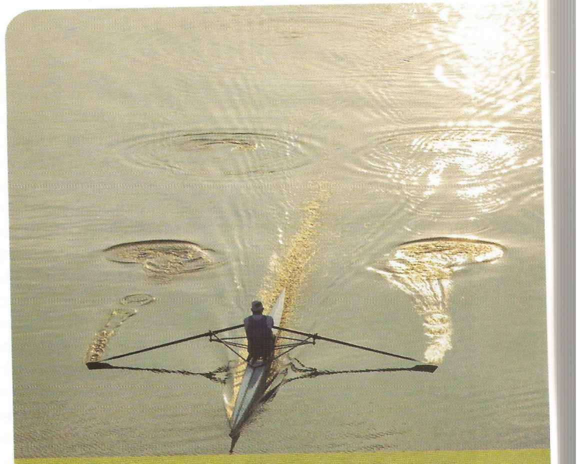
ΔΙΑΛΕΞΗ 5

16/11/2020

κεφάλαιο **M5**

Οι νόμοι της κίνησης



Κωπηλασία σε ήρεμα νερά. Οι δυνάμεις που ασκεί το νερό στα κουπιά επιταχύνουν τη βάρκα. (*Tetra Images/Getty Images*)

Στα Κεφάλαια M2 και M4, *περιγράψαμε* την κίνηση ενός σώματος ως συνάρτηση της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσής του χωρίς να λάβουμε υπόψη τι μπορεί να *επηρεάσει* αυτή την κίνηση. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε αυτή την επίδραση: Γιατί μεταβάλλεται η κίνηση ενός σώματος; Τι είναι αυτό που κάνει ένα σώμα να παραμένει σε ηρεμία και ένα άλλο να επιταχύνει; Γιατί ένα μικρό αντικείμενο μετακινείται πιο εύκολα από ένα μεγάλο; Οι δύο κύριοι παράγοντες που πρέπει να εξετάσουμε είναι οι *δυνάμεις* που ασκούνται σε ένα σώμα και η *μάζα* του σώματος. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη της *δυναμικής* περιγράφοντας τους τρεις βασικούς νόμους της κίνησης, που αφορούν δυνάμεις και μάζες, τους οποίους διατύπωσε πριν από τρεις αιώνες ο Ισαάκ Νεύτωνας.

M5.1 Η έννοια της δύναμης

Όλοι αντιλαμβανόμαστε την έννοια της δύναμης από την καθημερινή εμπειρία μας. Όταν σπρώχνετε ένα άδειο πιάτο του φαγητού, ασκείτε μια δύναμη πάνω του. Παρομοίως, όταν πετάτε ή κλωτσάτε μια μπάλα, ασκείτε δύναμη σε αυτή. Σε αυτά τα παραδείγματα, η λέξη *δύναμη* αναφέρεται σε μια αλληλεπίδραση με ένα σώμα μέσω μυϊκής δραστηριότητας και σε κάποια μεταβολή στην ταχύτητά του. Όμως, οι δυνάμεις δεν προκαλούν πάντα κίνηση. Για παράδειγμα, όταν κάθεστε, στο σώμα σας ασκείται η δύναμη της βαρύτητας αλλά παραμένετε ακίνητοι. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι όταν σπρώχνετε (δηλαδή, ασκείτε δύναμη) έναν βράχο χωρίς να καταφέρνετε να τον μετακινήσετε.

το τρένο επιταχύνει, ο δίσκος θα αρχίσει να κινείται πάνω στο τραπέζι με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της επιτάχυνσης του τρένου, όπως ακριβώς ένα πάκο χαρτιά που βρίσκεται στο ταμπλό του αυτοκινήτου σας και πέφτει στο δάπεδο όταν πατάτε γκάζι.

Όπως είδαμε στην Ενότητα Μ4.6, μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα κινούμενο σώμα από πολλά συστήματα αναφοράς. Ο **πρώτος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα,** ο οποίος αναφέρεται συχνά και ως *νόμος της αδράνειας,* ορίζει ένα ειδικό σύνολο συστημάτων αναφοράς που ονομάζονται *αδρανειακά συστήματα αναφοράς.* Ο νόμος μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ▶

Αν ένα σώμα δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση.

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς ▶

Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς ονομάζεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς.** Όταν το τραπέζι του χόκεϊ με τον δίσκο βρίσκεται στο έδαφος, όπως και εσείς, παρατηρείτε τον δίσκο από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς· ο δίσκος δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα στο οριζόντιο επίπεδο και εσείς παρατηρείτε ότι έχει μηδενική οριζόντια επιτάχυνση. Αλλά και όταν βρίσκεστε στο τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα, παρατηρείτε τον δίσκο (στο τρένο) από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. **Κάθε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα είναι και το ίδιο αδρανειακό σύστημα.** Όταν όμως το τρένο και εσείς που βρίσκεστε σε αυτό επιταχύνετε, παρατηρείτε τον δίσκο στο τρένο από ένα **μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς** επειδή το τρένο επιταχύνει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης. Παρότι, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις σας, ο δίσκος στο τρένο φαίνεται να επιταχύνει, υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ο δίσκος έχει μηδενική επιτάχυνση. Για παράδειγμα, ένας παρατηρητής που στέκεται στο έδαφος έξω από το τρένο βλέπει τον δίσκο να ολισθαίνει ως προς το τραπέζι, αλλά να κινείται πάντα με την ίδια ταχύτητα ως προς το έδαφος, την οποία είχε το τρένο πριν αρχίσει να επιταχύνει (επειδή δεν υπάρχει σχεδόν καθόλου τριβή για να συγκρατήσει τον δίσκο επάνω στο τρένο). Επομένως, ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα εξακολουθεί να ισχύει παρότι εσείς, ως επιβάτης του τρένου, παρατηρείτε μια φαινόμενη επιτάχυνση του σώματος ως προς τον εαυτό σας.

Η καλύτερη προσέγγιση αδρανειακού συστήματος είναι ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τους μακρινούς απλανείς αστέρες. Στα περισσότερα προβλήματα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Γη είναι ένα τέτοιο σύστημα. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, η Γη δεν είναι αδρανειακό σύστημα επειδή περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Και στις δύο αυτές κινήσεις υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση. Ωστόσο, αυτές οι επιταχύνσεις είναι μικρές σε σύγκριση με το g και συχνά μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Για τον λόγο αυτό, μοντελοποιούμε τη Γη και κάθε σύστημα που είναι προσαρτημένο σε αυτή ως αδρανειακό σύστημα.

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε ένα σώμα από κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. (Θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά στις παρατηρήσεις που γίνονται σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς στην Ενότητα Μ6.3.) Πριν από το 1600 περίπου, οι επιστήμονες πίστευαν ότι η φυσιολογική κατάσταση της ύλης ήταν η ακινησία (ή ηρεμία). Οι παρατηρήσεις έδειχναν ότι τα κινούμενα σώματα κάποια στιγμή σταματούσαν να κινούνται. Ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που υιοθέτησε μια διαφορετική προσέγγιση όσον αφορά την κίνηση και τη φυσιολογική κατάσταση της ύλης. Διατύπωσε νοητικά πειράματα και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι από τη στιγμή που ένα σώμα τεθεί σε κίνηση, δεν είναι φυσιολογικό να σταματήσει: αντίθετα, το φυσιολογικό είναι να *αντισταθεί στις μεταβολές της κίνησής του.* Όπως έγραψε, «Κάθε ταχύτητα που προσδίδεται σε ένα κινούμενο σώμα διατηρείται αμείωτη εφόσον εκλείπουν τυχόν εξωτερικά αίτια επιβράδυνσης». Για παράδειγμα, ένα διαστημόπλοιο που κινείται στο διάστημα με τον κινητήρα του σβηστό θα συνεχίσει να κινείται για πάντα. *Δεν* πρόκειται να αναζητήσει μια «φυσιολογική κατάσταση» ακινησίας.

Αποφυγή παγίδων Μ5.1

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα *δεν* ορίζει τι συμβαίνει σε ένα σώμα με *μηδενική συνισταμένη δύναμη,* δηλαδή σε ένα σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές δυνάμεις οι οποίες εξισορροπούνται· ορίζει τι συμβαίνει *όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις.* Αυτή η λεπτή αλλά σημαντική διαφορά μάς επιτρέπει να ορίσουμε τη δύναμη ως αυτό που προκαλεί μεταβολή στην κίνηση. Η περιγραφή ενός σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων που εξισορροπούνται καλύπτεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Με βάση τα όσα αναφέραμε για τις παρατηρήσεις που γίνονται από αδρανειακά συστήματα αναφοράς, μια πιο πρακτική διατύπωση του πρώτου νόμου της κίνησης του Νεύτωνα είναι η εξής:

Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι παρατηρήσεις γίνονται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα ακίνητο σώμα θα παραμείνει σε ηρεμία και ένα σώμα που κινείται θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή, ευθύγραμμα και με ταχύτητα σταθερού μέτρου).

Μια διαφορετική διατύπωση του πρώτου νόμου του Νεύτωνα

Με άλλα λόγια, **όταν δεν ασκούνται δυνάμεις σε ένα σώμα, η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική.** Από τον πρώτο νόμο συμπεραίνουμε ότι κάθε *απομονωμένο σώμα* (δηλαδή ένα σώμα που δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του) είτε βρίσκεται σε ηρεμία είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η τάση ενός σώματος να αντιστέκεται σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του ονομάζεται **αδράνεια.** Με βάση τον παραπάνω πρώτο νόμο, συμπεραίνουμε ότι ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να δέχεται κάποια δύναμη. Συνεπώς, ο πρώτος νόμος μας επιτρέπει να ορίσουμε τη **δύναμη** ως το **αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος.**

Ορισμός της δύναμης

***Σύντομο ερώτημα* M5.1** Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (α) Ένα σώμα μπορεί να κινείται χωρίς να ασκούνται δυνάμεις σε αυτό. (β) Σε ένα σώμα είναι δυνατόν να ασκούνται δυνάμεις χωρίς το σώμα να κινείται. (γ) Ούτε η πρόταση (α) ούτε η πρόταση (β) είναι σωστές. (δ) Οι προτάσεις (α) και (β) είναι και οι δύο σωστές.

M5.3 Μάζα

Φανταστείτε ότι προσπαθείτε να πιάσετε μια μπάλα του μπάσκετ ή του μπόουλινγκ. Ποια μπάλα είναι πιο πιθανό να συνεχίσει να κινείται όταν προσπαθήσετε να την πιάσετε; Ποια μπάλα απαιτεί μεγαλύτερη προσπάθεια για να την πετάξετε; Η μπάλα του μπόουλινγκ απαιτεί μεγαλύτερη προσπάθεια. Στη γλώσσα της φυσικής, λέμε ότι η μπάλα του μπόουλιγκ προβάλλει μεγαλύτερη αντίσταση στη μεταβολή της ταχύτητάς της από ό,τι η μπάλα του μπάσκετ. Πώς μπορούμε να εκφράσουμε ποσοτικά την έννοια αυτή;

Μάζα είναι η ιδιότητα ενός σώματος η οποία καθορίζει πόση αντίσταση προβάλλει το σώμα στις μεταβολές της ταχύτητάς του. Όπως μάθαμε στην Ενότητα M1.1, η μονάδα της μάζας στο σύστημα SI είναι το χιλιόγραμμο. Πειράματα έχουν δείξει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο λιγότερο επιταχύνει το σώμα όταν ασκείται πάνω του μια συγκεκριμένη δύναμη.

Ορισμός της μάζας

Για να περιγράψουμε τη μάζα ποσοτικά, πραγματοποιούμε πειράματα όπου συγκρίνουμε τις επιταχύνσεις που προκαλεί μια συγκεκριμένη δύναμη σε διαφορετικά σώματα. Ας υποθέσουμε ότι μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα μάζας m_1 και προκαλεί μια μεταβολή στην κίνησή του η οποία μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά με την επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_1$ του σώματος, ενώ όταν η *ίδια δύναμη* ασκείται σε ένα σώμα μάζας m_2 προκαλεί επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_2$. Ορίζουμε τον λόγο των δύο μαζών ως τον *αντίστροφο* λόγο των μέτρων των επιταχύνσεων που προκαλεί η δύναμη:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1} \qquad \text{(M5.1)}$$

Για παράδειγμα, αν μια δύναμη η οποία ασκείται σε ένα σώμα μάζας 3 kg προκαλεί επιτάχυνση 4 m/s^2, τότε η ίδια δύναμη όταν ασκείται σε ένα σώμα μάζας 6 kg προκαλεί επιτάχυνση 2 m/s^2. Με βάση πλήθος παρόμοιων παρατηρήσεων, συμπεραίνουμε ότι **το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του όταν ασκείται σε αυτό μια συγκεκριμένη δύναμη.** Αν το ένα σώμα έχει γνωστή μάζα, η μάζα του άλλου σώματος μπορεί να υπολογιστεί από μετρήσεις της επιτάχυνσης.

Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα ενός σώματος και είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον του σώματος και από τη μέθοδο μέτρησής της. Επίσης, **η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος** και άρα υπακούει στους κανόνες της απλής αριθμητικής. Για παράδειγμα, αν προσθέσετε μια μάζα 3 kg με μια μάζα 5 kg, η συνολική μάζα είναι 8 kg. Μπορείτε να επαληθεύσετε αυτό το αποτέλεσμα πειραματικά συγκρίνοντας χωριστά την επιτάχυνση που προκαλεί μια γνωστή δύναμη σε πολλά σώματα με την επιτάχυνση που προκαλεί η ίδια δύναμη στα ίδια σώματα, όταν αυτά θεωρηθούν ως ενιαίο σύστημα.

Η μάζα και το βάρος είναι διαφορετικά μεγέθη

Δεν πρέπει να συγχέετε τη μάζα με το βάρος. Η μάζα και το βάρος είναι διαφορετικά μεγέθη. Το βάρος ενός σώματος είναι ίσο με το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκείται στο σώμα και μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση (δείτε την Ενότητα Μ5.5). Για παράδειγμα, ένας άνθρωπος που στη Γη έχει βάρος 800 N, στη Σελήνη έχει βάρος μόλις 130 N. Από την άλλη πλευρά, η μάζα των σωμάτων είναι ίδια παντού: ένα σώμα που έχει μάζα 2 kg στη Γη έχει μάζα 2 kg και στη Σελήνη.

Μ5.4 Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν δεν ασκούνται δυνάμεις σε αυτό: το σώμα είτε παραμένει ακίνητο είτε κινείται ευθύγραμμα με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν ασκούνται πάνω του μία ή περισσότερες δυνάμεις.

Φανταστείτε ότι εκτελείτε ένα πείραμα στο οποίο σπρώχνετε έναν κύβο μάζας m πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Όταν ασκείτε οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στον κύβο, αυτός κινείται με επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$. Αν ασκήσετε διπλάσια δύναμη στον ίδιο κύβο, τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η επιτάχυνση του κύβου θα διπλασιαστεί. Αν αυξήσετε την ασκούμενη δύναμη σε $3\vec{\mathbf{F}}$, η επιτάχυνση θα τριπλασιαστεί, κ.ο.κ. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογη προς τη δύναμη που ασκείται σε αυτό: $\vec{\mathbf{F}} \propto \vec{\mathbf{a}}$. Παρουσιάσαμε αυτό το συμπέρασμα για πρώτη φορά στην Ενότητα Μ2.4 όταν αναφερθήκαμε στην κατεύθυνση της επιτάχυνσης ενός σώματος. Ξέρουμε, επίσης, από την προηγούμενη ενότητα ότι το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του: $|\vec{\mathbf{a}}| \propto 1/m$.

Αποφυγή παγίδων Μ5.2

Η δύναμη προκαλεί μεταβολές στην κίνηση

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, ένα σώμα μπορεί να κινείται χωρίς να ασκούνται σε αυτό δυνάμεις. Μη θεωρείτε λοιπόν ότι η δύναμη είναι η αιτία της *κίνησης*. Η δύναμη είναι η αιτία της *μεταβολής* της κίνησης, την οποία μετράμε με την επιτάχυνση.

Αυτές οι πειραματικές παρατηρήσεις συνοψίζονται στον **δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:**

> Όταν παρατηρούμε ένα σώμα από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση του σώματος είναι ανάλογη προς τη συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό και αντιστρόφως ανάλογη προς τη μάζα του:
>
> $$\vec{\mathbf{a}} \propto \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m}$$

Αν ορίσουμε τη σταθερά αναλογίας ίση με 1, μπορούμε να συσχετίσουμε τη μάζα, την επιτάχυνση, και τη δύναμη με την ακόλουθη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:[1]

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{M5.2}$$

Και οι δύο διατυπώσεις του νόμου υποδεικνύουν ότι η επιτάχυνση ενός σώματος οφείλεται στη *συνολική δύναμη* $\sum \vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται σε αυτό. Η **συνολική δύναμη** που ασκείται σε ένα σώμα είναι το διανυσματικό άθροισμα, δηλαδή η συνισταμένη, όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Μερικές φορές αναφερόμαστε στη *συνολική δύναμη* ως *συνισταμένη δύναμη*. Κατά την επίλυση προβλημάτων με τον δεύτερο

[1] Η Εξίσωση Μ5.2 ισχύει μόνο όταν το σώμα κινείται πολύ πιο αργά από το φως. Περιγράφουμε τη σχετικιστική περίπτωση στο Κεφάλαιο Σ1.

Μ5.2 *συν.*

ΛΥΣΗ

Όχι· το βάρος σας είναι αμετάβλητο. Η εμπειρία σας οφείλεται στο γεγονός ότι βρίσκεστε σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για να επιταχυνθείτε προς τα πάνω, θα πρέπει το δάπεδο ή η ζυγαριά να ασκήσουν στα πόδια σας μια δύναμη προς τα πάνω η οποία θα έχει μεγαλύτερο μέτρο από το βάρος σας. Εσείς νιώθετε αυτή τη μεγαλύτερη δύναμη και νομίζετε ότι ζυγίζετε περισσότερο. Επειδή λοιπόν η ζυγαριά μετράει αυτή την ανοδική δύναμη, και όχι το βάρος σας, η ένδειξή της αυξάνεται.

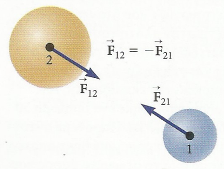
Μ5.6 Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

Αν πιέσετε μια γωνία του βιβλίου με την άκρη του δαχτύλου σας, το βιβλίο σάς πιέζει και αυτό προκαλώντας ένα μικρό βαθούλωμα στο δέρμα σας. Αν πιέσετε περισσότερο, το βιβλίο κάνει το ίδιο και το βαθούλωμα στο δέρμα είναι λίγο μεγαλύτερο. Αυτό το απλό παράδειγμα δείχνει ότι οι δυνάμεις είναι *αλληλεπιδράσεις* μεταξύ δύο σωμάτων: όταν το δάχτυλό σας πιέζει το βιβλίο, το βιβλίο πιέζει και αυτό το δάχτυλό σας. Αυτή η σημαντική αρχή είναι γνωστή ως **τρίτος νόμος του Νεύτωνα:**

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ▶

Αν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad \textbf{(M5.7)}$$



Εικόνα Μ5.5 Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα. Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση με τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.

Όταν είναι σημαντικό να συμβολίζουμε τις δυνάμεις ως αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωμάτων, θα χρησιμοποιούμε συμβολισμό με δείκτες, όπου το $\vec{\mathbf{F}}_{ab}$ σημαίνει «η δύναμη που ασκεί *το* a *στο* b». Ο τρίτος νόμος φαίνεται στην Εικόνα Μ5.5. Η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι γενικά γνωστή ως *δράση*, ενώ η δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1 ως *αντίδραση*. Οι όροι με πλάγιους χαρακτήρες δεν είναι επιστημονικοί όροι, και επιπλέον, οποιαδήποτε από τις δύο δυνάμεις μπορεί να χαρακτηριστεί ως δράση ή ως αντίδραση. Θα χρησιμοποιούμε αυτούς τους όρους για λόγους ευκολίας. Σε κάθε περίπτωση, η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε *διαφορετικά* σώματα και πρέπει να είναι του ίδιου τύπου (βαρυτικές, ηλεκτρικές, κ.λπ.). Για παράδειγμα, σε ένα βλήμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση η Γη ασκεί στο βλήμα βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = \vec{\mathbf{F}}_{\Gamma\beta}$ (Γ = Γη, β = βλήμα), με μέτρο ίσο με mg. Η αντίδραση σε αυτή τη δύναμη είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί το βλήμα στη Γη $\vec{\mathbf{F}}_{\beta\Gamma} = -\vec{\mathbf{F}}_{\Gamma\beta}$. Η δύναμη της αντίδρασης $\vec{\mathbf{F}}_{\beta\Gamma}$ πρέπει να επιταχύνει τη Γη προς το βλήμα ακριβώς όπως ακριβώς η δύναμη της δράσης $\vec{\mathbf{F}}_{\Gamma\beta}$ επιταχύνει το βλήμα προς τη Γη. Όμως, επειδή η Γη έχει τεράστια μάζα, η επιτάχυνσή της λόγω της αντίδρασης είναι αμελητέα.

Θεωρήστε μια ακίνητη οθόνη υπολογιστή πάνω σε ένα τραπέζι (Εικόνα Μ5.6α). Η αντίδραση στη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = \vec{\mathbf{F}}_{\Gamma o}$ που δρα στην οθόνη είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{o\Gamma} = -\vec{\mathbf{F}}_{\Gamma o}$ που ασκεί η οθόνη στη Γη. Η οθόνη δεν επιταχύνει επειδή τη συγκρατεί το τραπέζι. Το τραπέζι ασκεί στην οθόνη μια δύναμη $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{F}}_{\tau o}$, κατακόρυφα προς τα πάνω που ονομάζεται **κάθετη δύναμη.** Η δύναμη αυτή, η οποία δεν επιτρέπει στην οθόνη να πέσει, μπορεί να πάρει όποια τιμή χρειάζεται, με μέγιστη τιμή τη δύναμη θραύσης του τραπεζιού. Επειδή η επιτάχυνση της οθόνης είναι μηδέν, εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην οθόνη παίρνουμε $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{n}} + m\vec{\mathbf{g}} = 0$, και

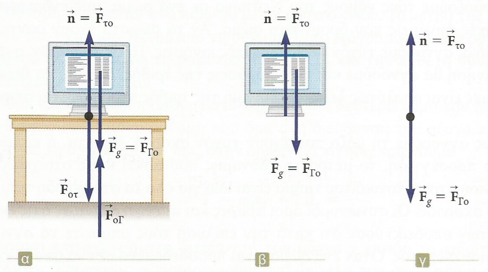
Κάθετη δύναμη ▶

άρα $n\hat{\mathbf{j}} - mg\hat{\mathbf{j}} = 0$, ή $n = mg$. Η κάθετη δύναμη εξισορροπεί τη δύναμη που ασκεί η βαρύτητα στην οθόνη, άρα η συνισταμένη δύναμη που δρα στην οθόνη είναι μηδενική. Η αντίδραση στην $\vec{\mathbf{n}}$ είναι η δύναμη που ασκεί η οθόνη στο τραπέζι, δηλαδή $\vec{\mathbf{F}}_{οτ} = -\vec{\mathbf{F}}_{το} = -\vec{\mathbf{n}}$.

Παρατηρήστε ότι οι δυνάμεις που δρουν στην οθόνη είναι οι $\vec{\mathbf{F}}_g$ και $\vec{\mathbf{n}}$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.6β. Οι δύο δυνάμεις $\vec{\mathbf{F}}_{οΓ}$ και $\vec{\mathbf{F}}_{οτ}$ δεν ασκούνται στην οθόνη.

Η Εικόνα Μ5.6 παρουσιάζει ένα εξαιρετικά σημαντικό βήμα για την επίλυση προβλημάτων με δυνάμεις. Στην Εικόνα Μ5.6α φαίνονται πολλές από τις δυνάμεις που εμπλέκονται στη συγκεκριμένη περίπτωση: οι δυνάμεις που δρουν στην οθόνη, μία δύναμη η οποία ασκείται στο τραπέζι, και μία που ασκείται στη Γη. Αντίθετα, το διάγραμμα της Εικόνας Μ5.6β δείχνει μόνο τις δυνάμεις που δρουν σε *ένα σώμα,* στη συγκεκριμένη περίπτωση την οθόνη, και ονομάζεται **διάγραμμα δυνάμεων**. Το σημαντικό διάγραμμα της Εικόνας Μ5.6γ ονομάζεται **διάγραμμα ελεύθερου σώματος**. Στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος χρησιμοποιείται το μοντέλο του σωματιδίου. Το σώμα αναπαρίσταται ως τελεία και οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα φαίνονται να ασκούνται στην τελεία. Όταν αναλύουμε ένα σώμα που δέχεται δυνάμεις, ουσιαστικά αναζητούμε τη συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα το οποίο έχουμε μοντελοποιήσει ως σωματίδιο. Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος μας βοηθάει να απομονώσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να αφαιρέσουμε τις υπόλοιπες δυνάμεις από την ανάλυσή μας.

Σύντομο ερώτημα **Μ5.5** **(i)** Αν μια μύγα συγκρουστεί με το παρμπρίζ ενός λεωφορείου που κινείται γρήγορα, ποιος δέχεται δύναμη πρόσκρουσης με μεγαλύτερο μέτρο; (α) Η μύγα. (β) Το λεωφορείο. (γ) Και οι δύο δέχονται την ίδια δύναμη. **(ii)** Ποιος δέχεται μεγαλύτερη επιτάχυνση; (α) Η μύγα. (β) Το λεωφορείο. (γ) Και οι δύο δέχονται την ίδια επιτάχυνση.



Εικόνα Μ5.6 (α) Όταν η οθόνη του υπολογιστή είναι ακίνητη πάνω στο τραπέζι, οι δυνάμεις που δρουν στην οθόνη είναι η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ και η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$. Η αντίδραση στην $\vec{\mathbf{n}}$ είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{οτ}$ που ασκεί η οθόνη στο τραπέζι. Η αντίδραση στην $\vec{\mathbf{F}}_g$ είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{οΓ}$ που ασκεί η οθόνη στη Γη. (β) Το διάγραμμα με τις δυνάμεις που ασκούνται στην οθόνη. (γ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος δείχνει την οθόνη ως μαύρη τελεία και τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή.

Αποφυγή παγίδων Μ5.6

Δεν ισχύει πάντα $n = mg$
Στην περίπτωση που φαίνεται στην Εικόνα Μ5.6, αλλά και σε πολλές άλλες, διαπιστώνουμε ότι ισχύει $n = mg$ (η κάθετη δύναμη έχει ίδιο μέτρο με τη βαρυτική δύναμη). Ωστόσο, αυτό *δεν* ισχύει γενικά. Αν ένα σώμα βρίσκεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, αν ασκούνται δυνάμεις οι οποίες έχουν κατακόρυφες συνιστώσες, ή αν το σύστημα επιταχύνει κατακόρυφα, τότε ισχύει $n \neq mg$. Να εφαρμόζετε *πάντα* τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να βρίσκετε τη σχέση μεταξύ των n και mg.

Αποφυγή παγίδων Μ5.7

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα
Να θυμάστε ότι οι δυνάμεις της δράσης και της αντίδρασης που προβλέπει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα δρουν σε *διαφορετικά* σώματα. Για παράδειγμα, στην Εικόνα Μ5.6, έχουμε:

$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{F}}_{το} = -m\vec{\mathbf{g}} = -\vec{\mathbf{F}}_{Γο}$.

Οι δυνάμεις $\vec{\mathbf{n}}$ και $m\vec{\mathbf{g}}$ έχουν ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση, αλλά δεν αποτελούν ζεύγος δράσης-αντίδρασης επειδή και οι δύο δρουν στο *ίδιο* σώμα, δηλαδή στην οθόνη.

Αποφυγή παγίδων Μ5.8

Διαγράμματα ελεύθερου σώματος
Το *πιο σημαντικό* βήμα στην επίλυση προβλημάτων με τους νόμους του Νεύτωνα είναι η σχεδίαση του διαγράμματος ελεύθερου σώματος. Βεβαιωθείτε ότι σχεδιάζετε μόνο εκείνες τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα το οποίο απομονώνετε. Βεβαιωθείτε ότι σχεδιάζετε όλες τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα, συμπεριλαμβανομένων και τυχόν δυνάμεων από απόσταση, όπως η βαρυτική δύναμη.

Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ5.3 Αν με σπρώξεις θα σε σπρώξω

Ένας μεγαλόσωμος άνδρας και ένα μικρό αγόρι στέκονται ο ένας απέναντι από τον άλλο πάνω σε μια παγωμένη επιφάνεια χωρίς τριβές. Σπρώχνουν δυνατά με τα χέρια τους ο ένας τον άλλο μέχρι να αρχίσουν να απομακρύνονται.

(A) Ποιος απομακρύνεται πιο γρήγορα;

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω περίπτωση είναι παρόμοια με αυτή του Σύντομου ερωτήματος Μ5.5. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκεί ο άνδρας στο αγόρι και η δύναμη που ασκεί το αγόρι στον άνδρα αποτελούν ζεύγος δυνάμεων δράσης και αντίδρασης, άρα πρέπει να έχουν ίσα μέτρα. (Αν μπορούσαμε να μετρήσουμε τις δυνάμεις στα χέρια τους με έναν ζυγό, θα παίρναμε την ίδια ένδειξη, ανεξάρτητα από το ποια από τις δύο δυνάμεις καταγράφαμε.) Επομένως, επειδή το αγόρι έχει μικρότερη μάζα, θα έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση. Και οι δύο επιταχύνουν για το ίδιο χρονικό διάστημα, αλλά επειδή το αγόρι αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση μέσα σε αυτό το διάστημα, θα κινηθεί γρηγορότερα μετά την αλληλεπίδρασή τους.

(B) Ποιος απομακρύνεται περισσότερο ενόσω τα χέρια τους βρίσκονται σε επαφή;

ΛΥΣΗ

Επειδή το αγόρι έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση και, άρα, μεγαλύτερη μέση ταχύτητα, απομακρύνεται περισσότερο από τον άνδρα κατά το χρονικό διάστημα που τα χέρια τους βρίσκονται σε επαφή.

Μ5.7 Μοντέλα ανάλυσης τα οποία βασίζονται στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε δύο μοντέλα ανάλυσης για να επιλύουμε προβλήματα στα οποία τα σώματα είτε βρίσκονται σε ισορροπία ($\vec{\mathbf{a}} = 0$) είτε επιταχύνουν ευθύγραμμα υπό την επίδραση σταθερών εξωτερικών δυνάμεων. Θυμηθείτε ότι όταν εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε ένα σώμα, μας ενδιαφέρουν μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σώμα. Αν τα σώματα έχουν μοντελοποιηθεί ως σωματίδια, αγνοούμε τυχόν περιστροφικές κινήσεις. Προς το παρόν, στα προβλήματα με κίνηση θα αγνοούμε και τις επιδράσεις της τριβής, δηλαδή θα θεωρούμε ότι οι επιφάνειες είναι *απολύτως λείες*. (Η δύναμη της τριβής περιγράφεται στην Ενότητα Μ5.8.)

Συνήθως αγνοούμε τη μάζα που έχουν τυχόν σκοινιά, νήματα, ή καλώδια. Στην παραπάνω προσέγγιση, το μέτρο της δύναμης που ασκεί κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός σκοινιού στο γειτονικό του τμήμα είναι ίδιο για όλα τα στοιχειώδη τμήματα κατά μήκος του σκοινιού. Οι συνώνυμοι όροι *αβαρές* και *αμελητέας μάζας* στις εκφωνήσεις προβλημάτων υποδεικνύουν ότι κατά την επίλυσή τους μπορείτε να αγνοήσετε τη μάζα κάποιου σώματος. Όταν ένα σώμα είναι προσδεδεμένο σε ένα σκοινί και έλκεται με αυτό, το σκοινί ασκεί μια δύναμη στο σώμα με διεύθυνση παράλληλη με το σκοινί και φορά από το σώμα προς το σκοινί. Το μέτρο T αυτής της δύναμης ονομάζεται **τάση** του σκοινιού. Η τάση είναι βαθμωτό μέγεθος επειδή είναι το μέτρο ενός διανυσματικού μεγέθους.

Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο σε ισορροπία

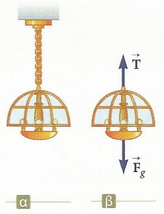
Αν η επιτάχυνση ενός σώματος που έχουμε μοντελοποιήσει ως σωματίδιο είναι μηδενική, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο τού **σωματιδίου σε ισορροπία**. Σε αυτό το μοντέλο, η συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα είναι μηδενική:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad \textbf{(M5.8)}$$

Θεωρήστε μια λάμπα που κρέμεται από μια αβαρή αλυσίδα στερεωμένη στην οροφή (Εικόνα Μ5.7α). Το διάγραμμα δυνάμεων για τη λάμπα (Εικ. Μ5.7β) δείχνει ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στη λάμπα είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$ με κατεύθυνση προς τα κάτω και η δύναμη που ασκεί η αλυσίδα $\vec{\mathbf{T}}$ με κατεύθυνση προς τα πάνω. Επειδή δεν ασκούνται δυνάμεις στη διεύθυνση του άξονα x, η σχέση $\sum F_x = 0$ δεν παρέχει κάποια χρήσιμη πληροφορία. Η συνθήκη $\sum F_y = 0$ δίνει

$$\sum F_y = T - F_g = 0 \text{ ή } T = F_g$$

Και πάλι, παρατηρήστε ότι οι δυνάμεις $\vec{\mathbf{T}}$ και $\vec{\mathbf{F}}_g$ *δεν* αποτελούν ζεύγος δυνάμεων δράσης-αντίδρασης επειδή ασκούνται στο ίδιο σώμα, δηλαδή τη λάμπα. Η αντίδραση στη δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ είναι μια δύναμη με κατεύθυνση προς τα κάτω την οποία ασκεί η λάμπα στην αλυσίδα.



Εικόνα Μ5.7 (α) Μια λάμπα κρέμεται από την οροφή με αλυσίδα αμελητέας μάζας. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στη λάμπα είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$ και η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί η αλυσίδα.

Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης

Αν ένα σώμα επιταχύνει, τότε μπορούμε να αναλύσουμε την κίνησή του με το μοντέλο τού **σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης**. Η κατάλληλη εξίσωση για το μοντέλο αυτό είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, δηλαδή η Εξίσωση Μ5.2:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \quad \textbf{(M5.2)}$$

Θεωρήστε ένα αγόρι που τραβάει ένα κιβώτιο προς τα δεξιά πάνω σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές (Εικόνα Μ5.8α). Φυσικά, το δάπεδο κάτω από το αγόρι πρέπει να έχει τριβές· διαφορετικά, τα πόδια του απλώς θα γλιστρήσουν όταν προσπαθήσει να τραβήξει το κιβώτιο! Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση του κιβωτίου και τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο σε αυτό. Οι δυνάμεις που δρουν στο κιβώτιο φαίνονται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος στην Εικόνα Μ5.8β. Παρατηρήστε ότι η οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ ασκείται στο κιβώτιο μέσω του σκοινιού. Το μέτρο της $\vec{\mathbf{T}}$ είναι ίσο με την τάση του σκοινιού. Εκτός από τη δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$, το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το κιβώτιο περιλαμβάνει τη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$ και την κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ που ασκεί το δάπεδο στο κιβώτιο.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε στο κιβώτιο τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών. Η μόνη δύναμη που δρα στη διεύθυνση του άξονα x είναι η $\vec{\mathbf{T}}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση $\sum F_x = ma_x$ στην οριζόντια κίνηση παίρνουμε

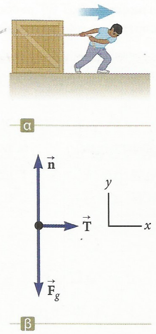
$$\sum F_x = T = ma_x \quad \text{ή} \quad a_x = \frac{T}{m}$$

Δεν υπάρχει επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα y επειδή το κιβώτιο κινείται μόνο οριζόντια. Επομένως, χρησιμοποιούμε το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία στη διεύθυνση του άξονα y. Εφαρμόζοντας τη συνιστώσα y της Εξίσωσης Μ5.8 παίρνουμε

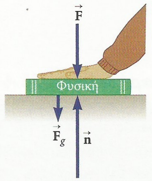
$$\sum F_y = n + (-F_g) = 0 \quad \text{ή} \quad n = F_g$$

Δηλαδή, η κάθετη δύναμη έχει το ίδιο μέτρο με τη βαρυτική δύναμη αλλά αντίθετη κατεύθυνση.

Αν η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ είναι σταθερή, η επιτάχυνση $a_x = T/m$ θα είναι επίσης σταθερή. Άρα, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κιβώτιο ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα x και, επομένως, να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της κινηματικής από το Κεφάλαιο Μ2 για να υπολογίσουμε τη θέση x και την ταχύτητα v_x του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου.



Εικόνα Μ5.8 (α) Ένα αγόρι τραβάει ένα κιβώτιο προς τα δεξιά πάνω σε ένα δάπεδο χωρίς τριβές. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος αναπαριστά τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο κιβώτιο.



Εικόνα Μ5.9 Όταν ένα σώμα ασκεί μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ κατακόρυφα προς τα κάτω σε ένα άλλο σώμα, τότε η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ που ασκείται στο σώμα είναι μεγαλύτερη από τη βαρυτική δύναμη: $n = F_g + F$.

Στην περίπτωση που μόλις περιγράψαμε, το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{\mathbf{n}}$ ισούται με το μέτρο της βαρυτικής δύναμης $\vec{\mathbf{F}}_g$, αλλά, όπως επισημαίνουμε στην Αποφυγή παγίδων Μ5.6, αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα βιβλίο βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι και εσείς το σπρώχνετε προς τα κάτω ασκώντας δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.9. Επειδή το βιβλίο βρίσκεται σε ηρεμία και άρα δεν επιταχύνει, έχουμε $\Sigma F_y = 0$, το οποίο δίνει $n - F_g - F = 0$, ή $n = F_g + F = mg + F$. Στην περίπτωση αυτή, η κάθετη δύναμη είναι *μεγαλύτερη* από τη βαρυτική δύναμη. Αργότερα θα παρουσιάσουμε και άλλα παραδείγματα στα οποία ισχύει $n \neq F_g$.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Προτείνουμε να ακολουθείτε την εξής μέθοδο όταν λύνετε προβλήματα όπου πρέπει να εφαρμόσετε τους νόμους του Νεύτωνα:

1. Μοντελοποίηση. Σχεδιάστε ένα απλό αλλά σαφές διάγραμμα του συστήματος. Το διάγραμμα θα σας βοηθήσει να αναπαραστήσετε νοητικά το πρόβλημα. Ορίστε βολικούς άξονες συντεταγμένων για κάθε σώμα του συστήματος.

2. Κατηγοριοποίηση. Αν κάποια συνιστώσα της επιτάχυνσης για ένα σώμα είναι μηδενική, τότε το σώμα μοντελοποιείται ως σωματίδιο σε ισορροπία στη συγκεκριμένη διεύθυνση και $\Sigma F = 0$. Στην αντίθετη περίπτωση, το σώμα μοντελοποιείται ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στη συγκεκριμένη διεύθυνση και $\Sigma F = ma$.

3. Ανάλυση. Απομονώστε το σώμα την κίνηση του οποίου θέλετε να αναλύσετε. Σχεδιάστε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σώμα αυτό. Για συστήματα τα οποία περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα σώματα, σχεδιάστε *ξεχωριστά* διαγράμματα ελεύθερου σώματος για κάθε σώμα. *Μη* συμπεριλάβετε στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος τις δυνάμεις που ασκεί το σώμα στο περιβάλλον του.

Βρείτε τις συνιστώσες των δυνάμεων κατά μήκος των αξόνων συντεταγμένων. Εφαρμόστε το κατάλληλο μοντέλο από το βήμα της Κατηγοριοποίησης για κάθε διεύθυνση. Ελέγξτε τις διαστάσεις για να βεβαιωθείτε ότι όλοι οι όροι έχουν μονάδες δύναμης.

Λύστε τις εξισώσεις των συνιστωσών ως προς όλες τις άγνωστες μεταβλητές. Να θυμάστε γενικά ότι για να βρείτε την πλήρη λύση πρέπει να έχετε τόσες εξισώσεις όσες είναι οι άγνωστες μεταβλητές.

4. Ολοκλήρωση. Βεβαιωθείτε ότι τα αποτελέσματά σας συμφωνούν με το διάγραμμα ελεύθερου σώματος. Επίσης, ελέγξτε πώς διαμορφώνονται οι λύσεις σας όταν δίνετε ακραίες τιμές στις μεταβλητές. Με αυτόν τον τρόπο, μπορείτε συχνά να εντοπίζετε λάθη στα αποτελέσματά σας.

Παράδειγμα Μ5.4 Φωτεινός ακίνητος σηματοδότης

Φωτεινός σηματοδότης που ζυγίζει 122 N κρέμεται από συρματόσκοινο προσδεδεμένο σε δύο άλλα συρματόσκοινα, τα οποία είναι στερεωμένα σε οριζόντια δοκό (Εικόνα Μ5.10α). Τα πάνω συρματόσκοινα σχηματίζουν γωνίες 37.0° και 53.0° με την οριζόντιο. Αυτά τα δύο συρματόσκοινα δεν είναι τόσο ανθεκτικά όσο το κατακόρυφο συρματόσκοινο και θα σπάσουν αν η τάση σε αυτά υπερβεί τα 100 N. Σε αυτή την περίπτωση, θα συνεχίσει να κρέμεται ο σηματοδότης ή θα σπάσει ένα από τα συρματόσκοινα;

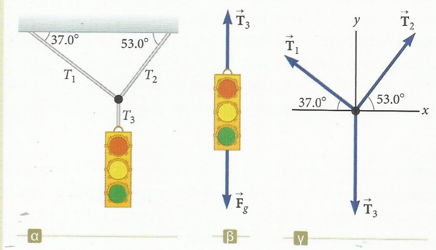
ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Εξετάστε το σχεδιάγραμμα στην Εικόνα Μ5.10α. Ας υποθέσουμε ότι τα συρματόσκοινα δεν σπάνε και ότι τίποτα δεν κινείται.

M5.4 *συν.*

Κατηγοριοποίηση Αν τίποτα δεν κινείται, κανένα τμήμα του συστήματος δεν επιταχύνει. Μπορούμε λοιπόν να μοντελοποιήσουμε τον σηματοδότη ως ένα σωματίδιο σε ισορροπία στο οποίο ασκείται μηδενική συνισταμένη δύναμη. Παρομοίως, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον κόμβο (Εικ. M5.10γ) είναι μηδενική.

Ανάλυση Σχεδιάζουμε το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται στον φωτεινό σηματοδότη (Εικ. M5.10β) και το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τον κόμβο που συγκρατεί τα τρία συρματόσκοινα (Εικ. M5.10γ). Μας διευκολύνει να επιλέξουμε τον κόμβο επειδή όλες οι δυνάμεις που μας ενδιαφέρουν έχουν κατευθύνσεις που διέρχονται από αυτόν.



Εικόνα M5.10 (Παράδειγμα M5.4) (α) Ένας φωτεινός σηματοδότης ο οποίος κρέμεται από συρματόσκοινα. (β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον φωτεινό σηματοδότη. (γ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τον κόμβο που συγκρατεί τα τρία συρματόσκοινα.

Εφαρμόστε την Εξίσωση M5.8 για τον σηματοδότη στη διεύθυνση του άξονα y:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_3 - F_g = 0$$

$$T_3 = F_g = 122 \text{ N}$$

Επιλέξτε τους άξονες συντεταγμένων όπως φαίνεται στην Εικόνα M5.10γ και βρείτε τις συνιστώσες των δυνάμεων που ασκούνται στον κόμβο:

Δύναμη	Συνιστώσα x	Συνιστώσα y
$\vec{T}_1$	$-T_1 \cos 37.0°$	$T_1 \sin 37.0°$
$\vec{T}_2$	$T_2 \cos 53.0°$	$T_2 \sin 53.0°$
$\vec{T}_3$	0	-122 N

Μοντελοποιήστε τον κόμβο ως σωματίδιο σε ισορροπία:

$$(1) \sum F_x = -T_1 \cos 37.0° + T_2 \cos 53.0° = 0$$

$$(2) \sum F_y = T_1 \sin 37.0° + T_2 \sin 53.0° + (-122 \text{ N}) = 0$$

Η Εξίσωση (1) δείχνει ότι οι οριζόντιες συνιστώσες των δυνάμεων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ πρέπει να έχουν ίσα μέτρα, και η Εξίσωση (2) δείχνει ότι το άθροισμα των κατακόρυφων συνιστωσών $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ πρέπει να εξισορροπεί τη δύναμη $\vec{T}_3$ με κατεύθυνση προς τα κάτω, η οποία έχει μέτρο ίσο με το βάρος του σηματοδότη.

Λύστε την Εξίσωση (1) ως προς T_2 συναρτήσει του T_1:

$$(3) \; T_2 = T_1\left(\frac{\cos 37.0°}{\cos 53.0°}\right) = 1.33 T_1$$

Αντικαταστήστε την τιμή T_2 στην Εξίσωση (2):

$$T_1 \sin 37.0° + (1.33 T_1)(\sin 53.0°) - 122 \text{ N} = 0$$

$$T_1 = 73.4 \text{ N}$$

$$T_2 = 1.33 T_1 = 97.4 \text{ N}$$

Οι δύο τιμές είναι μικρότερες από 100 N (οριακά επιτρεπτή για την τάση T_2), οπότε τα συρματόσκοινα δεν θα σπάσουν.

Ολοκλήρωση Για να ολοκληρώσουμε το πρόβλημα, ας φανταστούμε την εξής μεταβολή στο σύστημα.

ΚΙ ΑΝ...; Ας υποθέσουμε ότι οι δύο γωνίες στην Εικόνα M5.10α είναι ίσες. Ποια θα είναι η σχέση μεταξύ των T_1 και T_2;

Απάντηση Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι δύο τάσεις T_1 και T_2 είναι ίσες. Από μαθηματικής άποψης, αν συμβολίσουμε τις δύο ίσες γωνίες με θ, η Εξίσωση (3) γίνεται

$$T_2 = T_1\left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta}\right) = T_1$$

κάτι που επίσης μας λέει ότι οι τάσεις είναι ίσες. Αν δεν γνωρίζουμε την τιμή της γωνίας θ, δεν μπορούμε να βρούμε τις τιμές των τάσεων T_1 και T_2. Ωστόσο, οι τάσεις θα είναι ίσες, ανεξάρτητα από την τιμή του θ.

Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ5.5 Δυνάμεις μεταξύ των βαγονιών ενός συρμού

Τα βαγόνια των σιδηροδρομικών συρμών συνδέονται με μηχανισμούς σύνδεσης, που ονομάζονται ζεύκτες, στους οποίους ασκείται τάση όταν η μηχανή τραβάει τον συρμό. Φανταστείτε ότι είστε επιβάτης σε ένα τρένο που έχει σταθερή επιτάχυνση. Μετρώντας την τάση σε κάθε ομάδα ζευκτών, ξεκινώντας από τη μηχανή μέχρι το τελευταίο βαγόνι, διαπιστώνετε ότι η τάση αυξάνεται, μειώνεται, ή παραμένει ίδια; Όταν ο μηχανοδηγός φρενάρει, οι ζεύκτες υφίστανται θλίψη (συμπίεση). Πώς μεταβάλλεται αυτή η δύναμη συμπίεσης από τη μηχανή μέχρι το τελευταίο βαγόνι; (Υποθέστε ότι φρενάρουν μόνο οι τροχοί της μηχανής.)

ΛΥΣΗ

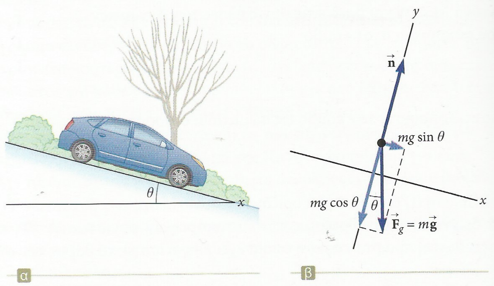
Καθώς το τρένο επιταχύνει, η τάση μειώνεται όσο προχωράτε προς το πίσω μέρος του συρμού. Ο ζεύκτης μεταξύ της μηχανής και του πρώτου βαγονιού πρέπει να ασκήσει αρκετή δύναμη για να επιταχύνει τα υπόλοιπα βαγόνια. Καθώς προχωράτε προς το πίσω μέρος του συρμού, κάθε ζεύκτης επιταχύνει μικρότερη μάζα πίσω από αυτόν. Ο τελευταίος ζεύκτης πρέπει να επιταχύνει μόνο το τελευταίο βαγόνι, οπότε δέχεται τη μικρότερη τάση.

Όταν ο μηχανοδηγός φρενάρει, η δύναμη μειώνεται ξανά από μπροστά προς τα πίσω. Ο ζεύκτης που συνδέει τη μηχανή με το πρώτο βαγόνι πρέπει να ασκήσει μεγάλη δύναμη για να επιβραδύνει τα υπόλοιπα βαγόνια, αλλά ο τελευταίος ζεύκτης πρέπει να εφαρμόσει δύναμη για να επιβραδύνει μόνο το τελευταίο βαγόνι.

Παράδειγμα Μ5.6 Αυτοκίνητο εκτός ελέγχου

Αυτοκίνητο μάζας m βρίσκεται πάνω σε παγωμένο δρόμο με κλίση θ (Εικόνα Μ5.11α).

(Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου, υποθέτοντας ότι ο δρόμος δεν έχει τριβές.



Εικόνα Μ5.11 (Παράδειγμα Μ5.6) (α) Ένα αυτοκίνητο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβές. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το αυτοκίνητο. Η μαύρη τελεία αναπαριστά τη θέση του κέντρου μάζας του αυτοκινήτου. Θα μάθουμε περισσότερα για το κέντρο μάζας στο Κεφάλαιο Μ9.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με τη βοήθεια της Εικόνας Μ5.11α. Γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι ένα αυτοκίνητο το οποίο βρίσκεται σε έναν παγωμένο κατηφορικό δρόμο θα επιταχύνει προς τα κάτω. (Το ίδιο συμβαίνει και σε ένα αυτοκίνητο που βρίσκεται σε μια κατηφόρα όταν ο οδηγός δεν πατάει φρένο.)

Κατηγοριοποίηση Εφόσον το αυτοκίνητο επιταχύνει το κατηγοριοποιούμε ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Επιπλέον, το παράδειγμα αυτό ανήκει σε μια πολύ συνηθισμένη κατηγορία προβλημάτων, στα οποία ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας σε κεκλιμένο επίπεδο.

Ανάλυση Στην Εικόνα Μ5.11β φαίνεται το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το αυτοκίνητο. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο αυτοκίνητο είναι η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$, και η κατακόρυφη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ με κατεύθυνση προς τα κάτω. Στα προβλήματα με κεκλιμένα επίπεδα, μας διευκολύνει να επιλέγουμε τους άξονες συντεταγμένων έτσι ώστε ο άξονας x να είναι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και ο άξονας y να είναι κάθετος προς αυτό (Εικόνα Μ5.11β). Σε αυτό το σύστημα αξόνων, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη βαρυτική δύναμη με μια συνιστώσα μέτρου $mg \sin \theta$ στον θετικό ημιάξονα x και μια συνιστώσα μέτρου $mg \cos \theta$ στον αρνητικό άξονα y. Η επιλογή των αξόνων μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στη διεύθυνση του άξονα x και ως σωματίδιο σε ισορροπία στη διεύθυνση του άξονα y.

Μ5.6 συν.

Εφαρμόστε τα μοντέλα αυτά στο αυτοκίνητο: (1) $\sum F_x = mg\sin\theta = ma_x$

(2) $\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$

Λύστε την Εξίσωση (1) ως προς a_x: (3) $a_x = \boxed{g\sin\theta}$

Ολοκλήρωση Προσέξτε ότι η συνιστώσα a_x της επιτάχυνσης είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του αυτοκινήτου! Εξαρτάται μόνο από τη γωνία της κλίσης και από το g.

Από την Εξίσωση (2), συμπεραίνουμε ότι η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσα τής $\vec{\mathbf{F}}_g$ εξισορροπείται από την κάθετη δύναμη· δηλαδή, ότι $n = mg\cos\theta$. Πρόκειται για μία ακόμα περίπτωση όπου το μέτρο της κάθετης δύναμης *δεν* είναι ίσο με το βάρος του σώματος.

Είναι εφικτό, αν και πιο δύσκολο, να λύσετε το πρόβλημα με «κανονικούς» οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες. Μπορείτε, αν θέλετε, να το επιχειρήσετε για εξάσκηση.

(Β) Υποθέστε ότι αφήνουμε το αυτοκίνητο από κατάσταση ηρεμίας στην κορυφή της κατηφόρας και ότι η απόσταση του μπροστινού προφυλακτήρα από το τέλος της κατηφόρας είναι d. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει ο προφυλακτήρας στο τέλος της κατηφόρας, και πόσο γρήγορα θα κινείται το αυτοκίνητο όταν θα φτάσει εκεί;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι το αυτοκίνητο ολισθαίνει προς τα κάτω και ότι μετράτε με ένα χρονόμετρο τον χρόνο μέχρι να φτάσει στο τέλος της κατηφόρας.

Κατηγοριοποίηση Αυτό το μέρος του προβλήματος ανήκει περισσότερο στην κινηματική παρά στη δυναμική, και η Εξίσωση (3) δείχνει ότι η επιτάχυνση a_x είναι σταθερή. Συνεπώς, σε αυτό το ερώτημα πρέπει να μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Ανάλυση Ορίζοντας την αρχική θέση του μπροστινού προφυλακτήρα ως $x_i = 0$, την τελική θέση ως $x_f = d$, και $v_{xi} = 0$, εφαρμόστε την Εξίσωση Μ2.16, $x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$: $d = \frac{1}{2}a_x t^2$

Λύστε ως προς t: (4) $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a_x}} = \boxed{\sqrt{\dfrac{2d}{g\sin\theta}}}$

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.17, με $v_{xi} = 0$, για να βρείτε την τελική ταχύτητα του αυτοκινήτου: $v_{xf}^{\,2} = 2a_x d$

(5) $v_{xf} = \sqrt{2a_x d} = \boxed{\sqrt{2gd\sin\theta}}$

Ολοκλήρωση Από τις Εξισώσεις (4) και (5) βλέπουμε ότι, σε αντίθεση με την επιτάχυνση, η χρονική στιγμή t κατά την οποία το αυτοκίνητο φτάνει στο τέλος της κατηφόρας, καθώς και το μέτρο της τελικής ταχύτητας v_{xf} δεν εξαρτώνται από τη μάζα του αυτοκινήτου. Παρατηρήστε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα συνδυάσαμε τεχνικές από το Κεφάλαιο Μ2 με νέες τεχνικές από το τρέχον κεφάλαιο. Καθώς θα μαθαίνουμε περισσότερες τεχνικές στα επόμενα κεφάλαια, θα συνδυάζουμε μοντέλα ανάλυσης και πληροφορίες από διάφορα μέρη του βιβλίου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, να χρησιμοποιείτε τη «Γενική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων» για να προσδιορίζετε τα μοντέλα ανάλυσης που θα χρειαστείτε.

ΚΙ ΑΝ...; Σε ποιο πρόβλημα που έχετε ήδη λύσει ανάγεται η παρούσα κατάσταση αν $\theta = 90°$;

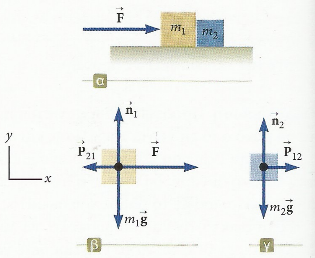
Απάντηση Φανταστείτε τη γωνία θ στην Εικόνα Μ5.11 να γίνεται 90°. Το κεκλιμένο επίπεδο γίνεται κατακόρυφο, και το αυτοκίνητο μετατρέπεται σε σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση! Η Εξίσωση (3) γίνεται

$$a_x = g\sin\theta = g\sin 90° = g$$

που είναι πράγματι η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης. (Βρίσκουμε $a_x = g$ αντί για $a_x = -g$ επειδή στην Εικ. Μ5.11 ο θετικός άξονας x έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.) Παρατηρήστε ακόμα ότι η συνθήκη $n = mg\cos\theta$ δίνει $n = mg\cos 90° = 0$. Αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι το αυτοκίνητο πέφτει *παράλληλα με* το κατακόρυφο επίπεδο, καθώς σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει δύναμη επαφής μεταξύ αυτοκινήτου και επιπέδου.

Παράδειγμα Μ5.7 Ο ένας κύβος σπρώχνει τον άλλο

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2, όπου $m_1 > m_2$, βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές (Δυναμική Εικόνα Μ5.12α). Στον κύβο μάζας m_1 ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ όπως φαίνεται στην εικόνα.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ5.12

(Παράδειγμα Μ5.7) (α) Μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ ασκείται στον κύβο μάζας m_1, ο οποίος ωθεί ένα δεύτερο κύβο μάζας m_2. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_1. (γ) Οι δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_2.

(Α) Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του συστήματος.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Από τη Δυναμική Εικόνα Μ5.12α συνειδητοποιούμε ότι, εφόσον οι δύο κύβοι βρίσκονται σε επαφή καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, θα πρέπει να έχουν την *ίδια* επιτάχυνση.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον στο σύστημα των κύβων ασκείται μια συνισταμένη δύναμη και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση του συστήματος, κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Καταρχήν μοντελοποιούμε το σύμπλεγμα των δύο κύβων ως ένα σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Εφαρμόζουμε στο σύστημα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη διεύθυνση του άξονα x για να βρούμε την επιτάχυνση:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$(1)\quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση που δίνει η Εξίσωση (1) είναι η επιτάχυνση ενός σώματος με μάζα $m_1 + m_2$ το οποίο δέχεται την ίδια δύναμη F.

(Β) Προσδιορίστε το μέτρο της δύναμης επαφής μεταξύ των δύο κύβων.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η δύναμη επαφής είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος των δύο κύβων. Επομένως, δεν μπορούμε να βρούμε τη δύναμη αυτή μοντελοποιώντας ολόκληρο το σύστημα (τα δύο σώματα) ως ένα σωματίδιο.

Κατηγοριοποίηση Ας θεωρήσουμε τους δύο κύβους χωριστά κατηγοριοποιώντας τον καθένα από αυτούς ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Κατασκευάζουμε το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται σε καθέναν από τους δύο κύβους όπως φαίνεται στις Δυναμικές Εικόνες Μ5.12β και Μ5.12γ, όπου η δύναμη επαφής συμβολίζεται με $\vec{\mathbf{P}}$. Από τη Δυναμική Εικόνα Μ5.12γ, βλέπουμε ότι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στη μάζα m_2 είναι η δύναμη επαφής $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ (η δύναμη που ασκεί η μάζα m_1 στην m_2), η οποία έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη μάζα m_2:

$$(2)\quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Αντικαταστήστε την τιμή της επιτάχυνσης a_x που δίνεται από την Εξίσωση (1) στην Εξίσωση (2):

$$(3)\quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Ολοκλήρωση Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η δύναμη επαφής P_{12} είναι *μικρότερη* από την ασκούμενη δύναμη F. Η δύναμη που απαιτείται για να επιταχυνθεί μόνο ο κύβος 2 πρέπει να είναι μικρότερη από τη δύναμη που χρειάζεται για να επιτευχθεί η ίδια επιτάχυνση στο σύστημα των δύο κύβων.

M5.7 *συν.*

Για να ολοκληρώσουμε, ας ελέγξουμε την παραπάνω σχέση ως προς P_{12}, εξετάζοντας τις δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_1, οι οποίες φαίνονται στη Δυναμική Εικόνα M5.12β. Οι οριζόντιες δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_1 είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά και η δύναμη από επαφή $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά (η δύναμη που ασκεί η μάζα m_2 στην m_1). Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ είναι η αντίδραση της $\vec{\mathbf{P}}_{12}$, άρα $P_{21} = P_{12}$.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην m_1:

$$(4)\quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Λύστε ως προς P_{12} και αντικαταστήστε την τιμή της a_x από την Εξίσωση (1):

$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Το αποτέλεσμα, όπως ήταν αναμενόμενο, συμφωνεί με την Εξίσωση (3).

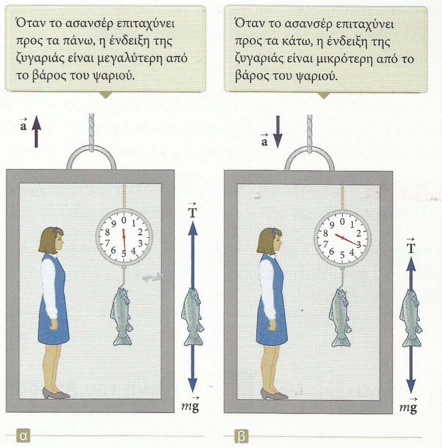
ΚΙ ΑΝ...; Φανταστείτε ότι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στην Δυναμική Εικόνα M5.12 ασκείται προς τα αριστερά στον δεξιό κύβο με μάζα m_2. Είναι το μέτρο της δύναμης $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ ίδιο όπως στην περίπτωση που η δύναμη ασκείται προς τα δεξιά στη μάζα m_1;

Απάντηση Όταν η δύναμη ασκείται προς τα αριστερά στη μάζα m_2, η δύναμη επαφής πρέπει να επιταχύνει τη μάζα m_1. Στο αρχικό πρόβλημα, η δύναμη επαφής επιταχύνει τη μάζα m_2. Επειδή ισχύει $m_1 > m_2$, απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη, άρα το μέτρο της $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ είναι μεγαλύτερο από ό,τι στο αρχικό πρόβλημα.

Παράδειγμα M5.8 Ζυγίζοντας ψάρια στο ασανσέρ

Κάποιος ζυγίζει ένα ψάρι μάζας m χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά ελατηρίου που είναι στερεωμένη στην οροφή ενός ασανσέρ (Εικόνα M5.13).

(Α) Δείξτε ότι αν το ασανσέρ επιταχύνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω, η ένδειξη της ζυγαριάς ελατηρίου θα είναι διαφορετική από το βάρος του ψαριού.



Εικόνα M5.13 (Παράδειγμα M5.8) Ζύγισμα ενός ψαριού με ζυγαριά ελατηρίου μέσα σε ένα επιταχυνόμενο ασανσέρ.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η ένδειξη της ζυγαριάς συνδέεται με την επιμήκυνση του ελατηρίου της, η οποία σχετίζεται με τη δύναμη που ασκείται στο άκρο του ελατηρίου (Εικόνα M5.2). Φανταστείτε ότι το ψάρι κρέμεται από έναν σπάγκο ο οποίος είναι δεμένος στο άκρο του ελατηρίου. Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο ελατήριο είναι ίσο με την τάση T στον σπάγκο. Άρα, πρέπει να βρούμε την τάση T. Η τάση $\vec{\mathbf{T}}$, η οποία αναπτύσσεται στο ελατήριο, έλκει το ψάρι προς τα επάνω.

Κατηγοριοποίηση Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρώντας το ψάρι ως σωματίδιο υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Εξετάστε τα διαγράμματα των δυνάμεων που ασκούνται στο ψάρι στην Εικόνα M5.13 και παρατηρήστε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο ψάρι είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ και η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί ο σπάγκος. Αν το ασανσέρ είναι ακίνητο ή αν κινείται με σταθερή ταχύτητα, θεωρούμε ότι το ψάρι είναι σωματίδιο σε ισορροπία, οπότε $\sum F_y = T - F_g = 0$ ή $T = F_g = mg$. (Θυμηθείτε ότι η βαθμωτή ποσότητα mg είναι το βάρος του ψαριού.)

συνεχίζεται

Μ5.8 *συν.*

Υποθέστε τώρα ότι το ασανσέρ κινείται με επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται έξω από αυτό σε ένα αδρανειακό σύστημα. Τώρα θεωρούμε το ψάρι ως σωματίδιο υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο ψάρι: $\sum F_y = T - mg = ma_y$

Λύστε ως προς T: (1) $T = ma_y + mg = mg\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right)$

όπου ο άξονας y έχει θετική κατεύθυνση προς τα πάνω. Από την Εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι, αν η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω, τότε η συνιστώσα της a_y είναι θετική (Εικ. Μ5.13α) και η ένδειξη που δίνει η ζυγαριά για την τάση T είναι μεγαλύτερη από το βάρος mg του ψαριού· επίσης, αν η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, τότε η συνιστώσα της a_y είναι αρνητική (Εικ. Μ5.13β), και η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μικρότερη από το βάρος mg.

(Β) Υπολογίστε τις ενδείξεις της ζυγαριάς για ένα ψάρι βάρους 40.0 N όταν το ασανσέρ κινείται με επιτάχυνση $a_y = \pm 2.00 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

Υπολογίστε από την Εξίσωση (1) την ένδειξη της ζυγαριάς όταν η $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω: $T = (40.0 \text{ N})\left(\frac{2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1\right) = \boxed{48.2 \text{ N}}$

Υπολογίστε από την Εξίσωση (1) την ένδειξη της ζυγαριάς όταν η $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω: $T = (40.0 \text{ N})\left(\frac{-2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1\right) = \boxed{31.8 \text{ N}}$

Ολοκλήρωση Αν αγοράζετε ψάρια μέσα σε ένα ασανσέρ, βεβαιωθείτε ότι τα ψάρια ζυγίζονται όταν το ασανσέρ είναι ακίνητο η όταν επιταχύνει προς τα κάτω! Επιπλέον, παρατηρήστε ότι με τα δεδομένα που έχουμε, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της κίνησης του ασανσέρ.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι το συρματόσκοινο του ασανσέρ σπάει και το ασανσέρ μαζί με το περιεχόμενό του εκτελούν ελεύθερη πτώση. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;

Απάντηση Αν το ασανσέρ εκτελεί ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνσή του είναι $a_y = -g$. Από την Εξίσωση (1) διαπιστώνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η ένδειξη που δίνει η ζυγαριά για την τάση T είναι μηδέν δηλαδή, το ψάρι *φαίνεται* να μην έχει βάρος.

Παράδειγμα Μ5.9 Η μηχανή του Atwood

Η διάταξη στην οποία δύο σώματα με άνισες μάζες κρέμονται κατακόρυφα από μια τροχαλία αμελητέας μάζας χωρίς τριβές (Δυναμική Εικόνα Μ5.14α) ονομάζεται *μηχανή του Atwood*. Η συσκευή αυτή χρησιμοποιείται μερικές φορές στο εργαστήριο για τον προσδιορισμό της τιμής του g. Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο σωμάτων και την τάση στο αβαρές νήμα.

ΛΥΣΗ

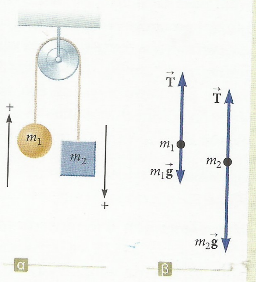
Μοντελοποίηση Φανταστείτε στην πράξη την κατάσταση που παρουσιάζεται στη Δυναμική Εικόνα Μ5.14α: καθώς το ένα σώμα κινείται προς τα πάνω, το άλλο σώμα κινείται προς τα κάτω. Εφόσον τα σώματα συνδέονται με ένα μη εκτατό νήμα, οι επιταχύνσεις τους πρέπει να έχουν ίσα μέτρα.

M5.9 συν.

Κατηγοριοποίηση Τα σώματα στη μηχανή του Atwood δέχονται τη βαρυτική δύναμη, καθώς και τις δυνάμεις που ασκούν τα νήματα που συνδέονται με αυτά. Άρα, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα δύο σωματιδίων υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα φαίνονται στη Δυναμική Εικόνα M5.14β. Σε κάθε σώμα δρουν δύο δυνάμεις: η δύναμη $\vec{T}$ που ασκεί το νήμα με κατεύθυνση προς τα πάνω και η δύναμη που ασκεί η βαρύτητα με κατεύθυνση προς τα κάτω. Σε προβλήματα όπως αυτά, όπου η τροχαλία δεν έχει μάζα και τριβές, η τάση του νήματος και στις δύο πλευρές της τροχαλίας είναι ίδια. Αν η τροχαλία έχει μάζα ή υφίσταται τριβές, οι τάσεις στις δύο πλευρές δεν θα είναι ίδιες και για την επίλυση του προβλήματος θα απαιτηθούν τεχνικές που θα μάθουμε στο Κεφάλαιο M10.

Σε προβλήματα όπως αυτό θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με τα πρόσημα. Στη Δυναμική Εικόνα M5.14α, παρατηρήστε ότι αν το σώμα 1 επιταχύνει προς τα πάνω, το σώμα 2 θα επιταχύνει προς τα κάτω. Συνεπώς, για να έχουμε συνέπεια στα πρόσημα, αν ορίσουμε την κατεύθυνση προς τα πάνω ως θετική για το σώμα 1, πρέπει να ορίσουμε την κατεύθυνση προς τα κάτω ως θετική για το σώμα 2. Με βάση αυτή τη σύμβαση για το πρόσημο, και τα δύο σώματα επιταχύνουν προς την ίδια κατεύθυνση. Επιπλέον, η συνιστώσα y της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα 1 είναι $T - m_1g$, ενώ η συνιστώσα y της συνισταμένης δύναμη που ασκείται στο σώμα 2 είναι $m_2g - T$.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ M5.14

(Παράδειγμα M5.9) Η μηχανή του Atwood. (α) Δύο σώματα τα οποία συνδέονται με ένα μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας που διέρχεται από μια τροχαλία χωρίς τριβές. (β) Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο σώμα 1: (1) $\sum F_y = T - m_1g = m_1a_y$

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο σώμα 2: (2) $\sum F_y = m_2g - T = m_2a_y$

Προσθέστε την Εξίσωση (2) στην Εξίσωση (1), παρατηρώντας ότι η τάση T απαλείφεται: $-m_1g + m_2g = m_1a_y + m_2a_y$

Λύστε ως προς την επιτάχυνση: (3) $\boxed{a_y = \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g}$

Αντικαταστήστε την Εξίσωση (3) στην Εξίσωση (1) για να βρείτε το T: (4) $T = m_1(g + a_y) = \boxed{\left(\dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g}$

Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση που δίνει η Εξίσωση (3) μπορεί να ερμηνευτεί ως ο λόγος του μέτρου της μη μηδενικής δύναμης που δέχεται το σύστημα $(m_2 - m_1)g$ προς τη συνολική μάζα του συστήματος $(m_1 + m_2)$, όπως προβλέπει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Παρατηρήστε ότι το πρόσημο της επιτάχυνσης εξαρτάται από τη διαφορά των μαζών των δύο σωμάτων.

ΚΙ ΑΝ...; Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος αν τα σώματα έχουν ίσες μάζες, δηλαδή αν ισχύει $m_1 = m_2$.

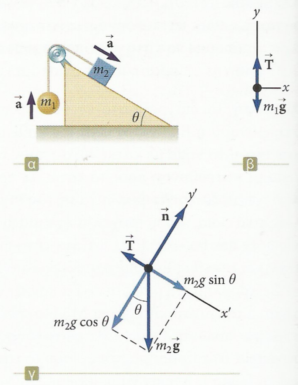
Απάντηση Αν έχουμε ίδια μάζα και στις δύο πλευρές της τροχαλίας, το σύστημα ισορροπεί και δεν πρέπει να επιταχύνει. Από μαθηματικής άποψης, βλέπουμε ότι αν ισχύει $m_1 = m_2$, τότε η Εξίσωση (3) δίνει $a_y = 0$.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν μία από τις μάζες είναι πολύ μεγαλύτερη από την άλλη: $m_1 >> m_2$;

Απάντηση Στην περίπτωση που η μια μάζα είναι απείρως μεγαλύτερη από την άλλη, μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της μικρότερης μάζας. Συνεπώς, η μεγαλύτερη μάζα θα εκτελέσει ελεύθερη πτώση σαν μην υπήρχε η μικρότερη μάζα. Βλέπουμε ότι αν ισχύει $m_1 >> m_2$, τότε η Εξίσωση (3) δίνει $a_y = -g$.

Παράδειγμα Μ5.10 Επιτάχυνση δύο σωμάτων που συνδέονται με νήμα

Μια σφαίρα μάζας m_1 και ένας κύβος μάζας m_2 συνδέονται με αβαρές νήμα που διέρχεται γύρω από τροχαλία αμελητέας μάζας χωρίς τριβές (Εικόνα Μ5.15α). Ο κύβος βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ το οποίο δεν έχει τριβές. Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο σωμάτων και την τάση του νήματος.



Εικόνα Μ5.15 (Παράδειγμα Μ5.10) (α) Δύο σώματα τα οποία συνδέονται με ένα αβαρές νήμα που διέρχεται από μια τροχαλία χωρίς τριβές. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη σφαίρα. (γ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τον κύβο. (Το κεκλιμένο επίπεδο δεν έχει τριβές.)

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε τα σώματα στην Εικόνα Μ5.15 να κινούνται. Αν η μάζα m_2 κινείται προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε η m_1 κινείται προς τα πάνω. Επειδή τα σώματα συνδέονται με νήμα (το οποίο θεωρούμε ότι είναι μη εκτατό), οι επιταχύνσεις τους έχουν το ίδιο μέτρο.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε καθένα από τα δύο σώματα και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση, κατηγοριοποιούμε τα σώματα ως σωματίδια υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Θεωρήστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος που φαίνονται στις Εικόνες Μ5.15β και Μ5.15γ.

Εφαρμόστε στη σφαίρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών, επιλέγοντας ως θετική κατεύθυνση την κατακόρυφη κατεύθυνση προς τα πάνω:

$$(1)\ \sum F_x = 0$$

$$(2)\ \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Για να επιταχυνθεί η σφαίρα προς τα πάνω, πρέπει να ισχύει $T > m_1 g$. Στην Εξίσωση (2), αντικαταστήσαμε το a_y με το a επειδή η επιτάχυνση έχει μόνο συνιστώσα y.

Για τον κύβο, μας διευκολύνει να επιλέξουμε ως θετική κατεύθυνση του άξονα x' την κατεύθυνση παράλληλα και προς τα δεξιά του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.15γ. Επίσης, για να είμαστε συνεπείς με την επιλογή μας για την κατεύθυνση της σφαίρας, επιλέγουμε ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση παράλληλα και προς τα δεξιά του κεκλιμένου επιπέδου.

Εφαρμόστε στον κύβο τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών:

$$(3)\ \sum F_{x'} = m_2 g \sin\theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$(4)\ \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos\theta = 0$$

Στην Εξίσωση (3), αντικαταστήσαμε το $a_{x'}$ με το a επειδή τα δύο σώματα έχουν επιταχύνσεις ίδιου μέτρου a.

Λύστε την Εξίσωση (2) ως προς T:

$$(5)\ T = m_1(g + a)$$

Αντικαταστήστε αυτή τη σχέση για το T στην Εξίσωση (3):

$$m_2 g \sin\theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

Λύστε ως προς a:

$$(6)\ \boxed{a = \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2}\right)g}$$

Αντικαταστήστε αυτή τη σχέση για το a στην Εξίσωση (5) για να βρείτε το T:

$$(7)\ \boxed{T = \left(\frac{m_1 m_2(\sin\theta + 1)}{m_1 + m_2}\right)g}$$

M5.10 *συν.*

Ολοκλήρωση Ο κύβος επιταχύνει προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο μόνο αν $m_2 \sin\theta > m_1$. Αν $m_1 > m_2 \sin\theta$, ο κύβος επιταχύνει προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και η σφαίρα επιταχύνει προς τα κάτω. Επίσης, παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα για την επιτάχυνση, δηλαδή η Εξίσωση (6), μπορεί να ερμηνευτεί ως το πηλίκο του μέτρου της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης, που δρα στο σύστημα σφαίρας-κύβου, προς τη συνολική μάζα του συστήματος· αυτό συμφωνεί με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν ισχύει $\theta = 90°$;

Απάντηση Αν $\theta = 90°$, το κεκλιμένο επίπεδο γίνεται κατακόρυφο και δεν υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στην επιφάνειά του και τη μάζα m_2. Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα της μηχανής του Atwood που είδαμε στο Παράδειγμα Μ5.9. Για $\theta \to 90°$, οι Εξισώσεις (6) και (7) ανάγονται στις Εξισώσεις (3) και (4) του Παραδείγματος Μ5.9!

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν ισχύει $m_1 = 0$;

Απάντηση Αν $m_1 = 0$, τότε η μάζα m_2 θα ολισθήσει προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να αλληλεπιδράσει με την m_1 μέσω του νήματος. Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα του αυτοκινήτου που ολισθαίνει, το οποίο είδαμε στο Παράδειγμα Μ5.6. Για $m_1 \to 0$, η Εξίσωση (6) ανάγεται στην Εξίσωση (3) του Παραδείγματος Μ5.6!

Μ5.8 Δυνάμεις τριβής

Όταν ένα σώμα κινείται πάνω σε μια επιφάνεια ή μέσα σε ένα ιξώδες μέσο, όπως είναι ο αέρας ή το νερό, συναντά αντίσταση στην κίνησή του επειδή αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του. Η αντίσταση αυτή ονομάζεται **δύναμη τριβής.** Οι δυνάμεις τριβής παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην καθημερινή μας ζωή. Μας επιτρέπουν να περπατάμε ή να τρέχουμε και είναι απαραίτητες για την κίνηση των τροχοφόρων οχημάτων.

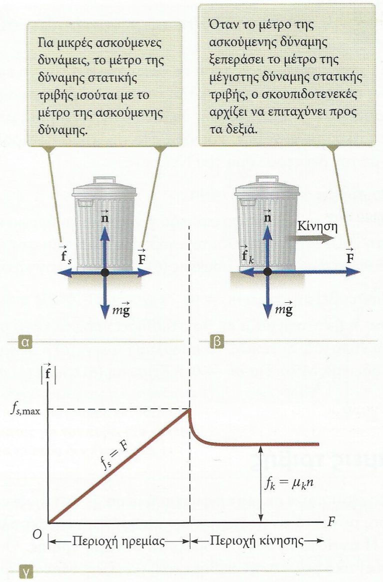
Φανταστείτε ότι δουλεύετε στον κήπο σας και έχετε γεμίσει τον σκουπιδοτενεκέ με κομμένο γρασίδι. Στη συνέχεια προσπαθείτε να σύρετε τον σκουπιδοτενεκέ πάνω στη στρωμένη με τσιμέντο αυλή σας (Δυναμική Εικόνα Μ5.16α). Αυτή η επιφάνεια είναι *πραγματική*, και όχι μια ιδανική επιφάνεια χωρίς τριβές. Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζετε μια εξωτερική οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στον σκουπιδοτενεκέ με κατεύθυνση προς τα δεξιά· αν η τιμή της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$ είναι μικρή, ο σκουπιδοτενεκές θα παραμείνει ακίνητος. Η δύναμη στον σκουπιδοτενεκέ, η οποία εξουδετερώνει την $\vec{\mathbf{F}}$ και δεν του επιτρέπει να κινηθεί, δρα προς τα αριστερά και ονομάζεται **δύναμη στατικής τριβής** $\vec{\mathbf{f}}_s$. Όταν ο σκουπιδοτενεκές δεν κινείται, ισχύει $f_s = F$. Συνεπώς, αν αυξηθεί η $\vec{\mathbf{F}}$ θα αυξηθεί και η $\vec{\mathbf{f}}_s$. Παρομοίως, αν μειωθεί η $\vec{\mathbf{F}}$ θα μειωθεί και η $\vec{\mathbf{f}}_s$.

◀ **Δύναμη στατικής τριβής**

Πειράματα δείχνουν ότι η δύναμη τριβής προκύπτει από τη φύση των δύο επιφανειών: λόγω της τραχύτητάς τους, οι επιφάνειες έρχονται σε επαφή μόνο σε ορισμένα σημεία, εκεί δηλαδή όπου συναντώνται οι προεξοχές των δύο υλικών. Σε αυτά τα σημεία, η δύναμη τριβής προκύπτει εν μέρει επειδή οι προεξοχές της μίας επιφάνειας εμποδίζουν την κίνηση των προεξοχών της άλλης επιφάνειας και εν μέρει εξαιτίας των χημικών δεσμών («σημειακών συγκολλήσεων») που δημιουργούνται στα σημεία επαφής των προεξοχών των δύο επιφανειών. Παρότι ο μηχανισμός ανάπτυξης των δυνάμεων τριβής σε ατομικό επίπεδο είναι αρκετά περίπλοκος, ουσιαστικά μπορούμε να πούμε ότι οφείλονται στην ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων ή μορίων.

Αν συνεχίσετε να αυξάνετε το μέτρο της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$, όπως φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ5.16β, κάποια στιγμή ο σκουπιδοτενεκές θα αρχίσει να ολισθαίνει. Λίγο πριν αρχίσει να ολισθαίνει ο σκουπιδοτενεκές, η f_s παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f_{s,\max}$ (Δυναμική Εικόνα Μ5.16γ). Μόλις η F γίνει μεγαλύτερη από την $f_{s,\max}$, ο σκουπιδοτενεκές αρχίζει να κινείται και επιταχύνει προς τα δεξιά. Όταν ένα σώμα κινείται, η δύναμη τριβής που ασκείται σε αυτό ονομάζεται **δύναμη τριβής ολίσθησης** $\vec{\mathbf{f}}_k$. Όταν ο σκουπιδοτενεκές κινείται, η δύναμη τριβής ολίσθησης που ασκείται σε αυτόν είναι μικρότερη από τη μέγιστη δύναμη στατικής τριβής $f_{s,\max}$ (Δυναμική Εικ. Μ5.16γ). Η συνισταμένη δύναμη $F - f_k$ στη διεύθυνση του άξονα x προκαλεί επιτάχυνση προς τα δεξιά, σύμ-

◀ **Δύναμη τριβής ολίσθησης**



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ5.16

(α) και (β) Όταν τραβάτε έναν σκουπιδοτενεκέ, η κατεύθυνση της δύναμης τριβής $\vec{f}$ η οποία αναπτύσσεται μεταξύ του σκουπιδοτενεκέ και μιας τραχιάς επιφάνειας έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ασκούμενη δύναμη $\vec{F}$. (γ) Το γράφημα της δύναμης τριβής προς την ασκούμενη δύναμη. Παρατηρήστε ότι ισχύει $f_{s,\max} > f_k$.

Αποφυγή παγίδων Μ5.9

Η ισότητα ισχύει σε λίγες περιπτώσεις

Στην Εξίσωση Μ5.9, η ισότητα ισχύει *μόνο* στην περίπτωση που οι επιφάνειες έτοιμες να ολισθήσουν. Μην πέσετε στη συνηθισμένη παγίδα να θεωρήσετε ότι η σχέση $f_s = \mu_s n$ ισχύει σε *κάθε* στατική περίπτωση.

Αποφυγή παγίδων Μ5.10

Εξισώσεις τριβής

Οι Εξισώσεις Μ5.9 και Μ5.10 *δεν* είναι διανυσματικές εξισώσεις. Είναι σχέσεις οι οποίες συνδέουν τα *μέτρα* των διανυσμάτων της δύναμης τριβής και της κάθετης δύναμης. Επειδή η δύναμη τριβής και η κάθετη δύναμη είναι κάθετες μεταξύ τους, τα διανύσματα δεν μπορούν να σχετίζονται μέσω κάποιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς.

φωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Αν ισχύει $F = f_k$, τότε η επιτάχυνση είναι μηδενική και ο σκουπιδοτενεκές κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Αν η δύναμη $\vec{F}$ σταματήσει να ασκείται στον κινούμενο τενεκέ, τότε η δύναμη τριβής $\vec{f}_k$ που δρα προς τα αριστερά προκαλεί επιτάχυνση του σκουπιδοτενεκέ στην κατεύθυνση του άξονα $-x$ και τελικά τον ακινητοποιεί, πάντα σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Πειραματικά, βρίσκουμε κατά προσέγγιση ότι οι $f_{s,\max}$ και f_k είναι ανάλογες προς το μέτρο της κάθετης δύναμης που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα. Οι παρακάτω περιγραφές βασίζονται σε πειραματικές παρατηρήσεις και αποτελούν το μοντέλο των δυνάμεων τριβής που θα χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση προβλημάτων:

- Το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής μεταξύ δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή μπορεί να πάρει τις τιμές

$$f_s \le \mu_s n \qquad \text{(M5.9)}$$

  όπου η αδιάστατη σταθερά μ_s ονομάζεται **συντελεστής στατικής τριβής** και το n είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης που ασκεί η μία επιφάνεια στην άλλη. Η ισότητα στην Εξίσωση Μ5.9 ισχύει λίγο πριν επιφάνειες αρχίσουν να ολισθαίνουν, δηλαδή όταν $f_s = f_{s,\max} = \mu_s n$. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται *κατάσταση επικείμενης κίνησης*. Σε κάθε άλλη περίπτωση, ισχύει η ανισότητα.

- Το μέτρο της δύναμης της τριβής ολίσθησης μεταξύ δύο επιφανειών είναι

$$f_k = \mu_k n \qquad \text{(M5.10)}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ M5.1 *Συντελεστές τριβής*

	μ_s	μ_k
Λάστιχο με μπετόν	1.0	0.8
Χάλυβας με χάλυβα	0.74	0.57
Αλουμίνιο με χάλυβα	0.61	0.47
Γυαλί με γυαλί	0.94	0.4
Χαλκός με χάλυβα	0.53	0.36
Ξύλο με ξύλο	0.25–0.5	0.2
Κερωμένο ξύλο με υγρό χιόνι	0.14	0.1
Κερωμένο ξύλο με ξηρό χιόνι	—	0.04
Μέταλλο με μέταλλο (που έχει λιπαντικό)	0.15	0.06
Τεφλόν με τεφλόν	0.04	0.04
Πάγος με πάγο	0.1	0.03
Ανθρώπινες αρθρώσεις	0.01	0.003

Σημείωση: Όλες οι τιμές είναι προσεγγιστικές. Σε μερικές περιπτώσεις, ο συντελεστής τριβής είναι μεγαλύτερος από 1.0.

όπου το μ_k ονομάζεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**. Αν και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μπορεί να μεταβάλλεται με το μέτρο της ταχύτητας, στο παρόν βιβλίο συνήθως θα αγνοούμε αυτές τις μεταβολές.

- Οι τιμές των συντελεστών μ_k και μ_s εξαρτώνται από τη φύση των επιφανειών, αλλά ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ_k γενικά είναι μικρότερος από τον συντελεστή στατικής τριβής μ_s. Οι τυπικές τιμές τους κυμαίνονται από 0.03 μέχρι 1.0. Στον Πίνακα M5.1 φαίνονται μερικές χαρακτηριστικές τιμές τους.
- Η κατεύθυνση της δύναμης τριβής που ασκείται σε ένα σώμα έχει διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια με την οποία έρχεται το σώμα σε επαφή και φορά αντίθετη από αυτή της πραγματικής κίνησης (τριβή ολίσθησης) ή της επικείμενης κίνησης (στατική τριβή) του σώματος ως προς την επιφάνεια.
- Οι συντελεστές τριβής είναι σχεδόν ανεξάρτητοι από το εμβαδόν επαφής των επιφανειών. Ίσως φαίνεται λογικό ότι τοποθετώντας ένα σώμα στην πλευρά με το μεγαλύτερο εμβαδόν, μπορούμε να αυξήσουμε τη δύναμη τριβής. Αν και αυτή η μέθοδος παρέχει περισσότερα σημεία επαφής, το βάρος του σώματος κατανέμεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια με αποτέλεσμα οι προεξοχές να μην έρχονται σε τόσο στενή επαφή μεταξύ τους. Επειδή αυτές οι επιδράσεις (της επιφάνειας επαφής και του βάρους) σχεδόν αντισταθμίζονται, η δύναμη τριβής είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής.

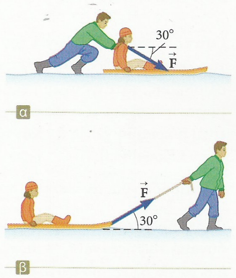
***Σύντομο ερώτημα* M5.6** Πιέζετε το βιβλίο της φυσικής σας πάνω σε έναν κατακόρυφο τοίχο με το χέρι σας. Ποια είναι η κατεύθυνση της δύναμης τριβής που ασκεί ο τοίχος στο βιβλίο; **(α)** Κατακόρυφα προς τα κάτω. **(β)** Κατακόρυφα προς τα πάνω. **(γ)** Από τον τοίχο προς τα έξω. **(δ)** Από έξω προς τον τοίχο.

***Σύντομο ερώτημα* M5.7** Παίζετε με την κόρη σας στο χιόνι. Κάθεται σε ένα έλκηθρο και σας ζητάει να τη σπρώξετε πάνω σε μια επίπεδη, οριζόντια έκταση. Έχετε την επιλογή **(α)** να τη σπρώξετε από πίσω ασκώντας στους ώμους της μια δύναμη υπό γωνία 30° κάτω από την οριζόντιο (Εικ. M5.17α) ή **(β)** να δέσετε ένα σκοινί στο μπροστινό τμήμα του ελκήθρου και να το τραβήξετε ασκώντας μια δύναμη υπό γωνία 30° πάνω από την οριζόντιο (Εικ. M5.17β). Ποια επιλογή θα ήταν πιο εύκολη για σας και γιατί;

Αποφυγή παγίδων M5.11

Η κατεύθυνση της δύναμης τριβής

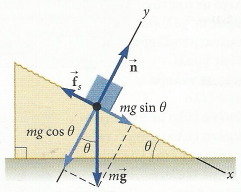
Μερικές φορές, χρησιμοποιείται η εσφαλμένη διατύπωση για τη δύναμη τριβής μεταξύ ενός σώματος και μιας επιφάνειας, «η δύναμη τριβής που ασκείται σε ένα σώμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κίνηση ή την επικείμενη κίνησή του», αντί για τη σωστή διατύπωση, «η δύναμη τριβής που ασκείται σε ένα σώμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κίνηση ή την επικείμενη κίνησή του *ως προς την επιφάνεια*».



Εικόνα M5.17 (Σύντομο ερώτημα M5.7) Ένας πατέρας τσουλάει την κόρη του πάνω σε έλκηθρο είτε (α) σπρώχνοντάς την στους ώμους είτε (β) τραβώντας ένα σκοινί.

Παράδειγμα **Μ5.11** Πειραματικός προσδιορισμός των μ_s και μ_k

Σε αυτό το παράδειγμα θα περιγράψουμε μια απλή μέθοδο μέτρησης των συντελεστών τριβής. Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε έναν κύβο πάνω στην τραχιά επιφάνεια ενός κεκλιμένου επιπέδου (Δυναμική Εικόνα Μ5.18). Αυξάνουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι ο κύβος να αρχίσει να κινείται. Δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε τον συντελεστή στατικής τριβής μ_s μετρώντας την κρίσιμη γωνία μ_c στην οποία αρχίζει η ολίσθηση.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ5.18

(Παράδειγμα Μ5.11) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε έναν κύβο ο οποίος βρίσκεται πάνω σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο είναι η βαρυτική δύναμη $m\vec{\mathbf{g}}$, η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$, και η δύναμη τριβής $\vec{\mathbf{f}}_s$. Για λόγους ευκολίας, η βαρυτική δύναμη αναλύεται σε μία συνιστώσα $mg \sin\theta$ που έχει την κατεύθυνση του επιπέδου και σε μία συνιστώσα $mg \cos\theta$ κάθετη στο επίπεδο.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Μελετήστε τη Δυναμική Εικόνα Μ5.18 και φανταστείτε ότι ο κύβος τείνει να ολισθήσει στο κεκλιμένο επίπεδο κάτω από την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας. Για να προσομοιώσετε το πρόβλημα, τοποθετήστε ένα κέρμα στο εξώφυλλο του βιβλίου και αυξήστε την κλίση του βιβλίου μέχρι το κέρμα να αρχίσει να ολισθαίνει. Παρατηρήστε τη διαφορά αυτού του παραδείγματος από το Παράδειγμα Μ5.6. Ένα ακίνητο σώμα πάνω σε ένα επίπεδο χωρίς τριβές θα αρχίσει να κινείται *οποιαδήποτε* γωνία και αν δώσουμε στο επίπεδο. Όταν όμως το επίπεδο έχει τριβές, το σώμα θα παραμείνει στάσιμο για γωνίες μικρότερες από την κρίσιμη.

Κατηγοριοποίηση Ο κύβος δέχεται διάφορες δυνάμεις. Επειδή αυξάνουμε τη γωνία του επιπέδου μέχρι την τιμή κατά την οποία ο κύβος είναι έτοιμος να αρχίσει να κινείται, αλλά ακόμα παραμένει στάσιμος, κατηγοριοποιούμε τον κύβο ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Ανάλυση Στο διάγραμμα της Δυναμικής Εικόνας Μ5.18 φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο: η βαρυτική δύναμη $m\vec{\mathbf{g}}$, η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$, και η δύναμη στατικής τριβής $\vec{\mathbf{f}}_s$. Ορίζουμε τον άξονα x παράλληλο προς το επίπεδο και τον άξονα y κάθετο προς αυτό.

Εφαρμόστε την Εξίσωση Μ5.8 στον κύβο και στις δύο διευθύνσεις των αξόνων x και y:

$$(1)\quad \sum F_x = mg \sin\theta - f_s = 0$$

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg \cos\theta = 0$$

Αντικαταστήστε το $mg = n/\cos\theta$ από την Εξίσωση (2) στην Εξίσωση (1):

$$(3)\quad f_s = mg \sin\theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\sin\theta = n \tan\theta$$

Όταν αυξήσουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου τόσο ώστε ο κύβος να βρίσκεται στο όριο της ολίσθησης, τότε η δύναμη της στατικής τριβής έχει τη μέγιστη τιμή της $\mu_s n$. Σε αυτή την περίπτωση, η γωνία θ είναι η κρίσιμη γωνία θ_c. Κάντε τις εξής αντικαταστάσεις στην Εξίσωση (3):

$$\mu_s n = n \tan\theta_c$$

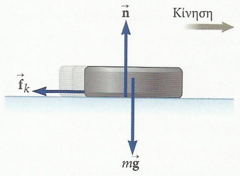
$$\mu_s = \tan\theta_c$$

Για παράδειγμα, αν ο κύβος αρχίζει να ολισθαίνει για $\theta_c = 20.0°$, τότε βρίσκουμε ότι $\mu_s = \tan 20.0° = 0.364$.

Ολοκλήρωση Από τη στιγμή που ο κύβος αρχίσει να κινείται για $\theta \geq \theta_c$, επιταχύνει στο κεκλιμένο επίπεδο και η δύναμη τριβής είναι $f_k = \mu_k n$. Αν όμως μειώσουμε τη γωνία θ σε μια τιμή μικρότερη από τη θ_c, μπορούμε να βρούμε μια γωνία θ'_c τέτοια ώστε ο κύβος να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα σταθερού μέτρου, ως σωματίδιο σε ισορροπία ($a_x = 0$). Σε αυτή την περίπτωση, αντικαταστήστε το f_s με f_k στις Εξισώσεις (1) και (2) για να βρείτε το μ_k: $\mu_k = \tan\theta'_c$, όπου $\theta'_c < \theta_c$.

Παράδειγμα M5.12 Δίσκος του χόκεϊ που ολισθαίνει

Κάποιος χτυπάει έναν δίσκο του χόκεϊ στην παγωμένη επιφάνεια μιας λίμνης και του δίνει μια αρχική ταχύτητα με μέτρο 20.0 m/s. Αν ο δίσκος βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με τον πάγο και σταματήσει να ολισθαίνει αφού διανύσει 115 m, προσδιορίστε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του δίσκου και του πάγου.



Εικόνα M5.19 (Παράδειγμα M5.12) Αφού δοθεί στον δίσκο αρχική ταχύτητα προς τα δεξιά, οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρουν σε αυτόν είναι η βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$, η κάθετη δύναμη $\vec{n}$, και η δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{f}_k$.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι ο δίσκος στην Εικόνα M5.19 ολισθαίνει προς τα δεξιά και τελικά η δύναμης της τριβής ολίσθησης τον αναγκάζει να σταματήσει.

Κατηγοριοποίηση Οι δυνάμεις που δρουν στον δίσκο φαίνονται στην Εικόνα M5.19, αλλά η διατύπωση του προβλήματος μάς δίνει μεταβλητές κινηματικής. Συνεπώς, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους. Πρώτον, εφόσον η τριβή ολίσθησης επιταχύνει τον δίσκο, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Δεύτερον, επειδή μοντελοποιούμε τη δύναμη της τριβής ολίσθησης ως ανεξάρτητη της ταχύτητας, η επιτάχυνση του δίσκου είναι σταθερή. Άρα, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα και ως πρόβλημα σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση.

Ανάλυση Καταρχήν, ας βρούμε την επιτάχυνση αλγεβρικά ως συνάρτηση του συντελεστή τριβής ολίσθησης, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Μόλις υπολογίσουμε την επιτάχυνση του δίσκου και την απόσταση που διανύει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της κινηματικής για να βρούμε την τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης. Στο διάγραμμα της Εικόνας M5.19 φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο.

Εφαρμόστε στον δίσκο το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στη διεύθυνση του άξονα x:

$$(1)\quad \sum F_x = -f_k = ma_x$$

Εφαρμόστε στον δίσκο το μοντέλο του σωματιδίου υπό ισορροπία στη διεύθυνση του άξονα y:

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg = 0$$

Αντικαταστήστε το $n = mg$ από την Εξίσωση (2) και το $f_k = \mu_k n$ στην Εξίσωση (1):

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$
$$a_x = -\mu_k g$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι, στην Εικόνα M5.19, η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Εφόσον η ταχύτητα του δίσκου έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, ο δίσκος επιβραδύνει. Η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τη μάζα του δίσκου και είναι σταθερή επειδή υποθέσαμε ότι ο συντελεστής μ_k είναι σταθερός.

Εφαρμόστε στον δίσκο το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση M2.17, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, με $x_i = 0$ και $v_f = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

Λύστε ως προς τον συντελεστή τριβής ολίσθησης:

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2gx_f}$$

Αντικαταστήστε τις αριθμητικές τιμές:

$$\mu_k = \frac{(20.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)(115 \text{ m})} = \boxed{0.177}$$

Ολοκλήρωση Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής μ_k, όπως ήταν αναμενόμενο, δεν έχει διαστάσεις. Επίσης, έχει μικρή τιμή, όπως συμβαίνει για σώματα που ολισθαίνουν πάνω σε πάγο.

τα τα οποία παρουσιάζουν τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα, όταν ο κύβος επιταχύνει προς τα δεξιά και η σφαίρα επιταχύνει προς τα πάνω.

Μοντελοποίηση Φανταστείτε τι συμβαίνει όταν ασκείται η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στον κύβο. Υπό την προϋπόθεση ότι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ δεν είναι αρκετά μεγάλη για να ανυψώσει τον κύβο, ο κύβος ολισθαίνει προς τα δεξιά και η σφαίρα ανυψώνεται.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση, κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα δύο σωματιδίων (της σφαίρας και του κύβου) υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Καταρχήν σχεδιάστε τα διαγράμματα δυνάμεων για τα δύο σώματα όπως φαίνεται στις Εικόνες Μ5.20β και Μ5.20γ. Παρατηρήστε ότι το νήμα ασκεί δύναμη μέτρου T και στα δύο σώματα. Η ασκούμενη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ έχει συνιστώσες x και y ίσες με $F \cos \theta$ και $F \sin \theta$, αντίστοιχα. Εφόσον τα δύο σώματα είναι συνδεδεμένα, μπορούμε να εξισώσουμε τα μέτρα της συνιστώσας x της επιτάχυνσης του κύβου και της συνιστώσας y της επιτάχυνσης της σφαίρας και να τα συμβολίσουμε με a. Ας υποθέσουμε ότι ο κύβος κινείται προς τα δεξιά.

Εφαρμόστε στον κύβο το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση:

$$(1) \quad \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_2 a_x = m_2 a$$

Επειδή ο κύβος κινείται μόνο οριζόντια, εφαρμόστε σε αυτόν το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$(2) \quad \sum F_y = n + F\sin\theta - m_2 g = 0$$

Εφαρμόστε στη σφαίρα το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$(3) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Λύστε την Εξίσωση (2) ως προς n:

$$n = m_2 g - F\sin\theta$$

Αντικαταστήστε το n στη σχέση $f_k = \mu_k n$ από την Εξίσωση Μ5.10:

$$(4) \quad f_k = \mu_k(m_2 g - F\sin\theta)$$

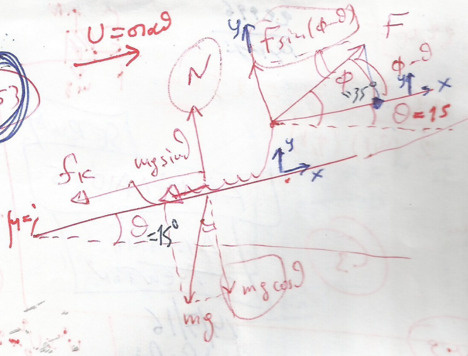
Αντικαταστήστε την Εξίσωση (4) και την τιμή της τάσης T από την Εξίσωση (3) στην Εξίσωση (1):

$$F\cos\theta - \mu_k(m_2 g - F\sin\theta) - m_1(a+g) = m_2 a$$

Λύστε ως προς a:

$$(5) \quad a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ



0.57

- σταθερή με σταθ.
άρα $F_x = 0$

(α)

x: $F\cos(\phi-\theta) = mg\sin\theta + f_K$ (1)

y: $N + F\sin(\phi-\theta) = mg\cos\theta$ (2)

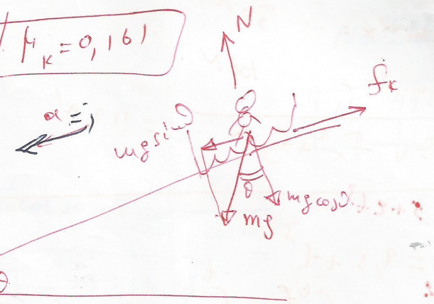
$(1) \Rightarrow F\cos(\phi-\theta) - mg\sin\theta = f_K$

$= \mu_K N$

$F\cos(\phi-\theta) - mg\sin\theta \overset{(2)}{=} \mu_K\left(mg\cos\theta - F\sin(\phi-\theta)\right)$

$\boxed{\mu_K = 0,161}$

(β)



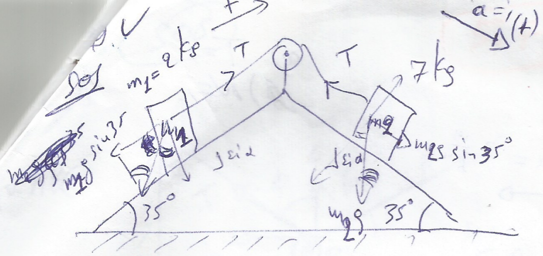
y: $N = mg\cos\theta$ (3)

x: $mg\sin\theta - f_K = ma$

$mg\sin\theta - \mu_K N = \frac{W}{g}a \overset{(3)}{\Longrightarrow}$

$\cancel{m}g\sin\theta - \mu_K \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}a \Rightarrow$

$a = g\sin\theta - \mu_K\cos\theta \Rightarrow a = 1,01\ \frac{m}{s^2}$



α) $a = ;$
κάθε σώματος

β) $T = ;$

5.87

$$\left.\begin{array}{l} -m_1 g \sin 35^\circ + T = m_1 a \Rightarrow -2\,(9{,}8)\sin 35 + T = 2a \\ m_2 g \sin 35 - T = m_2 a \Rightarrow 7\,(9{,}8)\sin 35 - T = 7a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 17{,}5\,N}$$

$$\boxed{a = 3{,}12\ m/s^2}$$

5.88) ίδιο με πριν αλλά με τριβή

$\mu = ;$

Αν $a = 1{,}5\ m/s^2$

a) $\mu = ;$

β) $T = ;$

$$\left.\begin{array}{l} -m_1 g \sin 35 - \mu m_1 g \cos 35 + T = m_1 a \\ m_2 g \sin 35 - \mu m_2 g \cos 35 - T = m_2 a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

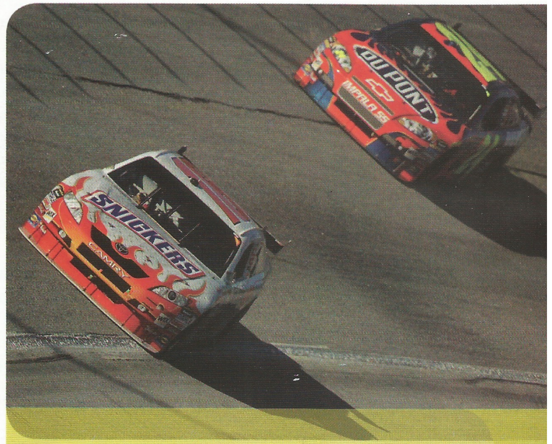
$$\Rightarrow \boxed{\mu = 0{,}202}$$

$$\boxed{T = 17{,}5N}$$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

κεφάλαιο **M6**

Κυκλική κίνηση και άλλες εφαρμογές των νόμων του Νεύτωνα



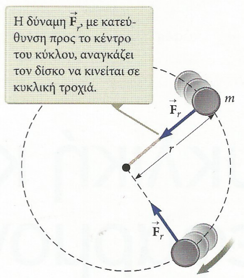
Ο Kyle Busch, οδηγός της Snickers Toyota αρ.18, προηγείται του Jeff Gordon, ο οποίος οδηγεί την Dupont Chevrolet αρ. 24, στον αγώνα NASCAR Sprint Cup Series Kobalt Tools 500 στην πίστα Atlanta Motor Speedway. Ο αγώνας έγινε στις 9 Μαρτίου 2008 στο Χάμπτον της Γεωργίας στις Η.Π.Α. Η πίστα έχει κλίση στις στροφές για να διευκολύνει την κυκλική κίνηση των αυτοκινήτων. (*Chris Graythen/ Getty Images for NASCAR*)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάσαμε τους νόμους της κίνησης του Νεύτωνα και τους χρησιμοποιήσαμε σε δύο μοντέλα ανάλυσης της ευθύγραμμης κίνησης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε κινήσεις οι οποίες είναι λίγο πιο σύνθετες. Για παράδειγμα, θα εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε σώματα τα οποία ακολουθούν κυκλικές τροχιές. Θα εξετάσουμε επίσης την κίνηση την οποία παρατηρούμε από ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς και την κίνηση ενός σώματος μέσα σε ιξώδες μέσο. Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου αποτελείται από μια σειρά παραδειγμάτων, τα οποία επιλέξαμε για να δείξουμε την εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα σε μια ποικιλία νέων περιπτώσεων.

M6.1 Επέκταση του μοντέλου του σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

Στην Ενότητα M4.4, μελετήσαμε το μοντέλο ανάλυσης του σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, κατά την οποία ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v σε κυκλική τροχιά ακτίνας r. Το σωματίδιο δέχεται επιτάχυνση μέτρου

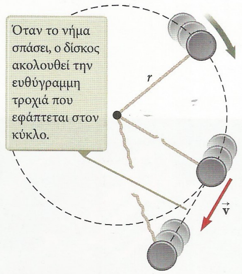
Εικόνα Μ6.1 Κάτοψη δίσκου που διαγράφει κυκλική τροχιά στο οριζόντιο επίπεδο.



$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Η επιτάχυνση αυτή ονομάζεται *κεντρομόλος επιτάχυνση* επειδή το διάνυσμα $\vec{\mathbf{a}}_c$ έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου. Επιπλέον, η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_c$ είναι *πάντα* κάθετη προς την ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$. (Αν η επιτάχυνση είχε μια συνιστώσα παράλληλη προς την ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$, τότε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου δεν θα ήταν σταθερό.)

Ας επεκτείνουμε τώρα το μοντέλο του σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση (το οποίο παρουσιάσαμε στην Ενότητα Μ4.4) ενσωματώνοντας σε αυτό την έννοια της δύναμης. Θεωρήστε έναν δίσκο μάζας m ο οποίος είναι δεμένος σε ένα νήμα μήκους r και κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε οριζόντια, κυκλική τροχιά όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.1. Το βάρος του υποστηρίζεται από ένα τραπέζι χωρίς τριβές, και το νήμα είναι στερεωμένο σε έναν ξύλινο πείρο στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς του δίσκου. Γιατί ο δίσκος διαγράφει κυκλική τροχιά; Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, η κίνηση του δίσκου θα ήταν ευθύγραμμη μόνο αν δεν επιδρούσε κάποια δύναμη σε αυτόν· όμως, το νήμα δεν του επιτρέπει να κινηθεί ευθύγραμμα επειδή ασκεί σε αυτόν μια ακτινική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_r$ η οποία τον αναγκάζει να ακολουθήσει την κυκλική τροχιά. Η δύναμη αυτή ασκείται κατά μήκος της διεύθυνσης του νήματος και έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου (δηλαδή, έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου), όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.1.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ6.2

Το νήμα που συγκρατεί τον δίσκο στην κυκλική τροχιά του σπάει.

Αν εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση, μπορούμε να συνδέσουμε τη συνισταμένη δύναμη με την κεντρομόλο επιτάχυνση την οποία προκαλεί:

Η δύναμη που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση ▶

$$\boxed{\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}} \qquad \textbf{(Μ6.1)}$$

Η δύναμη η οποία προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση ασκείται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και μεταβάλλει την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας. Αν η δύναμη αυτή εξαφανιστεί, το σώμα θα σταματήσει να κινείται σε κυκλική τροχιά και θα αρχίσει να κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος της εφαπτομένης στον κύκλο. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται στη Δυναμική Εικόνα Μ6.2 για την περίπτωση του δίσκου ο οποίος ακολουθεί οριζόντια κυκλική τροχιά δεμένος στο άκρο ενός νήματος. Αν κάποια χρονική στιγμή το νήμα σπάσει, τότε ο δίσκος θα αρχίσει να κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος της εφαπτομένης στον κύκλο στη θέση που βρισκόταν τη στιγμή που έσπασε το νήμα.

Αποφυγή παγίδων Μ6.1

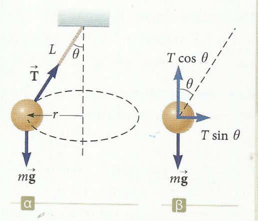
Η κατεύθυνση της κίνησης όταν κόβεται το νήμα

Μελετήστε τη Δυναμική Εικόνα Μ6.2 πολύ προσεκτικά. Πολλοί σπουδαστές πιστεύουν (εσφαλμένα) πως όταν κοπεί το νήμα ο δίσκος θα αρχίσει να απομακρύνεται από το κέντρο του κύκλου κινούμενος κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης. Η ταχύτητα του δίσκου *εφάπτεται* στον κύκλο. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, ο δίσκος θα συνεχίσει να κινείται στην κατεύθυνση προς την οποία κινείται τη στιγμή που παύει να ασκείται η δύναμη του νήματος.

Σύντομο ερώτημα **Μ6.1** Βρίσκεστε σε έναν τροχό του λούνα παρκ, ο οποίος περιστρέφεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Η καμπίνα στην οποία επιβαίνετε διατηρεί πάντα οριζόντιο προσανατολισμό και δεν αναποδογυρίζει. **(i)** Ποια είναι η κατεύθυνση της κάθετης δύναμης που ασκεί πάνω σας το κάθισμα όταν βρίσκεστε στην κορυφή του τροχού; (α) Κατακόρυφη προς τα πάνω. (β) Κατακόρυφη προς τα κάτω. (γ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί. **(ii)** Επιλέξτε από τα παραπάνω την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται πάνω σας όταν βρίσκεστε στην κορυφή του τροχού.

Παράδειγμα **M6.1** Το κωνικό εκκρεμές

Μια μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται από ένα νήμα μήκους L. Η σφαίρα περιφέρεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο ακτίνας r όπως φαίνεται στην Εικόνα M6.3. (Επειδή το νήμα διαγράφει την επιφάνεια ενός κώνου, το σύστημα είναι γνωστό ως *κωνικό εκκρεμές*.) Βρείτε μια σχέση για το μέτρο της ταχύτητας v.



Εικόνα M6.3 (Παράδειγμα M6.1) (α) Κωνικό εκκρεμές. Η σφαίρα διαγράφει οριζόντιο κύκλο. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στη σφαίρα.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε την κίνηση της σφαίρας για να πειστείτε ότι το νήμα διαγράφει κώνο και ότι η σφαίρα κινείται σε οριζόντιο κύκλο (Εικόνα M6.3α).

Κατηγοριοποίηση Η σφαίρα στην Εικόνα M6.3 δεν επιταχύνει κατακόρυφα. Επομένως, μπορούμε να τη μοντελοποιήσουμε στην κατακόρυφη διεύθυνση ως σωματίδιο σε ισορροπία. Στην οριζόντια διεύθυνση υφίσταται κεντρομόλο επιτάχυνση, άρα σε αυτή τη διεύθυνση μπορούμε να τη μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Ανάλυση Έστω ότι η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο συμβολίζεται με θ. Στο διάγραμμα των δυνάμεων που δέχεται η σφαίρα (Εικόνα M6.3β), η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί το νήμα στη σφαίρα αναλύεται σε μια κατακόρυφη συνιστώσα $T\cos\theta$ και σε μια οριζόντια συνιστώσα $T\sin\theta$ με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Εφαρμόστε το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

$$(1)\quad T\cos\theta = mg$$

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M6.1 από το μοντέλο του σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση:

$$(2)\quad \sum F_x = T\sin\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

Διαιρέστε την Εξίσωση (2) με την Εξίσωση (1) και χρησιμοποιήστε τη σχέση $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Λύστε ως προς v:

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Αντικαταστήστε την ακτίνα $r = L\sin\theta$ η οποία προκύπτει από τη γεωμετρία της Εικόνας M6.3α:

$$v = \boxed{\sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}}$$

Ολοκλήρωση Παρατηρήστε ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι ανεξάρτητο από τη μάζα της σφαίρας. Θεωρήστε την περίπτωση κατά την οποία η γωνία θ είναι ίση με $90°$, όταν δηλαδή το νήμα είναι οριζόντιο. Επειδή η εφαπτομένη των $90°$ είναι ίση με το άπειρο, θα πρέπει και το μέτρο της ταχύτητας v να είναι άπειρο, και επειδή αυτό είναι αδύνατον, το νήμα δεν μπορεί ποτέ να είναι οριζόντιο. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί το νήμα δεν θα είχε κατακόρυφη συνιστώσα για να εξισορροπεί τη βαρυτική δύναμη που δέχεται η σφαίρα. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο αναφέραμε στην περίπτωση της Εικόνας M6.1 ότι το βάρος του δίσκου υποστηρίζεται από ένα τραπέζι χωρίς τριβές[1].

[1] Σ.τ.Ε.: Στην περίπτωση αυτή, η απουσία κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης που ασκεί το νήμα στον δίσκο δεν εμποδίζει τον δίσκο να διαγράψει κυκλική τροχιά με το νήμα σε *οριζόντια* θέση, επειδή το βάρος του εξισορροπείται από την κάθετη αντίδραση του τραπεζιού.

Παράδειγμα Μ6.2 Πόσο γρήγορα μπορούμε να περιφέρουμε έναν δίσκο;

Ένας δίσκος μάζας 0.500 kg είναι δεμένος στην άκρη ενός σπάγκου μήκους 1.50 m. Ο δίσκος διαγράφει οριζόντιο κύκλο όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.1. Αν η μέγιστη τάση που μπορεί να αντέξει ο σπάγκος είναι 50.0 N, ποιο είναι το μέγιστο μέτρο ταχύτητας που μπορεί να αναπτύξει ο δίσκος; Υποθέστε ότι ο σπάγκος παραμένει οριζόντιος κατά τη διάρκεια της κίνησης.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Είναι λογικό ότι όσο πιο ανθεκτικός είναι ο σπάγκος, τόσο πιο γρήγορα μπορεί να κινηθεί ο δίσκος χωρίς να σπάσει ο σπάγκος. Επίσης, είναι αναμενόμενο ότι ένας δίσκος μεγαλύτερης μάζας μπορεί να σπάσει τον σπάγκο κινούμενος πιο αργά. (Φανταστείτε να περιφέρετε με τον σπάγκο μια μπάλα του μπόουλιγκ!)

Κατηγοριοποίηση Εφόσον ο δίσκος κινείται σε κυκλική τροχιά, μπορούμε να τον μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο που πραγματοποιεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Ανάλυση Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα περιλαμβάνοντας την τάση και την κεντρομόλο επιτάχυνση όπως φαίνεται στην Εξίσωση Μ6.1:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

Λύστε ως προς v:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Βρείτε το μέγιστο δυνατό μέτρο της ταχύτητας του δίσκου, το οποίο αντιστοιχεί στη μέγιστη τάση που αντέχει το νήμα:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0\text{ N})(1.50\text{ m})}{0.500\text{ kg}}} = \boxed{12.2\text{ m/s}}$$

Ολοκλήρωση Η Εξίσωση (1) δείχνει ότι το μέτρο της ταχύτητας v αυξάνεται όσο αυξάνεται η τάση T και μειώνεται όσο αυξάνεται η μάζα m, κάτι που ήταν αναμενόμενο από τη μοντελοποίηση του προβλήματος.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι ο δίσκος κινείται σε έναν κύκλο μεγαλύτερης ακτίνας με ταχύτητα ίδιου μέτρου v. Είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να σπάσει ο σπάγκος;

Απάντηση Η μεγαλύτερη ακτίνα σημαίνει ότι η μεταβολή στην κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας θα είναι μικρότερη σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Συνεπώς, η επιτάχυνση θα είναι μικρότερη και, άρα, η τάση που πρέπει να έχει ο σπάγκος θα είναι μικρότερη. Άρα, ο σπάγκος είναι λιγότερο πιθανό να σπάσει όταν ο δίσκος διαγράφει έναν κύκλο μεγαλύτερης ακτίνας.

Παράδειγμα Μ6.3 Πόσο γρήγορα μπορεί να στρίψει ένα αυτοκίνητο;

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1 500 kg το οποίο κινείται σε έναν επίπεδο, οριζόντιο δρόμο στρίβει σε μια καμπή όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.4α. Αν η ακτίνα της καμπύλης είναι 35.0 m και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών και του στεγνού οδοστρώματος είναι 0.523, βρείτε πόσο γρήγορα μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο στην καμπή χωρίς να εκτραπεί από τον δρόμο.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι η καμπή του δρόμου αποτελεί τμήμα ενός μεγαλύτερου κύκλου και ότι το αυτοκίνητο κινείται σε κυκλική τροχιά.

Κατηγοριοποίηση Βάσει του προηγούμενου βήματος, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο με ομαλή κυκλική κίνηση. Εφόσον το αυτοκίνητο δεν επιταχύνει κατακόρυφα, μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε στην κατακόρυφη κατεύθυνση ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Μ6.3 *συν.*

Ανάλυση Η δύναμη η οποία διατηρεί το αυτοκίνητο στην κυκλική πορεία του είναι η στατική τριβή. (Είναι *στατική* επειδή δεν συμβαίνει ολίσθηση στο σημείο επαφής μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος. Αν η δύναμη της στατικής τριβής ήταν μηδενική –για παράδειγμα, αν το οδόστρωμα ήταν παγωμένο– το αυτοκίνητο θα ολίσθαινε και κινούμενο ευθύγραμμα θα έβγαινε από τον δρόμο.) Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο της ταχύτητας $v_{\max}$ του αυτοκινήτου, καθώς κινείται κατά μήκος της καμπής, είναι αυτή κατά την οποία βρίσκεται στο όριο της πλαγιολίσθησης. Σε αυτό το σημείο, η δύναμη τριβής παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f_{s,\max} = \mu_s n$.

Εφαρμόστε την Εξίσωση Μ6.1 στην ακτινική διεύθυνση για τη συνθήκη του μέγιστου μέτρου ταχύτητας:

$$(1)\quad f_{s,\max} = \mu_s n = m\frac{v_{\max}^2}{r}$$

Εφαρμόστε το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία για το αυτοκίνητο στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; n - mg = 0 \;\rightarrow\; n = mg$$

Λύστε την Εξίσωση (1) ως προς το μέγιστο μέτρο ταχύτητας και αντικαταστήστε το n:

$$(2)\quad v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_s n r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s m g r}{m}} = \sqrt{\mu_s g r}$$

Αντικαταστήστε τις αριθμητικές τιμές:

$$v_{\max} = \sqrt{(0.523)(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = \boxed{13.4\ \text{m/s}}$$

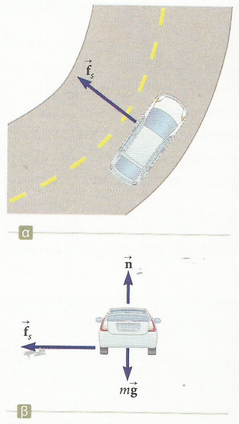
Ολοκλήρωση Η τιμή αυτή ισοδυναμεί με 30.0 mi/h. Επομένως, αν το όριο ταχύτητας του δρόμου είναι μεγαλύτερο από 30 mi/h, ο δρόμος θα έπρεπε να έχει κλίση, όπως στο επόμενο παράδειγμα! Παρατηρήστε ότι το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας δεν εξαρτάται από τη μάζα του αυτοκινήτου, γι' αυτό και οι αυτοκινητόδρομοι με στροφές δεν χρειάζεται να έχουν πολλά όρια ταχύτητας για αυτοκίνητα με διαφορετικές μάζες.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι βρέχει και ένα αυτοκίνητο που κινείται κατά μήκος της καμπής αρχίζει να πλαγιολισθαίνει μόλις το μέτρο της ταχύτητάς του φτάσει τα 8.00 m/s. Τι μπορείτε να πείτε για τον συντελεστή της στατικής τριβής στην περίπτωση αυτή;

Απάντηση Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών και του βρεγμένου οδοστρώματος πρέπει να είναι μικρότερος από τον συντελεστή μεταξύ των ελαστικών και του στεγνού οδοστρώματος. Αυτή η υπόθεση συμφωνεί και με την κοινή πεποίθηση των οδηγών, ότι δηλαδή η πλαγιολίσθηση είναι πιο πιθανή σε ένα βρεγμένο οδόστρωμα από ό,τι σε ένα στεγνό.

Για να επαληθεύσετε την απάντησή σας, λύστε την Εξίσωση (2) ως προς τον συντελεστή στατικής τριβής:

$$\mu_s = \frac{v_{\max}^2}{gr}$$



Εικόνα Μ6.4 (Παράδειγμα Μ6.3) (α) Η δύναμη στατικής τριβής, που έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της καμπής, αναγκάζει το αυτοκίνητο να ακολουθήσει κυκλική τροχιά. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στο αυτοκίνητο.

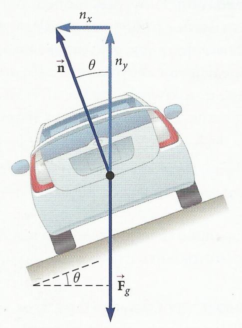
Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές παίρνετε συντελεστή

$$\mu_s = \frac{v_{\max}^2}{gr} = \frac{(8.00\ \text{m/s})^2}{(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 0.187$$

που είναι όντως μικρότερος από τον συντελεστή 0.523 του στεγνού οδοστρώματος.

Παράδειγμα Μ6.4 Δρόμος με εγκάρσια κλίση

Ένας πολιτικός μηχανικός θέλει να ξανασχεδιάσει την καμπή του δρόμου του Παραδείγματος Μ6.3, έτσι ώστε τα αυτοκίνητα να μη χρειάζονται τις δυνάμεις τριβής για να στρίβουν χωρίς να πλαγιολισθαίνουν. Με άλλα λόγια, ένα αυτοκίνητο που θα κινείται με ένα καθορισμένο μέτρο ταχύτητας θα μπορεί να στρίβει στην καμπή ακόμα και όταν ο δρόμος είναι καλυμμένος με πάγο. Ένας τέτοιος δρόμος έχει συνήθως εγκάρσια κλίση (*επίκλιση*), δηλαδή, κλίνει προς το εσωτερικό της καμπής, όπως φαίνεται στη φωτογραφία της πρώτης σελίδας του κεφαλαίου. Υποθέστε ότι το καθορισμένο μέτρο ταχύτητας για τον δρόμο με εγκάρσια κλίση είναι 13.4 m/s (30.0 mi/h) και ότι η ακτίνα της καμπής είναι 35.0 m. Ποια πρέπει να είναι η γωνία κλίσης της καμπής;



Εικόνα Μ6.5 (Παράδειγμα Μ6.4) Ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται κατά μήκος μιας καμπής η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. (Το αυτοκίνητο απεικονίζεται να απομακρύνεται από τον αναγνώστη.) Όταν η τριβή είναι αμελητέα, η δύναμη που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση και αναγκάζει το αυτοκίνητο να ακολουθήσει κυκλική διαδρομή είναι η οριζόντια συνιστώσα της κάθετης δύναμης.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η διαφορά αυτού του παραδείγματος από το Παράδειγμα Μ6.3 είναι ότι το αυτοκίνητο δεν κινείται πλέον σε οριζόντιο δρόμο. Στην Εικόνα Μ6.5 φαίνεται η εγκάρσια κλίση του δρόμου. Το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του αυτοκινήτου βρίσκεται στα αριστερά της εικόνας. Παρατηρήστε ότι η οριζόντια συνιστώσα της κάθετης δύναμης συμμετέχει στη δημιουργία της κεντρομόλου επιτάχυνσης του αυτοκινήτου.

Κατηγοριοποίηση Όπως και στο Παράδειγμα Μ6.3, το αυτοκίνητο μοντελοποιείται ως σωματίδιο σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση και ως σωματίδιο με ομαλή κυκλική κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση.

Ανάλυση Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι, σε έναν επίπεδο δρόμο (χωρίς κλίση), η δύναμη που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση είναι η δύναμη στατικής τριβής μεταξύ του αυτοκινήτου και του οδοστρώματος. Αν όμως ο δρόμος έχει κλίση θ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.5, τότε η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ έχει μια οριζόντια συνιστώσα με φορά προς το κέντρο της καμπής. Επειδή το οδόστρωμα πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε η δύναμη στατικής τριβής να είναι μηδενική, θεωρούμε ότι μόνο η συνιστώσα $n_x = n \sin\theta$ προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση.

Γράψτε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το αυτοκίνητο στην ακτινική διεύθυνση, που είναι η διεύθυνση του άξονα x:

$$(1)\quad \sum F_r = n\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Εφαρμόστε στο αυτοκίνητο το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\sum F_y = n\cos\theta - mg = 0$$

$$(2)\quad n\cos\theta = mg$$

Διαιρέστε την Εξίσωση (1) με την Εξίσωση (2):

$$(3)\quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Λύστε ως προς τη γωνία θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(13.4\ \text{m/s})^2}{(35.0\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}\right] = \boxed{27.6°}$$

Ολοκλήρωση Η Εξίσωση (3) δείχνει ότι η γωνία κλίσης είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του οχήματος που στρίβει στην καμπή. Αν ένα αυτοκίνητο κινείται στην καμπή με ταχύτητα που έχει μέτρο μικρότερο από 13.4 m/s, θα χρειαστεί τριβή για να μην ολισθήσει προς το εσωτερικό της καμπής (δηλαδή προς τα αριστερά στην Εικ. Μ6.5). Ένας οδηγός που επιχειρεί να στρίψει με ταχύτητα που έχει μέτρο μεγαλύτερο από 13.4 m/s, θα χρειαστεί δυνάμεις τριβής για να μην ολισθήσει το αυτοκίνητό του προς το εξωτερικό της καμπής (δηλαδή προς τα δεξιά στην Εικ. Μ6.5).

ΚΙ ΑΝ...; Φανταστείτε ότι βρισκόμαστε στο μέλλον και ότι ένας ίδιος δρόμος έχει κατασκευαστεί στον Άρη για να συνδέει τα διάφορα αστικά κέντρα μιας αποικίας. Θα μπορούν τα οχήματα να κινούνται σε αυτόν τον δρόμο με ταχύτητα ίδιου μέτρου όπως και στη Γη;

M6.4 *συν.*

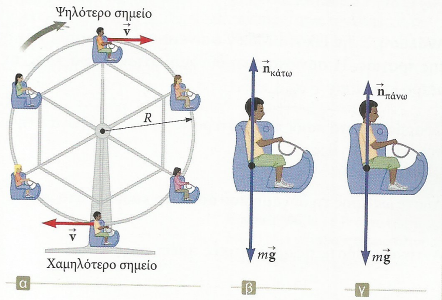
Απάντηση Λόγω της μικρότερης βαρυτικής δύναμης στον Άρη, τα αυτοκίνητα δεν θα ασκούν τόσο μεγάλη δύναμη στο οδόστρωμα. Στην περίπτωση μιας ίδιας καμπής του δρόμου με εγκάρσια κλίση, η κάθετη δύναμη θα είναι μικρότερη και, άρα, η συνιστώσα της με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου θα είναι μικρότερη. Αυτή η μικρότερη συνιστώσα δεν θα είναι αρκετή για να παρέχει την κεντρομόλο επιτάχυνση που αντιστοιχεί στο αρχικό καθορισμένο μέτρο ταχύτητας στη Γη. Η κεντρομόλος επιτάχυνση πρέπει να μειωθεί, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μειώνοντας το μέτρο της ταχύτητας v.

Από μαθηματικής άποψης, προσέξτε ότι, σύμφωνα με την Εξίσωση (3), το μέτρο της ταχύτητας v είναι ανάλογο προς την τετραγωνική ρίζα του g για έναν δρόμο σταθερής ακτίνας r με σταθερή κλίση θ. Άρα, αν το g είναι μικρότερο, όπως συμβαίνει στον Άρη, το μέτρο της ταχύτητας v με την οποία τα οχήματα θα μπορούν να κινούνται με ασφάλεια στον δρόμο είναι επίσης μικρότερο.

Παράδειγμα M6.5 Ο τροχός του λούνα παρκ

Ένα παιδί μάζας m ανεβαίνει στον τροχό ενός λούνα παρκ (Εικόνα M6.6α). Το παιδί κινείται σε κατακόρυφο κύκλο ακτίνας 10.0 m με ταχύτητα σταθερού μέτρου 3.00 m/s.

(Α) Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο παιδί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς. Εκφράστε την απάντησή σας ως συνάρτηση του βάρους mg του παιδιού.



Εικόνα M6.6 (Παράδειγμα M6.5) (α) Ένα παιδί στον τροχό του λούνα παρκ. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στο παιδί στο χαμηλότερο σημείο της διαδρομής. (γ) Οι δυνάμεις που δρουν στο παιδί στο ψηλότερο σημείο της διαδρομής.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Μελετήστε προσεκτικά την Εικόνα M6.6α. Σύμφωνα με τις εμπειρίες που ίσως να έχετε από τον τροχό του λούνα παρκ ή από την οδήγηση πάνω από μικρά υψώματα του δρόμου, θα περιμένετε να νιώθετε ελαφρύτεροι στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς. Παρομοίως, περιμένετε ότι θα νιώθετε βαρύτεροι στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς. Τόσο στο χαμηλότερο όσο και στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη που δρουν στο παιδί έχουν *αντίθετες* κατευθύνσεις. Το διανυσματικό άθροισμα αυτών των δύο δυνάμεων δίνει μια δύναμη σταθερού μέτρου η οποία αναγκάζει το παιδί να κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Για να έχει η συνισταμένη δύναμη πάντοτε ίδιο μέτρο, η κάθετη δύναμη πρέπει να είναι μεγαλύτερη στο χαμηλότερο από ό,τι στο ψηλότερο σημείο.

Κατηγοριοποίηση Επειδή το μέτρο της ταχύτητας του παιδιού είναι σταθερό, μπορείτε να κατηγοριοποιήσετε το πρόβλημα ως πρόβλημα ενός σωματιδίου (του παιδιού) που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, το οποίο όμως περιπλέκεται από τη βαρυτική δύναμη που ασκείται συνεχώς στο παιδί.

Ανάλυση Σχεδιάστε ένα διάγραμμα με τις δυνάμεις που δρουν στο παιδί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς (Εικόνα M6.6β). Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g = m\vec{g}$ κατακόρυφα προς τα κάτω και η δύναμη $\vec{n}_{κάτω}$ κατακόρυφα προς τα πάνω που ασκεί το κάθισμα. Η συνισταμένη δύναμη κατακόρυφα προς τα πάνω που ασκείται στο παιδί και παρέχει την κεντρομόλο επιτάχυνσή του έχει μέτρο ίσο με $n_{κάτω} - mg$.

συνεχίζεται

Μ6.5 *συν.*

Εφαρμόστε στο παιδί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση:

$$\sum F = n_{\text{κάτω}} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

Λύστε ως προς τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο παιδί:

$$n_{\text{κάτω}} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

Αντικαταστήστε τις τιμές που δίνονται για το μέτρο της ταχύτητας και την ακτίνα:

$$n_{\text{κάτω}} = mg\left[1 + \frac{(3.00\text{ m/s})^2}{(10.0\text{ m})(9.80\text{ m/s}^2)}\right]$$

$$= \boxed{1.09\,mg}$$

Άρα, το μέτρο της δύναμης $\vec{\mathbf{n}}_{\text{κάτω}}$ που ασκεί το κάθισμα στο παιδί είναι *μεγαλύτερο* από το βάρος του παιδιού κατά έναν παράγοντα 1.09. Δηλαδή, το παιδί νιώθει ότι έχει φαινόμενο βάρος το οποίο είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό του βάρος κατά έναν παράγοντα 1.09.

(Β) Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο παιδί στην κορυφή της διαδρομής.

ΛΥΣΗ

Ανάλυση Στην Εικόνα Μ6.6γ φαίνεται το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται στο παιδί, στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς. Η συνισταμένη δύναμη κατακόρυφα προς τα κάτω η οποία παρέχει την κεντρομόλο επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με $mg - n_{\text{πάνω}}$.

Εφαρμόστε στο παιδί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη συγκεκριμένη θέση:

$$\sum F = mg - n_{\text{πάνω}} = m\frac{v^2}{r}$$

Λύστε ως προς τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο παιδί:

$$n_{\text{πάνω}} = mg - m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 - \frac{v^2}{rg}\right)$$

Αντικαταστήστε τις αριθμητικές τιμές:

$$n_{\text{πάνω}} = mg\left[1 - \frac{(3.00\text{ m/s})^2}{(10.0\text{ m})(9.80\text{ m/s}^2)}\right]$$

$$= \boxed{0.908\,mg}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο της δύναμης που ασκεί το κάθισμα στο παιδί είναι *μικρότερο* από το πραγματικό του βάρος κατά έναν παράγοντα 0.908, και το παιδί νιώθει ελαφρότερο.

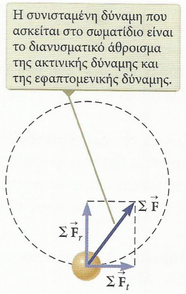
Ολοκλήρωση Οι μεταβολές της κάθετης δύναμης συμφωνούν με την πρόβλεψη στο βήμα Μοντελοποίησης του προβλήματος.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι μια κατασκευαστική ατέλεια στον μηχανισμό του τροχού αυξάνει το μέτρο της ταχύτητας του παιδιού στα 10.0 m/s. Τι θα αισθανθεί το παιδί στην κορυφή της διαδρομής σε αυτή την περίπτωση;

Απάντηση Αν εκτελέσουμε τον παραπάνω υπολογισμό για $v = 10.0$ m/s, διαπιστώνουμε ότι το μέτρο της κάθετης δύναμης στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς είναι αρνητικό, κάτι που είναι αδύνατο. Αυτό σημαίνει ότι η απαιτούμενη κεντρομόλος επιτάχυνση του παιδιού είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας. Κατά συνέπεια, το παιδί θα χάσει την επαφή του με το κάθισμα. Για να παραμείνει στην κυκλική τροχιά του, και άρα στη θέση του, θα πρέπει να υπάρχει μια μπάρα ασφαλείας η οποία θα ασκήσει στο παιδί μια δύναμη κατακόρυφα προς τα κάτω. Στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς, η κάθετη δύναμη είναι 2.02 mg, κάτι που θα προκαλούσε στο παιδί δυσφορία.

Μ6.2 Μη ομαλή κυκλική κίνηση

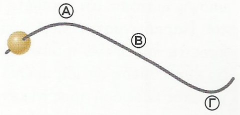
Στο Κεφάλαιο Μ4, διαπιστώσαμε ότι, αν ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα μεταβαλλόμενου μέτρου σε κυκλική τροχιά, εκτός από την ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης υπάρχει και μια εφαπτομενική συνιστώσα με μέτρο $|dv/dt|$. Επομένως, η δύναμη που δρα στο σωματίδιο πρέπει να έχει και αυτή μια εφαπτομενική και μια ακτινική συνιστώσα. Επειδή η συνολική επιτάχυνση είναι $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t$, η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι $\sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_r + \sum \vec{\mathbf{F}}_t$ όπως φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ6.7. (Εκφράζουμε τις ακτινικές και εφαπτομενικές δυνάμεις ως συνισταμένες δυνάμεις με το σύμβολο του αθροίσματος, επειδή κάθε δύναμη θα μπορούσε να αποτελείται από πολλές δυνάμεις που συνδυάζονται.) Το διάνυσμα $\sum \vec{\mathbf{F}}_r$ έχει κατεύθυνση ακτινική προς το κέντρο του κύκλου και ευθύνεται για την κεντρομόλο επιτάχυνση. Το διάνυσμα $\sum \vec{\mathbf{F}}_t$ που εφάπτεται του κύκλου ευθύνεται για την εφαπτομενική επιτάχυνση, η οποία αναπαριστά τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του σωματιδίου με τον χρόνο.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ6.7

Όταν σε ένα σωματίδιο που κινείται σε κυκλική διαδρομή ασκείται συνισταμένη δύναμη με εφαπτομενική συνιστώσα $\sum F_t$, το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου μεταβάλλεται.

***Σύντομο ερώτημα* Μ6.2** Μια χάντρα ολισθαίνει ελεύθερα με ταχύτητα σταθερού μέτρου πάνω σε ένα καμπυλωτό σύρμα που βρίσκεται σε μια οριζόντια επιφάνεια (Εικόνα Μ6.8). **(α)** Σχεδιάστε το διάνυσμα που αναπαριστά τη δύναμη που ασκεί το σύρμα στη χάντρα στα σημεία Ⓐ, Ⓑ, και Ⓒ. **(β)** Υποθέστε ότι η χάντρα στην Εικόνα Μ6.8 έχει σταθερή εφαπτομενική επιτάχυνση καθώς κινείται προς τα δεξιά. Σχεδιάστε το διάνυσμα που αναπαριστά τη δύναμη που ασκείται στη χάντρα στα σημεία Ⓐ, Ⓑ, και Ⓒ.



Εικόνα Μ6.8 (Σύντομο ερώτημα Μ6.2) Μια χάντρα η οποία ολισθαίνει σε ένα καμπυλωτό σύρμα.

Παράδειγμα Μ6.6 Μη χάσεις τη σφαίρα από τα μάτια σου

Δένουμε μια μικρή σφαίρα μάζας m στην άκρη ενός νήματος μήκους R και τη θέτουμε σε κίνηση έτσι ώστε να διαγράφει *κατακόρυφη* κυκλική τροχιά γύρω από ένα σταθερό σημείο O (Εικόνα Μ6.9). Προσδιορίστε την εφαπτομενική επιτάχυνση της σφαίρας και την τάση του νήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά την οποία το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας είναι v και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Συγκρίνετε την κίνηση της σφαίρας στην Εικόνα Μ6.9 με την κίνηση του παιδιού στην Εικόνα Μ6.6α του Παραδείγματος Μ6.5. Και τα δύο σώματα κινούνται σε κυκλική διαδρομή. Όμως, σε αντίθεση με το παιδί του Παραδείγματος Μ6.5, το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας *δεν* είναι σταθερό σε αυτό το παράδειγμα επειδή η βαρυτική δύναμη που ασκείται στη σφαίρα δημιουργεί, στα περισσότερα σημεία της τροχιάς της, μια εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης.

Κατηγοριοποίηση Μοντελοποιούμε τη σφαίρα ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά, αλλά δεν εκτελεί *ομαλή* κυκλική κίνηση. Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που εξετάσαμε σε αυτή την ενότητα για τη μη ομαλή κυκλική κίνηση.

Ανάλυση Από το διάγραμμα δυνάμεων της Εικόνας Μ6.9, διαπιστώνουμε ότι οι μόνες δυνάμεις που δρουν στη σφαίρα είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ που ασκεί η Γη και η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί ο σπάγκος. Αναλύουμε την $\vec{\mathbf{F}}_g$ σε μια εφαπτομενική συνιστώσα $mg \sin\theta$ και σε μια ακτινική συνιστώσα $mg \cos\theta$.

συνεχίζεται

Μ6.6 *συν.*

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην εφαπτομενική διεύθυνση:

$$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t$$

$$a_t = \boxed{g\sin\theta}$$

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην ακτινική διεύθυνση, παρατηρώντας ότι τα διανύσματα $\vec{\mathbf{T}}$ και $\vec{\mathbf{a}}_r$ έχουν κατεύθυνση ακτινική προς το O:

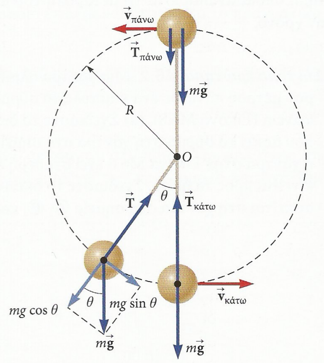
$$\sum F_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = \boxed{mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos\theta\right)}$$

Ολοκλήρωση Ας υπολογίσουμε την παραπάνω σχέση στο ψηλότερο και στο χαμηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς (Εικ. Μ6.9):

$$T_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = mg\left(\frac{v^2_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega}}{Rg} - 1\right) \qquad T_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} = mg\left(\frac{v^2_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}}{Rg} + 1\right)$$

Τα αποτελέσματα αυτά έχουν παρόμοια μαθηματική μορφή με τα αντίστοιχα για τις κάθετες δυνάμεις $n_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega}$ και $n_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}$ που ασκούνται στο παιδί στο Παράδειγμα Μ6.5. Αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι η κάθετη δύναμη που δρα στο παιδί παίζει παρόμοιο φυσικό ρόλο στο Παράδειγμα Μ6.5 με αυτόν της τάσης του νήματος στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Λάβετε υπόψη, ωστόσο, ότι η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ που ασκείται στο παιδί του Παραδείγματος Μ6.5 έχει κατεύθυνση πάντα κατακόρυφη προς τα πάνω, ενώ η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ σε αυτό το παράδειγμα αλλάζει κατεύθυνση επειδή πρέπει να έχει πάντα τη διεύθυνση του νήματος και φορά προς το κέντρο του κύκλου. Επίσης προσέξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας v στις σχέσεις αυτές μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση της σφαίρας, όπως υποδηλώνουν οι δείκτες, ενώ το μέτρο της ταχύτητας v στο Παράδειγμα Μ6.5 είναι σταθερό.



Εικόνα Μ6.9 (Παράδειγμα Μ6.6) Οι δυνάμεις που δρουν σε μια σφαίρα μάζας m η οποία είναι συνδεδεμένη με ένα νήμα μήκους R και περιστρέφεται διαγράφοντας κατακόρυφο κύκλο με κέντρο το O. Απεικονίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα όταν βρίσκεται στο ψηλότερο και στο χαμηλότερο σημείο του κύκλου, και σε μια τυχαία θέση.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν η σφαίρα τεθεί σε κίνηση με ταχύτητα μικρότερου μέτρου;

(Α) Ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας στο ψηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς αν η τάση του νήματος μηδενιστεί ακαριαία στο συγκεκριμένο σημείο;

Απάντηση Ας θέσουμε την τάση ίση με μηδέν στη σχέση για το $T_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega}$:

$$0 = mg\left(\frac{v^2_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega}}{Rg} - 1\right) \rightarrow v_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = \sqrt{gR}$$

(Β) Τι θα συμβεί αν η σφαίρα τεθεί σε κίνηση έτσι ώστε το μέτρο της ταχύτητας στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της να είναι μικρότερο από αυτή την τιμή;

Απάντηση Σε αυτή την περίπτωση, η σφαίρα δεν φτάνει ποτέ στο ψηλότερο σημείο του κύκλου. Σε κάποιο σημείο της διαδρομής προς τα πάνω, η τάση του νήματος μηδενίζεται και η σφαίρα συμπεριφέρεται ως βλήμα. Ακολουθεί ένα τμήμα παραβολικής τροχιάς πάνω από το ψηλότερο σημείο της κίνησής της, και επανέρχεται στην κυκλική τροχιά στην άλλη πλευρά, όταν η τάση γίνει ξανά μη μηδενική.

M6.3 Κίνηση σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς

Οι νόμοι του Νεύτωνα για την κίνηση, τους οποίους παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο M5, βασίζονται σε παρατηρήσεις οι οποίες γίνονται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σε αυτή την ενότητα, θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζει τους νόμους του Νεύτωνα ένας παρατηρητής σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δηλαδή σε ένα σύστημα που επιταχύνει. Θυμηθείτε, για παράδειγμα, το τραπέζι του χόκεϊ με αέρα που βρίσκεται μέσα σε ένα τρένο στην Ενότητα M5.2. Όταν το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα, είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ένας παρατηρητής που επιβαίνει στο τρένο βλέπει τον δίσκο να παραμένει ακίνητος, οπότε ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα φαίνεται ότι ισχύει. Όταν το τρένο επιταχύνει, δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σύμφωνα με τον παρατηρητή στο τρένο, μολονότι ο δίσκος δεν φαίνεται να δέχεται κάποια δύναμη, επιταχύνει από κατάσταση ηρεμίας προς το πίσω μέρος του τρένου, παραβιάζοντας φαινομενικά τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα. Η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει γενικά τις παρατηρήσεις που γίνονται σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς: δηλαδή, φαίνεται να υπάρχουν ανεξήγητες επιταχύνσεις σωμάτων οι οποίες δεν «συνδέονται» με το σύστημα. Φυσικά, ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα δεν παραβιάζεται. Απλώς φαίνεται ότι παραβιάζεται επειδή οι παρατηρήσεις γίνονται από ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Γενικά, η ανεξήγητη επιτάχυνση έχει αντίθετη κατεύθυνση από την επιτάχυνση του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Πάνω στο επιταχυνόμενο τρένο, καθώς παρατηρείτε τον δίσκο να επιταχύνει προς το πίσω μέρος του τρένου, ίσως συμπεράνετε βάσει του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα ότι στον δίσκο ασκείται κάποια δύναμη που προκαλεί την επιτάχυνσή του. Φαινόμενες δυνάμεις όπως αυτή τις αποκαλούμε **πλασματικές δυνάμεις**[2] επειδή οφείλονται σε παρατηρήσεις που γίνονται σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς. Οι πλασματικές δυνάμεις φαίνονται να δρουν στα σώματα όπως οι πραγματικές δυνάμεις. Όμως, οι πραγματικές δυνάμεις είναι πάντα αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωμάτων. Στις πλασματικές δυνάμεις δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το δεύτερο σώμα. (Ποιο είναι το δεύτερο σώμα που αλληλεπιδρά με τον δίσκο και προκαλεί την επιτάχυνσή του;) Γενικά, οι απλές πλασματικές δυνάμεις φαίνονται να δρουν με κατεύθυνση *αντίθετη* από αυτή της επιτάχυνσης του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Για παράδειγμα, ενώ το τρένο επιταχύνει προς τα εμπρός, φαίνεται να υπάρχει μια πλασματική δύναμη η οποία αναγκάζει τον δίσκο να ολισθήσει προς το πίσω μέρος του τρένου.

Στο παράδειγμα του τρένου, περιγράψαμε μια πλασματική δύναμη η οποία οφείλεται στη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του τρένου. Άλλες πλασματικές δυνάμεις οφείλονται στη μεταβολή της *κατεύθυνσης* του διανύσματος της ταχύτητας. Για να κατανοήσετε την κίνηση ενός συστήματος που είναι μη αδρανειακό επειδή μεταβάλλεται η κατεύθυνσή του, θεωρήστε ένα αυτοκίνητο που κινείται γρήγορα σε έναν αυτοκινητόδρομο και πλησιάζει σε μια έξοδο προς τα αριστερά όπως φαίνεται στην Εικόνα M6.10α. Καθώς το αυτοκίνητο κινείται στην αριστερή στροφή της εξόδου, η συνοδηγός γέρνει ή ολισθαίνει προς τα δεξιά και πέφτει πάνω στην πόρτα. Αυτό που εμποδίζει τη συνοδηγό να πεταχτεί έξω από το αυτοκίνητο τη συγκεκριμένη στιγμή είναι η δύναμη που ασκεί επάνω της η πόρτα. Τι είναι αυτό που την αναγκάζει να κινηθεί προς την πόρτα; Μια διαδεδομένη, αλλά εσφαλμένη, εξήγηση είναι ότι υπάρχει μια δύναμη η οποία δρα προς τα δεξιά (Εικόνα M6.10β) και σπρώχνει τη συνοδηγό ακτινικά προς τα έξω από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Παρότι η δύναμη αυτή συχνά αποκαλείται «φυγόκεντρος δύναμη», είναι πλασματική. Το αυτοκίνητο είναι ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο έχει κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του. Έτσι, η συνοδηγός νιώθει μια φαινόμενη δύναμη με κατεύθυνση ακτινική προς τα έξω από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, ή προς τα δεξιά στην Εικόνα M6.10β, αντίθετη από αυτή της επιτάχυνσης.

Ας περιγράψουμε αυτό το φαινόμενο χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα. Πριν το αυτοκίνητο μπει στην καμπή, η επιβάτης κινείται ευθύγραμμα. Καθώς

[2]Σ.τ.Ε.: Οι πλασματικές δυνάμεις είναι γνωστές και ως υποθετικές δυνάμεις.

Αποφυγή παγίδων M6.2

Φυγόκεντρος δύναμη

Η γνωστή φράση «φυγόκεντρος δύναμη» περιγράφει μια δύναμη η οποία έλκει *προς τα έξω* ένα σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά. Αν αισθάνεστε τη «φυγόκεντρο δύναμη» σε ένα περιστρεφόμενο παιχνίδι του λούνα παρκ, τότε ποιο είναι το άλλο σώμα με το οποίο αλληλεπιδράτε; Δεν μπορείτε να προσδιορίσετε κάποιο άλλο σώμα επειδή πρόκειται για μια πλασματική δύναμη η οποία εμφανίζεται όταν βρίσκεστε σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Εικόνα Μ6.10 (α) Ένα αυτοκίνητο κινείται κατά μήκος μιας καμπής στην έξοδο ενός αυτοκινητοδρόμου. Τι είναι αυτό που αναγκάζει τη συνοδηγό να κινηθεί προς τη δεξιά πόρτα; (β) Το σύστημα αναφοράς του συνοδηγού. (γ) Το σύστημα αναφοράς της Γης.

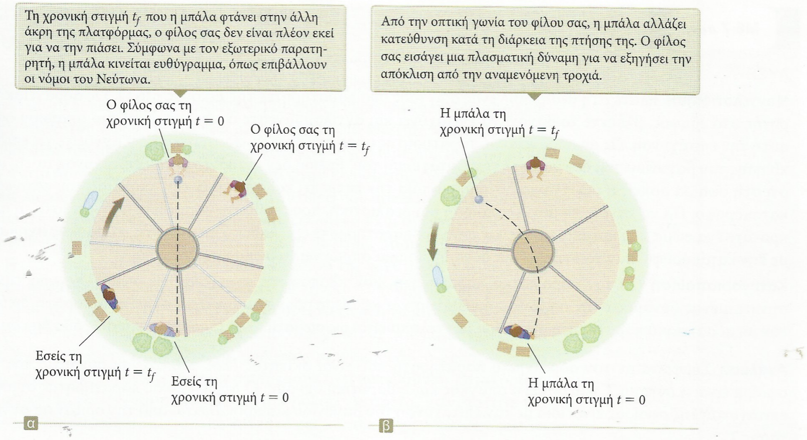
το αυτοκίνητο μπαίνει στην καμπή και αρχίζει να κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης τροχιάς, η συνοδηγός τείνει να ακολουθήσει την αρχική ευθύγραμμη τροχιά, κάτι που συμφωνεί με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα: η φυσική τάση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα είναι να συνεχίσει να κινείται ευθύγραμμα. Αν όμως ασκηθεί στη συνοδηγό μια αρκετά μεγάλη δύναμη (με κατεύθυνση προς το κέντρο της καμπυλότητας) όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.10γ, τότε θα κινηθεί σε καμπύλη τροχιά μαζί με το αυτοκίνητο. Αυτή η δύναμη είναι η δύναμη της τριβής μεταξύ της συνοδηγού και του καθίσματος. Αν η δύναμη τριβής δεν είναι αρκετά μεγάλη, το κάθισμα ακολουθεί καμπύλη τροχιά, ενώ η συνοδηγός τείνει να ακολουθήσει την αρχική ευθύγραμμη τροχιά που είχε το αυτοκίνητο πριν αρχίσει να στρίβει. Συνεπώς, σύμφωνα με έναν παρατηρητή μέσα στο αυτοκίνητο, η συνοδηγός γέρνει ή ολισθαίνει προς τα δεξιά σε σχέση με το κάθισμα. Τελικά, θα έρθει σε επαφή με την πόρτα, η οποία ασκώντας επαρκή δύναμη της επιτρέπει να ακολουθήσει την ίδια καμπύλη τροχιά με το αυτοκίνητο.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα πλασματική δύναμη είναι η «δύναμη Coriolis». Πρόκειται για μια φαινόμενη δύναμη που προκαλείται από τη μεταβολή της ακτινικής θέσης ενός σώματος σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένας φίλος σας και εσείς βρίσκεστε σε διαμετρικά αντίθετα σημεία μιας περιστρεφόμενης κυκλικής πλατφόρμας και εσείς αποφασίζετε να ρίξετε μια μπάλα στον φίλο σας. Η Δυναμική Εικόνα Μ6.11α αναπαριστά αυτό που θα δει ένας παρατηρητής αν αιωρείται ακίνητος πάνω από την περιστρεφόμενη πλατφόρμα. Σύμφωνα με τον παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η μπάλα εκτελεί την ευθύγραμμη κίνηση που προβλέπει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εσείς πετάτε την μπάλα προς τον φίλο σας, αλλά μέχρι τη χρονική στιγμή t_f που η μπάλα θα έχει διασχίσει την πλατφόρμα, ο φίλος σας θα έχει μετακινηθεί σε μια νέα θέση και δεν θα μπορεί να την πιάσει. Ας εξετάσουμε όμως το πρόβλημα από την οπτική γωνία του φίλου σας. Ο φίλος σας βρίσκεται σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς επειδή υφίσταται κεντρομόλο επιτάχυνση σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα της επιφάνειας της Γης. Στην αρχή βλέπει την μπάλα να έρχεται προς το μέρος του, αλλά καθώς αυτή διασχίζει την πλατφόρμα, εκτρέπεται όπως φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ6.11β. Έτσι, ο φίλος σας πάνω στην περιστρεφόμενη πλατφόρμα λέει ότι η μπάλα δεν ακολουθεί τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα και ισχυρίζεται ότι μια πλάγια δύναμη την ανάγκασε να ακολουθήσει καμπύλη τροχιά. Αυτή η πλασματική δύναμη ονομάζεται δύναμη Coriolis.

Οι πλασματικές δυνάμεις δεν είναι πραγματικές, αλλά έχουν πραγματικές επιπτώσεις. Ένα αντικείμενο που βρίσκεται στο ταμπλό του αυτοκινήτου σας *πράγματι* θα γλιστρήσει και θα πέσει αν πατήσετε το γκάζι. Καθώς περιστρέφεστε καθισμένοι σε ένα καρουσέλ, νιώθετε να σας σπρώχνουν προς τα έξω σαν να υπάρχει η πλασματική «φυγόκεντρος δύναμη». Αν περπατάτε κατά μήκος μιας ακτίνας του καρουσέλ καθώς αυτό περιστρέφεται, είναι πολύ πιθανό η δύναμης Coriolis να σας κάνει να πέσετε και να τραυματιστείτε. (Ένας από τους συγγραφείς το έκανε και υπέστη ρήξη συνδέσμου κατά την πτώση.) Η δύναμη Coriolis που προκαλεί η περιστροφή της Γης ευθύνεται για την περιστροφική κίνηση των τυφώνων και για τα ρεύματα μεγάλης κλίμακας στους ωκεανούς.

***Σύντομο ερώτημα* Μ6.3** Θεωρήστε τη συνοδηγό του αυτοκινήτου που κινείται στην αριστερή καμπή στην Εικόνα Μ6.10. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις για τις οριζόντιες δυνάμεις είναι σωστή αν η συνοδηγός βρίσκεται σε επαφή με τη δεξιά πόρτα; **(α)** Η συνοδηγός ισορροπεί μεταξύ πραγματικών δυνάμεων που δρουν προς τα δεξιά και πραγματικών δυνάμεων που δρουν προς τα αριστερά. **(β)** Η συνοδηγός δέχεται μόνο πραγματικές δυνάμεις που δρουν προς τα δεξιά. **(γ)** Η συνοδηγός δέχεται μόνο πραγματικές δυνάμεις που δρουν προς τα αριστερά. **(δ)** Καμία από τις προτάσεις δεν είναι σωστή.

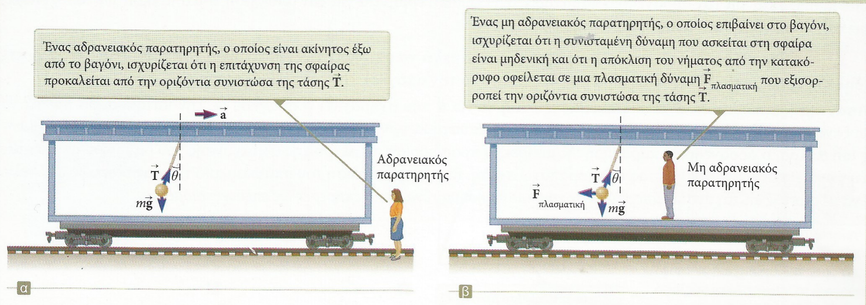


ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ6.11

Ο φίλος σας και εσείς στέκεστε στην περιφέρεια μιας περιστρεφόμενης κυκλικής πλατφόρμας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ πετάτε την μπάλα προς την κατεύθυνση του φίλου σας. (α) Εναέρια άποψη για παρατηρητή σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς προσαρτημένο στη Γη. Το έδαφος εμφανίζεται ακίνητο, και η πλατφόρμα περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. (β) Εναέρια άποψη για παρατηρητή σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς προσαρτημένο στην πλατφόρμα. Η πλατφόρμα εμφανίζεται ακίνητη, και το έδαφος περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Παράδειγμα Μ6.7 Πλασματικές δυνάμεις σε ευθύγραμμη κίνηση

Μια μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται με έναν σπάγκο από την οροφή ενός βαγονιού που επιταχύνει προς τα δεξιά (Εικόνα Μ6.12). Τόσο ο αδρανειακός παρατηρητής στο έδαφος (Εικόνα Μ6.12α) όσο και ο μη αδρανειακός παρατηρητής στο τρένο (Εικόνα Μ6.12β) συμφωνούν ότι ο σπάγκος σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Ο μη αδρανειακός παρατηρητής ισχυρίζεται ότι η παρατηρούμενη απόκλιση του σπάγκου από την κατακόρυφο προκαλείται από μια δύναμη (η οποία γνωρίζουμε βέβαια ότι είναι πλασματική). Πώς συνδέεται το μέτρο αυτής της δύναμης με την επιτάχυνση του βαγονιού που μετράει ο αδρανειακός παρατηρητής στην Εικόνα Μ6.12α;



Εικόνα Μ6.12 (Παράδειγμα Μ6.7) Μια μικρή σφαίρα η οποία κρέμεται από την οροφή ενός βαγονιού που επιταχύνει προς τα δεξιά, αποκλίνει όπως φαίνεται στην εικόνα.

συνεχίζεται

Μ6.7 *συν.*

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Ελάτε στη θέση κάθε ενός από τους δύο παρατηρητές της Εικόνας Μ6.12. Ως αδρανειακός παρατηρητής στο έδαφος, βλέπετε το βαγόνι να επιταχύνει και αντιλαμβάνεστε ότι η απόκλιση του σπάγκου οφείλεται σε αυτή την επιτάχυνση. Ως μη αδρανειακός παρατηρητής μέσα στο βαγόνι, φανταστείτε ότι αγνοείτε τις επιδράσεις της κίνησης του βαγονιού, και δεν νιώθετε την επιτάχυνσή του. Επειδή δεν αισθάνεστε την επιτάχυνση αυτή, ισχυρίζεστε ότι στη σφαίρα ασκείται μια πλάγια δύναμη η οποία την εκτρέπει και προκαλεί την απόκλιση του σπάγκου από την κατακόρυφο. Για να κάνετε τη μοντελοποίηση πιο ρεαλιστική, προσπαθήστε να τρέξετε από κατάσταση ηρεμίας ενώ κρατάτε ένα σώμα που κρέμεται από έναν σπάγκο· παρατηρήστε ότι, καθώς επιταχύνετε, ο σπάγκος σχηματίζει γωνία με την κατακόρυφο, σαν να υπάρχει μια δύναμη η οποία σπρώχνει το σώμα προς τα πίσω.

Κατηγοριοποίηση Για τον αδρανειακό παρατηρητή, μοντελοποιήστε τη σφαίρα ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση και ως σωματίδιο σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση. Για τον μη αδρανειακό παρατηρητή, η σφαίρα μοντελοποιείται ως σωματίδιο σε ισορροπία και στις δύο διευθύνσεις.

Ανάλυση Σύμφωνα με τον αδρανειακό παρατηρητή που είναι ακίνητος (Εικ. Μ6.12α), οι δυνάμεις που δρουν στη σφαίρα είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί ο σπάγκος και η βαρυτική δύναμη. Ο αδρανειακός παρατηρητής συμπεραίνει ότι επιτάχυνση της σφαίρας είναι ίδια με την επιτάχυνση του βαγονιού και προκαλείται από την οριζόντια συνιστώσα της τάσης $\vec{\mathbf{T}}$.

Εφαρμόστε στη σφαίρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών σύμφωνα με τον αδρανειακό παρατηρητή:

$$\text{Αδρανειακός παρατηρητής} \begin{cases} (1) \sum F_x = T\sin\theta = ma \\ (2) \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Σύμφωνα με τον μη αδρανειακό παρατηρητή στο βαγόνι (Εικ. Μ6.12β), ο σπάγκος σχηματίζει επίσης γωνία θ με την κατακόρυφο· για τον συγκεκριμένο παρατηρητή, όμως, η σφαίρα είναι ακίνητη, άρα η επιτάχυνσή της είναι μηδενική. Επομένως, ο μη αδρανειακός παρατηρητής εισάγει μια δύναμη (που όπως γνωρίζουμε είναι πλασματική) στην οριζόντια διεύθυνση για να εξισορροπήσει την οριζόντια συνιστώσα της τάσης $\vec{\mathbf{T}}$ και ισχυρίζεται ότι η συνισταμένη δύναμη που δρα στη σφαίρα είναι μηδενική.

Εφαρμόστε στη σφαίρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών σύμφωνα με τον μη αδρανειακό παρατηρητή:

$$\text{Μη αδρανειακός παρατηρητής} \begin{cases} \sum F'_x = T\sin\theta - F_{\text{πλασματική}} = 0 \\ \sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες με τις Εξισώσεις (1) και (2) αν ισχύει $F_{\text{πλασματική}} = ma$ όπου a είναι η επιτάχυνση σύμφωνα με τον αδρανειακό παρατηρητή.

Ολοκλήρωση Αν αντικαταστήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στην εξίσωση $\sum F'_x$ θα πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα όπως και για τον αδρανειακό παρατηρητή. Η φυσική ερμηνεία για την απόκλιση του σπάγκου, ωστόσο, διαφέρει στα δύο συστήματα αναφοράς.

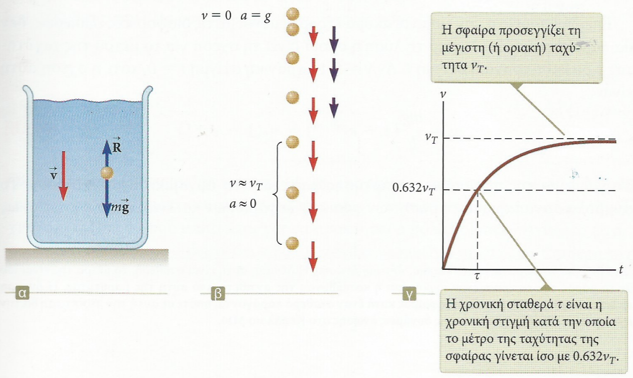
ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι ο αδρανειακός παρατηρητής θέλει να μετρήσει την επιτάχυνση του τρένου με το εκκρεμές (δηλαδή χρησιμοποιώντας τη σφαίρα που κρέμεται από τον σπάγκο). Πώς μπορεί να το κάνει;

Απάντηση Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι η γωνία θ που σχηματίζει ο σπάγκος με την κατακόρυφο πρέπει να αυξάνεται ανάλογα με την επιτάχυνση. Λύνοντας το σύστημα των Εξισώσεων (1) και (2) ως προς a, βρίσκουμε ότι $a = g\tan\theta$. Άρα, ο αδρανειακός παρατηρητής μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο της επιτάχυνσης του βαγονιού μετρώντας τη γωνία θ και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση. Επειδή η απόκλιση του σπάγκου από την κατακόρυφο αποτελεί ένα μέτρο της επιτάχυνσης, *μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα απλό εκκρεμές ως επιταχυνσιόμετρο.*

Μ6.4 Κίνηση υπό την παρουσία δυνάμεων αντίστασης

Στο Κεφάλαιο Μ5, περιγράψαμε τη δύναμη τριβής ολίσθησης που ασκείται σε ένα σώμα το οποίο κινείται πάνω σε μια επιφάνεια. Ωστόσο, αγνοήσαμε πλήρως τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ του σώματος και του μέσου στο οποίο κινείται. Θα εξετάσουμε τώρα την επίδραση του μέσου, το οποίο μπορεί να είναι υγρό ή αέριο. Το μέσο ασκεί μια **δύναμη αντίστασης** $\vec{\mathbf{R}}$, η οποία αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος μέσα σε αυτό. Μερικά παραδείγματα είναι η αντίσταση του αέρα που ασκείται στα κινούμενα οχήματα (γνωστή συχνά και ως *αεροδυναμική οπισθέλκουσα*) και οι δυνάμεις ιξώδους οι οποίες ασκούνται σε σώματα που κινούνται μέσα σε υγρά. Το μέτρο της δύναμης αντίστασης $\vec{\mathbf{R}}$ εξαρτάται από παράγοντες όπως το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, ενώ η κατεύθυνση τής $\vec{\mathbf{R}}$ είναι πάντα αντίθετη από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος ως προς το μέσο. Αυτή η κατεύθυνση μπορεί να είναι ή να μην είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος σύμφωνα με τον παρατηρητή. Για παράδειγμα, αν ρίξετε έναν βόλο μέσα σε μπουκάλι με σαμπουάν, ο βόλος κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω ενώ η δύναμη αντίστασης έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω και αντιστέκεται στην πτώση του βόλου. Αντίθετα, φανταστείτε ότι παρατηρείτε μια σημαία που κρέμεται από τον ιστό της κάποια στιγμή που δεν φυσάει αέρας. Όταν αρχίζει να φυσάει αέρας προς τα δεξιά, η σημαία κινείται προς τα δεξιά. Σε αυτή την περίπτωση, η οπισθέλκουσα που ασκεί στη σημαία ο κινούμενος αέρας έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και η επακόλουθη κίνηση της σημαίας έχει κατεύθυνση επίσης προς τα δεξιά, δηλαδή είναι *ίδια* με αυτή της οπισθέλκουσας. Επειδή ο αέρας κινείται προς τα δεξιά ως προς τη σημαία, η σημαία κινείται προς τα αριστερά ως προς τον αέρα. Συνεπώς, η κατεύθυνση της οπισθέλκουσας είναι πράγματι αντίθετη από την κατεύθυνση της κίνησης της σημαίας ως προς τον αέρα!

Η εξάρτηση του μέτρου της δύναμης αντίστασης από το μέτρο της ταχύτητας μπορεί να είναι σύνθετη. Εδώ θα μελετήσουμε μόνο δύο απλοποιημένα μοντέλα. Στο πρώτο μοντέλο, υποθέτουμε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας του κινούμενου σώματος· το μοντέλο αυτό ισχύει για σώματα που πέφτουν αργά μέσα σε ένα υγρό, καθώς και για πολύ μικρά σώματα, όπως οι κόκκοι σκόνης, που κινούνται μέσα στον αέρα. Στο δεύτερο μοντέλο, υποθέτουμε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας του κινούμενου σώματος· τέτοιες δυνάμεις δέχονται μεγάλα σώματα, όπως οι αλεξιπτωτιστές που εκτελούν ελεύθερη πτώση στην ατμόσφαιρα.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ6.13

(α) Μικρή σφαίρα η οποία πέφτει μέσα σε υγρό. (β) Το διάγραμμα κίνησης της σφαίρας καθώς πέφτει. Μετά το διάγραμμα κίνησης της σφαίρας ακολουθούν τα διαγράμματα με τα διανύσματα ταχύτητας (κόκκινα) και επιτάχυνσής (μοβ) της. (γ) Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για τη σφαίρα.

Μοντέλο 1: Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος

Αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε ένα σώμα το οποίο κινείται μέσα σε ένα υγρό ή ένα αέριο είναι ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη δύναμη ως

$$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}} \tag{M6.2}$$

όπου b είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, καθώς και από το σχήμα και τις διαστάσεις του σώματος, και $\vec{\mathbf{v}}$ είναι η ταχύτητα του σώματος ως προς το μέσο. Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι η δύναμη αντίστασης $\vec{\mathbf{R}}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$.

Θεωρήστε μια μικρή σφαίρα μάζας m την οποία αφήνουμε από κατάσταση ηρεμίας μέσα σε ένα υγρό (Δυναμική Εικόνα Μ6.13α). Θα περιγράψουμε την κίνηση υποθέτοντας ότι οι μόνες δυνάμεις που δρουν στη σφαίρα είναι η δύναμη αντίστασης $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ και η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$.[3] Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην κατακόρυφη κίνηση, επιλέγουμε ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω, και παρατηρούμε ότι $\Sigma F_y = mg - bv$, για να πάρουμε

$$mg - bv = ma \tag{M6.3}$$

όπου η επιτάχυνση της σφαίρας έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω. Προσέξτε ότι η επιτάχυνση a είναι ίση με dv/dt, οπότε έχουμε

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \tag{M6.4}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται *διαφορική εξίσωση*, και οι μέθοδοι επίλυσής της ενδέχεται να σας είναι άγνωστες. Όμως, παρατηρήστε ότι αρχικά, όταν $v = 0$, το μέτρο της δύναμης αντίστασης είναι επίσης ίσο με μηδέν και η επιτάχυνση της σφαίρας είναι απλώς ίση με g. Καθώς ο χρόνος t αυξάνεται, το μέτρο της δύναμης αντίστασης αυξάνεται και η επιτάχυνση μειώνεται. Η επιτάχυνση τείνει στο μηδέν όταν το μέτρο της δύναμης αντίστασης τείνει στο βάρος της σφαίρας. Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας τείνει στην **οριακή ταχύτητα** v_T.

Οριακή ταχύτητα ▶

Για να πάρουμε την οριακή ταχύτητα, θέτουμε $dv/dt = 0$ στην Εξίσωση Μ6.4, η οποία μας δίνει

$$mg - bv_T = 0 \text{ ή } v_T = \frac{mg}{b}$$

Επειδή μπορεί να μην είσαστε ακόμα εξοικειωμένοι με τις διαφορικές εξισώσεις, δεν θα παραθέσουμε αναλυτικά τη λύση η οποία δίνει τη σχέση για το μέτρο της ταχύτητας v σε κάθε χρονική στιγμή t. Αν $v = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε η σχέση αυτή είναι

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) = v_T(1 - e^{-t/\tau}) \tag{M6.5}$$

Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ6.13γ. Το σύμβολο e αναπαριστά τη βάση των φυσικών λογάριθμων και είναι επίσης γνωστό ως

[3]Στο βυθισμένο σώμα ασκείται και μια *δύναμη άνωσης*. Η δύναμη αυτή είναι σταθερή, το μέτρο της είναι ίσο με το βάρος του εκτοπισμένου υγρού, και η κατεύθυνση της αντίθετη από αυτή της βαρύτητας. Η δύναμη αλλάζει το φαινόμενο βάρος της σφαίρας κατά έναν σταθερό παράγοντα, οπότε σε αυτή την περίπτωση θα την αγνοήσουμε. Θα περιγράψουμε τις δυνάμεις άνωσης στο Κεφάλαιο Μ14.

αριθμός του Euler: $e = 2.718\ 28$. Η **χρονική σταθερά** $\tau = m/b$ είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η σφαίρα που αφήνεται από κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t = 0$ φτάνει στο 63.2% της οριακής ταχύτητάς της· όταν $t = \tau$, η Εξίσωση M6.5 δίνει $v = 0.632v_T$. (Ο αριθμός 0.632 είναι ίσος με $1 - e^{-1}$.)

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η Εξίσωση M6.5 είναι λύση της Εξίσωσης M6.4 με απευθείας παραγώγιση

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)\right] = \frac{mg}{b}\left(0 + \frac{b}{m}e^{-bt/m}\right) = ge^{-bt/m}$$

(Για τον υπολογισμό της παραγώγου του e^{ax} δείτε τον Πίνακα B.4 του Παραρτήματος.) Αντικαθιστώντας στην Εξίσωση M6.4 τη σχέση για το dv/dt και τη σχέση για το v από την Εξίσωση M6.5, διαπιστώνουμε ότι η λύση ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα M6.8 Πτώση σφαίρας σε λάδι

Μια μικρή σφαίρα μάζας 2.00 g αφήνεται από κατάσταση ηρεμίας μέσα σε ένα μεγάλο δοχείο γεμάτο με λάδι, όπου δέχεται δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητάς της. Η σφαίρα φτάνει σε μια οριακή ταχύτητα 5.00 cm/s. Προσδιορίστε τη χρονική σταθερά τ και τη χρονική στιγμή κατά την οποία η σφαίρα φτάνει στο 90.0% της οριακής ταχύτητάς της.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Με τη βοήθεια της Δυναμικής Εικόνας M6.13, φανταστείτε ότι ρίχνετε τη σφαίρα μέσα στο λάδι και την παρακολουθείτε να βυθίζεται μέχρι τον πυθμένα του δοχείου. Αν έχετε ένα παχύρευστο σαμπουάν μέσα σε διαφανές μπουκάλι, ρίξτε μέσα στο μπουκάλι έναν βόλο και παρατηρήστε την κίνησή του.

Κατηγοριοποίηση Μοντελοποιήστε τη σφαίρα ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης, όπου μία από τις ασκούμενες δυνάμεις είναι δύναμη αντίστασης, η οποία εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας.

Ανάλυση Από τη σχέση $v_T = mg/b$, υπολογίστε τον συντελεστή b:

$$b = \frac{mg}{v_T} = \frac{(2.00\ \text{g})(980\ \text{cm/s}^2)}{5.00\ \text{cm/s}} = 392\ \text{g/s}$$

Υπολογίστε τη χρονική σταθερά τ:

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2.00\ \text{g}}{392\ \text{g/s}} = \boxed{5.10 \times 10^{-3}\ \text{s}}$$

Βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας είναι ίσο με $0.900v_T$ θέτοντας $v = 0.900v_T$ στην Εξίσωση M6.5 και λύνοντας ως προς t:

$$0.900v_T = v_T(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.900$$

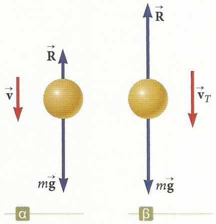
$$e^{-t/\tau} = 0.100$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.100) = -2.30$$

$$t = 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 11.7 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

$$= \boxed{11.7\ \text{ms}}$$

Ολοκλήρωση Η σφαίρα φτάνει στο 90.0% της οριακής ταχύτητάς της σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Παρόμοια συμπεριφορά θα πρέπει να παρατηρήσετε και αν εκτελέσετε το πείραμα με τον βόλο και το σαμπουάν. Επειδή το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αποκτήσει ο βόλος οριακή ταχύτητα είναι πολύ μικρό, ενδέχεται να μην το προσέξετε καν. Ίσως νομίσετε ότι ο βόλος αρχίζει να κινείται αμέσως με σταθερή ταχύτητα μέσα στο σαμπουάν.



Εικόνα Μ6.14 (α) Ένα σώμα το οποίο πέφτει στην ατμόσφαιρα δέχεται δύναμη αντίστασης $\vec{\mathbf{R}}$ και βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$. (β) Το σώμα αποκτάει οριακή ταχύτητα όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι μηδενική, δηλαδή όταν ισχύει $\vec{\mathbf{R}} = -\vec{\mathbf{F}}_g$ ή $R = mg$.

Μοντέλο 2: Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας του σώματος

Για σώματα που κινούνται γρήγορα μέσα στην ατμόσφαιρα, όπως αεροπλάνα, αλεξιπτωτιστές, αυτοκίνητα, και μπάλες του μπέιζμπολ, είναι αρκετά λογικό να θεωρούμε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητάς τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να εκφράσουμε το μέτρο της δύναμης αντίστασης ως

$$R = \tfrac{1}{2}D\rho A v^2 \qquad \textbf{(M6.6)}$$

όπου D είναι ένα αδιάστατο εμπειρικό μέγεθος το οποίο ονομάζεται *συντελεστής οπισθέλκουσας*, ρ είναι η πυκνότητα του αέρα, και A είναι το εμβαδόν διατομής του κινούμενου σώματος μετρημένο σε ένα επίπεδο κάθετο προς την ταχύτητά του. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας έχει τιμή περίπου 0.5 για σφαιρικά σώματα αλλά μπορεί να πάρει τιμές μέχρι και 2 για σώματα με ακανόνιστο σχήμα.

Ας αναλύσουμε την κίνηση ενός σώματος που πέφτει και δέχεται από τον αέρα μια δύναμη αντίστασης κατακόρυφα προς τα πάνω με μέτρο $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$. Υποθέστε ότι ένα σώμα μάζας m αφήνεται από κατάσταση ηρεμίας. Όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ6.14, το σώμα δέχεται δύο εξωτερικές δυνάμεις:[4] τη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ κατακόρυφα προς τα κάτω και τη δύναμη αντίστασης $\vec{\mathbf{R}}$ κατακόρυφα προς τα πάνω. Άρα, το μέτρο της συνισταμένης δύναμη είναι

$$\sum F = mg - \tfrac{1}{2}D\rho A v^2 \qquad \textbf{(M6.7)}$$

όπου ως θετική κατεύθυνση έχουμε ορίσει την κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και χρησιμοποιώντας τη δύναμη αντίστασης που δίνει η Εξίσωση Μ6.7, βρίσκουμε ότι η καθοδική κατακόρυφη επιτάχυνση του σώματος έχει μέτρο

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v^2 \qquad \textbf{(M6.8)}$$

Υπολογίζουμε την οριακή ταχύτητα v_T παρατηρώντας ότι, όταν η βαρυτική δύναμη εξισορροπείται από τη δύναμη αντίστασης, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι μηδενική και άρα η επιτάχυνσή του είναι μηδενική. Θέτοντας $a = 0$ στην Εξίσωση Μ6.8 παίρνουμε

$$g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right){v_T}^2 = 0$$

Άρα

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \qquad \textbf{(M6.9)}$$

Στον Πίνακα Μ6.1 φαίνονται οι οριακές ταχύτητες που αναπτύσσουν διάφορα σώματα κατά την πτώση τους στην ατμόσφαιρα.

***Σύντομο ερώτημα* Μ6.4** Δύο μπάλες ίδιας μάζας, μια μπάλα του μπέιζμπολ και μια μπάλα του μπάσκετ, αφήνονται να πέσουν στην ατμόσφαιρα από κατάσταση ηρεμίας έτσι ώστε αρχικά το κάτω μέρος τους να βρίσκεται στο ίδιο ύψος πάνω από το έδαφος, σε ύψος περίπου 1 μέτρο ή περισσότερο. Ποια μπάλα φτάνει πρώτη στο έδαφος; **(α)** Η μπάλα του μπέιζμπολ φτάνει πρώτη στο έδαφος. **(β)** Η μπάλα του μπάσκετ φτάνει πρώτη στο έδαφος. **(γ)** Οι δύο μπάλες φτάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα.

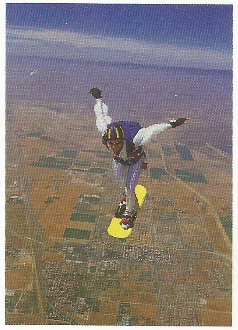
[4]Όπως και στο Μοντέλο 1, υπάρχει επίσης μια δύναμη άνωσης προς τα πάνω την οποία αγνοούμε.

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ6.1 *Οριακή ταχύτητα διαφόρων σωμάτων που πέφτουν στην ατμόσφαιρα*

Σώμα	Μάζα (kg)	Εμβαδόν διατομής (m^2)	v_T (m/s)
Αλεξιπτωτιστής	75	0.70	60
Μπάλα του μπέιζμπολ (ακτίνα 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Μπάλα του γκολφ (ακτίνα 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Χαλάζι (ακτίνα 0.50 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Σταγόνα βροχής (ακτίνα 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ6.9 Σερφάρισμα στον αέρα

Θεωρήστε έναν αλεξιπτωτιστή (Εικ. Μ6.15) ο οποίος πηδάει από ένα αεροπλάνο έχοντας στα πόδια του στερεωμένη μια σανίδα του σερφ, κάνει μερικές φιγούρες, και μετά ανοίγει το αλεξίπτωτο. Περιγράψτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον αλεξιπτωτιστή κατά τη διάρκεια αυτών των ελιγμών.



Εικόνα Μ6.15 (Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ6.9) Σερφάρισμα στον αέρα.

ΛΥΣΗ

Τη στιγμή που ο αλεξιπτωτιστής πηδάει από το αεροπλάνο, δεν έχει κατακόρυφη ταχύτητα. Η δύναμη της βαρύτητας τον επιταχύνει προς το έδαφος. Καθώς αυξάνεται το μέτρο της κατακόρυφης καθοδικής ταχύτητάς του, αυξάνεται και το μέτρο της κατακόρυφης ανοδικής δύναμης αντίστασης που ασκεί ο αέρας στο σώμα του και στη σανίδα. Αυτή η δύναμη μειώνει την επιτάχυνσή του με αποτέλεσμα το μέτρο της ταχύτητάς του να αυξάνεται πιο αργά. Τελικά, κινείται πλέον τόσο γρήγορα ώστε η ανοδική δύναμη αντίστασης εξισώνεται με την καθοδική βαρυτική δύναμη. Η συνισταμένη δύναμη είναι τώρα μηδενική και ο αλεξιπτωτιστής δεν επιταχύνει άλλο, καθώς έχει φτάσει στην οριακή του ταχύτητα. Κάποια χρονική στιγμή, αφότου ο αλεξιπτωτιστής έχει φτάσει στην οριακή του ταχύτητα, ανοίγει το αλεξίπτωτό του, αυξάνοντας έτσι δραστικά την ανοδική δύναμη αντίστασης. Η συνισταμένη δύναμη (και άρα η επιτάχυνση) έχει τώρα κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω, αντίθετη από αυτή της ταχύτητας. Κατά συνέπεια, η ταχύτητα καθόδου μειώνεται πολύ γρήγορα, όπως και η ανοδική δύναμη αντίστασης που ασκείται στο αλεξίπτωτο. Τελικά, η ανοδική δύναμη αντίστασης και η καθοδική βαρυτική δύναμη εξισορροπούνται, με αποτέλεσμα η οριακή ταχύτητα τώρα να είναι πολύ μικρότερη και να επιτρέπει την ασφαλή προσγείωση του αλεξιπτωτιστή.

(Σε αντίθεση με την κοινή πεποίθηση, το διάνυσμα της ταχύτητας ενός αλεξιπτωτιστή δεν έχει ποτέ κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω. Ίσως έχετε δει βίντεο όπου ο αλεξιπτωτιστής φαίνεται να «εκτοξεύεται» προς τα πάνω μόλις ανοίγει το αλεξίπτωτό του. Στην πραγματικότητα, αυτό που συμβαίνει είναι ότι ο αλεξιπτωτιστής επιβραδύνει αλλά ο χειριστής της κάμερας συνεχίζει να πέφτει πολύ γρήγορα.)

Παράδειγμα Μ6.10 Φίλτρα του καφέ σε ελεύθερη πτώση

Η εξάρτηση της δύναμης αντίστασης από το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας αποτελεί μοντέλο. Ας δοκιμάσουμε το μοντέλο σε μια συγκεκριμένη περίπτωση. Φανταστείτε ότι πραγματοποιείτε ένα πείραμα κατά το οποίο ρίχνετε μια σειρά από ανοιχτά φίλτρα του καφέ και μετράτε τις οριακές ταχύτητές τους. Στον Πίνακα Μ6.2 παρουσιάζονται τυπικά δεδομένα οριακών ταχυτήτων φίλτρων καφέ τα οποία καταγράφηκαν κατά τη διάρκεια ενός πραγματικού πειράματος. Η χρονική σταθερά τ είναι μικρή, άρα ένα φίλτρο που εκτελεί ελεύθερη πτώση αποκτάει γρήγορα την οριακή του ταχύτητα. Κάθε φίλτρο έχει μάζα 1.64 g. Όταν τα φίλτρα είναι τοποθετημένα το ένα μέσα στο άλλο

συνεχίζεται

Μ6.10 *συν.*

συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε το εμβαδόν της μετωπικής τους επιφάνειας δεν αυξάνεται. Προσδιορίστε τη σχέση που συνδέει τη δύναμη αντίστασης που ασκεί ο αέρας και το μέτρο της ταχύτητας των φίλτρων που πέφτουν.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι αφήνετε φίλτρα καφέ να πέσουν από κάποιο ύψος. (Αν έχετε μερικά φίλτρα καφέ, δοκιμάστε να το κάνετε.) Λόγω της σχετικά μικρής μάζας κάθε φίλτρου, είναι πιθανό ότι δεν θα αντιληφθείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο επιταχύνουν. Μόλις αφήνετε τα φίλτρα, θα νομίζετε ότι πέφτουν με σταθερή ταχύτητα.

Κατηγοριοποίηση Επειδή κάθε φίλτρο κατά την πτώση του κινείται με σταθερή ταχύτητα, μπορείτε να το μοντελοποιήσετε ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Ανάλυση Μόλις το φίλτρο φτάσει στην οριακή του ταχύτητα, η ανοδική δύναμη αντίστασης που ασκείται σε αυτό εξισορροπεί την καθοδική βαρυτική δύναμη έτσι ώστε $R = mg$.

Υπολογίστε το μέτρο της δύναμης αντίστασης:

$$R = mg = (1.64\ \text{g})\left(\frac{1\ \text{kg}}{1\,000\ \text{g}}\right)(9.80\ \text{m/s}^2) = 0.016\,1\ \text{N}$$

Παρομοίως, δύο φίλτρα τα οποία έχουν τοποθετηθεί το ένα μέσα στο άλλο δέχονται δύναμη αντίστασης 0.032 2 N, κ.ο.κ. Αυτές οι τιμές της δύναμης αντίστασης παρουσιάζονται στη δεξιά στήλη του Πίνακα Μ6.2. Στην Εικόνα Μ6.16α μπορείτε να δείτε το γράφημα της δύναμης αντίστασης που ασκείται στα φίλτρα συναρτήσει του μέτρου της ταχύτητας. Η καμπύλη βέλτιστης προσαρμογής δεν είναι ευθεία, κάτι που υποδεικνύει ότι η δύναμη της αντίστασης *δεν* είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται πιο καθαρά στο γράφημα της δύναμης της αντίστασης συναρτήσει του τετραγώνου της οριακής ταχύτητας, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα Μ6.16β. Το γράφημα δείχνει ότι η δύναμη της αντίστασης είναι ανάλογη προς το *τετράγωνο* του μέτρου της ταχύτητας, όπως υποδεικνύει η Εξίσωση Μ6.6.

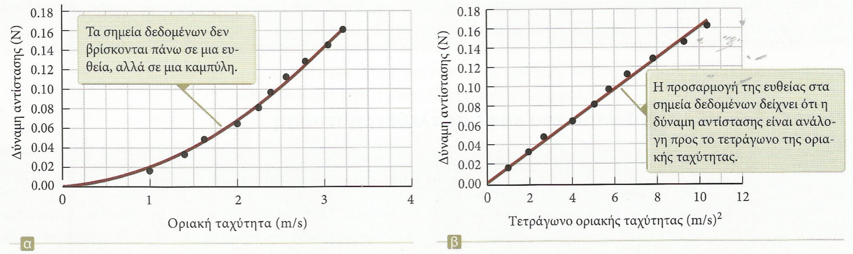
Ολοκλήρωση Το παράδειγμα αυτό αποτελεί μια καλή ευκαιρία να συλλέξετε μερικά πραγματικά δεδομένα για τα φίλτρα καφέ στο σπίτι σας και να δείτε αν μπορείτε να αναπαραγάγετε τα γραφήματα της Εικόνας Μ6.16. Αν έχετε ένα μπουκάλι σαμπουάν και έναν βόλο, όπως αναφέραμε στο Παράδειγμα Μ6.8, συλλέξτε δεδομένα και γι' αυτό το σύστημα και ελέγξτε αν η μοντελοποίηση της δύναμης αντίστασης ως ανάλογης του μέτρου της ταχύτητας είναι σωστή.

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ6.2

Οριακή ταχύτητα και δύναμη αντίστασης για ένθετα φίλτρα καφέ

Αριθμός φίλτρων	v_T (m/s)[a]	R (N)
1	1.01	0.016 1
2	1.40	0.032 2
3	1.63	0.048 3
4	2.00	0.064 4
5	2.25	0.080 5
6	2.40	0.096 6
7	2.57	0.112 7
8	2.80	0.128 8
9	3.05	0.144 9
10	3.22	0.161 0

[a]Όλες οι τιμές της ταχύτητας v_T είναι προσεγγιστικές.



Εικόνα Μ6.16 (Παράδειγμα Μ6.10) (α) Η σχέση μεταξύ της δύναμης αντίστασης που ασκείται στα φίλτρα καφέ και της οριακής ταχύτητάς τους. (β) Το γράφημα που συνδέει τη δύναμη αντίστασης με το τετράγωνο της οριακής ταχύτητας.

Παράδειγμα M6.11 Η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μια μπάλα του μπέιζμπολ

Ένας πίτσερ ρίχνει μια μπάλα του μπέιζμπολ μάζας 0.145 kg με τέτοιον τρόπο ώστε προσπερνάει τον μπάτερ με 40.2 m/s (= 90 mi/h). Βρείτε τη δύναμη της αντίστασης που ασκεί στην μπάλα ο αέρας για το συγκεκριμένο μέτρο ταχύτητας.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Το παράδειγμα αυτό διαφέρει από τα προηγούμενα ως προς το ότι το σώμα κινείται τώρα οριζόντια στην ατμόσφαιρα και όχι κατακόρυφα υπό την επίδραση της βαρύτητας και της δύναμης αντίστασης. Η δύναμη αντίστασης προκαλεί επιβράδυνση της μπάλας, ενώ η βαρύτητα αναγκάζει την τροχιά της να καμπυλώσει προς τα κάτω. Απλοποιούμε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι τη χρονική στιγμή που η μπάλα κινείται με 40.2 m/s, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι τελείως οριζόντιο.

Κατηγοριοποίηση Γενικά, θεωρούμε την μπάλα ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Επειδή εξετάζουμε μόνο μία χρονική στιγμή και δεν μας ενδιαφέρει η επιτάχυνση, το πρόβλημα αφορά απλώς την εύρεση της τιμής μίας από τις ασκούμενες δυνάμεις.

Ανάλυση Για να προσδιορίσετε τον συντελεστή οπισθέλκουσας D, φανταστείτε ότι ρίχνετε την μπάλα του μπέιζμπολ και την αφήνετε να αποκτήσει την οριακή της ταχύτητα. Λύστε την Εξίσωση M6.9 ως προς D και, χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τον Πίνακα M6.1, δώστε κατάλληλες τιμές στα m, v_T, και A θεωρώντας ότι η πυκνότητα του αέρα είναι 1.20 kg/m^3:

$$D = \frac{2mg}{v_T^2 \rho A} = \frac{2(0.145\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2})}{(43\ \mathrm{m/s})^2(1.20\ \mathrm{kg/m^3})(4.2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2})}$$

$$= 0.305$$

Αντικαταστήστε αυτή την τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας D στην Εξίσωση M6.6 για να βρείτε το μέτρο της δύναμης αντίστασης:

$$R = \tfrac{1}{2}D\rho A v^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(0.305)(1.20\ \mathrm{kg/m^3})(4.2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2})(40.2\ \mathrm{m/s})^2$$

$$= \boxed{1.2\ \mathrm{N}}$$

Ολοκλήρωση Το μέτρο της δύναμης αντίστασης είναι παρόμοιο με το μέτρο του βάρους της μπάλας, που είναι περίπου 1.4 N. Επομένως, η αντίσταση του αέρα παίζει σημαντικό ρόλο στην κίνηση της μπάλας, όπως εξάλλου αποδεικνύουν οι πολλές διαφορετικές μπαλιές (καμπύλες, οριζόντιες, κ.λπ.) που ρίχνουν οι πίτσερ στο μπέιζμπολ.

Σύνοψη

Ορισμοί

Ένα σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει κεντρομόλο επιτάχυνση· αυτή η επιτάχυνση προκαλείται από μια συνισταμένη δύναμη με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

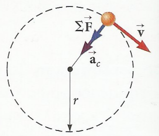
Όταν ένας παρατηρητής σε ένα μη αδρανειακό (επιταχυνόμενο) σύστημα αναφοράς εφαρμόζει στο σύστημα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, τότε εισάγει **πλασματικές δυνάμεις** σε αυτό.

Ένα σώμα που κινείται μέσα σε ένα υγρό ή σε ένα αέριο δέχεται μια **δύναμη αντίστασης** η οποία εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητάς του. Η δύναμη αντίστασης έχει κατεύθυνση αντίθετη από την ταχύτητα του σώματος ως προς το μέσο και γενικά αυξάνεται με το μέτρο της ταχύτητας. Το μέτρο της δύναμης αντίστασης εξαρτάται τόσο από το μέγεθος και το σχήμα του σώματος όσο και από τις ιδιότητες του μέσου μέσα στο οποίο κινείται το σώμα. Στην οριακή περίπτωση για ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση, όταν το μέτρο της δύναμης αντίστασης ισούται με το βάρος του σώματος, το σώμα αποκτάει την **οριακή ταχύτητά** του.

συνεχίζεται

Μοντέλο ανάλυσης για επίλυση προβλημάτων

Σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση (επέκταση) Οι νέες γνώσεις που αποκτήσαμε για τις δυνάμεις, μας επιτρέπουν να επεκτείνουμε το μοντέλο του σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, το οποίο παρουσιάσαμε για πρώτη φορά στο Κεφάλαιο Μ4. Από την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στην περίπτωση ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, προκύπτει ότι η συνισταμένη δύναμη που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση του σωματιδίου (Εξ. Μ4.15) συνδέεται με την επιτάχυνση σύμφωνα με τη σχέση



$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(M6.1)}$$

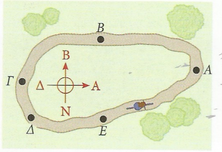
Θεματικές ερωτήσεις

☐ Το σύμβολο αυτό υποδηλώνει ότι η απάντηση υπάρχει στο βιβλίο Student Solutions Manual/Study Guide

1. Η πόρτα ενός νοσοκομείου διαθέτει έναν πνευματικό μηχανισμό κλεισίματος ο οποίος έλκει την πόρτα για να κλείνει έτσι ώστε το πόμολο να κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου κατά το μεγαλύτερο μέρος της διαδρομής του. Σε αυτό το τμήμα της κίνησής του, (α) έχει το πόμολο κεντρομόλο επιτάχυνση; (β) Δέχεται εφαπτομενική επιτάχυνση;

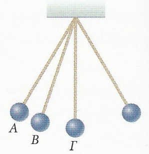
2. Μια πόρτα γραφείου δέχεται ένα απότομο σπρώξιμο και ανοίγει μέσω ενός πνευματικού μηχανισμού, ο οποίος πρώτα την επιβραδύνει και έπειτα αντιστρέφει τη φορά της κίνησής της. Τη χρονική στιγμή που η πόρτα έχει το μεγαλύτερο άνοιγμα, (α) έχει το πόμολο κεντρομόλο επιτάχυνση; (β) Έχει εφαπτομενική επιτάχυνση;

$\boxed{3.}$ Ένα παιδί προπονείται για έναν αγώνα με ποδήλατα BMX. Κινείται αριστερόστροφα με σταθερό μέτρο ταχύτητας σε μια οριζόντια πίστα με δύο ευθύγραμμα τμήματα και δύο σχεδόν ημικυκλικά τμήματα, όπως φαίνεται στην εναέρια άποψη της Εικόνας ΘΕ Μ6.3. (α) Κατατάξτε τα σημεία *Α*, *Β*, *Γ*, *Δ*, και *Ε* ανάλογα με το μέτρο της επιτάχυνσης που εκτιμάτε ότι έχει σε καθένα από αυτά, από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο. Αν η επιτάχυνσή του έχει το ίδιο μέτρο σε δύο σημεία, κατατάξτε τα στην ίδια θέση. Αναφέρετε αν η επιτάχυνση είναι μηδενική σε κάποιο σημείο. (β) Ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτητάς του στα σημεία *Α*, *Β*, και *Γ*; Επιλέξτε μία απάντηση για κάθε σημείο: βόρεια, νότια, ανατολική, δυτική, ή δεν υφίσταται. (γ) Ποια είναι η κατεύθυνση της επιτάχυνσής του στα σημεία *Α*, *Β*, και *Γ*;



Εικόνα ΘΕ Μ6.3

4. Ένα εκκρεμές αποτελείται από ένα μικρό σφαιρίδιο το οποίο κρέμεται από ένα αβαρές νήμα σταθερού μήκους. Το πάνω άκρο του νήματος είναι σταθερό (Εικόνα ΘΕ Μ6.4). Το σφαιρίδιο κινείται χωρίς τριβές και ταλαντώνεται φτάνοντας στο ίδιο ύψος και στις δύο πλευρές της ταλάντωσης. Μετακινείται διαδοχικά από το σημείο αναστροφής της κίνησής του *Α* στο σημείο *Β* και έπειτα στο *Γ*, όπου η ταχύτητά του παίρνει τη μέγιστη τιμή της. (α) Έχει το σφαιρίδιο σε κάποιο από αυτά τα σημεία μη μηδενική ακτινική επιτάχυνση και μηδενική εφαπτομενική επιτάχυνση; Αν ναι, σε ποιο σημείο; Ποια είναι η κατεύθυνση της ολικής επιτάχυνσής του στο συγκεκριμένο σημείο; (β) Έχει το σφαιρίδιο σε κάποιο από αυτά τα σημεία μη μηδενική εφαπτομενική επιτάχυνση και μηδενική ακτινική επιτάχυνση; Αν ναι, σε ποιο σημείο; Ποια είναι η κατεύθυνση της ολικής επιτάχυνσής του σε αυτό το σημείο; (γ) Υπάρχει κάποιο σημείο όπου το σφαιρίδιο δεν έχει επιτάχυνση; Αν ναι, σε ποιο σημείο; (δ) Υπάρχει κάποιο σημείο όπου το σφαιρίδιο έχει μη μηδενική εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση; Αν ναι, σε ποιο σημείο; Ποια είναι η κατεύθυνση της ολικής επιτάχυνσής του στο συγκεκριμένο σημείο;



Εικόνα ΘΕ Μ6.4

5. Ένας ανήσυχος σπουδαστής βρίσκεται μέσα σε ένα αεροπλάνο που πρόκειται να απογειωθεί και κρατάει ένα iPod από τα ακουστικά του. Ενώ το αεροπλάνο είναι ακίνητο και περιμένει άδεια για να απογειωθεί, η συσκευή κρέμεται κατακόρυφα. Στη συνέχεια, το αεροπλάνο επιταχύνει στον διάδρομο απογείωσης. **(i)** Σε σχέση με το χέρι του σπουδαστή, το iPod (α) μετατοπίζεται προς το μπροστινό τμήμα του αεροπλάνου, (β) συνεχίζει να κρέμεται κατακόρυφα, ή (γ) μετατοπίζεται προς το πίσω μέρος του