ΔΙΑΛΕΞΗ 7

25/11/2020

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

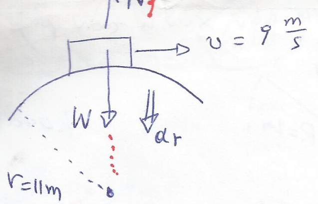
SERWAY

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

6.14 OK, DONE

$W = 600N$



α) φαινόμενο βάρος =;

β) υ =; αν η γυναίκα αισθάνεται ότι δεν έχει βάρος;

α) $$\boxed{mg - N_1 = \frac{m\upsilon^2}{r}} \quad (1) \Rightarrow N_1 = mg - \frac{m\upsilon^2}{r}$$

$$\Rightarrow N_1 = 600(N) - \left(\frac{600}{9,8}\right)\frac{9^2}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = 149\,N}$$

β) Αν $N_1 = 0$ τότε η (1) $\Rightarrow \cancel{m} g = \frac{\cancel{m}\upsilon^2}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = rg \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{rg}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{(11m)(9,8\ m/s^2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 10,4 \frac{m}{s}}$$

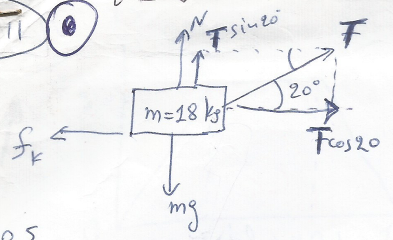
9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

7.11 ⓪ $v=\sigma\tau\alpha\theta$ -1-

SERWAY ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7



$v=\sigma\tau\alpha\theta$

α) $T=;$

$d=20m$

β) $W_T=;$

γ) $W_f=;$

$\mu=0,5$

DONE ✓

C1

α) $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N+T\sin 20=mg$ ①

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T\cos 20-f_k=0 \Rightarrow$

$T\cos 20-\mu N=0$

$\boxed{N=\dfrac{T\cos 20}{\mu}}$ ②

$① \overset{②}{\Rightarrow} \dfrac{T\cos 20}{\mu}+T\sin 20=mg \Rightarrow$

$T\left(\dfrac{\cos 20}{\mu_{=0,5}}+\sin 20\right)=mg \Rightarrow \boxed{T=79,4\,N}$

β) $W_T=T\cos 20\cdot d=$ (1,49 kJ)

γ) $f_k=T\cos 20=74,6\,N$

$W_{f_k}=-f_k d=$ (−1,49 kJ)

DONE ✓

7.46
7.48
7.49
7.79
7.81
7.82
7.86

7-ασκήσεις

C2

7.27

$m_1=4kg$

$y_1=2,5cm$

α) $m_2=1,5kg$

$y_2=;$

β) $W=;$ $y=4cm$

$k=\dfrac{F}{y}=\dfrac{mg}{y}=\dfrac{4\cdot 9,8}{0,025} \Rightarrow$

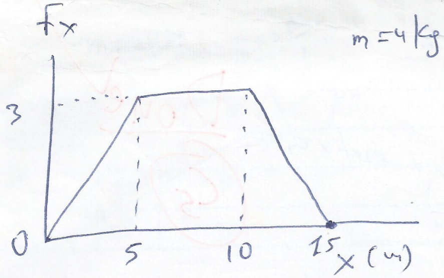
$k=1570\,N/m$

α) $y_1=\dfrac{mg}{k}=\dfrac{1,5\cdot 9,8}{1570}=0,938\,cm$

β) $W=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}1570\cdot 0,04^2=1,25J$

$y=\dfrac{mg}{k}=$ 4 cm

38



$m = 4\,kg$ a) $v = ;$ $x = 5\,m$

b) $x = 10$

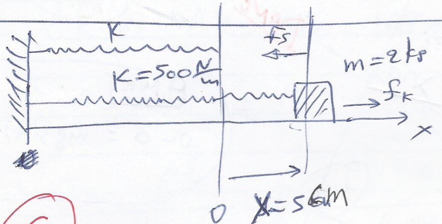
$W_{x=0\to5} = \Delta K \Rightarrow \frac{5 \cdot 3}{2} = \Delta K \Rightarrow \Delta K = 7{,}5\,J \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \overset{4}{m} v_f^2 - 0 = 7{,}5 \Rightarrow$

$v_f = 1{,}94\,\frac{m}{s}$

$W = \Delta K \Rightarrow 7{,}5 + (10-5) \cdot 3 = \frac{1}{2} m v_f'^2 \Rightarrow v_f' = 3{,}35$

7.44



THIS

DONE C4

$\leftarrow v = ;$ (χωρίς τριβή, $\mu = 0{,}35$)

a)

$W_{sp} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k \cancel{x_f}^2 = \frac{1}{2} 500 (0{,}05)^2 = 0{,}625\,J$

$\underset{W_{spring}}{W_{net}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v_i}^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 W_{net}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}625}{2}}$

$v_f = 0{,}791\,\frac{m}{s}$

b) $W_s - W_f = \frac{1}{2} m v_f'^2 \Rightarrow 0{,}625\,(J) - \underbrace{\mu\, m\, g\, s}_{0{,}35 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}343} = 0{,}282\,J \Rightarrow$

$v_f' = 0{,}531\,m/s$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

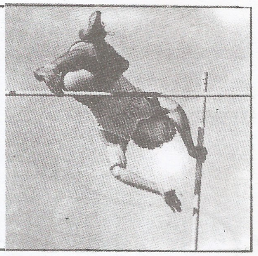
ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

8

OK

Course 6

Δυναμική ενέργεια και διατήρηση τής ενέργειας



Dave Coskey, Villanova University

Στο Κεφάλαιο 7 είχαμε εισαγάγει την έννοια τής κινητικής ενέργειας, η οποία προφανώς σχετίζεται με την κίνηση ενός σώματος. Είδαμε ότι για να μεταβληθεί η κινητική ενέργεια ενός σώματος πρέπει να παραχθεί έργο επί τού σώματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαγάγουμε μια άλλη μορφή ενέργειας, που λέγεται *δυναμική ενέργεια* και σχετίζεται με τη θέση τού σώματος ή με τη διαταξή του σε σχέση με άλλα σώματα. Θα δούμε ότι η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι αποθηκευμένη ενέργεια η οποία μπορεί να παραγάγει έργο ή να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια. Η έννοια τής δυναμικής ενέργειας είναι χρήσιμη μόνον όταν οι δυνάμεις που μελετούμε ανήκουν στην ειδική τάξη των λεγόμενων *διατηρητικών (ή συντηρητικών) δυνάμεων*. Όταν σε ένα σύστημα δρουν μόνο εσωτερικές διατηρητικές δυνάμεις, όπως είναι η βαρύτητα ή οι δυνάμεις ελατηρίων, η κινητική ενέργεια που αποκτά (ή χάνει) το σύστημα, καθώς η σχετική απόσταση των μελών του μεταβάλλεται στον χώρο, εξισορροπείται από μια ίση απώλεια (ή πρόσκτηση) δυναμικής ενέργειας. Αυτός είναι ο γνωστός *νόμος διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας*. Ένας πιο γενικός νόμος διατήρησης ισχύει για απομονωμένα συστήματα, όταν λαμβάνονται υπ' όψιν όλες οι μορφές ενέργειας και οι μεταβολές της.

8.1 ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ (Ή ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ) ΚΑΙ ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Διατηρητικές δυνάμεις

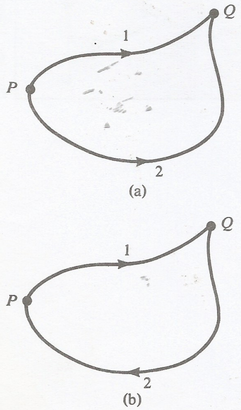
Στο Παράδειγμα 7.11 βρήκαμε ότι το έργο που παράγει η δύναμη τής βαρύτητας όταν δρά πάνω σε ένα σώμα ισούται με το γινόμενο τού βάρους τού σώματος επί την κατακόρυφη μετατόπιση, με την προϋπόθεση βέβαια ότι το g δεν μεταβάλλεται μέσα στην περιοχή τής μετατόπισης. Όπως θα δούμε στο Υποκεφάλαιο 8.4, το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για οποιαδήποτε μετατόπιση τού σώματος. Δηλαδή, το έργο που παράγει η βαρύτητα εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες τής αρχικής και τής τελικής θέσης τού σώματος και δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε το σώμα για να μεταβεί από το ένα σημείο στο άλλο. Όταν μια δύναμη έχει αυτές τις ιδιότητες λέγεται **διατηρητική (ή συντηρητική) δύναμη.** Διατηρητικές δυνάμεις, εκτός από τη βαρύτητα, είναι η ηλεκτροστατική δύναμη και οι δυνάμεις επαναφοράς των ελατηρίων.

> **Γενικά, μια δύναμη λέγεται διατηρητική εάν το έργο που παράγει η δύναμη αυτή, καθώς μετατοπίζει κάποιο σώμα από ένα σημείο σε άλλο, είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα ανάμεσα στα δύο σημεία.**

Δηλαδή, το έργο που παράγει μια διατηρητική δύναμη εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες τής αρχικής και τής τελικής θέσης τού σώματος. Αναφερόμενοι στις *αυθαίρετες (τυχαίες) διαδρομές* τού Σχήματος 8.1a μπορούμε να γράψουμε

Ιδιότητα διατηρητικής δύναμης

$$W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 1)} = W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 2)}$$



(a) (b)

Σχήμα 8.1 (a) Ένα σώμα κινείται από το P στο Q ακολουθώντας δύο διαφορετικές διαδρομές. Εάν η δύναμη που δρα πάνω του είναι διατηρητική, τότε το έργο που παράγει είναι το ίδιο για καθεμιά από τις διαδρομές. Εάν όμως η δύναμη δεν είναι διατηρητική, τότε το έργο που παράγει είναι διαφορετικό για κάθε διαδρομή. (b) Ένα σώμα κινείται από το P στο Q και κατόπιν επιστρέφει από το Q στο P ακολουθώντας διαφορετική διαδρομή, δηλαδή τελικά διήνυσε κλειστή διαδρομή.

Οι διατηρητικές δυνάμεις έχουν και άλλη μια ιδιότητα, που απορρέει από την παραπάνω σχέση. Υποθέστε ότι το σώμα μεταβαίνει από το σημείο P στο Q ακολουθώντας τη διαδρομή 1 και μετά επιστρέφει από το Q στο P ακολουθώντας τη διαδρομή 2, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.1b. Το έργο που παράγει μια διατηρητική δύναμη, καθώς επιστρέφει στο P από το Q ακολουθώντας τη διαδρομή 2, ισούται με το *αντίθετο* τού έργου που παράγεται καθώς το σώμα μεταβαίνει από το P στο Q ακολουθώντας την διαδρομή 2. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε για την ιδιότητα αυτή τών διατηρητικών δυνάμεων ότι

$$W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 1)} = -\, W_{QP} \text{ (πάνω στη διαδρομή 2)}$$
$$W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 1)} + W_{QP} \text{ (πάνω στη διαδρομή 2)} = 0$$

Επομένως, μια διατηρητική δύναμη έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

το συνολικό έργο το οποίο παράγει μια διατηρητική δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα είναι μηδενικό όταν το σώμα αυτό πραγματοποιεί κλειστή διαδρομή, δηλαδή, όταν καταλήγει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε.

Μπορούμε να κατανοήσουμε την ιδιότητα αυτή τών διατηρητικών δυνάμεων ως εξής: Το θεώρημα έργου-ενέργειας λέει ότι το συνολικό έργο που παράγεται πάνω σε ένα σώμα το οποίο μετατοπίζεται ανάμεσα σε δύο σημεία ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής του ενέργειας. Είδαμε όμως ότι εάν όλες οι δυνάμεις είναι διατηρητικές, τότε $W = 0$ για κλειστή διαδρομή. Δηλαδή, το σώμα επιστρέφει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε με την ίδια κινητική ενέργεια που είχε κατά την εκκίνησή του.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα ότι η δύναμη τής βαρύτητας είναι διατηρητική, ας θυμηθούμε ότι το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη καθώς ένα σώμα μάζας m κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία ύψους y_i και y_f είναι

$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

Δηλαδή, το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη mg (στην αρνητική κατεύθυνση τού y) ισούται με τη δύναμη πολλαπλασιασμένη με την μετατόπιση πάνω στην κατεύθυνση y. Έτσι βλέπουμε ότι το έργο W_g εξαρτάται από την αρχική και τελική συντεταγμένη y και είναι *ανεξάρτητο* από τη διαδρομή. Επίσης, εάν τα y_i και y_f αντιστοιχούν στο ίδιο ύψος ή εάν το σώμα εκτελεί κλειστή διαδρομή, τότε $y_i = y_f$ και επομένως $W_g = 0$. Λογουχάρη, εάν ρίξουμε προς τα επάνω μια μπάλλα με αρχική ταχύτητα v_i και αγνοήσουμε την αντίσταση τού αέρα, τότε η μπάλλα πρέπει να ξαναπέσει στο χέρι μας και να έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας (την ίδια κινητική ενέργεια) με εκείνην που είχε στην αρχή.

Ένα άλλο παράδειγμα διατηρητικής δύναμης είναι η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο πάνω σε ένα σώμα εξαρτημένο από το ελατήριο, τού οποίου η δύναμη επαναφοράς είναι $F_s = -kx$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο βρήκαμε ότι το έργο που παράγει το ελατήριο πάνω στο σώμα είναι

Έργο που παράγει δύναμη ελατηρίου

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

όπου θεωρήσαμε ότι η αρχή, $x = 0$, συμπίπτει με τη θέση ισορροπίας τού σώματος. Βλέπουμε λοιπόν ότι και πάλι το W_s εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση τού σώματος. Επίσης, $W_s = 0$ για κλειστή διαδρομή, δηλαδή όταν $x_i = x_f$.

Μη διατηρητικές δυνάμεις

Μια δύναμη είναι *μη διατηρητική* όταν το έργο που παράγει η δύναμη πάνω σε ένα σώμα το οποίο κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία εξαρτάται από τη διαδρομή την οποία ακολουθεί το σώμα αυτό.

Δηλαδή, το έργο που παράγει μια μη διατηρητική δύναμη καθώς κινεί το σώμα από το σημείο P στο σημείο Q (Σχήμα 8.1a) θα είναι διαφορετικό για τις διαδρομές 1 και 2. Γράφουμε λοιπόν:

Ιδιότητα μη διατηρητικής δύναμης

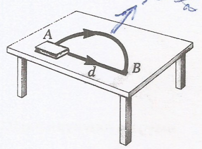
$$W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 1)} \neq W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 2)}$$

Επίσης, από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι, εάν μια δύναμη δεν είναι διατηρητική, το έργο που παράγει η δύναμη αυτή όταν κινεί ένα σώμα πάνω σε κλειστή τροχιά *δεν είναι απαραίτητα μηδενικό.* Γνωρίζουμε ότι το έργο που παράγει καθώς μεταβαίνει από το P στο Q πάνω στην τροχιά 2 ισούται με το αρνητικό τού έργου από το Q στο P πάνω στην ίδια διαδρομή, δηλαδή τη διαδρομή 2. Έτσι

$$W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 1)} \neq -\, W_{QP} \text{ (πάνω στη διαδρομή 2)}$$
$$W_{PQ} \text{ (πάνω στη διαδρομή 1)} + W_{QP} \text{ (πάνω στη διαδρομή 2)} \neq 0$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μη διατηρητικής δύναμης είναι η δύναμη τριβής ολισθήσεως. Εάν ένα αντικείμενο κινηθεί ανάμεσα σε δύο σημεία πάνω σε μια τραχιά οριζόντια επιφάνεια ακολουθώντας διαφορετικές διαδρομές, τότε οπωσδήποτε το έργο που παράγει η δύναμη τριβής εξαρτάται από τη διαδρομή. Το αρνητικό έργο που παράγει η δύναμη τριβής πάνω σε ένα σώμα όταν αυτό κινείται σε μια διαδρομή ισούται με το γινόμενο τής δύναμης τριβής επί το μήκος τής διαδρομής. Για διαδρομές διαφορετικού μήκους καταναλώνονται διαφορετικές ποσότητες έργου. Η ελάχιστη απόλυτη τιμή τού έργου που παράγουν οι δυνάμεις τριβής αντιστοιχεί με τη διαδρομή που είναι η ευθεία γραμμή η οποία συνδέει τα δύο σημεία. Ας σημειωθεί, τέλος, ότι για κλειστή διαδρομή το έργο δεν είναι μηδενικό, γιατί η δύναμη τής τριβής είναι συνεχώς αντίθετη προς την κατεύθυνση τής κίνησης.

$s = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \frac{\pi d}{2}$



Σχήμα 8.2 Το έργο που παράγει η δύναμη τής τριβής (δεν είναι διατηρητική) είναι συνάρτηση τής διαδρομής που ακολουθεί καθώς κινείται από το A στο B.

Λογουχάρη, υποθέστε ότι μετακινείτε ένα βιβλίο πάνω στην τραχιά οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζιού. Εάν μετακινήσετε το βιβλίο πάνω στην ευθεία γραμμή ανάμεσα στα σημεία A και B (βλ. Σχήμα 8.2), το έργο που παράγει η τριβή είναι $-\,fd$, όπου d είναι η απόσταση ανάμεσα στα δύο σημεία. Εάν όμως κινήσετε το βιβλίο ανάμεσα σε αυτά τα σημεία, πάνω σε μια *οποιαδήποτε* άλλη διαδρομή, τότε το έργο που παράγει η τριβή είναι *μεγαλύτερο* (κατά απόλυτη τιμή) από το $-\,fd$. Έτσι, το έργο που παράγει η τριβή για τη μετατόπιση τού βιβλίου επάνω στην ημικυκλική διαδρομή τού Σχήματος 8.2 ισούται με $-f\,(\pi d/2)$, όπου d είναι η διάμετρος τού κύκλου. Τέλος, εάν το βιβλίο μετατοπιστεί πάνω σε μια οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή, όπως π.χ. σε κύκλο, το έργο που παράγει η τριβή είναι διάφορο τού μηδενός, γιατί η τριβή έχει συνεχώς αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση.

Εάν στο παράδειγμα τής μπάλλας που πετάξαμε κατακόρυφα στον αέρα με αρχική ταχύτητα υ_i κάνουμε μετρήσεις ακριβείας, θα δούμε ότι λόγω τής αντίστασης τού αέρα η μπάλλα επανέρχεται στο χέρι με ταχύτητα μικρότερη τής αρχικής. Δηλαδή, η τελική κινητική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική. Αυτό σημαίνει ότι καταναλώθηκε (σκορπίστηκε) κινητική ενέργεια στο περιβάλλον. Για τον λόγο αυτό, καμιά φορά, οι μη διατηρητικές δυνάμεις λέγονται και *δυνάμεις ασωτίας**. Γι' αυτό, πολλές φορές, περιγράφουμε τις δυνάμεις τριβής ως δυνάμεις ασωτείας.

8.2 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο είδαμε ότι το έργο που παράγει μία διατηρητική δύναμη είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα και από την ταχύτητά του. Το έργο που παράγεται είναι συνάρτηση μόνον τών συντεταγμένων τής αρχικής και τής τελικής θέσης τού σώματος. Για τους λόγους αυτούς, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση τών συντεταγμένων μόνο, που λέγεται δυναμική ενέργεια U και είναι τέτοια ώστε το έργο το οποίο παράγεται είναι ίσο με τη μείωση τής δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή, το έργο που παράγει μια διατηρητική δύναμη $\boldsymbol{F}$ καθώς το σώμα κινείται στον άξονα τών x είναι[1]

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx = -\Delta U = U_i - U_f \tag{8.1}$$

Δηλαδή, *το έργο που παράγει μια διατηρητική δύναμη ισούται με το αρνητικό τής μεταβολής τής δυναμικής ενέργειας η οποία σχετίζεται με τη δύναμη αυτή.* Ορίζουμε τη μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας ως την διαφορά $\Delta U = U_f - U_i$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση 8.1 ως

Μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx \tag{8.2}$$

όπου η F_x είναι συνιστώσα τής δύναμης $\boldsymbol{F}$ στη διεύθυνση τής μετατόπισης.

Πολλές φορές, για διευκόλυνση, μπορούμε να ορίσουμε ένα σημείο αναφοράς, x_i, και να μετρήσουμε όλες τις διαφορές δυναμικής ενέργειας ως προς αυτό το σημείο. Με βάση τα παραπάνω, ορίζουμε τη συνάρτηση τής δυναμικής ενέργειας ως

$$U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + U_i \tag{8.3}$$

Πολλές φορές, θεωρούμε ότι η U_i είναι μηδενική σε κάποιο αυθαίρετο σημείο αναφοράς. Η τιμή που δίνουμε στο U_i δεν έχει καμία σημασία, αφού αυξομειώνει την $U_f(x)$ κατά μία σταθερή τιμή. Εκείνο που έχει φυσική σημασία είναι η *μεταβολή* τής δυναμικής ενέργειας (στο επόμενο υποκεφάλαιο θα δούμε ότι η μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας συνδέεται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας). Εάν ξέρουμε τη διατηρητική δύναμη ως συνάρτηση τών συντεταγμένων, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 8.3 για να υπολογίσουμε τη μεταβολή στη δυναμική ενέργεια ενός σώματος καθώς αυτό κινείται από το x_i στο x_f. Πρέπει να σημειωθεί ότι στη μονοδιάστατη περίπτωση μία δύναμη που είναι συνάρτηση μόνο τού x είναι *πάντοτε* διατηρητική. Αυτό δεν ισχύει γενικά στη δισδιάστατη ή στην τρισδιάστατη περίπτωση.

Το έργο που παράγει μια μη διατηρητική δύναμη εξαρτάται από τη

---

* Σημ. Μετφρ.: Έτσι αποδίδουμε τον αγγλικό όρο dissipative forces, για τον οποίο δεν υπάρχει άλλη ικανοποιητική απόδοση στην Ελληνική.

[1] Για μια γενική μετατόπιση, το έργο που παράγεται σε δύο ή τρεις διαστάσεις ισούται επίσης με $U_i - U_f$, όπου $U = U(x, y, z)$. Δηλαδή $W = \int_i^f \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = U_i - U_f$.

διαδρομή που ακολουθεί το σώμα καθώς κινείται. Μπορεί επίσης να εξαρτάται από την ταχύτητα τού σώματος ή από άλλες ποσότητες. Στις περιπτώσεις αυτές το έργο δεν είναι, απλώς, συνάρτηση τών αρχικών και τών τελικών συντεταγμένων τού σώματος. Τέλος, ας σημειωθεί ότι *η δυναμική ενέργεια δεν μπορεί να οριστεί στην περίπτωση κατά την οποία η δύναμη δεν είναι διατηρητική.*

8.3 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Υποθέστε ότι ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση *μιας* διατηρητικής δύναμης F_x. Εάν αυτή είναι η μόνη δύναμη που δρα πάνω στο σώμα, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, το έργο που παράγει η δύναμη αυτή είναι ίσο με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια τού σώματος:

$$W_c = \Delta K$$

Επειδή όμως η δύναμη είναι διατηρητική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 8.1 και να γράψουμε $W_c = -\Delta U$. Επομένως,

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = \Delta(K+U) = 0} \tag{8.4}$$

Αυτός είναι **ο νόμος διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας,** τον οποίο μπορούμε να εκφράσουμε και με τη μορφή

$$\boxed{K_i + U_i = K_f + U_f} \tag{8.5}$$

Διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας

Εάν ορίσουμε την ολική μηχανική ενέργεια τού συστήματος, E, ως το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας συν τη δυναμική ενέργεια, μπορούμε να εκφράσουμε τη διατήρηση τής ενέργειας ως

$$E_i = E_f \tag{8.6a}$$

όπου

$$E \equiv K + U \tag{8.6b}$$

Ολική μηχανική ενέργεια

Ο νόμος διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας λέει ότι εάν η δύναμη που παράγει έργο είναι διατηρητική, τότε η ολική μηχανική ενέργεια τού συστήματος παραμένει σταθερή. Ή, ισοδύναμα, εάν η κινητική ενέργεια ενός διατηρητικού συστήματος αυξηθεί (ή μειωθεί) κατά μία ποσότητα, τότε η δυναμική ενέργεια μειώνεται (ή αυξάνεται) κατά την ίδια ποσότητα.

Εάν περισσότερες από μία διατηρητικές δυνάμεις δρουν πάνω στο σύστημα, τότε *για καθεμιά* δύναμη υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να γράψουμε τον νόμο διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας ως

$$K_i + \sum U_i = K_f + \sum U_f \tag{8.7}$$

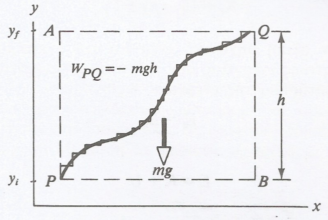
Διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας

όπου ο αριθμός τών όρων στα αθροίσματα ισούται με τον αριθμό τών εξεταζόμενων διατηρητικών δυνάμεων. Λογουχάρη, θεωρήστε μια μάζα που είναι αναρτημένη από ένα ελατήριο το οποίο ταλαντώνεται κατακόρυφα. Έχουμε δύο διατηρητικές δυνάμεις που δρουν πάνω της: τη δύναμη τού ελατηρίου και τη δύναμη τής βαρύτητας. Θα μελετήσουμε την περίπτωση αυτή αργότερα κατά την ανάλυση ενός παραδείγματος.

8.4 ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΓΗΣ

Όταν ένα σώμα κινείται κοντά στη Γη η βαρυτική δύναμη παράγει έργο επί τού σώματος. Στην περίπτωση τής ελεύθερης πτώσης, το έργο που παράγει η βαρύτητα είναι συνάρτηση τής *κατακόρυφης* μετατόπισης τού σώματος. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και για τη γενικότερη περίπτωση κατά την οποία το σώμα μετατοπίζεται οριζόντια και κατακόρυφα, όπως στην περίπτωση τής τροχιάς ενός βλήματος.

Θεωρήστε την περίπτωση ενός σώματος που μετατοπίζεται από το P στο Q ακολουθώντας διάφορες διαδρομές ενώ υπάρχει σταθερή βαρυτική δύναμη(2) (βλ. Σχήμα 8.3). Το έργο που παράγει κατά τη διαδρομή PAQ τό διαιρούμε σε δύο μέρη: στο έργο κατά μήκος τής PA, που είναι $-mgh$ (το mg είναι αντίθετο στη μετατόπιση), και στο έργο κατά μήκος τής AQ, που είναι μηδενικό (εφόσον το mg είναι κάθετο στη διαδρομή αυτή). Έτσι $W_{PAQ} = -mgh$. Εξάλλου, το έργο που παράγεται όταν το σώμα ακολουθεί τη διαδρομή PBQ είναι και αυτό $-mgh$, εφόσον $W_{PB} = 0$ και $W_{BQ} = -mgh$. Θεωρήστε τώρα την τυχαία διαδρομή PQ, που φαίνεται στο Σχήμα 8.3. Μπορούμε να τήν περιγράψουμε προσεγγιστικά με μια τεθλασμένη που αποτελείται από μια σειρά οριζόντιες και κατακόρυφες μικρές γραμμές. Η δύναμη τής βαρύτητας δεν παράγει έργο στις οριζόντιες διαδρομές, διότι είναι κάθετη σε αυτές. Η δύναμη αυτή όμως παράγει έργο στις κατακόρυφες διαδρομές, όπου, λογουχάρη, το έργο που παράγεται στη γραμμή n είναι $-mg\,\Delta y_n$. Έτσι, το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη τής βαρύτητας καθώς το σώμα μετατοπίζεται προς τα επάνω κατά h είναι το άθροισμα τών



Σχήμα 8.3 Μπορείτε να θεωρήσετε ότι η μετατόπιση ενός σώματος από το P στο Q υπό την επίδραση τής βαρύτητας έγινε με έναν μεγάλο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων βημάτων. Το έργο που παράγει η βαρύτητα κατά τη διάρκεια κάθε οριζόντιου βήματος είναι μηδενικό. Έτσι, το ολικό έργο που παράγει η βαρύτητα ισούται με το άθροισμα τών έργων που έχουν παραχθεί κατά τις κατακόρυφες μετατοπίσεις.

έργων καθεμιάς κατακόρυφης μετατόπισης. Το άθροισμα όλων αυτών τών όρων δίνει

$$W_g = -mg \sum_n \Delta y_n = -mgh$$

Δεδομένου ότι $h = y_f - y_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$W_g = mgy_i - mgy_f \tag{8.8}$$

Συμπεραίνουμε ότι το έργο που παράγει η δύναμη τής βαρύτητας είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή και, συνεπώς, η βαρυτική δύναμη είναι διατηρητική δύναμη.

---

(2) Η υπόθεση ότι η δύναμη τής βαρύτητας είναι σταθερή είναι ικανοποιητική όσο η κατακόρυφη μετατόπιση είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα τής Γης.

Επειδή η δύναμη τής βαρύτητας είναι διατηρητική, μπορούμε να ορίσουμε τη **συνάρτηση τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας** U_g ως

$$U_g \equiv mgy \tag{8.9}$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

όπου επιλέξαμε το $U_g = 0$ όταν $y = 0$. Μην ξεχνάτε ότι η παραπάνω συνάρτηση εξαρτάται από την επιλογή τής αρχής τών συντεταγμένων και ισχύει όταν η κατακόρυφη μετατόπιση τού σώματος είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα τής Γης. Στο Κεφάλαιο 14 θα αναπτύξουμε την γενική έκφραση για την βαρυτική δυναμική ενέργεια.

Θέτουμε τον ορισμό τού U_g (Εξίσωση 8.9) στη σχέση που δίνει το παραγόμενο από τη δύναμη τής βαρύτητας έργο (Εξίσωση 8.8) και έχουμε

$$W_g = U_i - U_f = -\Delta U_g \tag{8.10}$$

Δηλαδή, *το έργο που παράγει η δύναμη τής βαρύτητας ισούται με τη διαφορά τής αρχικής τιμής τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας μείον την τελική τιμή τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.* Συμπεραίνουμε από την Εξίσωση 8.10 ότι όταν η μετατόπιση είναι προς τα επάνω, $y_f > y_i$, τότε $U_i < U_f$ και επομένως το έργο που παράγει η βαρύτητα είναι αρνητικό. Αυτό λοιπόν συμβαίνει στην περίπτωση κατά την οποία η δύναμη τής βαρύτητας είναι *αντίθετη* από τη μετατόπιση. Όταν το σώμα όμως μετατοπίζεται προς τα κάτω, $y_f < y_i$, τότε $U_i > U_f$ και επομένως το έργο που παράγει η βαρύτητα είναι θετικό. Στην περίπτωση αυτή, το $m\mathbf{g}$ έχει την *ίδια* κατεύθυνση με τη μετατόπιση.

Ο όρος *δυναμική ενέργεια* σημαίνει ότι το σώμα έχει τη δυνατότητα να αυξήσει την κινητική του ενέργεια ή να παραγάγει έργο όταν σε κάποιο σημείο απελευθερωθεί υπό την επίδραση τής βαρύτητας. Η επιλογή τής αρχής τών συντεταγμένων για την μέτρηση τού U_g είναι εντελώς αυθαίρετη, διότι μόνον οι διαφορές τής δυναμικής ενέργειας ορίζονται σαφώς. Πάντως, τις περισσότερες φορές, για διευκόλυνσή μας, μπορούμε να επιλέξουμε την επιφάνεια τής Γης ως το σημείο αναφοράς $y_i = 0$.

Εάν η δύναμη τής βαρύτητας είναι η *μόνη* δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα, τότε η ολική μηχανική ενέργεια τού σώματος διατηρείται (Εξίσωση 8.5). Επομένως, γράφουμε τον νόμο διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας για ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα ως

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f \tag{8.11}$$

Διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας σώματος που πέφτει ελεύθερο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1 Η μπάλλα που πέφτει ελεύθερα □

Μια μπάλλα μάζας m πέφτει από ύψος h πάνω από το έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.4. (a) Προσδιορίστε το μέτρο ταχύτητας τής μπάλλας όταν αυτή βρίσκεται σε ύψος y πάνω από το έδαφος. Μη λάβετε υπ' όψιν την αντίσταση τού αέρα.

Επειδή η μπάλλα πέφτει ελεύθερα, η μόνη δύναμη που δρα επάνω της είναι η βαρυτική. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Όταν η μπάλλα αφήνεται ελεύθερη, ενώ προηγουμένως ηρεμούσε, από ύψος h πάνω από το έδαφος, η κινητική της ενέργεια είναι $K_i = 0$ και η δυναμική της ενέργεια $U_i = mgh$, όπου η συντεταγμένη y μετριέται από το έδαφος. Όταν η μπάλλα απέχει y επάνω από το έδαφος, η κινητική της ενέργεια είναι $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ και η δυναμική της ενέργεια σε σχέση με το έδαφος είναι $U_f = mgy$. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 8.11 και βρίσκουμε

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy$$

$$v_f^2 = 2g(h - y)$$

$$v_f = \sqrt{2g(h-y)}$$

(b) Προσδιορίστε το μέτρο ταχύτητας τής μπάλλας στο y, εάν τη ρίχναμε με μέτρο αρχικής ταχύτητας v_i από το αρχικό ύψος h.

Στην περίπτωση αυτή η αρχική ενέργεια περιέχει και κινητική ενέργεια ίση προς $\frac{1}{2}mv_i^2$ και η Εξίσωση 8.11 δίνει

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(h - y)$$

Σχήμα 8.4 (Παράδειγμα 8.1) Μια μπάλλα πέφτει στο πάτωμα από ύψος h. Στην αρχή, όλη η ενέργειά της είναι δυναμική και ίση με mgh ως προς το πάτωμα. Σε ένα τυχαίο ύψος y, η ολική της ενέργεια είναι το άθροισμα τής κινητικής συν την δυναμική ενέργεια.

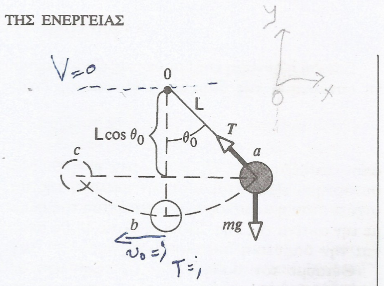
$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h-y)}$$

Ας σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τη σχέση τής κινητικής $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$, όπου $y_0 = h$. Τέλος, το αποτέλεσμα αυτό ισχύει ακόμη και όταν η αρχική ταχύτητα σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο επίπεδο (όπως π.χ. στη μελέτη τής βολής).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2 Το εκκρεμές

Το εκκρεμές αποτελείται από μια σφαίρα μάζας m που είναι αναρτημένη από λεπτό αβαρές νήμα μήκους L, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.5. Εκτρέπουμε τη σφαίρα ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία θ_0 με την κατακόρυφο και ενώ ηρεμεί τήν αφήνουμε ελεύθερη. Στο σημείο εξάρτησης 0 δεν υπάρχει τριβή. (a) Βρείτε το μέτρο ταχύτητας τής σφαίρας όταν αυτή βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο b.

Η μόνη δύναμη που παράγει έργο στη σφαίρα είναι η βαρυτική, εφόσον η τάση τού νήματος είναι συνεχώς κάθετη σε κάθε στοιχείο τής μετατόπισης και επομένως δεν παράγει έργο. Αφού η βαρύτητα είναι διατηρητική δύναμη, η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται. Επομένως, καθώς το εκκρεμές ταλαντώνεται, υπάρχει συνεχώς μετατροπή ενέργειας από δυναμική σε κινητική ενέργεια και αντίστροφα. Τη στιγμή που η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη, όλη η ενέργεια είναι δυναμική. Στο σημείο b το εκκρεμές έχει κινητική ενέργεια αλλά έχει χάσει δυναμική ενέργεια. Στο σημείο c το εκκρεμές έχει ξαναποκτήσει όλη τη δυναμική του ενέργεια και η κινητική του ενέργεια είναι και πάλι μηδενική. Εάν μετρήσουμε την τεταγμένη y από το σημείο εξάρτησης,



Σχήμα 8.5 (Παράδειγμα 8.2) Εάν το εκκρεμές αφεθεί ελεύθερο όταν σχηματίζει γωνία θ_0 με την κατακόρυφο, ποτέ δεν θα ταλαντωθεί με μεγαλύτερη απόκλιση. Στην αρχή (στη θέση a) όλη του η ενέργεια είναι αποκλειστικά δυναμική. Μετατρέπεται όμως όλη σε κινητική όταν διέρχεται από τη χαμηλότερη θέση του (θέση b).

τότε $y_a = -L\cos\theta_0$ και $y_b = -L$. Επομένως $U_a = -mgL\cos\theta_0$ και $U_b = -mgL$. Εφαρμόζουμε την αρχή τής διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας και έχουμε

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

$$0 - mgL\cos\theta_0 = \tfrac{1}{2}mv_b^2 - mgL$$

$$(1) \qquad v_b = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$$

(b) Ποια είναι η τάση T τού νήματος στο σημείο b;

Αφού η τάση δεν παράγει έργο, δεν μπορούμε να τή βρούμε χρησιμοποιώντας ενεργειακές μεθόδους. Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στην ακτινική διεύθυνση. Ας θυμηθούμε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σώματος το οποίο κινείται πάνω σε τόξο κύκλου ισούται με v^2/r και κατευθύνεται προς το κέντρο τού κύκλου. Εφόσον λοιπόν $r = L$, έχουμε

$$(2) \qquad \sum F_r = T_b - mg = ma_r = mv_b^2/L$$

Θέτουμε την (1) στην (2) και βρίσκουμε ότι η τάση στο σημείο b είναι

$$(3) \qquad T_b = mg + 2mg(1-\cos\theta_0) = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

Άσκηση 1 Ένα εκκρεμές μάζας 0.5 kg και μήκους 2.0 m αφήνεται ελεύθερο όταν το νήμα σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο. Βρείτε το μέτρο ταχύτητας τής σφαίρας και την τάση τού νήματος όταν η σφαίρα βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο.
Απάντηση 2.29 m/s, 6.21 N.

8.5 ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ - ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στην πραγματικότητα, μη διατηρητικές δυνάμεις, όπως είναι η τριβή, υπάρχουν συνήθως στα φυσικά συστήματα. Επομένως, η ολική μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Πάντως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για να υπολογίσουμε τις μη διατηρητικές δυνάμεις. Εάν συμβολίσουμε με W_{nc} το έργο που παράγουν πάνω στο σώμα όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις και με W_c το έργο που παράγουν όλες οι διατηρητικές δυνάμεις, μπορούμε να γράψουμε το θεώρημα τού έργου-ενέργειας ως εξής:

$$W_{nc} + W_c = \Delta K$$

Αλλά $W_c = -\Delta U$ (Εξίσωση 8.1) και έτσι έχουμε

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) \tag{8.12}$$

Δηλαδή

> **το έργο που παράγουν όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις ισούται με το άθροισμα μεταβολής τής κινητικής ενέργειας συν τη μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας.**

Εφόσον η ολική μηχανική ενέργεια είναι $E = K + U$, μπορούμε να γράψουμε την Εξίσωση 8.12 ως εξής:

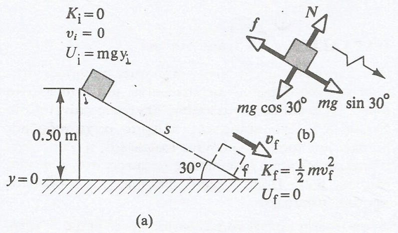
$$W_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = E_f - E_i \tag{8.13}$$

Έργο μη διατηρητικών δυνάμεων

Δηλαδή, *το έργο που παράγουν όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις ισούται με την μεταβολή τής ολικής μηχανικής ενέργειας τού συστήματος.* Προφανώς, όταν δεν υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις, τότε $W_{nc} = 0$ και $E_i = E_f$. Δηλαδή, τότε διατηρείται η ολική μηχανική ενέργεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.3 Σώμα κινούμενο σε κεκλιμένο επίπεδο

Ένα σώμα μάζας 3 kg ολισθαίνει προς τα κάτω σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο μήκους 1 m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.6a. Το σώμα ξεκινά, ενώ βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας, από την κορυφή και υπόκειται σε μία σταθερή δύναμη τριβής μέτρου 5 N. Η γωνία τού κεκλιμένου επιπέδου είναι 30°. (a) Χρησιμοποιήστε ενεργειακές μεθόδους και βρείτε την ταχύτητα που έχει αποκτήσει στο κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου.



Σχήμα 8.6 (Παράδειγμα 8.3) (a) Ένα σώμα ολισθαίνει σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση τής βαρύτητας. Η δυναμική του ενέργεια μειώνεται, ενώ η κινητική του ενέργεια αυξάνεται. (b) Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος.

Εφόσον $v_i = 0$, η αρχική κινητική ενέργεια είναι μηδενική. Εάν μετρούμε την τεταγμένη y από το κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου, τότε $y_i = 0.50$ m. Επομένως, η ολική μηχανική ενέργεια τού σώματος στην κορυφή τού κεκλιμένου επιπέδου ισούται με τη δυναμική ενέργεια, που είναι

$$E_i = U_i = mgy_i = (3\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0.50\ \text{m}) = 14.7\ \text{J}$$

Όταν το σώμα φτάσει κάτω, η κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}mv_f^2$, αλλά η δυναμική του ενέργεια είναι *μηδενική* επειδή τότε βρίσκεται στο $y_f = 0$. Επομένως η ολική μηχανική ενέργεια στο κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου είναι $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$. Δεν μπορούμε όμως να πούμε ότι ισχύει $E_i = E_f$ στην περίπτωση αυτή, διότι υπάρχει μία μη διατηρητική δύναμη που παράγει έργο επί τού σώματος. Είναι η δύναμη τής τριβής και το έργο που παράγει είναι $W_{nc} = -fs$, όπου s είναι η μετατόπιση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. (Ας θυμηθούμε ότι η δύναμη που είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο δεν παράγει έργο, διότι είναι κάθετη στη μετατόπιση). Στην περίπτωση αυτή $f = 5$ N και $s = 1$ m. Επομένως

$$W_{nc} = -fs = (-5\ \text{N})(1\ \text{m}) = -5\ \text{J}$$

Δηλαδή, η παρουσία τής επιβραδύνουσας δύναμης τής τριβής αποτελεί αίτιο απώλειας ενέργειας. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας στη μορφή που τό δίνει η Εξίσωση 8.13 και έχουμε

$$W_{nc} = E_f - E_i$$

$$-fs = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = 14.7\ \text{J} - 5\ \text{J} = 9.7\ \text{J}$$

$$v_f^2 = \frac{19.4\ \text{J}}{3\ \text{kg}} = 6.47\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \boxed{2.54\ \text{m/s}}$$

(b) Ελέγξετε την απάντηση στο (a) χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο τού Newton. Βρείτε όμως πρώτα την επιτάχυνση.

Προσθέτουμε όλες τις δυνάμεις που είναι παράλληλες στο κεκλιμένο επίπεδο και βρίσκουμε

$$mg \sin 30° - f = ma$$

$$a = g \sin 30° - \frac{f}{m} = (9.80\ \text{m/s}^2)(0.500) - \frac{5\ \text{N}}{3\ \text{kg}}$$

$$= 3.23\ \text{m/s}^2$$

Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση $v_f^2 = v_i^2 + 2as$, όπου $v_i = 0$:

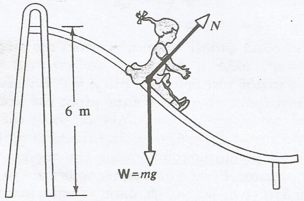
$$v_f^2 = 2as = 2(3.23\ \text{m/s}^2)(1\ \text{m}) = 6.46\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 2.54\ \text{m/s}$$

Άσκηση 2 Βρείτε την τελική ταχύτητα τού σώματος και την επιτάχυνσή του εάν θεωρηθεί ότι το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο.
Απάντηση 3.13 m/s, 4.90 m/s^2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.4 Κίνηση σε καμπυλόγραμμη τροχιά

Ένα παιδί μάζας m γλιστρά πάνω σε μια καμπυλόγραμμη τσουλήθρα ακανόνιστου σχήματος, ύψους h, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.7. Το παιδί ξεκινά από την κορυφή, ενώ ήταν ακίνητο. (a) Προσδιορίστε το μέτρο ταχύτητας τού παιδιού στο κάτω μέρος τής τσουλήθρας θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν τριβές.



Σχήμα 8.7 (Παράδειγμα 8.4) Εάν η τσουλήθρα δεν έχει τριβές (δηλαδή είναι λεία), το μέτρο τής ταχύτητας τού παιδιού εξαρτάται μόνο από το ύψος και όχι από το σχήμα τής τσουλήθρας.

Προσέξτε ότι η κάθετη δύναμη, N, δεν παράγει έργο πάνω στο παιδί επειδή είναι πάντοτε κάθετη σε κάθε στοιχείο τής μετατόπισης. Εφόσον λοιπόν δεν υπάρχει τριβή, $W_{nc} = 0$, και μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Εάν μετρούμε την τεταγμένη y από το κάτω μέρος τής τσουλήθρας, τότε $y_i = h$ και $y_f = 0$ και έτσι έχουμε

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Ας σημειωθεί ότι θα βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα εάν το παιδί έπεφτε κατακόρυφα από ύψος h! Λογουχάρη, εάν $h = 6$ m, τότε

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6\ \text{m})} = \boxed{10.8\ \text{m/s}}$$

(b) Εάν πάνω στο παιδί δρούσε δύναμη τριβής, θα παρήγε η τριβή έργο;

Στην περίπτωση αυτή $W_{nc} \neq 0$, και επομένως *δεν* διατηρείται η μηχανική ενέργεια. Πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 8.13 για να βρούμε το έργο που παράγει η τριβή εάν υποτεθεί ότι γνωρίζουμε την τελική ταχύτητα (δηλαδή την ταχύτητα στο κάτω μέρος τής τσουλήθρας):

$$W_{nc} = E_f - E_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgh$$

Λογουχάρη, εάν $v_f = 8.0$ m/s, $m = 20$ kg και $h = 6$ m, βρίσκουμε

$$W_{nc} = \tfrac{1}{2}(20\ \text{kg})(8.0\ \text{m/s})^2 - (20\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6\ \text{m})$$

$$= \boxed{-536\ \text{J}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και πάλι το έργο W_{nc} είναι αρνητικό, *διότι το έργο που παράγει η τριβή ολίσθησης είναι πάντοτε αρνητικό.* Να σημειωθεί, πάντως, ότι, επειδή η τσουλήθρα είναι καμπύλη, η κάθετη δύναμη μεταβάλλει μέτρο και κατεύθυνση κατά τη διάρκεια τής κίνησης. Έτσι μεταβάλλεται και η δύναμη τής τριβής κατά τη διάρκεια τής κίνησης, διότι είναι ανάλογη προς το $\mathbf{N}$. Είναι δυνατόν να προσδιορίσετε το μ με αυτά τα δεδομένα;

5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5 Πάμε για σκι

Ένας χιονοδρόμος ξεκινά, ενώ ήταν ακίνητος, στην κορυφή ενός βουνού, και κατεβαίνει μια λεία πλαγιά ύψους 20 m και με γωνία κλίσης 20°, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.8. Στο τέλος τής πλαγιάς ο χιονοδρόμος βρίσκει μια τραχιά οριζόντια επιφάνεια, η οποία έχει συντελεστή τριβής ολισθήσεως ανάμεσα στο χιόνι και στα σκι 0.21. Πόσο μακριά θα πάει ο χιονοδρόμος προτού σταματήσει;

Λύση Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο ταχύτητας τού χιονοδρόμου στο κάτω μέρος τής πλαγιάς. Εφόσον η πλαγιά είναι λεία, εφαρμόζουμε την περίπτωση διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας (όπως στο Παράδειγμα 8.4a) και βρίσκουμε

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})} = 19.8\ \text{m/s}$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα έργου-ενέργειας για την τραχιά οριζόντια επιφάνεια. Το έργο που παράγει η δύναμη τριβής είναι $W_{\text{nc}} = -fs$, όπου s είναι η οριζόντια μετατόπιση. Επομένως

$$W_{\text{nc}} = -fs = K_f - K_i$$

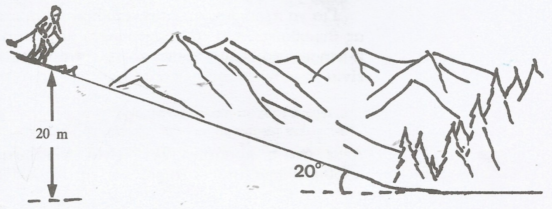
Για να βρούμε την απόσταση που καλύπτει ο χιονοδρόμος ώσπου να σταματήσει, θεωρούμε ότι $K_f = 0$. Αλλά $v_i = 19.8$ m/s και η δύναμη τής τριβής είναι $f = \mu N = \mu mg$. Έτσι βρίσκουμε

$$-\mu mgs = -\tfrac{1}{2}mv_i^2$$

ή

$$s = \frac{v_i^2}{2\mu g} = \frac{(19.8\ \text{m/s})^2}{2(0.21)(9.80\ \text{m/s}^2)} = \boxed{95.2\ \text{m}}$$

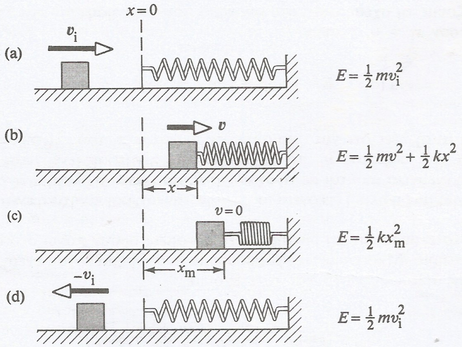
Άσκηση 3 Βρείτε την οριζόντια απόσταση την οποία θα καλύψει ο χιονοδρόμος προτού σταματήσει εάν και η πλαγιά είναι τραχιά με συντελεστή τριβής ολισθήσεως ίσο με 0.21.
Απάντηση 40.3 m.



Σχήμα 8.8 (Παράδειγμα 8.5).

8.6 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΣΕ ΕΝΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Ας μελετήσουμε τώρα ένα άλλο μηχανικό σύστημα, που περιγράφεται απλώς με τη βοήθεια τής έννοιας τής δυναμικής, δηλαδή τής αποθηκευμένης ενέργειας. Σώμα μάζας m ολισθαίνει πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα v_i και συγκρούεται με ένα ελατήριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.9. Για να απλουστευθεί η μελέτη μας, θα υποθέσουμε ότι το ελατήριο



Σχήμα 8.9 Ένα σώμα καθώς ολισθαίνει πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια συγκρούεται με ένα ελαφρό ελατήριο. (a) Στην αρχή όλη η μηχανική ενέργεια είναι κινητική. (b) Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας τού σώματος και τής ελαστικής δυναμικής ενέργειας τού ελατηρίου. (c) Όλη η ενέργεια είναι τώρα δυναμική. (d) όλη η ενέργεια έχει μετατραπεί ξανά σε κινητική ενέργεια τού σώματος. Η ολική μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

είναι πολύ ελαφρό και επομένως έχει αμελητέα κινητική ενέργεια. Καθώς το ελατήριο συμπιέζεται, ασκεί δύναμη πάνω στο σώμα, προς τα αριστερά, και τελικά το σώμα σταματά (Σχήμα 8.9c). Η αρχική ενέργεια τού συστήματος (σώμα + ελατήριο) είναι ίση με την κινητική ενέργεια τού σώματος. Όταν μετά τη σύγκρουση με το ελατήριο το σώμα σταματήσει, η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται. Η δύναμη τού ελατηρίου είναι διατηρητική δύναμη, καμιά από τις εξωτερικές δυνάμεις δεν παράγει έργο (συμπεριλαμβανομένης και τής βαρύτητας) και έτσι η ολική μηχανική ενέργεια τού συστήματος παραμένει σταθερή. Με αυτό τον τρόπο λοιπόν γίνεται μετατροπή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος σε δυναμική ενέργεια, που αποθηκεύεται στο ελατήριο. Τελικά το σώμα κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση και επανακτά την αρχική του κινητική ενέργεια, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 8.9d.

Για να περιγράψουμε την αποθηκευμένη στο ελατήριο δυναμική ενέργεια ας θυμηθούμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι το έργο που παράγει το ελατήριο στο σώμα, καθώς το τελευταίο κινείται από το $x = x_i$ στο $x = x_f$, είναι

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

Λέμε ότι η ποσότητα $\frac{1}{2}kx^2$ είναι η **ελαστική δυναμική ενέργεια** που αποθηκεύθηκε στο ελατήριο και τη συμβολίζουμε με U_s:

Δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη σε ελατήριο

$$U_s = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{8.14}$$

Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται είναι μηδενική όταν το ελατήριο δεν είναι συμπιεσμένο ($x = 0$). Τέλος, η U_s παίρνει τη *μέγιστη* τιμή της όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη συμπίεση (Σχήμα 8.9 c). Ας σημειωθεί ότι η U_s είναι *πάντοτε* θετική, αφού είναι ανάλογη προς το x^2.

Η ολική μηχανική ενέργεια τού συστήματος (σώμα + ελατήριο) είναι λοιπόν

$$E = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + \tfrac{1}{2}kx_i^2 = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f^2 \tag{8.15}$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή στο σύστημα που περιγράφεται στο Σχήμα 8.9 και, εφόσον $x_i = 0$, έχουμε

$$E = \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f^2 \tag{8.16}$$

Η σχέση αυτή λέει ότι για οποιαδήποτε μετατόπιση τού ελατηρίου x_f και ταχύτητα τού σώματος v_f, το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας συν τη δυναμική ενέργεια ισούται με τη *σταθερά E*, που είναι η ολική ενέργεια. Στο παράδειγμά μας η ολική ενέργεια ισούται με την αρχική κινητική ενέργεια τού σώματος.

Υποθέστε τώρα ότι μη διατηρητικές δυνάμεις δρουν πάνω στο σύστημα σώμα-ελατήριο. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας στη μορφή τής Εξίσωσης 8.13 και τότε έχουμε

$$W_{nc} = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f^2) - (\tfrac{1}{2}mv_i^2 + \tfrac{1}{2}kx_i^2) \tag{8.17}$$

Δηλαδή, η ολική μηχανική ενέργεια δεν παραμένει σταθερή όταν μη διατηρητικές δυνάμεις δρουν πάνω στο σύστημα. Όταν το W_{nc} οφείλεται σε δύναμη τριβής, τότε το W_{nc} είναι *αρνητικό* και η τελική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική ενέργεια.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Όπως είδαμε, πολλά προβλήματα στη Φυσική μπορούν να λυθούν με την εφαρμογή τής αρχής τής διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Αργότερα θα δούμε και άλλα παραδείγματα, ειδικά με συστήματα στα οποία υπεισέρχονται ελατήρια. Για να εφαρμόσετε λοιπόν την αρχή αυτή, ακολουθήστε τα ακόλουθα βήματα:

1. Ορίστε το σύστημά σας, που μπορεί να αποτελείται από περισσότερα τού ενός αντικείμενα.
2. Επιλέξετε την θέση αναφοράς που αντιστοιχεί στο μηδέν τής δυναμικής ενέργειας (βαρυτικής ή ελατηρίου) και χρησιμοποιήστε την κατά τον ίδιο τρόπο σε όλη την ανάλυσή σας. Εάν υπάρχουν περισσότερες τής μιας διατηρητικές δυνάμεις, μην ξεχάσετε να γράψετε την έκφραση που αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις διατηρητικές δυνάμεις. (Τα Παραδείγματα 8.6 και 8.8 που ακολουθούν αναφέρονται σε συστήματα με ελατήρια και με αντικείμενα των οποίων η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται).
3. Προσδιορίστε κατά πόσον υπάρχουν ή όχι δυνάμεις τριβής. Μην ξεχνάτε ότι εάν υπάρχουν τριβές ή αντίσταση τού αέρα, τότε η μηχανική ενέργεια *δεν διατηρείται*.
4. Εάν διατηρείται η μηχανική ενέργεια, τότε γράψτε την ολική αρχική ενέργεια E_i σε κάποιο σημείο ως άθροισμα τής κινητικής συν την δυναμική ενέργεια. Κατόπιν γράψτε μια σχέση για την τελική ολική ενέργεια $E_f = K_f + U_f$, η οποία αντιστοιχεί στο τελικό σημείο που σάς ενδιαφέρει. Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται, μπορείτε να εξισώσετε τις δύο ολικές ενέργειες και να λύσετε ως προς την άγνωστη ποσότητα.
5. Εάν υπάρχουν δυνάμεις τριβής, τότε πρέπει πρώτα να γράψετε εκφράσεις για την αρχική και την τελική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή όμως η ολική τελική ενέργεια διαφέρει από την ολική αρχική ενέργεια. Η διαφορά τους είναι το έργο που παράγουν οι μη διατηρητικές δυνάμεις. Δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $W_{nc} = E_f - E_i$, όπως στα Παραδείγματα 8.4b και 8.5.

ΑΥΤΗ 5ος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.6 Το όπλο με ελατήριο

Ο μηχανισμός ενός όπλου-παιχνιδιού αποτελείται από ένα ελατήριο άγνωστης σταθεράς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.10a. Όταν το όπλο είναι ακίνητο και κατευθύνεται προς τα πάνω και το ελατήριο συμπιεστεί κατά 0.12 m, τότε το όπλο εκτοξεύει ένα μπαλλάκι μάζας 20 g σε ύψος 20 m. Αγνοήστε όλες τις αντιστάσεις και: (a) Προσδιορίστε την τιμή τής σταθεράς τού ελατηρίου.

Λύση Αφού το μπαλλάκι ξεκινά από την κατάσταση ηρεμίας, η αρχική κινητική ενέργεια τού συστήματος είναι μηδενική. Εάν λάβουμε ως δεδομένο ότι το επίπεδο αναφοράς τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας συμπίπτει με το χαμηλότερο σημείο στο οποίο βρίσκεται η μπάλλα, τότε η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Επομένως, η ολική ενέργεια τού συστήματος ισούται με την ελαστική δυναμική ενέργεια τού ελατηρίου, που είναι $kx^2/2$, όπου $x = 0.12$ m. Όταν το μπαλλάκι φτάσει στο μέγιστο ύψος του, που είναι 20 m, η βαρυτική δυναμική ενέργεια που έχει είναι mgh, η κινητική ενέργειά του είναι μηδενική και η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι επίσης μηδενική. Εφόσον δεν υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = mgh$$

$$\tfrac{1}{2}k(0.12\ \text{m})^2 = (0.02\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})$$

ή

$$k = \boxed{544\ \text{N/m}}$$

9ος

(b) Βρείτε το μέτρο ταχύτητας τής μπάλλας καθώς αυτή διέρχεται από το σημείο ισορροπίας τού ελατηρίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.10b.

Λύση Χρησιμοποιούμε το ίδιο επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, όπως και στο μέρος (a), και βλέπουμε ότι η αρχική ενέργεια τού συστήματος εξακολουθεί να είναι η ελαστική δυναμική ενέργεια $kx^2/2$. Η τελική ενέργεια τού συστήματος καθώς η μπάλλα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας τού ελατηρίου είναι η κινητική ενέργεια τής μπάλλας, $mv^2/2$, και η βαρυτική δυναμική ενέργεια τής μπάλλας mgx. Επομένως, εφαρμόζουμε την περίπτωση τής διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgx$$

Λύνουμε ως προς το v και βρίσκουμε

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx}$$

Σχήμα 8.10 Παράδειγμα 8.6.

$$v = \sqrt{\frac{(544\ \text{N/m})(0.12\ \text{m})^2}{(0.02\ \text{kg})} - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.12\ \text{m})}$$

$$= \boxed{19.7\ \text{m/s}}$$

Άσκηση 4 Ποια είναι η ταχύτητα τής μπάλλας όταν αυτή βρίσκεται σε ύψος 10 m;
Απάντηση 14.0 m/s

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.7 Σύγκρουση σώματος-ελατηρίου

Σώμα μάζας 0.80 kg ωθείται με αρχική ταχύτητα v_i = 1.2 m/s προς τα δεξιά και συγκρούεται με αβαρές ελατήριο ελαστικής σταθεράς k = 50 N/m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.9. (a) Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια είναι λεία, υπολογίστε την αρχική μέγιστη συμπίεση τού ελατηρίου μετά τη σύγκρουση.

Λύση Εφόσον δεν υπάρχουν τριβές, W_{nc} = 0, και η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 8.15 στο σύστημα, με v_f = 0, και έχουμε

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_i = \sqrt{\frac{0.8\ \text{kg}}{50\ \text{N/m}}}\,(1.2\ \text{m/s}) = \boxed{0.152\ \text{m}}$$

(b) Θεωρήστε ότι μια σταθερή δύναμη τριβής δρα ανάμεσα στο σώμα και στην επιφάνεια με μ = 0.5. Εάν το μέτρο ταχύτητας τού σώματος, τη στιγμή που συγκρούεται με το ελατήριο, είναι v_i = 1.2 m/s, ποια είναι η μέγιστη συμπίεση τού ελατηρίου;

Λύση Στην περίπτωση αυτή η μηχανική ενέργεια τού συστήματος *δεν* διατηρείται, γιατί υπάρχει τριβή, η οποία παράγει αρνητικό έργο στο σύστημα. Το μέτρο τής δύναμης τριβής είναι

$$f = \mu N = \mu mg = 0.5(0.80\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3.92\ \text{N}$$

Επομένως, το έργο που παράγει η δύναμη τής τριβής καθώς το σώμα μετατοπίζεται από το σημείο $x_i = 0$ στο $x_f = x$ είναι

$$W_{nc} = -fx = (-3.92x)\ \text{J}$$

Θέτουμε το παραπάνω στην εξίσωση 8.17 και έχουμε

$$W_{nc} = (0 + \tfrac{1}{2}kx^2) - (\tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0)$$

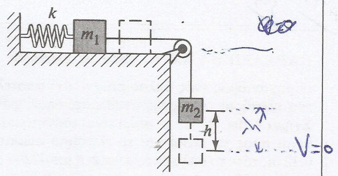
$$-3.92x = \frac{50}{2}x^2 - \frac{1}{2}(0.80)(1.2)^2$$

$$25x^2 + 3.92x - 0.576 = 0$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x και βρίσκουμε x = 0.0924 m και x = − 0.249 m. Η λύση που είναι από φυσική άποψη αποδεκτή είναι η x = 0.0924 m = 9.24 cm. Η αρνητική λύση δεν είναι αποδεκτή, διότι το σώμα πρέπει να μεταβεί προς την άλλη πλευρά τής αρχής τών συντεταγμένων, αφού πρώτα ακινητοποιηθεί. Να σημειωθεί ότι το 9.24 cm είναι *μικρότερο* από την αντίστοιχη απόσταση τής περίπτωσης (a), κατά την οποία δεν υπάρχουν τριβές. Αυτό ήταν επόμενο, αφού η τριβή επιβραδύνει την κίνηση τού συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.8 Κινούμενα συνδεδεμένα σώματα

Δύο σώματα συνδέονται με ένα ελαφρό νήμα που περνάει γύρω από μια τροχαλία χωρίς τριβές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.11. Το σώμα με μάζα m_1 κείται πάνω σε τραχιά επιφάνεια και είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο ενώ ήταν ακίνητο και το ελατήριο δεν είχε εκταθεί. Υπολογίστε τον συντελεστή τριβής ολισθήσεως ανάμεσα στο σώμα m_1 και στην επιφάνεια, όταν το σώμα m_2 κατεβεί αφού διανύσει απόσταση h προτού σταματήσει.



Σχήμα 8.11 (Παράδειγμα 8.8) Καθώς το σύστημα κινείται από το μεγαλύτερο ύψος τού m_2 στο μικρότερο, το σύστημα χάνει βαρυτική δυναμική ενέργεια αλλά κερδίζει δυναμική ελαστική ενέργεια, πού αποθηκεύεται στο ελατήριο. Υπάρχουν όμως απώλειες μηχανικής ενέργειας λόγω τής τριβής ανάμεσα στο m_1 και στην επιφάνεια.

Λύση Στο πρόβλημα αυτό πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν δύο είδη δυναμικής ενέργειας: τη βαρυτική δυναμική ενέργεια και την ελαστική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας

$$(1) \qquad W_{nc} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s$$

όπου ΔU_g είναι η *μεταβολή* τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και ΔU_s είναι η *μεταβολή* τής ελαστικής δυναμικής ενέργειας τού συστήματος. Στην περίπτωση αυτή $\Delta k = 0$, γιατί η αρχική και η τελική ταχύτητα τού συστήματος είναι μηδενική. Επίσης, εάν W_{nc} είναι το έργο που παράγει η τριβή, τότε

$$(2) \qquad W_{nc} = -fh = -\mu m_1 gh$$

Η μεταβολή τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας προέρχεται μόνο από το σώμα m_2, επειδή η κατακόρυφη συνιστώσα τού m_1 δεν μεταβάλλεται. Επομένως έχουμε

$$(3) \qquad \Delta U_g = U_f - U_i = -m_2 gh$$

όπου μετρήσαμε τις συντεταγμένες αρχίζοντας από τη χαμηλότερη θέση τού m_2. Η μεταβολή τής ελαστικής δυναμικής ενέργειας τού ελατηρίου είναι

$$(4) \qquad \Delta U_s = U_f - U_i = \tfrac{1}{2}kh^2 - 0$$

Θέτουμε τις (2), (3) και (4) στην (1) και βρίσκουμε

$$-\mu m_1 gh = -m_2 gh + \tfrac{1}{2}kh^2$$

$$\mu = \frac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι αυτό το παράδειγμα μάς δίνει την πειραματική τεχνική μέτρησης τού συντελεστή τριβής ολισθήσεως. Λογουχάρη, εάν $m_1 = 0.50$ kg, $m_2 = 0.30$ kg, $k = 50$ N/m και $h = 5.0 \times 10^{-2}$ m, βρίσκουμε ότι

$$\mu = \frac{(0.30\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \frac{1}{2}\left(50\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(5.0 \times 10^{-2}\ \text{m})}{(0.50\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

$$= 0.345$$

8.7 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στα προηγούμενα μέρη τού κεφαλαίου αυτού είδαμε ότι η έννοια τής δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος σχετίζεται άμεσα με τη διάταξη τού συστήματος στον χώρο, δηλαδή με τις συντεταγμένες τού συστήματος. Είδαμε με λίγα παραδείγματα πώς υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια όταν μάς είναι γνωστή η διατηρητική δύναμη. (Μην ξεχνάτε ότι η έννοια τής δυναμικής ενέργειας ορίζεται μόνο για διατηρητικές δυνάμεις).

Σύμφωνα με την Εξίσωση 8.1, η μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας ενός σώματος υπό τη δράση μιας διατηρητικής δύναμης ισούται με το αρνητικό τού έργου που παράγει η δύναμη αυτή. Εάν το σύστημα μετατοπιστεί λ.χ. απειροστά, μπορούμε να εκφράσουμε την αντιστοιχούσα απειροστή μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας, dU, ως

$$dU = -F_x\, dx$$

Επομένως, η διατηρητική δύναμη σχετίζεται με την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \tag{8.18}$$

Σχέση που συνδέει τη δύναμη και τη δυναμική ενέργεια

Δηλαδή[3], *η διατηρητική δύναμη ισούται με το αρνητικό τής παραγώγου τής δυναμικής ενέργειας ως προς x.*

Μπορούμε εύκολα να εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή στα παραδείγματα που μελετήσαμε. Για την περίπτωση τού παραμορφωμένου ελατηρίου $U_s = \frac{1}{2}kx^2$, επομένως

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

που είναι η γνωστή μας δύναμη επαναφοράς ελατηρίου. Ξέρουμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $U_g = mgy$. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 8.18 και βρίσκουμε τη γνωστή $F_g = -mg$.

[3] Στα προβλήματα που έχουν σχέση με τον τρισδιάστατο χώρο, η δυναμική ενέργεια U εξαρτάται από τα x, y και z. Συνδέεται με την U μέσω τής σχέσης $\mathbf{F} = -\mathbf{i}\,\partial U/\partial x - \mathbf{j}\,\partial U/\partial y - \mathbf{k}\,\partial U/\partial z$, όπου $\partial/\partial x$ κ.λπ. είναι μερικές παράγωγοι. Στη γλώσσα τού διανυσματικού λογισμού λέμε ότι η δύναμη $\mathbf{F}$ ισούται με το αρνητικό τής βαθμίδας (gradient) τής μονόμετρης ποσότητας $U(x, y, z)$.

Βλέπουμε λοιπόν πόσο σημαντική είναι η συνάρτηση U, αφού απλώς με μία παραγώγιση μόνον μπορούμε να βρούμε την αντιστοιχούσα διατηρητική δύναμη. Τέλος, η Εξίσωση 8.18 αποσαφηνίζει ότι δεν έχει καμιά σημασία εάν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε μια σταθερή ποσότητα στη δυναμική ενέργεια.

Σχήμα 8.12 (a) Η δυναμική ενέργεια συναρτήσει τής μετατόπισης x για το σύστημα ελατηρίου-σώματος τού (b). Το σώμα ταλαντώνεται ανάμεσα στα ακραία σημεία, που έχουν συντεταγμένες $x = \pm x_m$. Σημειώστε ότι η δύναμη επαναφοράς τού ελατηρίου κατευθύνεται πάντοτε προς το $x = 0$, που είναι η θέση ευσταθούς ισορροπίας.

*8.8 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Εάν αναλύσουμε την καμπύλη δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος, μπορούμε να καταλάβουμε την ποιοτική συμπεριφορά τής κίνησής του. Θεωρήστε τη συνάρτηση τής δυναμικής ενέργειας τού συστήματος μάζα-ελατήριο, $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Το Σχήμα 8.12a δείχνει τη γραφική παράσταση τής δυναμικής ενέργειας ως προς x. Η δύναμη σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια U διά μέσου τής σχέσης

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

Δηλαδή, η δύναμη ισούται με το αρνητικό τής *κλίσης* τής καμπύλης U προς x. Εάν βάλουμε μια ηρεμούσα μάζα στη θέση τής ισορροπίας ($x = 0$), όπου $F = 0$, αυτή θα παραμείνει εκεί, εκτός εάν δράσει επάνω της μια εξωτερική δύναμη. Εάν εκτείνουμε το ελατήριο, παραμορφώνοντάς το ενώ βρισκόταν σε θέση ισορροπίας, το x είναι θετικό και η κλίση dU/dx είναι θετική. Επομένως η δύναμη $\boldsymbol{F}_s$ είναι αρνητική και η μάζα επιταχύνεται πίσω, προς το $x = 0$. Εάν συμπιέσουμε όμως το ελατήριο, τότε το x είναι αρνητικό και η κλίση είναι αρνητική. Επομένως η δύναμη $\boldsymbol{F}_s$ είναι θετική και η μάζα επιταχύνεται και πάλι προς το $x = 0$.

Ευσταθής ισορροπία

Από την ανάλυση αυτή συμπεραίνουμε ότι η θέση $x = 0$ είναι θέση **ευσταθούς ισορροπίας.** Δηλαδή, οποιαδήποτε μετατόπιση από τη θέση αυτή συνεπάγεται τη δημιουργία δύναμης που κατευθύνεται πίσω, προς το $x = 0$. Γενικά, *οι θέσεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στα σημεία εκείνα στα οποία η $U(x)$ έχει την ελάχιστη τιμή της.*

Από το Σχήμα 8.12 βλέπουμε ότι εάν μετατοπίσουμε τη μάζα κατά x_m και τήν αφήσουμε ελεύθερη ενώ βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας, τότε η αρχική ολική της ενέργεια θα ισούται με τη δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευθεί στο ελατήριο και είναι $\frac{1}{2}k{x_m}^2$. Καθώς αρχίζει η κίνηση, το σύστημα αποκτά κινητική ενέργεια την οποία προσλαμβάνει από τη δυναμική του ενέργεια, η οποία μειώνεται αντίστοιχα. Αυτή η συνεχής μετατροπή μορφής ενέργειας ανάμεσα στη δυναμική και την κινητική γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στιγμή η ολική ενέργεια να είναι σταθερή. Έτσι η μάζα ταλαντώνεται ανάμεσα στα σημεία $x = \pm x_m$, τα οποία λέγονται *σημεία καμπής.* Μάλιστα, εφόσον δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας (δεν υπάρχει τριβή), η μάζα θα ταλαντώνεται ανάμεσα στο $+x_m$ και στο $-x_m$ διηνεκώς. (Θα μελετήσουμε τις ταλαντώνσεις αυτές στο Κεφάλαιο 13). Η ολική ενέργεια τού συστήματος δεν μπορεί να υπερβεί το $\frac{1}{2}k{x_m}^2$, επομένως η μάζα σταματά στα σημεία αυτά και υποχρεώνεται από τη δύναμη τού ελατηρίου να επιταχυνθεί προς το $x = 0$.

Ένα άλλο απλό μηχανικό σύστημα που έχει θέση ευσταθούς ισορροπίας αποτελείται από μια σφαίρα η οποία κυλίεται μέσα σε μια σφαιρική γυάλα. Εάν η σφαίρα μετατοπιστεί από την αρχική θέση της, όταν αφεθεί ελεύθερη θα επιστρέψει στην θέση ισορροπίας.

Σχήμα 8.13 Γραφική παράσταση τού U ως προς x για ένα σύστημα που έχει ασταθή ισορροπία στο σημείο $x = 0$. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη που ασκείται για πεπερασμένες μετατοπίσεις κατευθύνεται μακριά από το $x = 0$.

Θεωρήστε την καμπύλη U προς x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.13. Στην περίπτωση αυτή όταν $x = 0$, τότε $F_x = 0$, επομένως το σώμα ισορροπεί σε αυτό το σημείο. Πάντως, αυτή είναι θέση **ασταθούς ισορροπίας** για τους εξής λόγους: Υποθέστε ότι το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά ($x > 0$). Η κλίση τής καμπύλης είναι αρνητική για $x > 0$. Έτσι η $F_x = -\,dU/dx$ είναι θετική και το σώμα θα επιταχυνθεί μακριά από το $x = 0$. Υποθέστε τώρα ότι το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά ($x < 0$). Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη είναι *αρνητική* επειδή η κλίση είναι θετική για $x < 0$. Επομένως, και πάλι το σώμα θα επιταχυνθεί απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας. Έτσι, στην περίπτωση αυτή η θέση $x = 0$ ονομάζεται θέση *ασταθούς ισορροπίας*, επειδή για οποιαδήποτε μετατόπιση από το σημείο αυτό η δύναμη ωθεί το σώμα να απομακρυνθεί από το σημείο ισορροπίας. Μάλιστα, η δύναμη ωθεί το σώμα να καταλάβει τη θέση τής χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Μια σφαίρα που είναι πάνω στην κορυφή μιας αναποδογυρισμένης σφαιρικής γυάλας, βρίσκεται προφανώς σε θέση ασταθούς ισορροπίας. Δηλαδή, εάν μετατοπίσουμε λίγο τη σφαίρα από την κορυφή και τήν αφήσουμε ελεύθερη, η σφαίρα θα κυλήσει μακριά από τη γυάλα. Γενικά, *οι θέσεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στα σημεία όπου η $U(x)$ είναι μέγιστη*[(4)].

Τέλος, μπορεί να έχουμε την περίπτωση κατά την οποία η U είναι σταθερή σε μια περιοχή και επομένως $F = 0$. Αυτό λέγεται σημείο **αδιάφορης ισορροπίας.** Εάν μετατοπιστεί το σώμα λίγο, δεν δημιουργείται καμία δύναμη. Τέτοια περίπτωση αποτελεί μια σφαίρα που κείται πάνω σε επίπεδη οριζόντια επιφάνεια.

Αδιάφορη ισορροπία

8.9 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Είδαμε ότι η ολική μηχανική ενέργεια ενός συστήματος διατηρείται μόνον όταν όλες οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα είναι διατηρητικές. Μπορέσαμε επίσης να αντιστοιχήσουμε ανά μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας για κάθε διατηρητική δύναμη. Με άλλα λόγια, μηχανική ενέργεια χάνεται κάθε φορά που υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις, όπως είναι π.χ. η τριβή.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την αρχή διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω στο σύστημα, διατηρητικές και μη διατηρητικές. Όταν μελετήσουμε τη Θερμοδυναμική, θα δούμε ότι η μηχανική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε θερμική ενέργεια. Λογουχάρη, όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε μια τραχιά επιφάνεια, η μηχανική ενέργεια την οποία χάνει μετατρέπεται προσωρινά σε εσωτερική ενέργεια, που αποθηκεύεται στο σώμα και στο περιβάλλον του, όπως φαίνεται από την αύξηση τής μετρούμενης θερμοκρασίας. Στο ατομικό επίπεδο θα δούμε ότι αυτή η εσωτερική ενέργεια σχετίζεται με τις ταλαντώσεις τών ατόμων γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Οι ατομικές αυτές κινήσεις έχουν κινητική και δυναμική ενέργεια, διότι οφείλονται στις διατηρητικές ηλεκτροστατικές δυνάμεις[(5)]. Επομένως, εάν συμπεριλάβουμε την αύξηση αυτή τής εσωτερικής ενέργειας τού συστήματος στο θεώρημα έργου-ενέργειας, μπορούμε να πούμε ότι η ολική ενέργεια διατηρείται.

Το παραπάνω είναι ένα απλό παράδειγμα τού πώς μπορούμε να αναλύσουμε ένα σύστημα και να βεβαιωθούμε ότι η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερή. **Μην ξεχνάτε** όμως ότι πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν όλες οι μορφές ενέργειας που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Δηλαδή, *η ενέργεια ποτέ δεν καταστρέφεται και ποτέ δεν δημιουργείται. Η ενέργεια όμως μεταβάλλει μορφές έτσι ώστε* ***κάθε στιγμή*** *η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος είναι σταθερή*. Εάν θέλετε να δείτε το θέμα από «κοσμική» σκοπιά, μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα διατήρησης τής ενέργειας ως εξής: ***η ολική ενέργεια τού Σύμπαντος είναι σταθερή.*** *Επομένως εάν σε κάποιο μέρος τού Σύμπαντος αυξηθεί η ενέργεια, με την πρόσκτηση ενέργειας κάποιας μορφής,* ***ταυτόχρονα,*** *σε ένα άλλο μέρος τού Σύμπαντος πρέπει να μειωθεί,* ***ισόποσα,*** *η ενέργεια με την απώλεια ενέργειας κάποιας (όχι απαραίτητα τής ίδιας) μορφής.* ***Μέχρι σήμερα δεν γνωρίζουμε καμία περίπτωση στην οποία να μην ισχύει αυτός ο νόμος.***

Η ολική ενέργεια διατηρείται πάντοτε

---

(4) Μπορείτε να ελέγξετε με μαθηματικό τρόπο κατά πόσον μια ακραία τιμή τής U είναι θέση ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας εάν βρείτε το πρόσημο τής δεύτερης παραγώγου, d^2U/dx^2.

(5) Εάν εισαγάγουμε την έννοια μιας μη διατηρητικής δύναμης, τής τριβής, μπορούμε να περιορίσουμε τον αριθμό τών μελών τού συστήματος που μελετούμε. Στην πράξη, δηλαδή, ξεπερνάμε το «πρακτικά» πολύπλοκο πρόβλημα τής περιγραφής τής δυναμικής 10^{23} ατόμων ή μορίων και τών αλληλεπιδράσεών τους αντικαθιστώντας το συλλογικό αποτέλεσμά τους με την δύναμη τής τριβής. Έτσι μπορούμε και απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς που πρέπει να κάνουμε σε μακροσκοπικό επίπεδο. Στο επίπεδο τού μικροκόσμου, δεν μπορεί να οριστεί η δύναμη τής τριβής.

Δηλαδή, όλα τα πειράματα που έχουν γίνει μέχρι σήμερα επιβεβαιώνουν τη θεμελιώδη αυτή αρχή τής Φυσικής, την αρχή τής διατήρησης τής ολικής ενέργειας ενός απομονωμένου συστήματος.

Ορισμένα παραδείγματα μετατροπής τής ενέργειας είναι: η ενέργεια την οποία μεταφέρουν τα ηχητικά κύματα που δημιουργούνται από την κρούση μεταξύ δύο αντικειμένων· η ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων την οποία εκπέμπουν επιταχυνόμενα φορτισμένα σωματίδια (λ.χ. από μια κεραία πομπού ασυρμάτου)· η ενέργεια που εκλύεται στις πυρηνικές αντιδράσεις κατά τις οποίες συντελείται μεταστοιχείωση· το φαγητό που τρώμε.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι η έννοια τής ενέργειας και ειδικά η μετατροπή ενέργειας σε διάφορες μορφές συνδέει τα διάφορα μέρη τής Φυσικής. Με άλλα λόγια, δεν μπορείτε να ξεχωρήσετε τη Μηχανική από τον Ηλεκτρομαγνητισμό ή από τη Θερμοδυναμική. Τέλος, ας μη λησμονούμε ότι, στην πράξη, όλες οι μηχανές και οι ηλεκτρονικές συσκευές στηρίζονται σε κάποιο φαινόμενο μετατροπής ενέργειας.

*8.10 ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΑΖΑΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τη θεμελιώδη αρχή τής διατήρησης τής ενέργειας και τις εφαρμογές της σε διάφορα φυσικά φαινόμενα. Μέχρι τις αρχές τού εικοστού αιώνα, οι φυσικοί πίστευαν ότι υπάρχει και ένας άλλος βασικός νόμος, **ο νόμος διατήρησης τής μάζας,** σύμφωνα με τον οποίο στα συνήθη φυσικά ή χημικά φαινόμενα *η ύλη δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται.* Δηλαδή, η μάζα την οποία έχει ένα σύστημα στην αρχή μιας διαδικασίας είναι ίση με την μάζα τού συστήματος μετά τη λήξη τής διαδικασίας.

Στο σημείο αυτό, φαίνεται ότι η μάζα και η ενέργεια είναι δύο ποσότητες που διατηρούνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Πλην όμως, το 1905, ο Einstein διατύπωσε τη γνώμη ότι η ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε μάζα και η μάζα μπορεί να μετατραπεί σε ενέργεια. Η μάζα και η ενέργεια δεν διατηρούνται ξεχωριστά, ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά διατηρούνται μαζί, άρρηκτα συνδεδεμένες, ως ενιαία ποσότητα που λέγεται *μάζα-ενέργεια.* Έτσι θεωρούμε ότι *η μάζα και η ενέργεια είναι ισοδύναμες έννοιες.* Ο Einstein διατύπωσε τη σχέση που συνδέει τη μάζα με την ενέργεια:

$$\boxed{E_0 = mc^2} \tag{8.19}$$

όπου c είναι η ταχύτητα τού φωτός ($c \approx 3 \times 10^8$ m/s), E_0 είναι η ενέργεια που ισοδυναμεί στη μάζα m. Στη θεωρία τής σχετικότητας η μάζα m που αντιστοιχεί σε ένα ακίνητο σώμα λέγεται **μάζα ηρεμίας** και η ενέργεια E_0 που αντιστοιχεί σ' αυτήν λέγεται **ενέργεια ηρεμίας.** Στο Κεφάλαιο 39 θα δούμε ότι η μάζα αυξάνεται συναρτήσει τής ταχύτητας. Αυτό όμως δεν πρέπει να μάς απασχολεί εφόσον $v \ll c$. Έτσι, οι μάζες που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε φυσικά φαινόμενα τής καθημερινής εμπειρίας είναι μάζες ηρεμίας.

Η ενέργεια ηρεμίας που αντιστοιχεί σε μια μικρή ποσότητα ύλης είναι πράγματι τεράστια. Λογουχάρη, η ενέργεια ηρεμίας που αντιστοιχεί σε μάζα 1 kg *οποιασδήποτε* ουσίας είναι

$$E_0 = mc^2 = (1 \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{16} \text{ J}$$

Με τα σημερινά μέσα μετατροπής ενέργειας, χρειαζόμαστε 15 εκατομμύρια βαρέλια αργού πετρελαίου για να έχουμε αυτή την ενέργεια. Να σημειωθεί ότι τόση είναι η συνολική ημερήσια κατανάλωση ενέργειας στις ΗΠΑ. Προφανώς, εάν ξέραμε πώς να μετατρέψουμε εύκολα αυτήν την ενέργεια σε χρήσιμο έργο, δεν θα υπήρχε ενεργειακό πρόβλημα, διότι, πράγματι, θα είχαμε στη διάθεσή μας αστείρευτες ποσότητες ενέργειας.

Στην πράξη, η ύλη δεν μετατρέπεται σε ενέργεια εύκολα, εκτός από μερικές περιπτώσεις κατά τις οποίες πράγματι ένα σημαντικό ποσοστό τής διαθέσιμης ενέργειας ηρεμίας μετατρέπεται σε χρήσιμο έργο. Τέτοια παραδείγματα έχουμε στις πυρηνικές αντιδράσεις κατά τις οποίες είναι σύνηθες να παρατηρούμε τη μετατροπή τού 10^{-3} περίπου τής μάζας σε ενέργεια. Έτσι συντελείται τεράστια έκλυση ενέργειας όταν ένας πυρήνας ουρανίου-235 σχάται σε δύο μικρότερους. Τότε εκλύεται ενέργεια, διότι η μάζα τού πυρήνα τού ^{235}U είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα τών μαζών τών προϊόντων τής σχάσης. Οι εκρήξεις τών πυρηνικών όπλων αποτελούν τραγική επιβεβαίωση τής αλήθειας ότι σε τέτοιες αντιδράσεις εκλύονται τεράστιες ενέργειες.

Εφόσον η μάζα και η ενέργεια ενός συστήματος μετατρέπονται ταυτόχρονα και αμοιβαία, τίς θεωρούμε ότι είναι διαφορετικές όψεις μιας και τής αυτής ποσότητας, που τήν ονομάζουμε μάζα-ενέργεια. Ο νόμος διατήρησης λοιπόν ορίζει ότι *η μάζα-ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερή.*

Από την Εξίσωση 8.19, που ορίζει τη σχέση μάζας-ενέργειας, προκύπτει ότι η *ενέργεια έχει μάζα.* Κάθε φορά που μεταβάλλεται η ενέργεια ενός σώματος, μεταβάλλεται και η μάζα του, σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \tag{8.20}$$

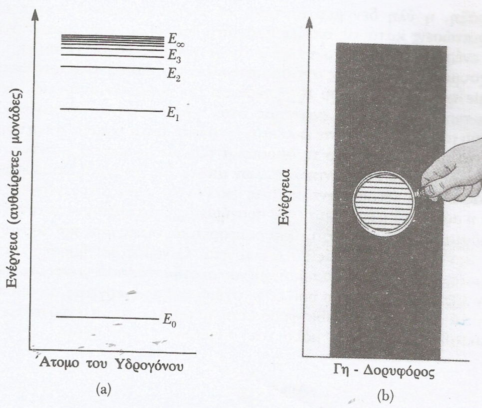
Στα συνήθη πειράματα, εάν προσδώσουμε σε ένα σώμα ενέργεια ΔE υπό οποιαδήποτε μορφή (π.χ. κινητική, δυναμική ή θερμική ενέργεια), η μάζα του μεταβάλλεται κατά $\Delta m = \Delta E/c^2$. Επειδή όμως το c^2 είναι πολύ μεγάλο, η μεταβολή στη μάζα είναι πολύ μικρή, και γι' αυτό είναι πολύ δύσκολο να τή μετρήσουμε με ένα απλό πείραμα.

*8.11 ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ίσως ήδη να γνωρίζετε ότι στο σύνολό της η κοινή ύλη αποτελείται από άτομα και ότι κάθε άτομο είναι ένα σύστημα ηλεκτρονίων και πυρήνα. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι στην κλίμακα τού ατόμου η ύλη δεν είναι συνεχής, όπως φαίνεται στα μάτια μας, αλλά υπάρχει σε διακεκριμμένες (δηλαδή ξεχωριστές) ποσότητες, οι οποίες αντιστοιχούν στις ατομικές μάζες. Στη γλώσσα τής σύγχρονης Φυσικής λέμε ότι η μάζα είναι *κβαντισμένη*. Όπως θα δούμε αργότερα, πολλές φυσικές ποσότητες, μεταξύ άλλων και η ενέργεια, είναι κβαντισμένες. Ο κβαντισμένος χαρακτήρας τής ενέργειας αποκαλύπτεται κατ' εξοχήν στον ατομικό και υποατομικό κόσμο.

Το άτομο τού υδρογόνου αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται γύρω από ένα πρωτόνιο. Ας μελετήσουμε τα ενεργειακά επίπεδά του. Το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται μόνον σε καθορισμένα ενεργειακά επίπεδα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.14a. Τα ενεργειακά αυτά επίπεδα λέγονται *κβαντικές στάθμες (καταστάσεις)*. Η χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη λέγεται *θεμελιώδης στάθμη (κατάσταση)* τού ατόμου και συμβολίζεται με E_0. Η θεμελιώδης αυτή κατάσταση αντιστοιχεί συνήθως στην περίπτωση που το άτομο είναι απομονωμένο. Το άτομο μπορεί να μεταπέσει σε καταστάσεις μεγαλύτερης ενέργειας εάν απορροφήσει ενέργεια από μια εξωτερική πηγή ή αν συγκρουστεί με άλλα άτομα. Η μεγαλύτερη ενέργεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.14a, η E_∞, αντιστοιχεί στην ενέργεια που πρέπει να προσδοθεί στο ηλεκτρόνιο τού ατόμου ώστε αυτό να απομακρυνθεί από το πρωτόνιο και λέγεται ενέργεια *ιοντισμού*. [Σημ. μετφρ.: *ιοντισμός* και όχι *ιονισμός* είναι νομίζουμε η ορθή απόδοση τού αντίστοιχου αντιδάνειου όρου (πρβλ. αγγλ. ionization, γαλλ. ionisation, γερμ. Ionisation)]. Ας σημειωθεί ότι οι ενεργειακές στάθμες πυκνώνουν προς το επάνω μέρος τής ενεργειακής κλίμακας.

Ας μελετήσουμε τώρα έναν δορυφόρο που περιφέρεται γύρω από τη Γη. Εάν σάς ζητούσαν να περιγράψετε την ενέργεια την οποία πιθανόν έχει ο δορυφόρος, δεν θα κάνατε μεγάλο λάθος εάν λέγατε ότι ο δορυφόρος μπορεί να έχει οποιαδήποτε ενέργεια επιλέξετε. Αλλά, όπως και στο άτομο τού



Σχήμα 8.14 (a) Ενέργεια τών κβαντικών καταστάσεων τού ατόμου τού υδρογόνου. Η χαμηλότερη ενέργεια *E* αντιστοιχεί στη θεμελιώδη κατάσταση. (b) Η ενέργεια ενός τεχνητού δορυφόρου τής Γης είναι και αυτή κβαντισμένη, αλλά τα ενεργειακά επίπεδα είναι τόσο κοντά μεταξύ τους ώστε δεν ξεχωρίζουν.

υδρογόνου, *οι ενεργειακές στάθμες τού δορυφόρου είναι και αυτές κβαντισμένες.* Ωστόσο, αν σχεδιάζαμε το ενεργειακό διάγραμμα τού δορυφόρου, οι κβαντισμένες αυτές ενεργειακές στάθμες θα βρίσκονταν τόσο κοντά η μία στην άλλη ώστε, στην πράξη, θα αποτελούσαν συνεχές φάσμα καταστάσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.14b. Οι ενεργειακές στάθμες μάλιστα βρίσκονται τόσο κοντά ώστε είναι αδύνατο να πούμε ότι δεν είναι συνεχείς. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατο να αισθανθούμε την κβάντωση τής ενέργειας στον μακρόκοσμο, γι' αυτό και δεν τή λαμβάνουμε υπ' όψιν όταν περιγράφουμε τα φυσικά φαινόμενα τής καθημερινής μας εμπειρίας.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μια δύναμη ονομάζεται **διατηρητική,** εάν το έργο που παράγει όταν δρα πάνω σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα ανάμεσα σε δύο σημεία. Ή, ισοδύναμα, μια δύναμη είναι διατηρητική, εάν το έργο που παράγει είναι μηδενικό όταν το σώμα διαγράφει μία τυχαία κλειστή διαδρομή καθώς επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης. Μια δύναμη που δεν εκπληρώνει τα παραπάνω είναι **μη διατηρητική.**

Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση *U* τής **δυναμικής ενέργειας** μόνον σε σχέση με μία διατηρητική δύναμη. Εάν μια διατηρητική δύναμη ***F*** δρα πάνω σε ένα σώμα που κινείται πάνω στον άξονα τών *x*, από το σημείο x_i στο σημείο x_f, *η μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας ισούται με το αρνητικό τού έργου που παράγει η δύναμη:*

Μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{8.2}$$

Ο νόμος διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας λέει ότι εάν οι δυνάμεις που δρουν πάνω σε ένα σώμα είναι διατηρητικές, τότε η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{8.5}$$

Διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας

Η ολική μηχανική ενέργεια ενός συστήματος ορίζεται ως το άθροισμα τής κινητικής συν τη δυναμική ενέργεια:

$$E \equiv K + U \tag{8.6b}$$

Ολική μηχανική ενέργεια

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που βρίσκεται σε ύψος y πάνω από την επιφάνεια τής Γης είναι

$$U_g \equiv mgy \tag{8.9}$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, το έργο που παράγουν όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω σε ένα σύστημα ισούται με τη μεταβολή τής ολικής μηχανικής ενέργειας τού συστήματος:

$$W_{nc} = E_f - E_i \tag{8.13}$$

Έργο μη διατηρητικών δυνάμεων

Η ελαστική δυναμική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο που έχει σταθερά k είναι

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{8.14}$$

Δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη σε ελατήριο

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Μια μπάλλα τού μπόουλινγκ είναι αναρτημένη με ένα νήμα από την οροφή τού αμφιθεάτρου παραδόσεων Φυσικής. Ο καθηγητής σας εκτρέπει την μπάλλα από τη θέση ισορροπίας, τήν ακουμπάει στη μύτη του και τήν αφήνει ελεύθερη. Πρέπει άραγε να φύγει από τη θέση του για να μην τόν χτυπήσει η μπάλλα καθώς αυτή επιστρέφει; Τί θα συμβεί εάν ο καθηγητής ωθήσει την μπάλλα;

2. Μπορεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος να είναι αρνητική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Κάποιος ρίχνει μια μπάλλα από την ταράτσα ενός κτηρίου, ενώ ένας περαστικός τήν κοιτάζει από τον δρόμο. Συμφωνούν αυτοί οι δύο σε ό,τι αφορά (a) την τιμή τής δυναμικής ενέργειας τής μπάλλας; (b) τη μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας τής μπάλλας; (c) την κινητική ενέργεια τής μπάλλας;

4. Όταν τρέχει ενάς δρομέας στίβου παράγει έργο; (ας σημειωθεί ότι ο δρομέας μπορεί να κινείται ισοταχώς αλλά τα πόδια του και τα χέρια του επιταχύνονται). Πώς επηρεάζει την κατάσταση τού δρομέα η αντίσταση τού αέρα;

5. Όταν περπατούμε, τρέχουμε, πηδούμε κ.λπ., οι μύες τού σώματος ασκούν δύναμη. Αυτή η δύναμη είναι διατηρητική;

6. Παραμένει σταθερή η ολική μηχανική ενέργεια όταν μη διατηρητικές δυνάμεις δρουν σε ένα σύστημα;

7. Πόσους όρους δυναμικής ενέργειας θα έχουμε στην έκφραση τού θεωρήματος έργου-ενέργειας για ένα σύστημα πάνω στο οποίο δρουν τρεις διαφορετικές διατηρητικές δυνάμεις και μία μη διατηρητική;

8. Ένα σώμα είναι αναρτημένο με ένα ελατήριο από την οροφή και ταλαντώνεται (αγνοήστε την αντίσταση τού αέρα). Διατηρείται η ολική ενέργεια τού συστήματος; Πόσα είδη δυναμικής ενέργειας παρατηρείτε;

9. Θεωρήστε μια σφαίρα που είναι σε ένα σημείο της σταθερά συνδεδεμένη από το άκρο μιας ράβδου. Το άλλο άκρο τής ράβδου συνδέεται με ένα σταθεροποιημένο ρουλεμάν έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Ποιες είναι οι θέσεις ευσταθούς και ποιες είναι οι θέσεις ασταθούς ισορροπίας;

10. Μια σφαίρα κυλίεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Σε τί κατάσταση ισορροπίας βρίσκεται η σφαίρα;

11. Μπορεί να υπάρξει φυσικό σύστημα για το οποίο $E - U < 0$;

12. Με τί μοιάζει η γραφική παράσταση τού U ως προς x για ένα σώμα που βρίσκεται σε περιοχή αδιάφορης ισορροπίας;

13. Περιγράψτε τις μετατροπές ενέργειας που συντελούνται κατά τη διάρκεια τών ακόλουθων αθλημάτων: (a) άλματος επί κοντώ· (b) σφαιροβολίας· (c) άλματος σε ύψος. Ποια είναι η πηγή ενέργειας για κάθε περίπτωση;

14. Εξηγήστε τις μετατροπές ενέργειας οι οποίες συντελούνται για να κινηθεί ένα αυτοκίνητο.

15. Μια μπάλλα εκτοξεύεται στον αέρα κατακόρυφα προς τα επάνω. Ποια θέση αντιστοιχεί: (a) στη μέγιστη κινητική ενέργεια; (b) στη μέγιστη δυναμική ενέργεια;

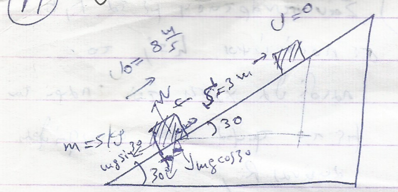
16. Τρεις πανομοιότυπες σφαίρες εκτοξεύονται με το ίδιο μέτρο αρχικής ταχύτητας από την ταράτσα ενός κτηρίου. Η μία οριζόντια, η δεύτερη υπο γωνία *πάνω* από το οριζόντιο επίπεδο και η τρίτη υπό γωνία *κάτω* από το οριζόντιο επίπεδο. Χωρίς να λάβετε υπ' όψιν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

(19) ✓



i) $\Delta K=$;
ii) $\Delta U=$;
iii) $T=$;
iv) $\mu=$;

DONE ✓

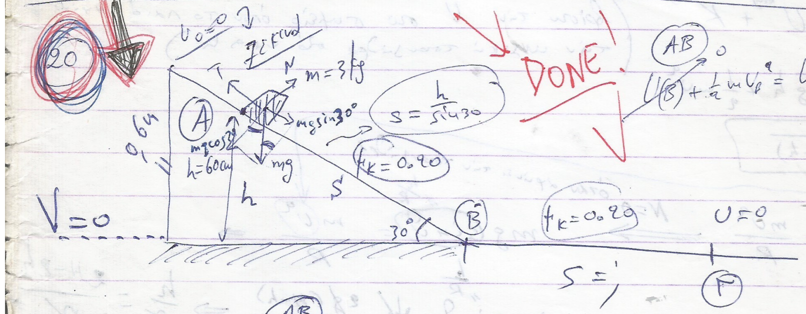
i) $\Delta K = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = -\frac{1}{2} m v_0^2 = -160\,J$

ii) $\Delta U = mg\sin 30\; S = mg\,\frac{1}{2}\,(3m) = 73{,}5\,J$

iii) $W_T = -T\cdot S \Rightarrow -86{,}5 = T\cdot 3 \Rightarrow \boxed{T = 28{,}8\,N}$

iv) $T = \mu N \Rightarrow T = \mu\, mg\cos 30 \Rightarrow \boxed{\mu = 0{,}679}$

(20)



DONE ✓

(AB) $U(B) + \frac{1}{2} m v_B^2 = U(A) + \frac{1}{2} m v_A^2 + \int_0^{h/\sin30} -T\,dx$

THIS 3

(AB)

$W_T = \Delta K + \Delta U_g = \Delta E_{\mu\eta x}$

$\int_0^{\frac{h}{\sin30}} -T\cdot dx = \left(\frac{1}{2} m v_B^2 - 0\right) + (0 - mgh) \Rightarrow$

$\frac{1}{2} m v_B^2 - mgh = W_T = -T\cdot S$ ⊙ $\sin 30 = \frac{h}{S} \Rightarrow \boxed{S = \frac{h}{\sin30}}$

$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgh - T\,\frac{h}{\sin30} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = mgh - \mu\, mg\cos 30\,\frac{h}{\sin30}$ (1)

(BΓ) $\left[U(\Gamma) + \frac{1}{2} m v_\Gamma^2\right] = \left[U(B)\right] + \left[\frac{1}{2} m v_B^2\right] + \int_0^x -T\,dx \Rightarrow$

$0 = (mgh - \mu\, mgh\cot 30°) - \mu\, mg\, x \Rightarrow x = \frac{h - \mu h \cot 30°}{\mu} = 1{,}96\,m$