 10^{-19}\ \text{J} \qquad \textbf{(Η3.5)}$$

Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρόνιο στη δέσμη ενός συνηθισμένου μηχανήματος λήψης οδοντιατρικών ακτινογραφιών μπορεί να έχει ταχύτητα μέτρου 1.4×10^8 m/s. Αυτή η τιμή ταχύτητας αντιστοιχεί σε κινητική ενέργεια 1.1×10^{-14} J (όπως προκύπτει από τους υπολογισμούς με βάση τη θεωρία της σχετικότητας, που εξετάζουμε στο Κεφάλαιο Σ1), η οποία ισοδυναμεί με 6.7×10^4 eV. Για να αποκτήσει λοιπόν ταχύτητα αυτού του μέτρου, το ηλεκτρόνιο πρέπει να ξεκινήσει από κατάσταση ηρεμίας και να επιταχυνθεί μέσω διαφοράς δυναμικού 67 kV.

Αποφυγή παγίδων Η3.2
Τάση και βολτάζ
Για την περιγραφή της διαφοράς δυναμικού μεταξύ δύο σημείων χρησιμοποιούνται διάφοροι όροι, με πιο κοινούς την **τάση** και το **βολτάζ** (από την μονάδα μέτρησης του δυναμικού). Η τάση που *εφαρμόζεται σε μια συσκευή* ή *στα άκρα μιας συσκευής* (για παράδειγμα μιας τηλεόρασης) είναι ίδια με τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της συσκευής. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι οι εκφράσεις αυτές υποδηλώνουν κίνηση, η τάση *δεν* είναι κάτι που κινείται *διαμέσου* των συσκευών.

Αποφυγή παγίδων Η3.3
Το ηλεκτρονιοβόλτ
Το ηλεκτρονιοβόλτ είναι μονάδα μέτρησης *ενέργειας*, ΟΧΙ δυναμικού. Μπορούμε να εκφράσουμε την ενέργεια οποιουδήποτε συστήματος σε eV, αλλά η συγκεκριμένη μονάδα εξυπηρετεί περισσότερο στην ποσοτική περιγραφή της εκπομπής και απορρόφησης ορατού φωτός από άτομα. Οι ενέργειες των πυρηνικών διεργασιών συχνά εκφράζονται σε MeV.



Εικόνα Η3.1 (Σύντομο ερώτημα Η3.1) Δύο σημεία ενός ηλεκτρικού πεδίου.

Σύντομο ερώτημα **Η3.1** Θεωρήστε το ηλεκτρικό πεδίο της Εικόνας Η3.1 με τα σημεία Ⓐ και Ⓑ. **(i)** Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη διαφορά δυναμικού $\Delta V = V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ}$; (α) Είναι θετική. (β) Είναι αρνητική. (γ) Είναι ίση με μηδέν. **(ii)** Στο Ⓐ τοποθετείται ένα αρνητικό φορτίο, το οποίο κατόπιν μετακινείται στο Ⓑ. Τι θα συμπεραίνατε για τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου λόγω αυτής της διαδικασίας; Επιλέξτε κάποιο από τα ίδια ενδεχόμενα.

Η3.2 Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Οι Εξισώσεις Η3.1 και Η3.3 ισχύουν σε κάθε ηλεκτρικό πεδίο, είτε ομογενές είτε μη ομογενές, αλλά στην περίπτωση του ομογενούς πεδίου ανάγονται σε απλούστερη μορφή. Καταρχήν, ας θεωρήσουμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο προσανατολισμένο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y (Δυναμική Εικόνα Η3.2α). Ας υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Ⓐ και Ⓑ τα οποία χωρίζονται από απόσταση d, θεωρώντας μια μετατόπιση $\vec{s}$ από το Ⓐ προς το Ⓑ, παράλληλα προς τις γραμμές του πεδίου. Από την Εξίσωση Η3.3 προκύπτει

$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = \Delta V = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} E\,ds\,(\cos 0°) = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} E\,ds$$

Επειδή το E είναι σταθερό, μπορούμε να το βγάλουμε εκτός του ολοκληρώματος, οπότε παίρνουμε

Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου ▶

$$\Delta V = -E\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} ds = -Ed \qquad \textbf{(Η3.6)}$$

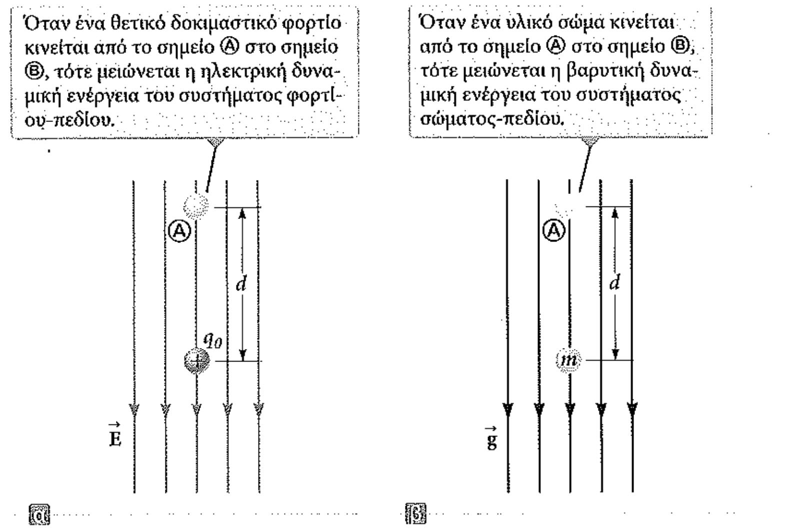
Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Ⓑ είναι μικρότερο από το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Ⓐ· δηλαδή, $V_{Ⓑ} < V_{Ⓐ}$. Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου *πάντα* δείχνουν προς την κατεύθυνση στην οποία μειώνεται το ηλεκτρικό δυναμικό (Δυναμική Εικόνα Η3.2α).

Τώρα ας θεωρήσουμε ότι ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 κινείται από το Ⓐ στο Ⓑ. Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου, θα χρησιμοποιήσουμε τις Εξισώσεις Η3.3 και Η3.6:

$$\Delta U = q_0\,\Delta V = -q_0 E d \qquad \textbf{(Η3.7)}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι αν το q_0 είναι θετικό, τότε το ΔU είναι αρνητικό. Άρα, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος που αποτελείται από ένα θετικό φορτίο και ένα ηλεκτρικό πεδίο μειώνεται όταν το φορτίο κινείται με κατεύθυνση ίδια με αυτή του πεδίου. Ισοδύναμα, ένα ηλεκτρικό πεδίο παράγει έργο σε ένα θετικό φορτίο όταν το φορτίο κινείται στην κατεύθυνση του πεδίου. Αυτό το έργο είναι ανάλογο με αυτό που παράγει το βαρυτικό πεδίο σε ένα σώμα που πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση (Δυναμική Εικόνα Η3.2β). Αν σε αυτό το ηλεκτρικό πεδίο αφεθεί ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο από κατάσταση ηρεμίας, το φορτίο θα δεχτεί μια ηλεκτρική δύναμη $q_0\vec{E}$ ομόρροπη του $\vec{E}$ (δηλαδή, στην περίπτωση της Δυναμικής Εικόνας Η3.2α, προς τα κάτω). Άρα το φορτίο θα επιταχυνθεί προς τα κάτω, με αποτέλεσμα να αποκτήσει κινητική ενέργεια. Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του φορτισμένου σωματιδίου συνοδεύεται με μια ισόποση μείωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου. Αυτό το ισοζύγιο δεν μας προκαλεί έκπληξη· πρόκειται απλώς για εκδήλωση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας σε ένα απομονωμένο σύστημα (η αρχή διατήρησης της ενέργειας εξετάζεται στο Κεφάλαιο Μ8 της Μηχανικής).

Ο παραλληλισμός του συστήματος ηλεκτρικού πεδίου-θετικού δοκιμαστικού φορτίου με το αντίστοιχο σύστημα βαρυτικού πεδίου-δοκιμαστικής μάζας στη Δυναμική Εικόνα Η3.2 μας βοηθά να μοντελοποιήσουμε την ηλεκτρική συμπεριφορά. Όμως στο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να συμβεί κάτι που δεν μπορεί να συμβεί στο βαρυτικό: το δοκιμαστικό φορτίο μπορεί να έχει αρνητική τιμή. Αν το q_0 είναι αρνητικό, τότε το ΔU

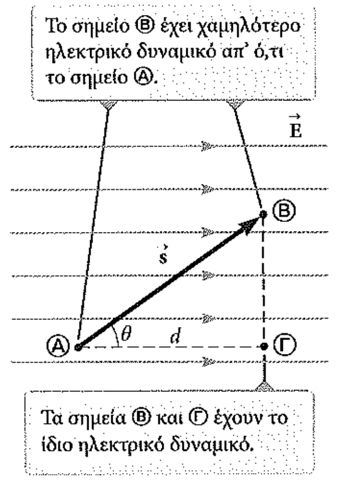


ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η3.2

(α) Όταν το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, το σημείο Ⓑ έχει μικρότερο ηλεκτρικό δυναμικό από το Ⓐ. (β) Σώμα μάζας m το οποίο κινείται με κατεύθυνση προς τα κάτω στο βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$.

είναι θετικό στην Εξίσωση Η3.7, οπότε η κατάσταση αντιστρέφεται. Σε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα αρνητικό φορτίο και ένα ηλεκτρικό πεδίο, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται καθώς το φορτίο κινείται με κατεύθυνση ίδια με αυτή του πεδίου. Αν ένα αρνητικό φορτίο αφεθεί ελεύθερο μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο από κατάσταση ηρεμίας, τότε θα επιταχυνθεί με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή του πεδίου. Προκειμένου το αρνητικό φορτίο να κινηθεί στην κατεύθυνση του πεδίου, πρέπει να δεχτεί μια εξωτερική δύναμη η οποία θα παραγάγει θετικό έργο στο φορτίο.

Τώρα θα εξετάσουμε την πιο γενική περίπτωση ενός φορτισμένου σωματιδίου, το οποίο κινείται από το Ⓐ στο Ⓑ μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{s}$ να *μην* είναι παράλληλο με τις γραμμές του πεδίου (Εικόνα Η3.3). Τότε, από την Εξίσωση Η3.3 προκύπτει



Εικόνα Η3.3 Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο προσανατολισμένο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x.

◀ **Η μεταβολή του δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου**

$$\Delta V = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\vec{s} \qquad \textbf{(Η3.8)}$$

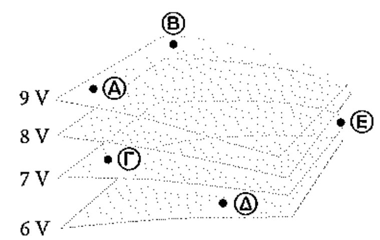
Και σε αυτή την περίπτωση βγάλαμε εκτός ολοκληρώματος το $\vec{E}$ καθώς είναι σταθερό. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου είναι

$$\Delta U = q_0\Delta V = -q_0\vec{E}\cdot\vec{s} \qquad \textbf{(Η3.9)}$$

Τέλος, από την Εξίσωση Η3.8 συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία ενός επιπέδου που είναι κάθετο σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε στην Εικόνα Η3.3, όπου η διαφορά δυναμικού $V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ}$ ισούται με τη διαφορά δυναμικού $V_{Γ⃝} - V_{Ⓐ}$. (Μπορείτε να το αποδείξετε υπολογίζοντας τα δύο εσωτερικά γινόμενα για το $\vec{E}\cdot\vec{s}$: ένα για το $\vec{s}_{Ⓐ\toⒷ}$, με τυχαία γωνία θ μεταξύ $\vec{E}$ και $\vec{s}$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Η3.3, και ένα για το $\vec{s}_{Ⓐ\toΓ⃝}$, όπου $\theta = 0$.) Άρα $V_{Ⓑ} = V_{Γ⃝}$. Κάθε επιφάνεια που αποτελείται από μια συνεχή κατανομή σημείων, τα οποία έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό, ονομάζεται **ισοδυναμική επιφάνεια**.

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου είναι ένα σύνολο (ή «οικογένεια») παράλληλων επιπέδων, τα οποία είναι όλα κάθετα στο πεδίο. Στις επόμενες ενότητες θα περιγράψουμε και ισοδυναμικές επιφάνειες πεδίων με άλλου είδους συμμετρίες.

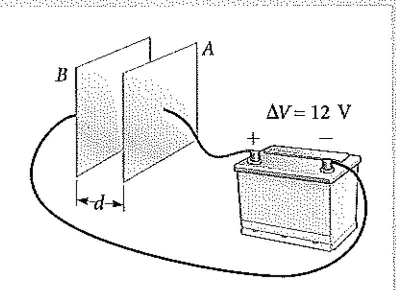
Σύντομο ερώτημα **Η3.2** Τα σημεία που φαίνονται στην Εικόνα Η3.4 ανήκουν σε διαδοχικές ισοδυναμικές επιφάνειες ενός συγκεκριμένου ηλεκτρικού πεδίου. Ταξινομήστε (από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη τιμή) το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο το οποίο κινείται από το σημείο Ⓐ στο Ⓑ, από το Ⓑ στο Γ⃝, από το Γ⃝ στο Δ⃝, και από το Δ⃝ στο Ⓔ.



Εικόνα Η3.4 (Σύντομο ερώτημα Η3.2) Τέσσερις ισοδυναμικές επιφάνειες.

Παράδειγμα Η3.1 Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο παράλληλων πλακών με ίσο και αντίθετο φορτίο

Κάθε μπαταρία έχει συγκεκριμένη διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των πόλων της και εφαρμόζει αυτή τη διαφορά δυναμικού στους αγωγούς που είναι συνδεδεμένοι στους πόλους. Στην Εικόνα Η3.5 φαίνεται μια μπαταρία των 12 V που είναι συνδεδεμένη με δύο παράλληλες πλάκες. Η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι $d = 0.30$ cm και θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές. (Η παραδοχή αυτή είναι εύλογη εφόσον η απόσταση των πλακών είναι μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις τους και δεν εξετάζουμε σημεία που βρίσκονται κοντά στις ακμές τους.) Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που αναπτύσσεται μεταξύ των πλακών.



Εικόνα Η3.5 (Παράδειγμα Η3.1) Μπαταρία 12 V συνδεδεμένη με δύο παράλληλες πλάκες. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών δίνεται από τον λόγο της διαφοράς δυναμικού ΔV και της απόστασης d των πλακών.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Στα Κεφάλαια Η1 και Η2 εξετάσαμε το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται μεταξύ παράλληλων πλακών. Η ιδιομορφία αυτού του προβλήματος είναι ότι το ηλεκτρικό πεδίο σχετίζεται με την καινούργια έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού.

Κατηγοριοποίηση Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο από τη σχέση μεταξύ πεδίου και δυναμικού, την οποία παραθέσαμε σε αυτή την ενότητα, οπότε θα εντάξουμε το συγκεκριμένο παράδειγμα στα προβλήματα αντικατάστασης.

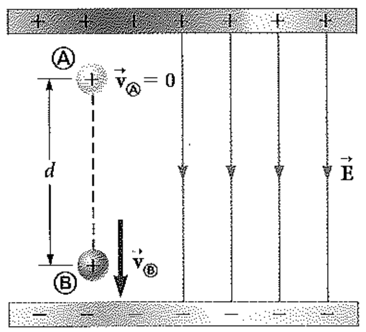
Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.6 για να υπολογίσετε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που αναπτύσσεται μεταξύ των πλακών:

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12\ \text{V}}{0.30 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 4.0 \times 10^3\ \text{V/m}$$

Η διάταξη των πλακών, η οποία φαίνεται στην Εικόνα Η3.5, ονομάζεται *επίπεδος πυκνωτής* ή *πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς*. Θα τον εξετάσουμε πιο αναλυτικά στο Κεφάλαιο Η4.

Παράδειγμα Η3.2 Η κίνηση ενός πρωτονίου σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Ένα πρωτόνιο αφήνεται ελεύθερο από κατάσταση ηρεμίας στο σημείο Ⓐ ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου με μέτρο 8.0×10^4 V/m (Εικ. Η3.6). Το πρωτόνιο μετατοπίζεται κατά $d = 0.50$ m, στο σημείο Ⓑ, προς την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $\vec{\mathbf{E}}$. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας που θα έχει το πρωτόνιο μόλις ολοκληρώσει τη μετατόπισή του.



Εικόνα Η3.6 (Παράδειγμα Η3.2) Ένα πρωτόνιο επιταχύνεται από το Ⓐ στο Ⓑ με κατεύθυνση ίδια με αυτή του ηλεκτρικού πεδίου.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Παρατηρήστε την Εικόνα Η3.6, η οποία δείχνει το πρωτόνιο να κινείται προς τα κάτω μέσω της διαφοράς δυναμικού. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με εκείνη ενός σώματος που πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση σε ένα βαρυτικό πεδίο.

Κατηγοριοποίηση Το σύστημα που αποτελείται από το πρωτόνιο και τις δύο πλάκες στην Εικόνα Η3.6 δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον, συνεπώς μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε ως απομονωμένο σύστημα.

Ανάλυση Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.6 για να βρείτε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Ⓐ και Ⓑ:

$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \times 10^4\ \text{V/m})(0.50\ \text{m}) = -4.0 \times 10^4\ \text{V}$$

Η3.2 *συν.*

Γράψτε την κατάλληλη ανηγμένη μορφή της Εξίσωσης Μ8.2, της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας (δείτε το Κεφάλαιο Μ8 της Μηχανικής) για το απομονωμένο σύστημα φορτίου-ηλεκτρικού πεδίου:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Αντικαταστήστε τις ενεργειακές μεταβολές που αντιστοιχούν στους δύο όρους:

$$(\tfrac{1}{2}mv^2 - 0) + e\,\Delta V = 0$$

Λύστε ως προς το μέτρο της τελικής ταχύτητας του πρωτονίου:

$$v = \sqrt{\frac{-2e\,\Delta V}{m}}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$v = \sqrt{\frac{-2(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(-4.0 \times 10^4\ \text{V})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}}$$

$$= 2.8 \times 10^6\ \text{m/s}$$

Ολοκλήρωση Επειδή στο πεδίο η ΔV είναι αρνητική, αρνητική θα είναι και η ΔU για το σύστημα πρωτονίου-πεδίου. Η αρνητική τιμή της ΔU υποδηλώνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται καθώς το πρωτόνιο κινείται με κατεύθυνση ίδια με εκείνη του ηλεκτρικού πεδίου. Καθώς το πρωτόνιο επιταχύνεται στην κατεύθυνση του πεδίου, η κινητική ενέργειά του αυξάνεται, ενώ ταυτοχρόνως η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται.

Η διάταξη της Εικόνας Η3.6 είναι προσανατολισμένη έτσι ώστε να δείχνει το πρωτόνιο να κινείται προς τα κάτω. Η κίνηση του πρωτονίου είναι ανάλογη με εκείνη ενός σώματος που πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση σε ένα βαρυτικό πεδίο. Το βαρυτικό πεδίο στην επιφάνεια της Γης έχει πάντα κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω, αλλά ένα ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να έχει οποιαδήποτε κατεύθυνση, ανάλογα με τον προσανατολισμό των πλακών που το δημιουργούν. Άρα, αν η διάταξη που φαίνεται στην Εικόνα Η3.6 περιστραφεί κατά 90° ή 180°, το πρωτόνιο θα κινηθεί μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο οριζόντια ή προς τα επάνω αντίστοιχα!

Η3.3 Ηλεκτρικό δυναμικό και δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία

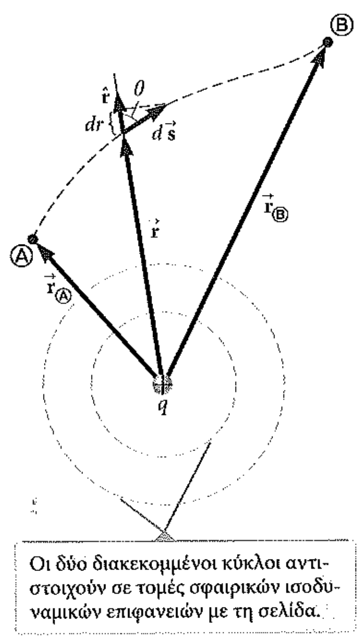
Όπως είδαμε στην Ενότητα Η1.4, ένα απομονωμένο θετικό σημειακό φορτίο q δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο με ακτινική κατεύθυνση προς τα έξω, δηλαδή μακριά από το φορτίο. Για να βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο που απέχει απόσταση r από το φορτίο, θα ξεκινήσουμε από τη γενική σχέση για τη διαφορά δυναμικού,

$$V_Ⓑ - V_Ⓐ = -\int_Ⓐ^Ⓑ \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

όπου Ⓐ και Ⓑ είναι τα τυχαία σημεία που επισημαίνονται στην Εικόνα Η3.7. Σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, το σημειακό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}} = (k_e q/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ (Εξ. Η1.9), όπου $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα με ακτινική κατεύθυνση μακριά από το φορτίο. Η ποσότητα $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Επειδή το μέτρο του $\hat{\mathbf{r}}$ είναι 1, το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = ds\cos\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ $\hat{\mathbf{r}}$ και $d\vec{\mathbf{s}}$. Επιπλέον, $ds\cos\theta$ είναι η προβολή του $d\vec{\mathbf{s}}$ στο $\hat{\mathbf{r}}$· άρα, $ds\cos\theta = dr$. Δηλαδή, κάθε μετατόπιση $d\vec{\mathbf{s}}$ κατά μήκος της διαδρομής από το σημείο Ⓐ στο σημείο Ⓑ μεταβάλλει κατά dr το μέτρο του $\vec{\mathbf{r}}$, του διανύσματος θέσης του σημείου ως προς



Εικόνα Η3.7 Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Ⓐ και Ⓑ, η οποία δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο q, εξαρτάται *μόνο* από την αρχική και την τελική ακτινική συντεταγμένη $r_Ⓐ$ και $r_Ⓑ$ αντίστοιχα.

το φορτίο που δημιουργεί το πεδίο. Με αυτές τις αντικαταστάσεις, βρίσκουμε ότι $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (k_e q/r^2)dr$· έτσι η σχέση για τη διαφορά δυναμικού γίνεται

$$V_{\text{Ⓑ}} - V_{\text{Ⓐ}} = -k_e q \int_{r_{\text{Ⓐ}}}^{r_{\text{Ⓑ}}} \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r}\bigg|_{r_{\text{Ⓐ}}}^{r_{\text{Ⓑ}}}$$

$$V_{\text{Ⓑ}} - V_{\text{Ⓐ}} = k_e q\left[\frac{1}{r_{\text{Ⓑ}}} - \frac{1}{r_{\text{Ⓐ}}}\right] \qquad \textbf{(H3.10)}$$

Η Εξίσωση H3.10 μας δείχνει ότι το ολοκλήρωμα της ποσότητας $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ είναι *ανεξάρτητο* της διαδρομής μεταξύ των σημείων Ⓐ και Ⓑ. Πολλαπλασιάζοντας με ένα φορτίο q_0 που κινείται μεταξύ των σημείων Ⓐ και Ⓑ, διαπιστώνουμε ότι και το ολοκλήρωμα της ποσότητας $q_0\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Αυτό το δεύτερο ολοκλήρωμα, που είναι το έργο το οποίο παράγει η ηλεκτρική δύναμη στο φορτίο q_0, αποδεικνύει ότι η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική (ανατρέξτε στην Ενότητα M7.7). Το πεδίο που δημιουργεί μια συντηρητική δύναμη ονομάζεται εξ ορισμού **συντηρητικό πεδίο**. Συνεπάγεται λοιπόν από την Εξίσωση H3.10 ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός σταθερού σημειακού φορτίου q είναι συντηρητικό. Ακόμα, η Εξίσωση H3.10 δίνει το εξής σημαντικό αποτέλεσμα: η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Ⓐ και Ⓑ μέσα σε ένα πεδίο, το οποίο δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο, εξαρτάται μόνο από τις ακτινικές συντεταγμένες $r_{\text{Ⓐ}}$ και $r_{\text{Ⓑ}}$. Ως τιμή αναφοράς του ηλεκτρικού δυναμικού ενός σημειακού φορτίου συνήθως επιλέγουμε τη $V = 0$ στο $r_{\text{Ⓐ}} = \infty$. Με τη συγκεκριμένη επιλογή τιμής αναφοράς, το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου σε απόσταση r από αυτό είναι

Αποφυγή παγίδων H3.4

Προσοχή στις παρόμοιες εξισώσεις

Μη συγχέετε την Εξίσωση H3.11, η οποία δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου, με την Εξίσωση H1.9, που δίνει το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου. Το δυναμικό μεταβάλλεται ανάλογα του $1/r$, ενώ το μέτρο του πεδίου είναι ανάλογο της ποσότητας $1/r^2$. Η επίδραση ενός φορτίου στον περιβάλλοντα χώρο του περιγράφεται με δύο τρόπους. Αφενός, το φορτίο δημιουργεί ένα διανυσματικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$, το οποίο σχετίζεται με τη δύναμη που δέχεται ένα δοκιμαστικό φορτίο μέσα στο πεδίο αυτό. Αφετέρου, ορίζει ένα βαθμωτό δυναμικό V, που σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων, όταν μέσα στο πεδίο τοποθετηθεί ένα δοκιμαστικό φορτίο.

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad \textbf{(H3.11)}$$

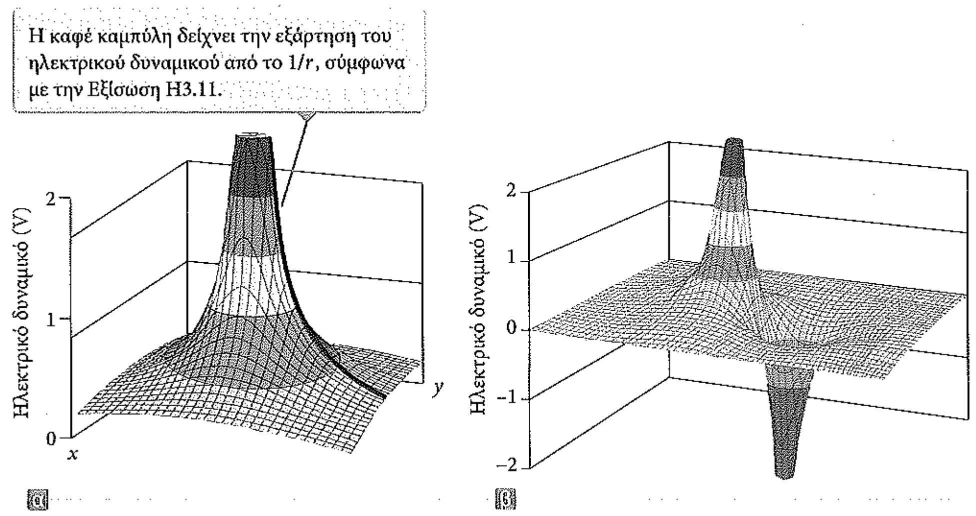
Στην Εικόνα H3.8α φαίνεται το γράφημα του ηλεκτρικού δυναμικού στον κατακόρυφο άξονα για ένα θετικό φορτίο, το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο xy. Θεωρήστε την εξής αναλογία με το βαρυτικό δυναμικό: Φανταστείτε ότι προσπαθείτε να κυλήσετε μια βαριά σφαίρα προς την κορυφή ενός λόφου, ο οποίος έχει το σχήμα της επιφάνειας της Εικόνας H3.8α. Αυτό είναι ανάλογο με το να σπρώξετε ένα θετικά φορτισμένο σώμα προς ένα άλλο θετικά φορτισμένο σώμα. Παρομοίως, το γράφημα του ηλεκτρικού δυναμικού της περιοχής γύρω από ένα αρνητικό φορτίο, για οποιοδήποτε θετικά φορτισμένο σωματίδιο που πλησιάζει προς αυτό, αναλογεί με μια «οπή». Η επιφάνεια της Εικόνας H3.8α γίνεται «επίπεδη», και το ηλεκτρικό δυναμικό ισούται με μηδέν, μόνο όταν το ένα φορτισμένο σωματίδιο βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση (στο άπειρο) από το άλλο.

Για να βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό δύο ή περισσότερων σημειακών φορτίων, εφαρμόζουμε την αρχή της υπέρθεσης. Δηλαδή, το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό πολλών σημειακών φορτίων στο τυχαίο σημείο Σ ισούται με το άθροισμα των δυναμικών των επιμέρους φορτίων. Για ένα σύνολο σημειακών φορτίων, το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Σ είναι

Το ηλεκτρικό δυναμικό πολλών σημειακών φορτίων ▶

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \textbf{(H3.12)}$$

όπου πάλι θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι ίσο με μηδέν στο άπειρο και ότι r_i είναι η απόσταση από το σημείο Σ ως το φορτίο q_i. Προσέξτε ότι το άθροισμα της Εξίσωσης H3.12 είναι αλγεβρικό άθροισμα βαθμωτών ποσοτήτων και όχι διανυσματικό άθροισμα (το οποίο χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας ομάδας φορτίων στην Εξ. H1.10). Έτσι, συχνά είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογίσουμε το V αντί του $\vec{\mathbf{E}}$. Στην Εικόνα H3.8β φαίνεται το ηλεκτρικό δυναμικό γύρω από ένα δίπολο. Παρατηρήστε την απότομη κλίση του δυναμικού μεταξύ των φορτίων, η οποία αντιπροσωπεύει μια περιοχή ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου, κάτι που προκύπτει και από το σχεδιάγραμμα των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου στην Εικόνα H1.20.

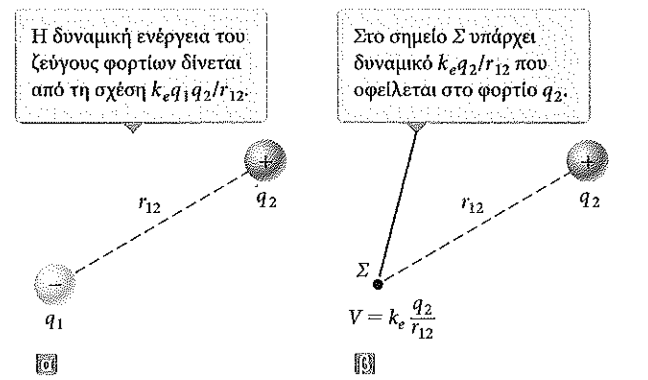


Εικόνα H3.8 (α) Στον κατακόρυφο άξονα απεικονίζεται η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στο επίπεδο που βρίσκεται ένα θετικό φορτίο. (Αντίστοιχα, για ένα αρνητικό φορτίο, το γράφημα του ηλεκτρικού δυναμικού θα είχε τη μορφή «οπής» και όχι «λόφου».) (β) Το ηλεκτρικό δυναμικό στο επίπεδο που βρίσκεται ένα δίπολο.

Ας μελετήσουμε τώρα τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο φορτισμένων σωματιδίων. Αν V_2 είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται στο φορτίο q_2 σε ένα σημείο Σ, το έργο που πρέπει να παραγάγει κάποια εξωτερική δύναμη για να φέρει ένα άλλο φορτίο q_1 από το άπειρο στο σημείο Σ χωρίς επιτάχυνση είναι q_1V_2. Αυτό το έργο αντιπροσωπεύει μεταφορά ενέργειας στο σύστημα, η οποία εκδηλώνεται με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας U που έχει το σύστημα όταν τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση r_{12} μεταξύ τους (Δυναμική Εικ. H3.9α). Επομένως, η δυναμική ενέργεια του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως εξής[1]

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad \textbf{(H3.13)}$$

Αν τα φορτία είναι ομόσημα, τότε το U είναι θετικό. Δηλαδή, για να έρθουν τα δύο φορτία κοντά το ένα στο άλλο θα πρέπει μια εξωτερική επίδραση να παραγάγει θετικό έργο στο σύστημα (επειδή τα ομόσημα φορτία απωθούνται). Αν τα φορτία είναι αντίθετα, τότε το U είναι αρνητικό. Στην περίπτωση δύο αντίθετων φορτίων που έρχονται κοντά το ένα στο άλλο, η εξωτερική επίδραση πρέπει να παραγάγει αρνητικό έργο (να καταναλώσει έργο) για να υπερνικήσει την ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των φορτίων· δηλαδή πρέπει να εφαρμοστεί μια δύναμη αντίθετη της μετατόπισης προκειμένου να μην επιταχυνθεί το q_1 προς το q_2.

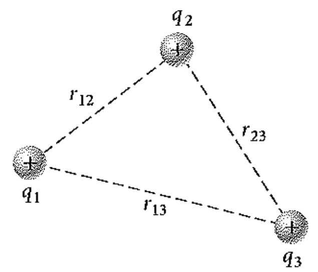


ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ H3.9

(α) Δύο σημειακά φορτία που βρίσκονται σε απόσταση r_{12} μεταξύ τους. (β) Το φορτίο q_1 αφαιρείται.

[1]Η σχέση που εκφράζει την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο σημειακών φορτίων, η Εξίσωση H3.13, έχει την *ίδια* μορφή με την εξίσωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος δύο σημειακών μαζών, $-Gm_1m_2/r$ (δείτε το Κεφάλαιο M13). Η ομοιότητα δεν προκαλεί έκπληξη, αφού και οι δύο σχέσεις ακολουθούν έναν νόμο δύναμης που εξαρτάται από το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης.

Η δυναμική ενέργεια αυτού του συστήματος φορτίων δίνεται από την Εξίσωση Η3.14.



Εικόνα Η3.10 Στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα υπάρχουν τρία σταθερά σημειακά φορτία.

Στη Δυναμική Εικόνα Η3.9β, έχουμε απομακρύνει το φορτίο q_1. Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις Η3.2 και Η3.13 στη θέση που καταλάμβανε προηγουμένως αυτό το φορτίο, στο σημείο Σ, μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό του φορτίου q_2 με τη σχέση $V = U/q_1 = k_e q_2/r_{12}$. Η σχέση συμφωνεί με την Εξίσωση Η3.11.

Αν το σύστημα αποτελείται από περισσότερα από δύο φορτισμένα σωματίδια, τότε, για να βρούμε τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος, υπολογίζουμε το U για κάθε *ζεύγος* φορτίων και αθροίζουμε αλγεβρικά τους όρους. Για παράδειγμα, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων της Εικόνας Η3.10 είναι

$$U = k_e\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right) \qquad \textbf{(Η3.14)}$$

Πρακτικά, το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Φανταστείτε ότι το q_1 είναι σταθερό στη θέση που φαίνεται στην Εικόνα Η3.10, αλλά τα q_2 και q_3 βρίσκονται στο άπειρο. Το έργο που πρέπει να παραγάγει μια εξωτερική επίδραση ώστε να φέρει το q_2 από το άπειρο στη θέση του κοντά στο q_1 είναι $k_e q_1 q_2/r_{12}$, που είναι ο πρώτος όρος της Εξίσωσης Η3.14. Οι άλλοι δύο όροι αντιστοιχούν στο έργο που απαιτείται για να έρθει το q_3 από το άπειρο στη θέση του κοντά στα q_1 και q_2. (Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη σειρά μεταφοράς των φορτίων.)

***Σύντομο ερώτημα* Η3.3** Στη Δυναμική Εικόνα Η3.9α, έστω ότι το q_1 είναι ένα αρνητικό φορτίο-πηγή και ότι το q_2 είναι το δοκιμαστικό φορτίο. **(i)** Αν το q_2 είναι αρχικά θετικό και αντικατασταθεί με ένα ισότιμο αρνητικό φορτίο, πώς θα μεταβληθεί το δυναμικό που οφείλεται στο q_1 στο σημείο όπου βρίσκεται το q_2; (α) Θα αυξηθεί. (β) Θα μειωθεί. (γ) Δεν θα αλλάξει. **(ii)** Όταν το q_2 αλλάξει από θετικό σε αρνητικό, πώς θα μεταβληθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων; Επιλέξτε ένα από τα προηγούμενα ενδεχόμενα.

Παράδειγμα Η3.3 Το ηλεκτρικό δυναμικό δύο σημειακών φορτίων

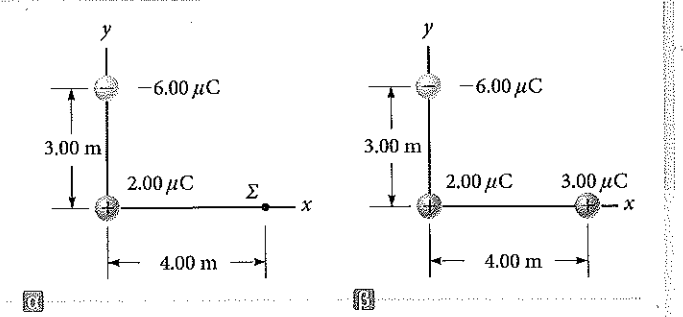
Όπως φαίνεται στην Εικόνα Η3.11α, υπάρχει ένα φορτίο $q_1 = 2.00\ \mu$C στην αρχή των αξόνων και ένα φορτίο $q_2 = -6.00\ \mu$C στο σημείο (0, 3.00) m.

(A) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό των φορτίων στο σημείο Σ, με συντεταγμένες (4.00, 0) m.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Καταρχήν παρατηρήστε ότι τα φορτία των 2.00 μC και −6.00 μC είναι τα φορτία-πηγές και δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο και δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου, μεταξύ άλλων και στο σημείο Σ.

Κατηγοριοποίηση Θα υπολογίσουμε το δυναμικό με μια εξίσωση που καταστρώσαμε σε αυτό το κεφάλαιο, οπότε θα εντάξουμε το παράδειγμα στα προβλήματα αντικατάστασης.



Εικόνα Η3.11 (Παράδειγμα Η3.3) (α) Το ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται στα δύο φορτία q_1 και q_2 στο σημείο Σ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών των επιμέρους φορτίων. (β) Φέρνουμε ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3.00\ \mu$C από το άπειρο στο σημείο Σ.

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.12 για το σύστημα με τα δύο φορτία-πηγές:

$$V_\Sigma = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

Η3.3 *συν.*

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$V_\Sigma = (8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.00 \times 10^{-6}\ \text{C}}{4.00\ \text{m}} + \frac{-6.00 \times 10^{-6}\ \text{C}}{5.00\ \text{m}}\right)$$

$$= -6.29 \times 10^3\ \text{V}$$

(B) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος που αποτελείται από τα προηγούμενα δύο φορτία και ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3.00\ \mu$C, καθώς το τελευταίο φορτίο κινείται από το άπειρο προς το σημείο Σ (Εικ. Η3.11β).

ΛΥΣΗ

Θεωρήστε ότι $U_i = 0$ στη διάταξη του συστήματος στην οποία το φορτίο q_3 βρίσκεται στο άπειρο. Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.2 για να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της διάταξης στην οποία το φορτίο βρίσκεται στο σημείο Σ:

$$U_f = q_3 V_\Sigma$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές για να υπολογίσετε το ΔU:

$$\Delta U = U_f - U_i = q_3 V_\Sigma - 0 = (3.00 \times 10^{-6}\ \text{C})(-6.29 \times 10^3\ \text{V})$$

$$= -1.89 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

Άρα, εφόσον η δυναμική ενέργεια του συστήματος έχει μειωθεί, για να απομακρυνθεί το φορτίο q_3 από το σημείο Σ και να επιστρέψει στο άπειρο θα πρέπει να παραγάγει θετικό έργο μια εξωτερική επίδραση.

ΚΙ ΑΝ...; Μια συμφοιτήτριά σας με την οποία λύνετε αυτό το πρόβλημα σας λέει: «Μισό λεπτό! Στο δεύτερο σκέλος αγνοήσαμε τη δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με το ζεύγος φορτίων q_1 και q_2!» Τι θα απαντούσατε;

Απάντηση Σύμφωνα με τη διατύπωση του προβλήματος, δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε αυτή τη δυναμική ενέργεια, επειδή στο δεύτερο σκέλος ζητείται η *μεταβολή* της δυναμικής ενέργειας του συστήματος καθώς το q_3 πλησιάζει από το άπειρο. Επειδή κατά τη διαδικασία αυτή, η διάταξη των φορτίων q_1 και q_2 δεν αλλάζει, δεν υπάρχει μεταβολή ΔU που να σχετίζεται με αυτά τα φορτία. Αν όμως το δεύτερο σκέλος ζητούσε τον υπολογισμό της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας στην περίπτωση που *και τα τρία* φορτία βρίσκονταν σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους και, στη συνέχεια, μετακινούνταν στις θέσεις που φαίνονται στην Εικόνα Η3.11β, τότε θα έπρεπε να υπολογίσουμε τη μεταβολή χρησιμοποιώντας την Εξίσωση Η3.14.

Η3.4 Υπολογισμός της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου από το ηλεκτρικό δυναμικό

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ και το ηλεκτρικό δυναμικό V συνδέονται μεταξύ τους όπως υποδεικνύει η Εξίσωση Η3.3, με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το ΔV αν γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$. Τώρα θα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου αν γνωρίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό σε μια συγκεκριμένη περιοχή.

Η Εξίσωση Η3.3 μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη διαφορά δυναμικού dV μεταξύ δύο σημείων που απέχουν μεταξύ τους ds ως εξής:

$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \textbf{(Η3.15)}$$

Αν το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο μία συνιστώσα E_x, τότε $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E_x\, dx$. Άρα, η Εξίσωση Η3.15 γίνεται $dV = -E_x\, dx$, ή

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad \textbf{(Η3.16)}$$

Δηλαδή η συνιστώσα x του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με το αρνητικό της παραγώγου του ηλεκτρικού δυναμικού ως προς x. Παρόμοιες σχέσεις μπορούμε να γράψουμε και για τις συνιστώσες y και z. Η Εξίσωση Η3.16 αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του γεγονότος ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής του ηλεκτρικού δυναμικού ως συνάρτηση της θέσης, όπως αναφέραμε στην Ενότητα Η3.1.

Στα πειράματα, είναι εύκολο να μετρήσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό και τη θέση χρησιμοποιώντας ένα βολτόμετρο (μια συσκευή μέτρησης της διαφοράς δυναμικού) και ένα μέτρο. Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μετρώντας το ηλεκτρικό δυναμικό σε διάφορες θέσεις του πεδίου και σχεδιάζοντας ένα γράφημα με τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Σύμφωνα με την Εξίσωση Η3.16, η κλίση του γραφήματος του V ως προς το x σε ένα συγκεκριμένο σημείο δίνει το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

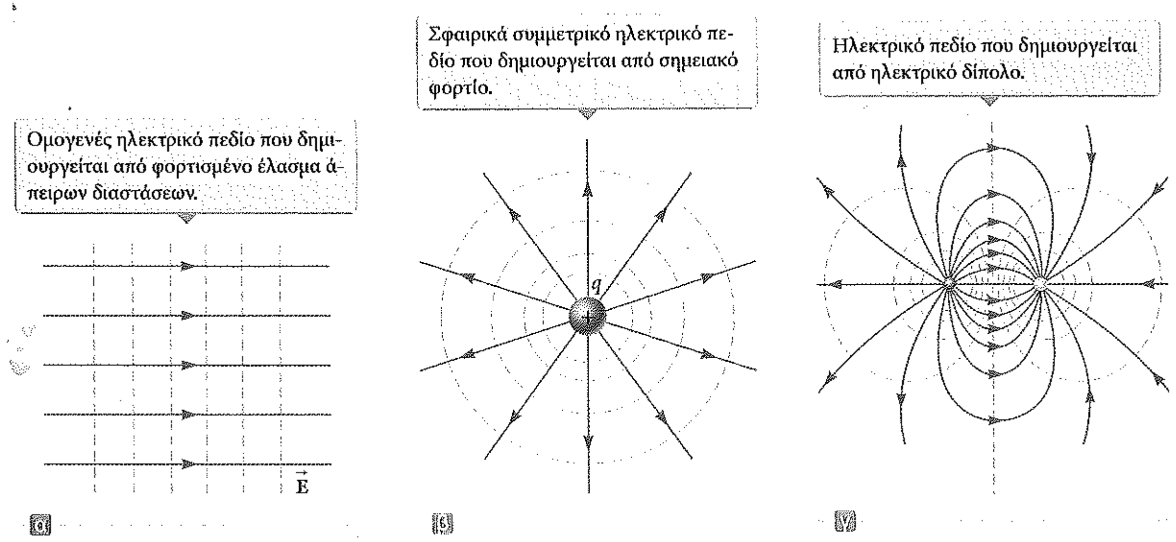
Όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο μετατοπίζεται κατά $d\vec{s}$ επάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια, τότε $dV = 0$, επειδή το δυναμικό είναι σταθερό επάνω σε μια τέτοια επιφάνεια. Από την Εξίσωση Η3.15, διαπιστώνουμε ότι $dV = -\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{s} = 0$· άρα, το $\vec{\mathbf{E}}$ πρέπει να είναι κάθετο στο διάνυσμα της μετατόπισης επάνω στην ισοδυναμική επιφάνεια. Αυτό δείχνει ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι πάντα κάθετες στις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που τις διαπερνούν.

Όπως αναφέραμε στο τέλος της Ενότητας Η3.2, οι ισοδυναμικές επιφάνειες ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου συνιστούν μια οικογένεια επιπέδων, τα οποία είναι κάθετα στις γραμμές του πεδίου. Στην Εικόνα Η3.12α φαίνονται μερικές χαρακτηριστικές ισοδυναμικές επιφάνειες για τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Αν η κατανομή φορτίου που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο έχει σφαιρική συμμετρία, τότε η χωρική πυκνότητα φορτίου εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση r, και το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό. Σε αυτή την περίπτωση, $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{s} = E_r\,dr$, οπότε μπορούμε να εκφράσουμε το dV με τη σχέση $dV = -E_r\,dr$. Άρα,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \qquad \textbf{(H3.17)}$$

Για παράδειγμα, το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου είναι $V = k_e q/r$. Επειδή το V εξαρτάται μόνο από το r, η συνάρτηση του δυναμικού χαρακτηρίζεται από σφαιρική συμμετρία. Αν εφαρμόσουμε την Εξίσωση Η3.17, θα βρούμε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το σημειακό φορτίο είναι ίσο με $E_r = k_e q/r^2$, κάτι που ήδη γνωρίζουμε. Παρατηρήστε ότι το δυναμικό μεταβάλλεται μόνο κατά την ακτινική διεύθυνση, και όχι σε οποιαδήποτε διεύθυνση κάθετη στο r. Έτσι, το V (όπως και το E_r) είναι συνάρτηση μόνο του r, κάτι που επίσης συνάδει με το ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στις γραμμές του πεδίου. Σε αυτή την περίπτωση, οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι μια οικογένεια σφαιρικών επιφανειών, οι οποίες είναι ομόκεντρες με τη σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου (Εικ. Η3.12β). Οι ισοδυναμικές επιφάνειες ενός ηλεκτρικού διπόλου είναι πιο πολύπλοκες και έχουν σχεδιαστεί στην Εικόνα Η3.12γ.



Εικόνα Η3.12 Οι ισοδυναμικές επιφάνειες (οι διακεκομμένες μπλε γραμμές είναι οι τομές αυτών των επιφανειών με το επίπεδο που ορίζει η σελίδα) και οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Σε κάθε περίπτωση, οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι *κάθετες* σε κάθε σημείο των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Γενικά, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι συνάρτηση και των τριών χωρικών συντεταγμένων. Αν η συνάρτηση V εκφράζεται με βάση τις καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι συνιστώσες E_x, E_y, και E_z του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτουν εύκολα από τις μερικές παραγώγους[2] της $V(x, y, z)$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \textbf{(H3.18)}$$

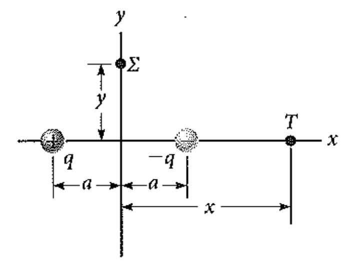
◀ **Εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου από το δυναμικό**

Σύντομο ερώτημα **Η3.4** Σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, το ηλεκτρικό δυναμικό έχει τιμή μηδέν σε κάθε σημείο του άξονα x. **(i)** Από αυτό το στοιχείο συμπεραίνετε ότι η οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτή την περιοχή (α) είναι μηδέν, (β) έχει τη θετική κατεύθυνση του άξονα x ή (γ) έχει την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x. **(ii)** Θεωρήστε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό έχει τιμή +2 V σε κάθε σημείο του άξονα x. Τι συμπεραίνετε τώρα σχετικά με την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου; Επιλέξτε από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Παράδειγμα Η3.4 Το ηλεκτρικό δυναμικό ενός διπόλου

Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο φορτία με ίση απόλυτη τιμή και με αντίθετο πρόσημο, τα οποία απέχουν $2a$ μεταξύ τους (Εικόνα Η3.13). Το δίπολο είναι διατεταγμένο κατά μήκος του άξονα x και το κέντρο του ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων.

(Α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Σ του άξονα y.



Εικόνα Η3.13 (Παράδειγμα Η3.4) Ένα ηλεκτρικό δίπολο στον άξονα x.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Συγκρίνετε την περίπτωση αυτή με εκείνη του δεύτερου σκέλους του Παραδείγματος Η1.5. Πρόκειται για ίδιες περιπτώσεις, αλλά εδώ θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό αντί του ηλεκτρικού πεδίου.

Κατηγοριοποίηση Επειδή το δίπολο αποτελείται μόνο από δύο φορτία-πηγές, θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό αθροίζοντας τα δυναμικά των επιμέρους φορτίων.

Ανάλυση Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.12 για να βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό των δύο φορτίων στο Σ:

$$V_\Sigma = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2+y^2}}\right) = 0$$

(Β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο T στον θετικό ημιάξονα x.

συνεχίζεται

[2]Με διανυσματική σημειογραφία, στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το $\vec{\mathbf{E}}$ συχνά γράφεται και στη μορφή

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

όπου το ∇ ονομάζεται *τελεστής κλίσης*.

Η3.4 συν.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.12 για να βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό των δύο φορτίων στο T:

$$V_T = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{-q}{x-a} + \frac{q}{x+a}\right) = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

(Γ) Υπολογίστε τα V και E_x σε ένα σημείο του άξονα x που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από το δίπολο.

ΛΥΣΗ

Για το σημείο T, σε μεγάλη απόσταση από το δίπολο $x >> a$, θεωρήστε αμελητέο το a^2 στον παρονομαστή της λύσης του σκέλους (Β) και γράψτε το V σε αυτό το όριο:

$$V_T = \lim_{x>>a}\left(-\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}\right) \approx -\frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x >> a)$$

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.16 και αυτό το αποτέλεσμα για να υπολογίσετε την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο του άξονα x, σε μεγάλη απόσταση από το δίπολο:

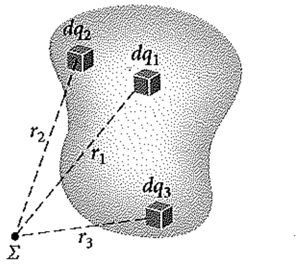
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{2k_e qa}{x^2}\right)$$

$$= 2k_e qa \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x >> a)$$

Ολοκλήρωση Το δυναμικό στο δεύτερο και τρίτο σκέλος της άσκησης είναι αρνητικό επειδή τα σημεία στον θετικό ημιάξονα x βρίσκονται πιο κοντά στο αρνητικό φορτίο παρά στο θετικό. Για τον ίδιο λόγο, η οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι αρνητική.

ΚΙ ΑΝ...; Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποιο σημείο $Σ$ του άξονα y. Στο πρώτο σκέλος, βρήκαμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό ήταν ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του y. Είναι δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο μηδενικό σε κάθε σημείο του άξονα y;

Απάντηση Όχι. Το γεγονός ότι το δυναμικό δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα y μας δείχνει απλώς ότι η κατακόρυφη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίση με μηδέν. Δείτε ξανά την Εικόνα Η1.13 του Παραδείγματος Η1.5. Εκεί αποδείξαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου που βρίσκεται στον άξονα y έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα. Στο τρέχον παράδειγμα δεν μπορέσαμε να υπολογίσουμε την οριζόντια συνιστώσα, επειδή δεν γνωρίζουμε τη σχέση που δίνει το δυναμικό στον άξονα y ως συνάρτηση της μεταβλητής x.



Εικόνα Η3.14 Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό μιας συνεχούς κατανομής φορτίου στο σημείο Σ, διαιρούμε την κατανομή φορτίου σε στοιχειώδη φορτία dq και αθροίζουμε τις συνεισφορές όλων των στοιχείων στο ηλεκτρικό δυναμικό. Εδώ φαίνονται τρία στοιχειώδη φορτία.

Η3.5 Ηλεκτρικό δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό μιας συνεχούς κατανομής φορτίου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικές μεθόδους. Η πρώτη είναι η εξής: Αν γνωρίζουμε την κατανομή φορτίου, τότε θεωρούμε το δυναμικό ενός στοιχειώδους φορτίου dq, το οποίο εκλαμβάνουμε ως σημειακό (Εικ. Η3.14). Από την Εξίσωση Η3.11, το ηλεκτρικό δυναμικό dV του στοιχειώδους φορτίου dq στο τυχαίο σημείο $Σ$ είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \tag{Η3.19}$$

όπου r είναι η απόσταση από το στοιχειώδες φορτίο ως το σημείο $Σ$. Για να βρούμε το συνολικό δυναμικό στο σημείο $Σ$, ολοκληρώνουμε την Εξίσωση Η3.19 έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε τις συνεισφορές όλων των στοιχείων της κατανομής φορτίου. Επειδή γενικά οι αποστάσεις των στοιχειωδών φορτίων από το $Σ$ διαφέρουν και το k_e είναι σταθερό, μπορούμε να εκφράσουμε το V με τη σχέση

Το ηλεκτρικό δυναμικό μιας συνεχούς κατανομής φορτίου ▶

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \tag{Η3.20}$$

Στην ουσία, αντικαταστήσαμε το άθροισμα της Εξίσωσης Η3.12 με ένα ολοκλήρωμα. Σε αυτή την παράσταση για το V, το ηλεκτρικό δυναμικό θεωρείται ίσο με το μηδέν όταν το σημείο $Σ$ βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από την κατανομή φορτίου.

Αν γνωρίζουμε ήδη το ηλεκτρικό πεδίο, για παράδειγμα από τον νόμο του Gauss, τότε θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο υπολογισμού του ηλεκτρικού δυναμικού. Αν η κατανομή φορτίου χαρακτηρίζεται από επαρκή βαθμό συμμετρίας, τότε πρώτα υπολογίζουμε το $\vec{\mathbf{E}}$ με τον νόμο του Gauss και μετά αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην Εξίσωση Η3.3 για να προσδιορίσουμε τη διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ δύο τυχαίων σημείων. Στη συνέχεια επιλέγουμε κάποιο κατάλληλο σημείο όπου θεωρούμε ότι το V είναι ίσο με το μηδέν.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Για τη λύση προβλημάτων υπολογισμού του ηλεκτρικού δυναμικού μιας κατανομής φορτίου, ενδείκνυται η παρακάτω διαδικασία.

1. Μοντελοποίηση. Μελετήστε προσεκτικά τα επιμέρους φορτία ή την κατανομή φορτίου του προβλήματος και προσπαθήστε να φανταστείτε τι είδους δυναμικό θα δημιουργούσαν. Λάβετε υπόψη τη συμμετρία (αν υπάρχει) στη διάταξη των φορτίων, προκειμένου να «οπτικοποιήσετε» το δυναμικό.

2. Κατηγοριοποίηση. Μελετάτε μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων ή μια συνεχή κατανομή φορτίου; Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση θα σας βοηθήσει να συνεχίσετε στο βήμα της *Ανάλυσης*.

3. Ανάλυση. Στα προβλήματα αυτού του τύπου, να θυμάστε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι *βαθμωτό μέγεθος*, οπότε δεν χρειάζεται να βρείτε συνιστώσες. Επομένως, όταν χρησιμοποιείτε την αρχή της υπέρθεσης για να υπολογίσετε το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποιο σημείο, θεωρήστε απλώς το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών των επιμέρους φορτίων. Δεν πρέπει, ωστόσο, να αγνοείτε τα πρόσημά τους.

Όπως και με τη δυναμική ενέργεια στη μηχανική, σημασία έχουν μόνο οι *μεταβολές* του ηλεκτρικού δυναμικού· έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα το σημείο μηδενικού δυναμικού. Όταν έχουμε σημειακά φορτία ή μια πεπερασμένη κατανομή φορτίου, συνήθως ορίζουμε $V = 0$ σε ένα σημείο που βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από τα φορτία. Αν όμως η κατανομή φορτίου εκτείνεται ως το άπειρο, τότε πρέπει να επιλέξουμε κάποιο άλλο κοντινό σημείο ως σημείο αναφοράς.

(α) *Αν μελετάτε μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων:* Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης, σύμφωνα με την οποία, όταν υπάρχουν πολλά σημειακά φορτία, το συνολικό δυναμικό σε ένα σημείο $Σ$ του χώρου ισούται με το *αλγεβρικό άθροισμα* των δυναμικών των επιμέρους φορτίων στο $Σ$ (Εξ. Η3.12). Στο Παράδειγμα Η3.4 δείξαμε αυτή τη διαδικασία.

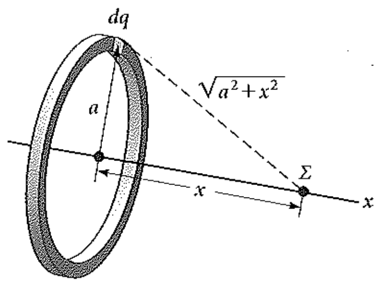
(β) *Αν μελετάτε μια συνεχή κατανομή φορτίου:* Αντικαταστήστε με ολοκληρώματα τα αθροίσματα υπολογισμού του συνολικού δυναμικού που δημιουργείται σε κάποιο σημείο $Σ$ από μεμονωμένα φορτία (Εξ. Η3.20). Η κατανομή φορτίου διαιρείται σε απειροστά στοιχειώδη φορτία dq που απέχουν r από το σημείο $Σ$. Κατόπιν, κάθε στοιχειώδες φορτίο εκλαμβάνεται ως σημειακό, οπότε το δυναμικό στο $Σ$ λόγω αυτού του στοιχειώδους φορτίου είναι ίσο με $dV = k_e\, dq/r$. Για να βρείτε το συνολικό δυναμικό στο $Σ$, πρέπει να ολοκληρώσετε στην κατανομή φορτίου. Σε πολλά προβλήματα, στην ολοκλήρωση μπορείτε να εκφράσετε τα dq και r συναρτήσει μίας μεταβλητής. Για να απλουστεύσετε την ολοκλήρωση, εξετάστε προσεκτικά τη γεωμετρία του προβλήματος. Στα Παραδείγματα Η3.5 έως Η3.7 παρουσιάζουμε τέτοιες διαδικασίες.

Εύρεση του δυναμικού από το ηλεκτρικό πεδίο: Μια άλλη μέθοδος για να υπολογίσετε το δυναμικό είναι να ξεκινήσετε από τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού (Εξίσωση Η3.3). Αν γνωρίζετε ή μπορείτε να υπολογίσετε εύκολα το $\vec{\mathbf{E}}$ (για παράδειγμα, με τον νόμο του Gauss), τότε μπορείτε να υπολογίσετε και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ποσότητας $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$.

4. Ολοκλήρωση. Βεβαιωθείτε ότι η σχέση που βρήκατε συμφωνεί με τη νοητική σας αναπαράσταση και ότι αντικατοπτρίζει την όποια συμμετρία είχατε παρατηρήσει αρχικά. Μεταβάλλετε νοητικά παραμέτρους, όπως την απόσταση του σημείου παρατήρησης από τα φορτία ή την ακτίνα τυχόν κυκλικών αντικειμένων, για να εξακριβώσετε αν το μαθηματικό αποτέλεσμα αλλάζει με εύλογο τρόπο.

Παράδειγμα Η3.5 Το ηλεκτρικό δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου

(A) Βρείτε τη σχέση που εκφράζει το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο Σ, το οποίο βρίσκεται στον κάθετο κεντρικό άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου με ακτίνα a και συνολικό φορτίο Q.



Εικόνα Η3.15 (Παράδειγμα Η3.5) Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας a βρίσκεται σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα x. Όλα τα στοιχεία dq του δακτυλίου ισαπέχουν από το σημείο Σ, το οποίο βρίσκεται επάνω στον άξονα x.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Μελετήστε την Εικόνα Η3.15, στην οποία ο προσανατολισμός του δακτυλίου είναι τέτοιος ώστε το επίπεδό του να είναι κάθετο στον άξονα x και το κέντρο του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Προσέξτε ότι, με βάση τη συμμετρία της περίπτωσης, όλα τα φορτία του δακτυλίου ισαπέχουν από το σημείο Σ.

Κατηγοριοποίηση Επειδή ο δακτύλιος αποτελείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου και όχι από ένα σύνολο μεμονωμένων φορτίων, σε αυτό το παράδειγμα πρέπει να καταφύγουμε στην ολοκλήρωση της Εξίσωσης Η3.20.

Ανάλυση Θεωρούμε ότι το σημείο Σ βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου (Εικόνα Η3.15).

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.20 για να εκφράσετε το V με γεωμετρικούς όρους:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Αφού παρατηρήσετε ότι τα a και x είναι σταθερές ποσότητες, βγάλτε τον όρο $\sqrt{a^2 + x^2}$ εκτός ολοκληρώματος και ολοκληρώστε επί του δακτυλίου:

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \textbf{(Η3.21)}$$

(B) Βρείτε μια σχέση για το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Σ.

ΛΥΣΗ

Παρατηρήσετε ότι, λόγω συμμετρίας, στον άξονα x το $\vec{E}$ έχει μόνον οριζόντια συνιστώσα. Έτσι, εφαρμόστε την Εξίσωση Η3.16 στην Η3.21:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx}(a^2 + x^2)^{-1/2}$$

$$= -k_e Q(-\tfrac{1}{2})(a^2 + x^2)^{-3/2}(2x)$$

$$E_x = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q \quad \textbf{(Η3.22)}$$

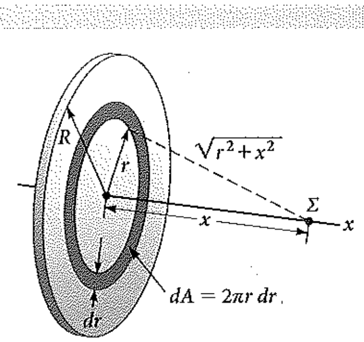
Ολοκλήρωση Η μόνη μεταβλητή στις σχέσεις για τα V και E_x είναι η x. Αυτό δεν μας εκπλήσσει, επειδή οι υπολογισμοί μας αφορούν μόνο σημεία του άξονα x, όπου τα y και z είναι και τα δύο ίσα με το μηδέν. Αυτό το αποτέλεσμα για το ηλεκτρικό πεδίο συμφωνεί με το αποτέλεσμα της άμεσης ολοκλήρωσης (δείτε το Παράδειγμα Η1.7).

Παράδειγμα Η3.6 Το ηλεκτρικό δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

(A) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο Σ επάνω στον κάθετο κεντρικό άξονα του δίσκου.

Εικόνα Η3.16 (Παράδειγμα Η3.6) Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας R βρίσκεται σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα x. Για να απλουστεύσουμε τον υπολογισμό του ηλεκτρικού δυναμικού σε οποιοδήποτε σημείο Σ επάνω στον άξονα x, διαιρούμε τον δίσκο σε πολλούς δακτυλίους ακτίνας r και πλάτους dr, με εμβαδόν $2\pi r\, dr$.



ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Αν θεωρήσουμε τον δίσκο ως ένα σύνολο ομόκεντρων δακτυλίων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος Η3.5 (το οποίο δίνει το δυναμικό που δημιουργεί δακτύλιος ακτίνας a) και να αθροίσουμε τις συνεισφορές όλων των δακτυλίων που απαρτίζουν τον δίσκο. Επειδή το σημείο Σ βρίσκεται επάνω στον κεντρικό άξονα του δίσκου, συνάγεται λόγω συμμετρίας ότι όλα τα σημεία κάθε δακτυλίου ισαπέχουν από το Σ.

Κατηγοριοποίηση Επειδή ο δίσκος είναι συνεχής, θα υπολογίσουμε το δυναμικό που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου και όχι μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων.

Ανάλυση Βρείτε το φορτίο dq σε έναν δακτύλιο ακτίνας r και πλάτους dr, όπως φαίνεται στην Εικόνα Η3.16:

$$dq = \sigma\, dA = \sigma(2\pi r\, dr) = 2\pi\sigma r\, dr$$

Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα στην Εξίσωση Η3.21 του Παραδείγματος Η3.5 (αντικαθιστώντας το a με το r και το Q με το dq) για να βρείτε το δυναμικό του δακτυλίου:

$$dV = \frac{k_e\, dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e 2\pi\sigma r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Για να υπολογίσετε το συνολικό δυναμικό στο Σ, ολοκληρώστε την παράσταση μεταξύ των οριακών τιμών $r = 0$ και $r = R$, παρατηρώντας ότι το x είναι σταθερά:

$$V = \pi k_e \sigma \int_0^R \frac{2r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e \sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r\, dr$$

Αυτό το ολοκλήρωμα έχει τη συνήθη μορφή $\int u^n\, du$, όπου $n = -\frac{1}{2}$ και $u = r^2 + x^2$, και η τιμή του είναι $u^{n+1}/(n+1)$. Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα:

$$V = 2\pi k_e \sigma[(R^2 + x^2)^{1/2} - x] \quad \textbf{(Η3.23)}$$

(B) Βρείτε την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο Σ στον κάθετο κεντρικό άξονα του δίσκου.

ΛΥΣΗ

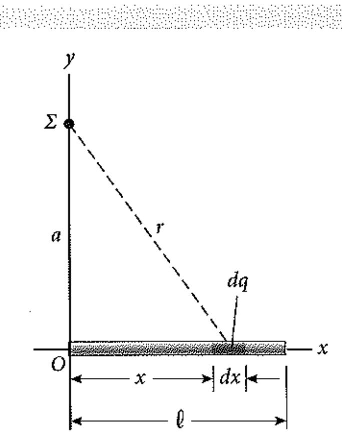
Όπως και στο Παράδειγμα Η3.5, χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η3.16 για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο του άξονα:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma\left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right] \quad \textbf{(Η3.24)}$$

Ολοκλήρωση Συγκρίνετε την Εξίσωση Η3.24 με το αποτέλεσμα του Παραδείγματος Η1.8. Ο υπολογισμός των V και $\vec{E}$ για ένα τυχαίο σημείο εκτός του άξονα x είναι δυσκολότερος λόγω της απουσίας συμμετρίας – δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την περίπτωση σε αυτό το βιβλίο.

Παράδειγμα Η3.7 Το ηλεκτρικό δυναμικό μιας πεπερασμένης φορτισμένης ευθείας

Μια ράβδος μήκους ℓ, η οποία βρίσκεται στον άξονα x, έχει συνολικό φορτίο Q και ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Σ, που βρίσκεται στον άξονα y σε απόσταση a από την αρχή των αξόνων (Εικ. Η3.17).



Εικόνα Η3.17 (Παράδειγμα Η3.7) Μια ομοιόμορφα φορτισμένη ευθεία μήκους ℓ στον άξονα x. Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό στο Σ, διαιρούμε τη φορτισμένη ευθεία σε στοιχειώδη τμήματα, καθένα από τα οποία έχει μήκος dx και φορτίο $dq = \lambda\, dx$.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Το δυναμικό στο σημείο Σ λόγω κάθε μεμονωμένου στοιχειώδους φορτίου της ράβδου είναι θετικό, επειδή κάθε στοιχειώδες τμήμα φέρει θετικό φορτίο. Παρατηρήστε ότι αν και δεν υπάρχει συμμετρία, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα λόγω της απλής γεωμετρίας του.

Κατηγοριοποίηση Επειδή η ράβδος είναι συνεχής, θα υπολογίσουμε το δυναμικό που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου και όχι μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων.

Ανάλυση Στην Εικόνα Η3.17, η ράβδος βρίσκεται στον άξονα x, dx είναι το μήκος ενός στοιχειώδους τμήματός της, και dq είναι το φορτίο του τμήματος αυτού. Επειδή η ράβδος φέρει φορτίο λ ανά μονάδα μήκους, το φορτίο dq στο στοιχειώδες τμήμα είναι $dq = \lambda\, dx$.

Βρείτε το δυναμικό το οποίο προκαλεί ένα μεμονωμένο στοιχειώδες τμήμα της ράβδου στο σημείο Σ:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Βρείτε το συνολικό δυναμικό στο Σ ολοκληρώνοντας αυτή την παράσταση μεταξύ των οριακών τιμών $x = 0$ και $x = \ell$:

$$V = \int_0^{\ell} k_e \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Αφού παρατηρήσετε ότι τα k_e και $\lambda = Q/\ell$ είναι σταθερές και μπορούν να βγουν εκτός του ολοκληρώματος, υπολογίστε την τιμή του με τη βοήθεια του Παραρτήματος Β:

$$V = k_e \lambda \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\Big|_0^{\ell}$$

Υπολογίστε το αποτέλεσμα μεταξύ των ορίων:

$$V = k_e \frac{Q}{\ell}\left[\ln\left(\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}\right) - \ln a\right] = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a}\right) \quad \textbf{(Η3.25)}$$

Ολοκλήρωση Αν $\ell << a$, τότε το δυναμικό στο Σ θα προσεγγίζει εκείνο ενός σημειακού φορτίου, επειδή το μήκος της ράβδου είναι πολύ μικρό σε σχέση με την απόσταση από τη ράβδο έως το Σ. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του φυσικού λογαρίθμου σε σειρά (Παράρτημα Β.5), μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι η Εξίσωση Η3.25 μετασχηματίζεται σε $V = k_e Q/a$.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα κάνατε στην περίπτωση που σας ζητούσαν να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Σ; Είναι ένας απλός υπολογισμός;

Απάντηση Ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου με χρήση της Εξίσωσης Η1.11 θα ήταν πολύπλοκος. Η έλλειψη συμμετρίας καθιστά την ολοκλήρωση στη φορτισμένη ευθεία μια πράξη διανυσματικής άθροισης ηλεκτρικών πεδίων στο σημείο Σ. Η Εξίσωση Η3.18 σας επιτρέπει να βρείτε το E_y αντικαθιστώντας τη μεταβλητή a με τη y στην Εξίσωση Η3.25 και διαφορίζοντας ως προς y. Η φορτισμένη ράβδος της Εικόνας Η3.17 βρίσκεται εξολοκλήρου δεξιά από το σημείο $x = 0$ και, εφόσον το φορτίο της ράβδου είναι θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ θα έχει οριζόντια συνιστώσα με φορά προς τα αριστερά. Ωστόσο, δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Εξίσωση Η3.18 για να βρείτε την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου, επειδή το δυναμικό λόγω της ράβδου υπολογίστηκε για μια συγκεκριμένη τιμή του x ($x = 0$) και όχι για μια γενική τιμή του x. Για να βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιώντας την Εξίσωση Η3.25, θα πρέπει να υπολογίσετε το δυναμικό συναρτήσει τόσο του x όσο και του y.

Η3.6 Ηλεκτρικό δυναμικό φορτισμένου αγωγού

Στην Ενότητα Η2.4, διαπιστώσαμε ότι όταν ένας συμπαγής αγωγός που βρίσκεται σε ισορροπία φέρει ένα συνολικό φορτίο, τότε αυτό βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού. Επιπλέον, το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνειά του, ενώ το πεδίο μέσα στον αγωγό είναι ίσο με μηδέν.

Τώρα θα εξετάσουμε μια άλλη ιδιότητα των φορτισμένων αγωγών, η οποία έχει σχέση με το ηλεκτρικό δυναμικό. Ας θεωρήσουμε δύο σημεία Ⓐ και Ⓑ στην επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού (Εικόνα Η3.18). Κατά μήκος μιας επιφανειακής διαδρομής που συνδέει τα σημεία αυτά, το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα της μετατόπισης $d\vec{s}$· άρα, $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = 0$. Από αυτό το αποτέλεσμα και από την Εξίσωση Η3.3, συμπεραίνουμε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των Ⓐ και Ⓑ είναι υποχρεωτικά ίση με το μηδέν:

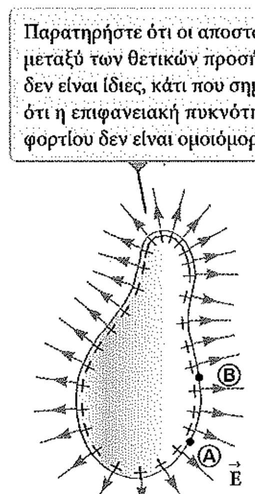
$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = 0$$

Αυτό το συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων στην επιφάνεια του αγωγού. Άρα, σε κάθε σημείο της επιφάνειας ενός φορτισμένου αγωγού, ο οποίος βρίσκεται σε ισορροπία, το V είναι σταθερό. Δηλαδή:

> Η επιφάνεια κάθε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι ισοδυναμική: κάθε σημείο της επιφάνειας ενός φορτισμένου αγωγού σε ισορροπία έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, επειδή στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν, το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο εσωτερικό του αγωγού είναι σταθερό και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια.

Λόγω της σταθερής τιμής του δυναμικού, δεν απαιτείται έργο κατά τη μετακίνηση ενός δοκιμαστικού φορτίου από το εσωτερικό του φορτισμένου αγωγού στην επιφάνειά του.

Ας θεωρήσουμε μια συμπαγή μεταλλική αγώγιμη σφαίρα με ακτίνα R και συνολικό θετικό φορτίο Q, όπως φαίνεται στην Εικόνα Η3.19α. Όπως είδαμε στο πρώτο σκέλος του Παραδείγματος Η2.3, το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τη σφαίρα είναι ίσο με $k_e Q/r^2$ και κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω. Επειδή το πεδίο έξω από μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου είναι πανομοιότυπο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου, είναι αναμενόμενο ότι και το δυναμικό θα είναι αντίστοιχο του δυναμικού ενός σημειακού φορτίου, $k_e Q/r$. Στην επιφάνεια της αγώγιμης σφαίρας της Εικόνας Η3.19α, το δυναμικό θα είναι $k_e Q/R$. Επειδή ολόκληρη η σφαίρα πρέπει να έχει το ίδιο δυναμικό, έπεται ότι το δυναμικό σε κάθε σημείο μέσα στη σφαίρα θα είναι επίσης $k_e Q/R$. Στην Εικόνα Η3.19β φαίνεται το γράφημα του ηλεκτρικού δυναμικού συναρτήσει του r, ενώ στην Εικόνα Η3.19γ φαίνεται η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου με το r.

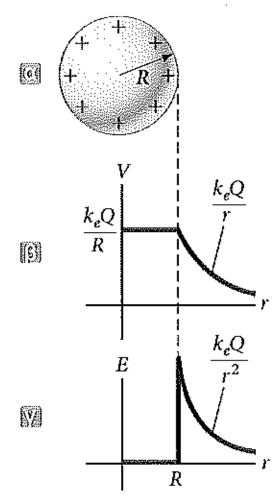


Εικόνα Η3.18 Ένας αγωγός τυχαίου σχήματος με θετικό φορτίο. Όταν ο αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία, τότε όλο το φορτίο είναι στην επιφάνεια, $\vec{\mathbf{E}} = 0$ μέσα στον αγωγό, και η κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{E}}$ ακριβώς έξω από τον αγωγό είναι κάθετη στην επιφάνεια. Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό στο εσωτερικό του αγωγού και ίσο με το δυναμικό στην επιφάνεια.

Αποφυγή παγίδων Η3.5

Το δυναμικό μπορεί να μην είναι μηδέν

Στην Εικόνα Η3.18, το ηλεκτρικό δυναμικό μέσα στον αγωγό δεν είναι υποχρεωτικά ίσο με μηδέν, παρά το γεγονός ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. Από την Εξίσωση Η3.15 προκύπτει ότι, αν το πεδίο είναι μηδέν, το δυναμικό από ένα σημείο στο εσωτερικό του αγωγού σε ένα άλλο παραμένει *αμετάβλητο*. Άρα, το δυναμικό σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του αγωγού, συμπεριλαμβανομένης της επιφάνειας, έχει την ίδια τιμή· η τιμή αυτή μπορεί να είναι μηδενική ή μη μηδενική, κάτι που εξαρτάται από το σημείο στο οποίο θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι μηδέν.

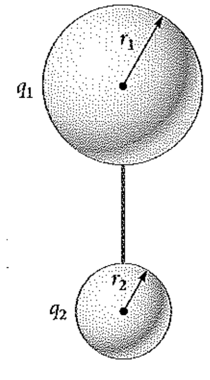


Εικόνα Η3.19 (α) Το πλεονάζον φορτίο μιας αγώγιμης σφαίρας με ακτίνα R είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα στην επιφάνειά της. (β) Το ηλεκτρικό δυναμικό ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας. (γ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας.

Όταν ένας σφαιρικός αγωγός φορτίζεται με κάποιο φορτίο, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του θα είναι ομοιόμορφη (Εικόνα Η3.19α). Όμως, αν ο αγωγός δεν είναι σφαιρικός, όπως στην Εικόνα Η3.18, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου έχει μεγάλη τιμή στα σημεία με μικρή ακτίνα καμπυλότητας (όπως αναφέραμε στην Ενότητα Η2.4) και μικρή τιμή στα σημεία με μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από τον αγωγό είναι ανάλογο της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μεγάλη τιμή κοντά σε κυρτά σημεία με μικρή ακτίνα καμπυλότητας και φτάνει σε πολύ μεγάλες τιμές σε αιχμηρά σημεία (ακίδες). Στο Παράδειγμα Η3.8 θα διερευνήσουμε μαθηματικά τη σχέση μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και της ακτίνας καμπυλότητας.

Παράδειγμα Η3.8 Δύο συνδεδεμένες φορτισμένες σφαίρες

Δύο σφαιρικοί αγωγοί με ακτίνες r_1 και r_2 απέχουν μεταξύ τους απόσταση η οποία είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα κάθε σφαίρας. Οι σφαίρες συνδέονται με ένα αγώγιμο σύρμα (Εικόνα Η3.20). Τα φορτία των σφαιρών, οι οποίες βρίσκονται σε ισορροπία, είναι q_1 και q_2, αντίστοιχα, και είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα. Βρείτε τον λόγο των μέτρων των ηλεκτρικών πεδίων στην επιφάνεια της κάθε σφαίρας.



Εικόνα Η3.20 (Παράδειγμα Η3.8) Δύο φορτισμένοι σφαιρικοί αγωγοί που συνδέονται με ένα αγώγιμο σύρμα. Οι σφαίρες έχουν το *ίδιο* ηλεκτρικό δυναμικό V.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι οι σφαίρες είναι πολύ μακρύτερα η μία από την άλλη απ' ό,τι δείχνει η Εικόνα Η3.20. Ακριβώς επειδή βρίσκονται σε τόσο μεγάλη απόσταση, το πεδίο της μίας δεν επηρεάζει την κατανομή του φορτίου της άλλης. Το αγώγιμο σύρμα που τις συνδέει εξασφαλίζει ότι και οι δύο σφαίρες έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό.

Κατηγοριοποίηση Επειδή οι σφαίρες είναι σε τόσο μεγάλη απόσταση, θα μοντελοποιήσουμε την κατανομή φορτίου καθεμιάς τους ως σφαιρικά συμμετρική και θα μοντελοποιήσουμε το πεδίο και το δυναμικό έξω από τις σφαίρες με το πεδίο και το δυναμικό σημειακών φορτίων.

Ανάλυση Εξισώστε τα ηλεκτρικά δυναμικά στις επιφάνειες των σφαιρών:

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

Λύστε ως προς τον λόγο των φορτίων των σφαιρών:

$$(1) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Γράψτε τις παραστάσεις που εκφράζουν τα μέτρα των ηλεκτρικών πεδίων στις επιφάνειες των σφαιρών.

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} \quad \text{και} \quad E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2}$$

Υπολογίστε τον λόγο των δύο πεδίων:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Αντικαταστήστε τον λόγο των φορτίων από την Εξίσωση (1):

$$(2) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

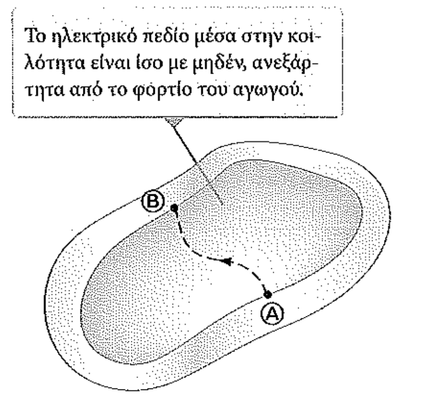
Ολοκλήρωση Αν και τα ηλεκτρικά δυναμικά στις επιφάνειες και των δύο σφαιρών είναι ίδια, το πεδίο είναι ισχυρότερο κοντά στη μικρότερη σφαίρα. Αν $r_2 \to 0$, τότε $E_2 \to \infty$, κάτι που επιβεβαιώνει το προηγούμενο συμπέρασμα ότι το ηλεκτρικό πεδίο παίρνει πολύ μεγάλη τιμή σε σημεία πολύ μικρής ακτίνας καμπυλότητας (ακίδες).

Κοιλότητα στο εσωτερικό ενός αγωγού

Έστω ότι ένας αγωγός τυχαίου σχήματος περιέχει μια κοιλότητα, όπως φαίνεται στην Εικόνα Η3.21. Ας υποθέσουμε ότι μέσα στην κοιλότητα δεν υπάρχουν φορτία. Σε αυτή την περίπτωση, όπως άλλωστε αναφέραμε στην Ενότητα Η2.4, το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα θα πρέπει να είναι ίσο με *μηδέν*, ανεξάρτητα της κατανομής φορτίου στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού. Επιπλέον, ακόμα και αν έξω από τον αγωγό υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, το πεδίο μέσα στην κοιλότητα είναι πάλι μηδέν.

Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού, θυμηθείτε ότι κάθε σημείο του αγωγού έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό· έτσι, οποιαδήποτε δύο σημεία Ⓐ και Ⓑ στην επιφάνεια της κοιλότητας πρέπει να έχουν το ίδιο δυναμικό. Τώρα υποθέστε ότι μέσα στην κοιλότητα υπάρχει ένα πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ και υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού $V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ}$ όπως ορίζει η Εξίσωση Η3.3:

$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$



Εικόνα Η3.21 Ένας κοίλος αγωγός, ο οποίος βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Επειδή $V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = 0$, το ολοκλήρωμα της ποσότητας $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ θα είναι ίσο με μηδέν για κάθε διαδρομή μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους σημείων Ⓐ και Ⓑ στον αγωγό. Για να ισχύει αυτό για *κάθε* διαδρομή, αναγκαία συνθήκη είναι το $\vec{\mathbf{E}}$ να είναι ίσο με μηδέν *παντού* στην κοιλότητα. Έτσι, σε μια κοιλότητα η οποία περιβάλλεται από αγώγιμα τοιχώματα δεν υπάρχει πεδίο, υπό την προϋπόθεση ότι μέσα σε αυτήν δεν υπάρχει φορτίο.

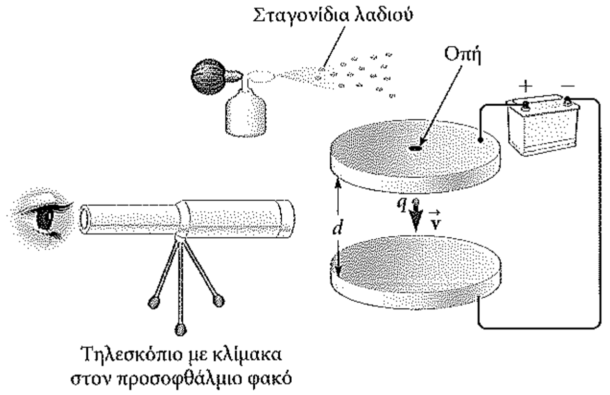
Στεμματόμορφη εκκένωση

Συχνά, κοντά σε αγωγούς, όπως ένα ηλεκτρικό καλώδιο υψηλής τάσης, παρατηρείται ένα φαινόμενο το οποίο είναι γνωστό ως **στεμματόμορφη εκκένωση** ή εκκένωση θυσάνου. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή κοντά στον αγωγό είναι αρκετά ισχυρό, τα ηλεκτρόνια που προκύπτουν από τον τυχαίο ιοντισμό μορίων του αέρα κοντά στον αγωγό απομακρύνονται επιταχυνόμενα από τα μόρια από τα οποία προήλθαν. Αυτά τα ταχύτατα κινούμενα ηλεκτρόνια μπορούν να ιονίσουν και άλλα μόρια κοντά στον αγωγό, με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν κι άλλα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η λάμψη που παρατηρείται (η στεμματόμορφη εκκένωση) οφείλεται στην επανένωση αυτών των ελεύθερων ηλεκτρονίων με τα ιοντισμένα μόρια του αέρα. Αν ο αγωγός έχει ακανόνιστο σχήμα, τότε το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να πάρει πολύ υψηλές τιμές κοντά σε αιχμηρά σημεία ή στις ακμές του αγωγού· κατά συνέπεια, σε τέτοια σημεία υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να γίνει ιοντισμός και στεμματόμορφη εκκένωση.

Η στεμματόμορφη εκκένωση χρησιμεύει στη βιομηχανία μετάδοσης ηλεκτρικής ενέργειας για τον εντοπισμό χαλασμένων ή ελαττωματικών εξαρτημάτων. Για παράδειγμα, στεμματόμορφη εκκένωση είναι πιθανό να συμβεί στα αιχμηρά άκρα ενός κατεστραμμένου μονωτή σε έναν πύργο μεταφοράς ενέργειας. Επίσης, μπορεί να συμβεί στο αιχμηρό άκρο της πλέξης ενός κομμένου αγωγού. Η παρατήρηση αυτών των εκκενώσεων είναι δύσκολη, επειδή η ορατή ακτινοβολία που εκπέμπεται είναι ασθενής και το μεγαλύτερο μέρος της ανήκει στο υπεριώδες φάσμα. (Στην Ενότητα Η12.7 θα μελετήσουμε την υπεριώδη ακτινοβολία και άλλες περιοχές του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.) Οι συμβατικές κάμερες υπεριώδους ακτινοβολίας δεν είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές, επειδή η υπεριώδης ηλιακή ακτινοβολία υπερισχύει της ακτινοβολίας από τη στεμματόμορφη εκκένωση. Οι συσκευές διπλού φάσματος, που αναπτύχθηκαν πρόσφατα, συνδυάζοντας μια υπεριώδη κάμερα στενής ζώνης και μια κάμερα ορατού φωτός ανιχνεύουν τη στεμματόμορφη εκκένωση στο φως της ημέρας, στο ελαττωματικό σημείο του πύργου ή του καλωδίου μεταφοράς ενέργειας. Το υπεριώδες τμήμα της κάμερας είναι σχεδιασμένο για λειτουργία σε ένα εύρος μηκών κύματος στο οποίο η ηλιακή ακτινοβολία είναι πολύ ασθενής.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η3.22

Σχηματικό διάγραμμα της πειραματικής διάταξης των σταγονιδίων λαδιού του Millikan.



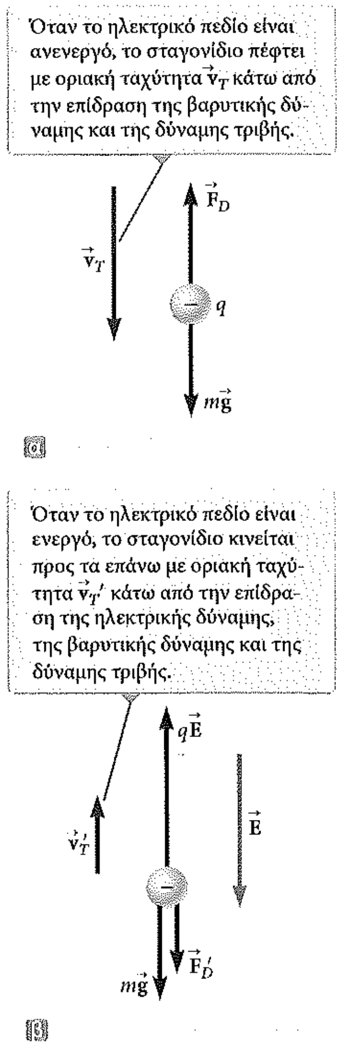
Η3.7 Το πείραμα των σταγονιδίων λαδιού του Millikan

Από το 1909 έως το 1913, ο Robert Millikan πραγματοποίησε μια σειρά από ευφυή πειράματα με τα οποία μέτρησε το e, την τιμή του στοιχειώδους φορτίου του ηλεκτρονίου, και απέδειξε ότι το φορτίο αυτό είναι κβαντισμένο. Η πειραματική του διάταξη, ένα διάγραμμα της οποίας φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Η3.22, περιλαμβάνει δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες. Μια μικρή οπή στην άνω πλάκα επιτρέπει τη διέλευση σταγονιδίων λαδιού, τα οποία προέρχονται από έναν ψεκαστήρα. Ο Millikan χρησιμοποίησε ακτίνες Χ για να ιονίσει τον αέρα του θαλάμου. Τα ηλεκτρόνια που απελευθερώνουν οι ακτίνες Χ προσκολλώνται στα σταγονίδια λαδιού και τα φορτίζουν αρνητικά. Τα σταγονίδια του λαδιού φωτίζονται με μια οριζόντια δέσμη φωτός και παρατηρούνται μέσω ενός τηλεσκοπίου, του οποίου ο μεγάλος άξονας είναι κάθετος στη δέσμη. Με αυτόν τον τρόπο παρακολούθησης, τα σταγονίδια φαίνονται σαν λαμπερά αστέρια σε σκοτεινό φόντο, κάτι που επιτρέπει τον υπολογισμό της ταχύτητας με την οποία πέφτει κάθε σταγονίδιο.

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε την πτώση μίας σταγόνας με μάζα m και αρνητικό φορτίο q. Αν ανάμεσα στις πλάκες δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, τότε οι δύο δυνάμεις που δέχεται το φορτίο είναι η βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$ με κατεύθυνση προς τα κάτω[3] και η δύναμη αντίστασης του αέρα $\vec{F}_D$ με κατεύθυνση προς τα επάνω (Εικόνα Η3.23α). Η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας της σταγόνας (δείτε την Ενότητα Μ6.4 της Μηχανικής). Όταν η σταγόνα φτάσει στην οριακή της ταχύτητα v_T, τότε θα υπάρχει ισορροπία των δύο δυνάμεων ($mg = F_D$).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια μπαταρία που είναι συνδεδεμένη στις πλάκες δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσά τους, τέτοιο ώστε η άνω πλάκα να έχει υψηλότερο ηλεκτρικό δυναμικό. Σε αυτή την περίπτωση, ασκείται και μια τρίτη δύναμη $q\vec{E}$ στη φορτισμένη σταγόνα. Επειδή το q είναι αρνητικό και το $\vec{E}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, η ηλεκτρική δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα επάνω, όπως φαίνεται στην Εικόνα Η3.23β. Αν αυτή η ανοδική δύναμη είναι αρκετά ισχυρή, η σταγόνα θα αρχίσει να κινείται προς τα επάνω και η δύναμη τριβής $\vec{F}'_D$ να ενεργεί προς τα κάτω. Όταν η ανοδική ηλεκτρική δύναμη $q\vec{E}$ γίνει ίση με το άθροισμα της βαρυτικής δύναμης και της καθοδικής δύναμης τριβής $\vec{F}'_D$, τότε η σταγόνα θα έχει φτάσει σε μια νέα οριακή ταχύτητα v'_T με κατεύθυνση προς τα επάνω.

Όταν το πεδίο είναι ενεργό, κάθε σταγόνα κινείται αργά προς τα επάνω, συνήθως με ταχύτητες της τάξης των εκατοστών ενός cm/s. Η ταχύτητα πτώσης χωρίς πεδίο είναι συγκρίσιμη. Επομένως, αν απλώς ενεργοποιούμε και απενεργοποιούμε το ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να παρακολουθούμε κάθε σταγονίδιο να υψώνεται και να πέφτει επί ώρες.



Εικόνα Η3.23 Οι δυνάμεις που ασκούνται στο αρνητικά φορτισμένο σταγονίδιο λαδιού στο πείραμα του Millikan.

[3]Στη σταγόνα λαδιού ασκείται και μια δύναμη άνωσης λόγω του περιβάλλοντος αέρα. Μπορούμε να λάβουμε υπόψη τη δράση αυτής της δύναμης διορθώνοντας τη βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$ που δέχεται η σταγόνα, οπότε δεν θα τη συμπεριλάβουμε στην ανάλυσή μας.

Μετά από τη λήψη μετρήσεων με ακρίβεια της τάξης του 1% για χιλιάδες σταγονίδια, ο Millikan και οι συνεργάτες του ανακάλυψαν ότι όλα τα σταγονίδια έφεραν φορτίο ίσο με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του στοιχειώδους φορτίου e:

$$q = ne \quad n = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

όπου $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. Το πείραμα του Millikan αποδεικνύει πέραν αμφιβολίας ότι το φορτίο είναι κβαντισμένο. Για την εργασία του αυτή, το 1923 απονεμήθηκε στον Millikan το βραβείο Νόμπελ Φυσικής.

Η3.8 Εφαρμογές της ηλεκτροστατικής

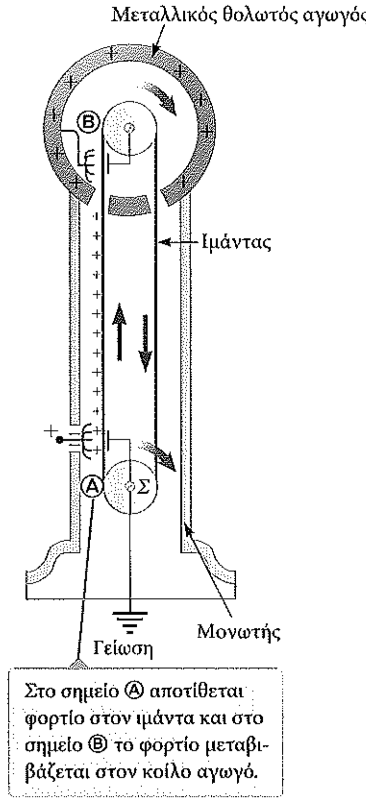
Οι αρχές του στατικού ηλεκτρισμού βρίσκουν εφαρμογή σε συσκευές όπως είναι τα αλεξικέραυνα και οι ηλεκτροστατικοί διαχωριστές, αλλά και σε διεργασίες όπως η ξηρογραφία και η βαφή των αυτοκινήτων. Στις επιστημονικές συσκευές που βασίζονται στις αρχές του ηλεκτροστατικού ηλεκτρισμού ανήκουν μεταξύ άλλων οι ηλεκτροστατικές γεννήτριες, το μικροσκόπιο πεδίου ιόντων, και οι πυραυλοκινητήρες ιόντων. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αναλυτικά δύο από αυτές τις συσκευές.

Η ηλεκτροστατική γεννήτρια Van de Graaff

Πειραματικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι, όταν ένας φορτισμένος αγωγός έρχεται σε επαφή με το εσωτερικό ενός άλλου, κοίλου αγωγού, τότε ολόκληρο το φορτίο του φορτισμένου αγωγού μεταφέρεται στον κοίλο αγωγό. Θεωρητικά, με επανάληψη της διαδικασίας αυτής, το φορτίο του κοίλου αγωγού και το ηλεκτρικό δυναμικό του μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα.

Το 1929, ο Robert J. Van de Graaff (1901–1967) βασίστηκε σε αυτή την αρχή για να σχεδιάσει και να κατασκευάσει μια ηλεκτροστατική γεννήτρια, η σχηματική αναπαράσταση της οποίας δίνεται στην Εικόνα Η3.24. Κάποτε, αυτός ο τύπος γεννήτριας χρησιμοποιούνταν εκτενώς στις έρευνες της πυρηνικής φυσικής. Ένα ηλεκτρόδιο υψηλής τάσης τροφοδοτείται συνεχώς με φορτίο μέσω ενός κινούμενου ιμάντα από μονωτικό υλικό. Το ηλεκτρόδιο υψηλής τάσης είναι ένας κοίλος μεταλλικός θολωτός αγωγός, ο οποίος είναι τοποθετημένος επάνω σε μια μονωτική στήλη. Ο ιμάντας φορτίζεται στο σημείο Ⓐ μέσω στεμματόμορφης εκκένωσης μεταξύ μιας σειράς μεταλλικών βελονών και ενός γειωμένου πλέγματος. Οι βελόνες διατηρούνται σε ένα θετικό ηλεκτρικό δυναμικό της τάξης των 10^4 V. Το θετικό φορτίο του κινούμενου ιμάντα μεταφέρεται στον αγωγό μέσω μιας δεύτερης σειράς βελονών, στο σημείο Ⓑ. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του θολωτού αγωγού είναι αμελητέο, το θετικό φορτίο του ιμάντα μεταφέρεται εύκολα στον αγωγό, ανεξάρτητα από το δυναμικό του τελευταίου. Στην πράξη, το ηλεκτρικό δυναμικό μπορεί να αυξάνεται μόνο μέχρι να αρχίσουν να γίνονται ηλεκτρικές εκκενώσεις στον αέρα. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο κατάρρευσης[4] στον περιβάλλοντα αέρα είναι περίπου 3×10^6 V/m, το δυναμικό μιας σφαίρας με ακτίνα 1.00 m μπορεί να φτάσει το πολύ μέχρι τα 3×10^6 V. Για να αυξήσουμε περαιτέρω το δυναμικό, πρέπει να αυξήσουμε την ακτίνα του θολωτού αγωγού και να τοποθετήσουμε ολόκληρο το σύστημα σε ένα δοχείο με αέριο υπό υψηλή πίεση.

Οι γεννήτριες Van de Graaff έχουν τη δυνατότητα να παράγουν διαφορές δυναμικού μέχρι και 20 εκατομμύρια volt. Πρωτόνια, τα οποία επιταχύνονται από τόσο μεγάλες διαφορές δυναμικού, προσλαμβάνουν επαρκή ενέργεια ώστε να έχουν τη δυνατότητα να ξεκινήσουν πυρηνικές αντιδράσεις στους διάφορους πυρήνες στους οποίους κατευθύνονται. Τέτοιες γεννήτριες μικρότερου μεγέθους χρησιμοποιούνται συχνά σε πανεπιστημιακά εργαστήρια και σε μουσεία. Αν ένας άνθρωπος ο οποίος είναι μονωμένος αγγίξει τη σφαίρα μιας γεννήτριας Van de Graaff, το σώμα του μπορεί να φτάσει σε υψηλό ηλεκτρικό δυναμικό. Τα μαλλιά του θα αποκτήσουν θετικό



Εικόνα Η3.24 Σχηματικό διάγραμμα μιας γεννήτριας Van de Graaff. Στον μεταλλικό θόλο, που βρίσκεται στην κορυφή, μεταφέρεται φορτίο με τη βοήθεια ενός κινούμενου ιμάντα.

[4]Σ.τ.Ε.: Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου κατά την οποία παρατηρείται απότομη αύξηση της αγωγιμότητας του αέρα.

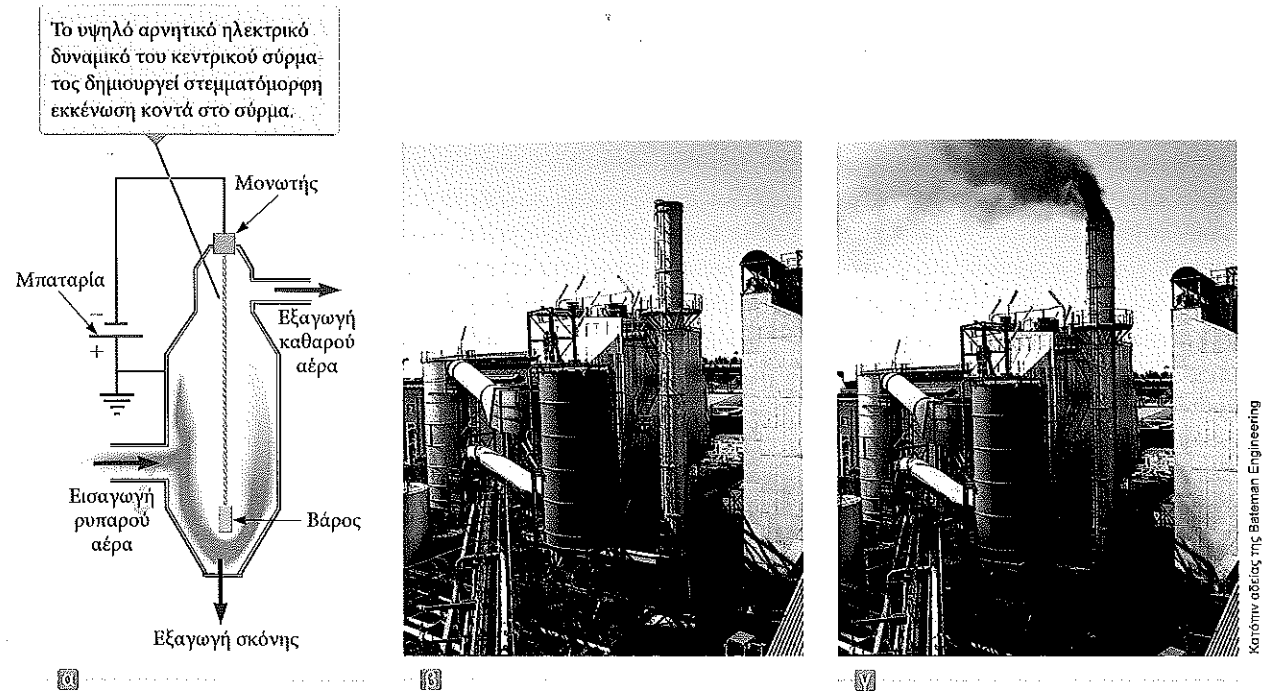
συνολικό φορτίο και κάθε τρίχα του θα απωθείται από όλες τις υπόλοιπες, όπως φαίνεται και στην εισαγωγική φωτογραφία του Κεφαλαίου Η1.

Ο ηλεκτροστατικός διαχωριστής

Ο *ηλεκτροστατικός διαχωριστής* αποτελεί μια σημαντική εφαρμογή της ηλεκτρικής εκκένωσης στα αέρια. Η συσκευή αυτή αφαιρεί τα σωματίδια ύλης από τα καυσαέρια, με αποτέλεσμα να μειώνει τη ρύπανση του ατμοσφαιρικού αέρα. Οι διαχωριστές είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι σε εργοστάσια παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας που βασίζονται στην καύση λιθάνθρακα, καθώς και σε βιομηχανικές διαδικασίες οι οποίες παράγουν μεγάλες ποσότητες καπνού. Τα υπάρχοντα συστήματα έχουν τη δυνατότητα να αφαιρούν περισσότερο από το 99% της τέφρας από τον καπνό.

Στην Εικόνα Η3.25α φαίνεται το σχηματικό διάγραμμα ενός ηλεκτροστατικού διαχωριστή. Μεταξύ ενός σύρματος, που διατρέχει το κέντρο ενός αεραγωγού, και των γειωμένων τοιχωμάτων του αεραγωγού, εφαρμόζεται υψηλή διαφορά δυναμικού (συνήθως από 40 έως 100 kV). Το σύρμα διατηρείται σε αρνητικό ηλεκτρικό δυναμικό σε σχέση με τα τοιχώματα, επομένως το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς το σύρμα. Οι τιμές του πεδίου κοντά στο σύρμα είναι τόσο υψηλές που προκαλούν στεμματόμορφη εκκένωση γύρω από το σύρμα· στον αέρα κοντά στο σύρμα δημιουργούνται θετικά ιόντα, ηλεκτρόνια, και αρνητικά ιόντα όπως τα ιόντα O_2^-. Ο αέρας που πρέπει να καθαριστεί εισέρχεται στον αεραγωγό και κινείται προς το σύρμα. Καθώς τα ηλεκτρόνια και τα αρνητικά ιόντα που δημιουργούνται από την εκκένωση επιταχύνονται εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου προς το τοίχωμα του αγωγού, συγκρούονται και προσκολλώνται στα σωματίδια σκόνης του αέρα, και τους προσδίδουν φορτίο. Επειδή τα περισσότερα από τα φορτισμένα σωματίδια σκόνης είναι αρνητικά φορτισμένα, έλκονται και αυτά λόγω του ηλεκτρικού πεδίου προς τα τοιχώματα του αεραγωγού. Με την περιοδική δόνηση του αεραγωγού, τα σωματίδια αποκολλώνται και συλλέγονται στον πυθμένα του.

Εκτός από τη μείωση της συγκέντρωσης σωματιδίων στον ατμοσφαιρικό αέρα (συγκρίνετε τις Εικόνες Η3.25β και γ), ο ηλεκτροστατικός διαχωριστής συμβάλλει και στην ανάκτηση πολύτιμων υλικών με μορφή οξειδίων των μετάλλων.



Εικόνα Η3.25 (α) Σχηματικό διάγραμμα ενός ηλεκτροστατικού διαχωριστή. Συγκρίνετε τη ρύπανση του αέρα όταν ο ηλεκτροστατικός διαχωριστής (β) είναι σε λειτουργία και (γ) είναι ανενεργός.

Σύνοψη

Ορισμοί

Η **διαφορά δυναμικού** ΔV μεταξύ δύο σημείων Ⓐ και Ⓑ ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathbf{E}}$ ορίζεται ως εξής

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \text{(Η3.3)}$$

όπου το ΔU δίνεται από την Εξίσωση Η3.1 που ακολουθεί. Το **ηλεκτρικό δυναμικό** $V = U/q_0$ είναι βαθμωτό μέγεθος και μετριέται σε joule ανά coulomb, όπου $1\ \text{J/C} \equiv 1\ \text{V}$.

Ισοδυναμική επιφάνεια ονομάζεται η επιφάνεια στην οποία όλα τα σημεία έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου.

Έννοιες και αρχές

Όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 μετακινείται από το σημείο Ⓐ στο σημείο Ⓑ ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathbf{E}}$, τότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου είναι ίση με

$$\Delta U = -q_0 \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \text{(Η3.1)}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Ⓐ και Ⓑ που απέχουν μεταξύ τους d και βρίσκονται σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$, ισούται με

$$\Delta V = -E \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} ds = -Ed \qquad \text{(Η3.6)}$$

όπου $\vec{\mathbf{s}}$ είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στο $\vec{\mathbf{E}}$ με φορά από το Ⓐ προς το Ⓑ.

Αν ορίσουμε ότι $V = 0$ στο $r = \infty$, τότε το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου σε τυχαία απόσταση r είναι

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad \text{(Η3.11)}$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό μιας ομάδας σημειακών φορτίων υπολογίζεται με άθροιση των δυναμικών των επιμέρους φορτίων.

Η δυναμική ενέργεια ενός ζεύγους σημειακών φορτίων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r_{12} είναι

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad \text{(Η3.13)}$$

Για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια μιας κατανομής σημειακών φορτίων, αθροίζουμε όρους σαν αυτόν της Εξίσωσης Η3.13 για όλα τα ζεύγη σωματιδίων.

Αν το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται ως συνάρτηση των συντεταγμένων x, y, και z, τότε μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου λαμβάνοντας την αρνητική παράγωγο του ηλεκτρικού δυναμικού ως προς τις συντεταγμένες. Για παράδειγμα, η οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad \text{(Η3.16)}$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό μιας συνεχούς κατανομής φορτίου είναι

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad \text{(Η3.20)}$$

Κάθε σημείο της επιφάνειας ενός φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Το δυναμικό είναι σταθερό παντού στο εσωτερικό του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια.