ΔΙΑΛΕΞΗ 3
30/10/2020

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ 2-D (…συνέχεια)

Μ4.4 Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

Αποφυγή παγίδων Μ4.4

Επιτάχυνση σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

Να θυμάστε ότι στη φυσική η επιτάχυνση ορίζεται ως η μεταβολή *του διανύσματος της ταχύτητας* και όχι του *μέτρου της ταχύτητας* (αντίθετα από την κοινή πεποίθηση). Στην κυκλική κίνηση, η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας μεταβάλλεται, επομένως υπάρχει επιτάχυνση.

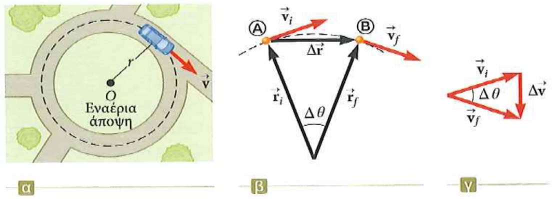
Στην Εικόνα Μ4.15α φαίνεται ένα αυτοκίνητο που κινείται σε κυκλική τροχιά· η κίνηση αυτή ονομάζεται **κυκλική κίνηση.** Αν το αυτοκίνητο κινείται κατά μήκος της τροχιάς του με *ταχύτητα σταθερού μέτρου* v, τότε η κίνηση αυτή ονομάζεται **ομαλή κυκλική κίνηση.** Επειδή αυτό το είδος κίνησης εμφανίζεται πολύ συχνά, συνιστά ένα μοντέλο ανάλυσης που ονομάζεται **σωματίδιο σε ομαλή κυκλική κίνηση.** Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε το συγκεκριμένο μοντέλο.

Πολλοί σπουδαστές εκπλήσσονται όταν διαπιστώνουν ότι παρόλο που το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, *έχει επιτάχυνση*. Για να καταλάβετε τον λόγο, θεωρήστε την εξίσωση ορισμού της επιτάχυνσης, $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ (Εξ. Μ4.5). Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση εξαρτάται από τη μεταβολή της *ταχύτητας*. Επειδή η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, η επιτάχυνση μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους, όπως αναφέραμε στην Ενότητα Μ4.1: είτε λόγω μεταβολής του *μέτρου* της ταχύτητας είτε λόγω μεταβολής της *κατεύθυνσης* της ταχύτητας. Η δεύτερη περίπτωση συμβαίνει όταν ένα σώμα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλική διαδρομή. Το διάνυσμα της ταχύτητας σταθερού μέτρου εφάπτεται πάντα στην τροχιά του σώματος και είναι κάθετο στην ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Θα δείξουμε τώρα ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι πάντα κάθετο στην ακτίνα της τροχιάς και έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου. Αν αυτό δεν ίσχυε, η επιτάχυνση θα είχε μια συνιστώσα παράλληλη προς την τροχιά και, άρα, παράλληλη προς το διάνυσμα της ταχύτητας. Μια τέτοια συνιστώσα της επιτάχυνσης θα προκαλούσε μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του σωματιδίου. Αυτό όμως δεν συμφωνεί με την περιγραφή της κατάστασης: το σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Συνεπώς, στην *ομαλή* κυκλική κίνηση, το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει συνιστώσα μόνο κάθετα στην τροχιά (δηλαδή σε ακτινική διεύθυνση) και με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου.

Θα υπολογίσουμε τώρα το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου. Θεωρήστε το διάγραμμα των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας στην Εικόνα Μ4.15β. Στην εικόνα φαίνεται επίσης το διάνυσμα που αναπαριστά τη μεταβολή $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ της θέσης για ένα τυχαίο χρονικό διάστημα. Το σωματίδιο ακολουθεί κυκλική τροχιά ακτίνας r, ένα τμήμα της οποίας υποδεικνύει η διακεκομμένη καμπύλη. Κατά τη χρονική στιγμή t_i, το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο Ⓐ και έχει ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_i$· σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_f, το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο Ⓑ και έχει ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_f$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι ταχύτητες $\vec{\mathbf{v}}_i$ και $\vec{\mathbf{v}}_f$ διαφέρουν μόνο ως προς την κατεύθυνση και ότι τα μέτρα τους είναι ίδια (δηλαδή ισχύει $v_i = v_f = v$ επειδή η κυκλική κίνηση είναι *ομαλή*).

Στην Εικόνα Μ4.15γ, έχουμε σχεδιάσει τα διανύσματα ταχύτητας της Εικόνας Μ4.15β με κοινή αρχή. Το διάνυσμα $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ συνδέει τις αιχμές των διανυσμάτων και αναπαριστά το διανυσματικό άθροισμα $\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$. Στις Εικόνες Μ4.15β και Μ4.15γ βλέπουμε δύο τρίγωνα τα οποία θα μας βοηθήσουν να αναλύσουμε την κίνηση. Η γωνία $\Delta\theta$ μεταξύ των δύο διανυσμάτων θέσης στην Εικόνα Μ4.15β είναι ίδια με τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας στην Εικόνα Μ4.15γ επειδή το διάνυσμα



Εικόνα Μ4.15 (α) Ένα αυτοκίνητο που κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. (β) Καθώς ένα σωματίδιο κινείται σε ένα τμήμα κυκλικής τροχιάς από το Ⓐ στο Ⓑ, το διάνυσμα της ταχύτητάς του μεταβάλλεται από $\vec{\mathbf{v}}_i$ σε $\vec{\mathbf{v}}_f$. (γ) Το διάγραμμα για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης της μεταβολής $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ της ταχύτητας, η οποία για μικρό $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ είναι προς το κέντρο του κύκλου.

ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$. Επομένως, τα δύο τρίγωνα είναι *όμοια*. (Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν η γωνία μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πλευρών είναι ίδια και για τα δύο τρίγωνα και αν ο λόγος των μηκών των συγκεκριμένων πλευρών είναι ίδιος.) Μπορούμε τώρα να γράψουμε μια σχέση που συνδέει τα μήκη των πλευρών για τα δύο τρίγωνα των Εικόνων M4.15β και M4.15γ:

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$

όπου $v = v_i = v_f$ και $r = r_i = r_f$. Μπορούμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση ως προς $|\Delta\vec{\mathbf{v}}|$ και να αντικαταστήσουμε τη σχέση που θα προκύψει στην Εξίσωση M4.4 $\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$ για να πάρουμε το μέτρο της μέσης επιτάχυνσης για το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σωματίδιο κινείται από το Ⓐ στο Ⓑ:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}$$

Φανταστείτε τώρα ότι τα σημεία Ⓐ και Ⓑ στην Εικόνα M4.15β έρχονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Καθώς τα Ⓐ και Ⓑ προσεγγίζουν το ένα το άλλο, το Δt τείνει στο μηδέν, το $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ τείνει στην απόσταση που διανύει το σωματίδιο κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς, και ο λόγος $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|/\Delta t$ τείνει στο μέτρο της ταχύτητας v. Επιπλέον, στο σημείο Ⓐ, η μέση επιτάχυνση γίνεται ίση με τη στιγμιαία. Άρα, στο όριο $\Delta t \to 0$, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(M4.14)}$$

◀ **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

Η επιτάχυνση αυτού του είδους ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση** (*κεντρομόλος* σημαίνει *αυτός που κατευθύνεται προς το κέντρο*). Ο δείκτης στο σύμβολο της επιτάχυνσης μας υπενθυμίζει ότι η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος.

Σε πολλές περιπτώσεις, είναι βολικό να περιγράφουμε την κίνηση ενός σωματιδίου που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κύκλο ακτίνας r συναρτήσει της **περιόδου** T, η οποία ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σωματίδιο για να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά. Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος T, το σωματίδιο διανύει απόσταση $2\pi r$, η οποία είναι ίση με την περιφέρεια της κυκλικής τροχιάς του. Συνεπώς, επειδή το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με το πηλίκο της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς προς την περίοδο, ή $v = 2\pi r/T$, συνεπάγεται ότι

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \text{(M4.15)}$$

◀ **Περίοδος κυκλικής κίνησης**

Οι Εξισώσεις M4.14 και M4.15 μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα πρόβλημα όταν αυτό είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

***Σύντομο ερώτημα* M4.4** Σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με ταχύτητα μέτρου v. Στη συνέχεια, αυξάνει το μέτρο της ταχύτητάς του σε $2v$ διατηρώντας ταυτόχρονα την ίδια τροχιά. **(i)** Κατά ποιον παράγοντα έχει μεταβληθεί η κεντρομόλος επιτάχυνση του σωματιδίου; Επιλέξτε ένα από τα παρακάτω: (α) 0.25 (β) 0.5 (γ) 2 (δ) 4 (ε) Είναι αδύνατο να προσδιοριστεί. **(ii)** Κατά ποιον παράγοντα έχει μεταβληθεί η περίοδος του σωματιδίου; Επιλέξτε από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Αποφυγή παγίδων M4.5

Η κεντρομόλος επιτάχυνση δεν είναι σταθερή

Βρήκαμε τη σχέση για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης και διαπιστώσαμε ότι είναι σταθερό στην περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης, αλλά *το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης δεν είναι σταθερό.* Η κατεύθυνσή του είναι πάντα προς το κέντρο του κύκλου, αλλά μεταβάλλεται συνεχώς καθώς το σώμα κινείται στην κυκλική διαδρομή.

Παράδειγμα Μ4.6 Η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης

Ποια είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης καθώς περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε τη Γη να περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Θα μοντελοποιήσουμε τη Γη ως σωματίδιο και θα προσεγγίσουμε την τροχιά της ως κυκλική (στην πραγματικότητα είναι λίγο ελλειπτική, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο Μ13).

Κατηγοριοποίηση Το βήμα της Μοντελοποίησης μας επιτρέπει να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Ανάλυση Δεν γνωρίζουμε την τροχιακή ταχύτητα της Γης για να την αντικαταστήσουμε στην Εξίσωση Μ4.14. Ωστόσο, με τη βοήθεια της Εξίσωσης Μ4.15 μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την Εξίσωση Μ4.14 συναρτήσει της τροχιακής περιόδου της Γης, που γνωρίζουμε ότι είναι ένα έτος, και την ακτίνα της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο, που είναι 1.496×10^{11} m.

Συνδυάστε τις Εξισώσεις Μ4.14 και Μ4.15:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\text{ m})}{(1\text{ yr})^2}\left(\frac{1\text{ yr}}{3.156 \times 10^7\text{ s}}\right)^2 = \boxed{5.93 \times 10^{-3}\text{ m/s}^2}$$

Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση αυτή είναι πολύ μικρότερη από την επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης στην επιφάνεια της Γης. Μια σημαντική τεχνική που μάθαμε εδώ είναι η αντικατάσταση του μέτρου v της ταχύτητας στην Εξίσωση Μ4.14 συναρτήσει της περιόδου T της κίνησης. Σε πολλά προβλήματα, είναι πολύ πιθανό να είναι γνωστό το T αντί για το v.

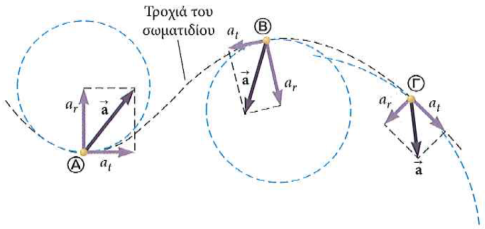
Μ4.5 Εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση

Θα εξετάσουμε τώρα μια πιο γενική κίνηση από αυτή που παρουσιάσαμε στην Ενότητα Μ4.4. Ένα σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά ακολουθώντας καμπύλη τροχιά με το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητάς του να μεταβάλλονται όπως περιγράφεται στη Δυναμική Εικόνα Μ4.16. Σε αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται πάντα στην τροχιά· το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}}$, όμως, σχηματίζει μη μηδενική γωνία με την τροχιά. Σε καθένα από τα τρία σημεία Ⓐ, Ⓑ, και Ⓒ της Δυναμικής Εικόνας Μ4.16, οι διακεκομμένοι μπλε κύκλοι αναπαριστούν την καμπυλότητα της πραγματικής τροχιάς. Η ακτίνα κάθε κύκλου είναι ίση με την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς σε καθένα από αυτά τα σημεία.

Καθώς το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης τροχιάς της Δυναμικής Εικόνας Μ4.16, η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{a}}$ της συνολικής επιτάχυνσης μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Σε κάθε στιγμή, μπορούμε να αναλύσουμε αυτό το διάνυσμα σε δύο συνιστώσες, χρησιμοποιώντας ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο του διακεκομμένου κύκλου που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη στιγμή: μια ακτινική συνιστώσα a_r και μια εφαπτομενική συνιστώσα a_t η οποία είναι κάθετη στην ακτίνα. Το διάνυσμα της *συνολικής* επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}}$ μπορεί να γραφτεί ως το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών:

Ολική επιτάχυνση ▶

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t \quad \text{(Μ4.16)}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ4.16

Κίνηση ενός σωματιδίου κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης τροχιάς στο επίπεδο xy. Αν το διάνυσμα $\vec{v}$ της ταχύτητας (που εφάπτεται πάντα στην τροχιά) αλλάζει κατεύθυνση και μέτρο, τότε η επιτάχυνση $\vec{a}$ έχει δύο συνιστώσες: μία εφαπτομενική a_t και μία ακτινική a_r.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης μεταβάλλει το μέτρο v της ταχύτητας του σωματιδίου. Η συνιστώσα αυτή είναι παράλληλη προς τη στιγμιαία ταχύτητα, και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad \text{(M4.17)}$$

◀ **Εφαπτομενική επιτάχυνση**

Η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης προκύπτει από τη μεταβολή της κατεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας και δίνεται από τη σχέση

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \qquad \text{(M4.18)}$$

◀ **Ακτινική επιτάχυνση**

όπου r είναι η ακτίνα καμπυλότητας της διαδρομής στο σημείο που εξετάζουμε. Αναγνωρίζουμε ότι το μέτρο της ακτινικής συνιστώσας της επιτάχυνσης είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση που αναφέραμε στην Ενότητα Μ4.4. Το αρνητικό πρόσημο στην Εξίσωση Μ4.18 δείχνει ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου με ακτίνα την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Η κατεύθυνση είναι αντίθετη από αυτή του ακτινικού μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$, το οποίο δείχνει πάντα από την αρχή των συντεταγμένων, στο κέντρο του κύκλου, προς την περιφέρειά του.

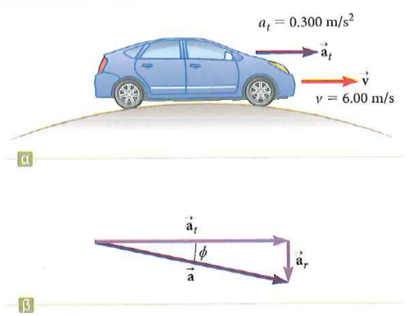
Επειδή τα $\vec{\mathbf{a}}_r$ και $\vec{\mathbf{a}}_t$ είναι κάθετες συνιστώσες του $\vec{\mathbf{a}}$, συνεπάγεται ότι το μέτρο τού $\vec{\mathbf{a}}$ είναι $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. Για ένα συγκεκριμένο μέτρο ταχύτητας, η ακτινική επιτάχυνση a_r έχει μεγάλη τιμή όταν η ακτίνα καμπυλότητας είναι μικρή (όπως στα σημεία Ⓐ και Ⓑ στη Δυναμική Εικ. Μ4.16) και μικρή τιμή όταν η ακτίνα r είναι μεγάλη (όπως στο σημείο Ⓖ). Η κατεύθυνση της εφαπτομενικής επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}}_t$ είναι είτε ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ (αν το v αυξάνεται) είτε αντίθετη της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ (αν το v μειώνεται, όπως στο σημείο Ⓑ).

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, όπου το μέτρο της ταχύτητας v είναι σταθερό, ισχύει $a_t = 0$ και η επιτάχυνση είναι πάντα πλήρως ακτινική όπως περιγράψαμε στην Ενότητα Μ4.4. Με άλλα λόγια, η ομαλή κυκλική κίνηση είναι μια ειδική περίπτωση της κίνησης σε καμπύλη τροχιά. Επιπλέον, αν η κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ δεν αλλάζει, τότε δεν υπάρχει ακτινική επιτάχυνση και η κίνηση είναι μονοδιάστατη (σε αυτή την περίπτωση ισχύει $a_r = 0$, αλλά η εφαπτομενική επιτάχυνση a_t μπορεί να μην είναι μηδενική).

***Σύντομο ερώτημα* Μ4.5** Σωματίδιο κινείται κατά μήκος μιας τροχιάς και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. **(i)** Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι τα διανύσματα επιτάχυνσης και ταχύτητας παράλληλα μεταξύ τους; (α) Όταν η τροχιά είναι κυκλική. (β) Όταν η τροχιά είναι ευθύγραμμη. (γ) Όταν η τροχιά είναι παραβολή. (δ) Ποτέ. **(ii)** Σε ποια από τις παραπάνω περιπτώσεις είναι τα διανύσματα επιτάχυνσης και ταχύτητας κάθετα μεταξύ τους σε κάθε σημείο της τροχιάς;

Παράδειγμα Μ4.7 Κίνηση σε ύψωμα

Αυτοκίνητο που έχει σταματήσει σε πινακίδα STOP αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση 0.300 m/s^2 παράλληλα προς τον δρόμο. Το αυτοκίνητο περνάει πάνω από ένα ύψωμα του δρόμου. Η κορυφή του υψώματος έχει κυκλικό σχήμα ακτίνας 500 m. Όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται στην κορυφή του υψώματος, το διάνυσμα της ταχύτητάς του έχει οριζόντια διεύθυνση και μέτρο 6.00 m/s. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του διανύσματος της συνολικής επιτάχυνσης του αυτοκινήτου κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή;



Εικόνα Μ4.17 (Παράδειγμα Μ4.7) (α) Ένα αυτοκίνητο περνάει πάνω από ένα ύψωμα στον δρόμο, το οποίο έχει κυκλικό σχήμα. (β) Το διάνυσμα της συνολικής επιτάχυνσης $\vec{a}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα της εφαπτομενικής και της ακτινικής επιτάχυνσης $\vec{a}_t$ και $\vec{a}_r$ αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την Εικόνα Μ4.17α και τυχόν αντίστοιχες εμπειρίες οδήγησης που έχουμε.

Κατηγοριοποίηση Επειδή το επιταχυνόμενο αυτοκίνητο κινείται σε καμπύλη τροχιά, θα κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα ενός σωματιδίου με εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση. Αντιλαμβανόμαστε ότι πρόκειται για ένα σχετικά απλό πρόβλημα αντικατάστασης.

Η ακτινική επιτάχυνση προκύπτει αντικαθιστώντας στην Εξίσωση Μ4.18 $v = 6.00$ m/s και $r = 500$ m. Το διάνυσμα της ακτινικής επιτάχυνσης έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω, ενώ το διάνυσμα της εφαπτομενικής επιτάχυνσης έχει μέτρο 0.300 m/s^2 και οριζόντια διεύθυνση.

Υπολογίστε την ακτινική επιτάχυνση:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00\ \text{m/s})^2}{500\ \text{m}} = -0.072\,0\ \text{m/s}^2$$

Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}$:

$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072\,0\ \text{m/s}^2)^2 + (0.300\ \text{m/s}^2)^2}$$

$$= \boxed{0.309\ \text{m/s}^2}$$

Βρείτε τη γωνία ϕ (δείτε την Εικ. Μ4.17β) που σχηματίζει η επιτάχυνση $\vec{a}$ με την οριζόντιο:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072\,0\ \text{m/s}^2}{0.300\ \text{m/s}^2}\right) = \boxed{-13.5°}$$

Μ4.6 Σχετική ταχύτητα και σχετική επιτάχυνση

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται οι παρατηρήσεις που κάνουν διαφορετικοί παρατηρητές οι οποίοι βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Ένα σύστημα αναφοράς μπορεί να περιγραφεί από ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο παρατηρητής είναι ακίνητος σε σχέση με την αρχή των συντεταγμένων.

Ας μοντελοποιήσουμε μια περίπτωση όπου διαφορετικοί παρατηρητές κάνουν διαφορετικές παρατηρήσεις. Θεωρήστε τους δύο παρατηρητές Α και Β οι οποίοι βρίσκονται στην αριθμημένη ευθεία της Εικόνας Μ4.18α. Ο παρατηρητής Α βρίσκεται στην αρχή ενός άξονα x_A, ενώ ο παρατηρητής Β βρίσκεται στη θέση $x_A = -5$. Συμβολίζουμε τη μεταβλητή της θέσης με x_A επειδή ο παρατηρητής Α βρίσκεται στην αρχή του άξονα. Και οι δύο παρατηρητές μετράνε τη θέση του σημείου P, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_A = +5$. Ας υποθέσουμε πως ο παρατηρητής Β αποφασίζει ότι βρίσκεται στην αρχή ενός άξονα x_B όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.18β. Παρατηρήστε ότι οι δύο παρατηρητές διαφωνούν ως προς την τιμή της θέσης του σημείου P. Ο παρατηρητής Α ισχυρίζεται ότι το σημείο P βρίσκεται σε μια θέση με τιμή $+5$, ενώ ο παρατηρητής Β ισχυρίζεται ότι βρίσκεται σε μια θέση με τιμή $+10$. Αν και οι μετρήσεις των παρατηρητών διαφέρουν, και οι δύο έχουν δίκιο. Οι μετρήσεις τους διαφέρουν επειδή έχουν γίνει σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

Φανταστείτε τώρα ότι ο παρατηρητής Β στην Εικόνα Μ4.18β κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x_B. Οι νέες μετρήσεις διαφέρουν ακόμα περισσότερο. Ο παρατηρητής Α ισχυρίζεται ότι το σημείο P παραμένει σταθερό σε μια θέση με τιμή $+5$, ενώ ο Β θεωρεί ότι η θέση τού P μεταβάλλεται συνεχώς με το πέρασμα του χρόνου, με αποτέλεσμα κάποια στιγμή να τον προσπεράσει και να βρεθεί ακόμα και πίσω του! Πάλι, και οι δύο έχουν δίκιο, καθώς η διαφορά στις μετρήσεις τους οφείλεται στα διαφορετικά συστήματα αναφοράς τους.

Ας εξετάσουμε περισσότερο αυτό το φαινόμενο θεωρώντας δύο παρατηρητές οι οποίοι κοιτάνε έναν άνδρα που περπατάει πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο ενός αεροδρομίου (Εικόνα Μ4.19.) Η γυναίκα που στέκεται στον κυλιόμενο διάδρομο βλέπει τον άνδρα να βαδίζει με κανονικό ρυθμό βαδίσματος. Η γυναίκα που παρατηρεί από το ακίνητο δάπεδο βλέπει τον άνδρα να βαδίζει γρηγορότερα, επειδή το μέτρο της ταχύτητας του διαδρόμου προστίθεται στο μέτρο της ταχύτητας βαδίσματός του. Οι δύο παρατηρητές κοιτάνε τον ίδιο άνδρα και καταλήγουν σε διαφορετικές τιμές για το μέτρο της ταχύτητάς του. Και οι δύο παρατηρήσεις είναι σωστές· η διαφορά στις μετρήσεις τους οφείλεται στη σχετική ταχύτητα των συστημάτων αναφοράς τους.

Ας εξετάσουμε μια γενικότερη περίπτωση, θεωρώντας το σωματίδιο που βρίσκεται στο σημείο P στην Εικόνα Μ4.20. Φανταστείτε ότι η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από δύο παρατηρητές, τον παρατηρητή Α στο σύστημα αναφοράς S_A το οποίο είναι σταθερό σε σχέση με τη Γη και έναν δεύτερο παρατηρητή Β στο σύστημα αναφοράς S_B το οποίο κινείται προς τα δεξιά σε σχέση με το S_A (και άρα σε σχέση με τη Γη) με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Σε αυτή την περιγραφή της σχετικής ταχύτητας, θα χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό με διπλούς δείκτες· ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει αυτό που παρατηρείται και ο δεύτερος τον παρατηρητή. Επομένως, το $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ συμβολίζει την ταχύτητα του παρατηρητή Β (και του αντίστοιχου συστήματος αναφοράς S_B) όπως τη μετράει ο παρατηρητής Α. Σύμφωνα με αυτόν τον συμβολισμό, ο παρατηρητής Β μετράει ότι ο Α κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{AB} = -\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Για τον σκοπό αυτής της ανάλυσης, θα τοποθετήσουμε κάθε παρατηρητή στην αρχή του αντίστοιχου συστήματος συντεταγμένων.

Ορίζουμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη στιγμή κατά την οποία τα δύο συστήματα αναφοράς έχουν την ίδια αρχή. Άρα, τη χρονική στιγμή t, οι αρχές των συστημάτων αναφοράς θα βρίσκονται σε απόσταση $v_{BA}t$. Αντιστοιχίζουμε στη θέση P του σωματιδίου το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ σε σχέση με τον παρατηρητή Α και το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ σε σχέση με τον παρατηρητή Β, στην ίδια χρονική στιγμή t. Από την Εικόνα Μ4.20, διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ και $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}t \qquad \text{(M4.19)}$$

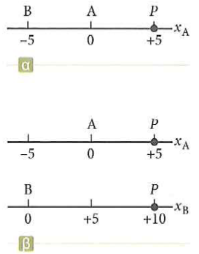
Παραγωγίζουμε την Εξίσωση Μ4.19 ως προς τον χρόνο, παρατηρώντας ότι η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ είναι σταθερή, και παίρνουμε

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PB}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \qquad \text{(M4.20)}$$

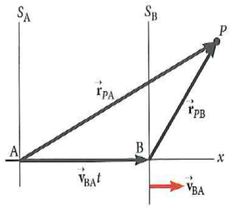
◀ **Ο μετασχηματισμός ταχύτητας του Γαλιλαίου**

όπου $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στο P όπως τη μετράει ο παρατηρητής Α και $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ είναι η ταχύτητά του όπως τη μετράει ο Β. (Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vec{\mathbf{u}}$ για την ταχύτητα του σωματιδίου αντί για το $\vec{\mathbf{v}}$, με το οποίο έχουμε ήδη συμβολίσει τη σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς.) Οι Εξισώσεις Μ4.19 και



Εικόνα Μ4.18 Διαφορετικοί παρατηρητές κάνουν διαφορετικές μετρήσεις. (α) Ο παρατηρητής Α βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, και ο παρατηρητής Β βρίσκεται στη θέση -5. Και οι δύο μετράνε τη θέση ενός σωματιδίου στο P. (β) Αν και οι δύο παρατηρητές θεωρούν ότι βρίσκονται στην αρχή του δικού τους συστήματος συντεταγμένων, τότε θα διαφωνούν ως προς την τιμή της θέσης του σωματιδίου στο P.

Εικόνα Μ4.19 Δύο παρατηρητές μετράνε το μέτρο της ταχύτητας ενός άνδρα που περπατάει σε κυλιόμενο διάδρομο.



Εικόνα Μ4.20 Το σωματίδιο που βρίσκεται στο P περιγράφεται από δύο παρατηρητές, έναν στο ακίνητο σύστημα αναφοράς S_A και έναν άλλο στο σύστημα S_B, το οποίο κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$. Το διάνυσμα $\vec{r}_{PA}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε σχέση με το σύστημα S_A, και το $\vec{r}_{PB}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σε σχέση με το σύστημα S_B.

Μ4.20 είναι γνωστές ως **εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου.** Συσχετίζουν τη θέση και την ταχύτητα ενός σωματιδίου όπως τις μετράνε παρατηρητές που εμφανίζουν σχετική κίνηση μεταξύ τους. Παρατηρήστε τη σειρά των δεικτών στην Εξίσωση Μ4.20. Όταν προσθέτουμε σχετικές ταχύτητες, οι εσωτερικοί δείκτες (Β) παραμένουν ίδιοι ενώ οι εξωτερικοί (P, Α) αντιστοιχούν στους δείκτες της ταχύτητας στο αριστερό μέλος της εξίσωσης.

Παρά το γεγονός ότι οι παρατηρητές στα δύο συστήματα αναφοράς μετράνε διαφορετικές ταχύτητες για το σωματίδιο, όταν η σχετική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ είναι σταθερή, μετράνε την *ίδια επιτάχυνση* για το σωματίδιο. Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε παραγωγίζοντας την Εξίσωση Μ4.20 ως προς τον χρόνο:

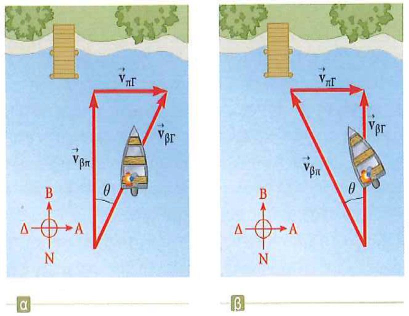
$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{BA}}{dt}$$

Επειδή η σχετική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ είναι σταθερή, προκύπτει ότι $d\vec{\mathbf{v}}_{BA}/dt = 0$. Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = \vec{\mathbf{a}}_{PB}$ επειδή ισχύει $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = d\,\vec{\mathbf{u}}_{PA}/dt$ και $\vec{\mathbf{a}}_{PB} = d\,\vec{\mathbf{u}}_{PB}/dt$. Δηλαδή, η επιτάχυνση του σωματιδίου που μετράει ένας παρατηρητής σε ένα σύστημα αναφοράς είναι ίδια με εκείνη που μετράει κάποιος άλλος παρατηρητής ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το πρώτο σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα Μ4.8 Βάρκα που διασχίζει ένα ποτάμι

Βάρκα που διασχίζει ένα πλατύ ποτάμι κινείται με ταχύτητα μέτρου 10.0 km/h σε σχέση με το νερό. Το νερό του ποταμού κυλάει ανατολικά με ταχύτητα σταθερού μέτρου 5.00 km/h σε σχέση με τη Γη.

(A) Αν η βάρκα κατευθύνεται βόρεια, προσδιορίστε την ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με έναν παρατηρητή ο οποίος στέκεται σε μία από τις δύο όχθες.



Εικόνα Μ4.21 (Παράδειγμα Μ4.8) (α) Η βάρκα επιχειρεί να περάσει κάθετα το ποτάμι, αλλά παρασύρεται κατάντη του ποταμού. (β) Για να διασχίσει κάθετα το ποτάμι, η βάρκα πρέπει να κατευθυνθεί ανάντη του ποταμού.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι επιχειρείτε να διασχίσετε με μια βάρκα κάθετα ένα ποτάμι με το ρεύμα να σας σπρώχνει κατάντη[4] του ποταμού. Δεν θα μπορέσετε να διασχίσετε τελείως κάθετα το ποτάμι, αλλά θα παρασυρθείτε κατάντη του ποταμού όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.21α.

Κατηγοριοποίηση Ο συνδυασμός της ταχύτητας της βάρκας σε σχέση με το ποτάμι και της ταχύτητας του ποταμού σε σχέση με τη Γη, μας επιτρέπει να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σχετικών ταχυτήτων.

Ανάλυση Γνωρίζουμε το $\vec{\mathbf{v}}_{\beta\pi}$, την ταχύτητα της *βάρκας* ως προς το *ποτάμι*, και το $\vec{\mathbf{v}}_{\pi\Gamma}$, την ταχύτητα του *ποταμού* ως προς τη *Γη*. Πρέπει να βρούμε την ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{\beta\Gamma}$της *βάρκας* ως προς τη *Γη*. Η σχέση μεταξύ των τριών ταχυτήτων είναι $\vec{\mathbf{v}}_{\beta\Gamma} = \vec{\mathbf{v}}_{\beta\pi} + \vec{\mathbf{v}}_{\pi\Gamma}$. Θα μεταχειριστούμε τους όρους της εξίσωσης ως διανυσματικά μεγέθη· τα διανύσματα φαίνο-

[4]Σ.τ.Ε.: *Κατάντη* σημαίνει προς τη φορά ροής του ποταμού ενώ *ανάντη*, αντίθετα προς τη φορά ροής του ποταμού.

Μ4.8 συν.

νται στην Εικόνα Μ4.21α. Η ταχύτητα $\vec{v}_{\beta\pi}$ έχει βόρεια κατεύθυνση· η ταχύτητα $\vec{v}_{\pi\Gamma}$ έχει ανατολική κατεύθυνση· και το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{v}_{\beta\Gamma}$ σχηματίζει γωνία θ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.21α.

Χρησιμοποιήστε το πυθαγόρειο θεώρημα για να βρείτε το μέτρο $v_{\beta\Gamma}$ της ταχύτητας της βάρκας ως προς τη Γη:

$$v_{\beta\Gamma} = \sqrt{v_{\beta\pi}^2 + v_{\pi\Gamma}^2} = \sqrt{(10.0\ \mathrm{km/h})^2 + (5.00\ \mathrm{km/h})^2}$$

$$= \boxed{11.2\ \mathrm{km/h}}$$

Βρείτε την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}_{\beta\Gamma}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\pi\Gamma}}{v_{\beta\pi}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = \boxed{26.6°}$$

Ολοκλήρωση Η βάρκα κινείται με 11.2 km/h και κατεύθυνση 26.6° ανατολικά του βορρά ως προς τη Γη. Παρατηρήστε ότι η βάρκα σας κινείται γρηγορότερα σε σχέση με τη Γη (11.2 km/h) από ό,τι ως προς το ποτάμι (10.0 km/h). Η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού προστίθεται στην ταχύτητα της βάρκας σας κάνοντάς τη να πλεύσει ταχύτερα. Προσέξτε στην Εικόνα Μ4.21α ότι η συνισταμένη ταχύτητά σας σχηματίζει γωνία με την κάθετο στο ποτάμι, οπότε τελικά η βάρκα θα παρασυρθεί κατάντη του ποταμού, όπως προβλέψαμε.

(Β) Αν η ταχύτητα της βάρκας ως προς το ποτάμι έχει πάλι μέτρο 10.0 km/h, ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνσή της ώστε η βάρκα να κινηθεί βόρεια όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.21β;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση/Κατηγοριοποίηση Το ερώτημα αυτό είναι επέκταση του (Α), οπότε έχουμε ήδη μοντελοποιήσει και κατηγοριοποιήσει το πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, πρέπει να κατευθύνουμε τη βάρκα ανάντη του ποταμού ώστε να το διασχίσει κάθετα.

Ανάλυση Η ανάλυση περιλαμβάνει το νέο τρίγωνο της Εικόνας Μ4.21β. Όπως και στο ερώτημα (Α), γνωρίζουμε την ταχύτητα $\vec{v}_{\pi\Gamma}$ και το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_{\beta\pi}$, και θέλουμε η ταχύτητα ως προς τη Γη $\vec{v}_{\beta\Gamma}$ να έχει κατεύθυνση κάθετη στο ποτάμι. Παρατηρήστε τη διαφορά μεταξύ του τριγώνου της Εικόνας Μ4.21α και του τριγώνου της Εικόνας Μ4.21β: η υποτείνουσα στην Εικόνα Μ4.21β δεν είναι πλέον η $\vec{v}_{\beta\Gamma}$.

Χρησιμοποιήστε το πυθαγόρειο θεώρημα για να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας ως προς τη Γη $v_{\beta\Gamma}$:

$$v_{\beta\Gamma} = \sqrt{v_{\beta\pi}^2 - v_{\pi\Gamma}^2} = \sqrt{(10.0\ \mathrm{km/h})^2 - (5.00\ \mathrm{km/h})^2} = 8.66\ \mathrm{km/h}$$

Βρείτε την κατεύθυνση της βάρκας:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\pi\Gamma}}{v_{\beta\Gamma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = \boxed{30.0°}$$

Ολοκλήρωση Για να μπορέσει η βάρκα να διασχίσει κάθετα το ποτάμι θα πρέπει να κατευθυνθεί αντίθετα στη ροή του ποταμού. Πιο συγκεκριμένα, η βάρκα πρέπει να έχει πορεία 30.0° δυτικά του βορρά. Στην περίπτωση που το ρεύμα είναι πιο γρήγορο, η βάρκα θα πρέπει να κινηθεί κόντρα στο ρεύμα του ποταμού σχηματίζοντας μεγαλύτερη γωνία ως προς τον βορρά.

ΚΙ ΑΝ...; Φανταστείτε ότι οι δύο βάρκες στα ερωτήματα (Α) και (Β) κάνουν αγώνα ποια θα διασχίσει πρώτη κάθετα το ποτάμι. Ποια βάρκα θα φτάσει πρώτη στην απέναντι όχθη;

Απάντηση Στο ερώτημα (Α), η ταχύτητα με μέτρο 10 km/h είναι τελείως κάθετη στο ποτάμι. Στο ερώτημα (Β), η ταχύτητα η οποία είναι κάθετη στο ποτάμι έχει μέτρο 8.66 km/h. Άρα, η βάρκα στο ερώτημα (Α) έχει μεγαλύτερη συνιστώσα ταχύτητας κάθετα στο ποτάμι και θα φτάσει πρώτη.