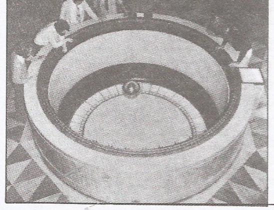
ΤΡΙΤΗ 16/12/2020

ΔΙΑΛΕΞΗ 11

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



Ταλαντώσεις

Ένας από τους κύριους σκοπούς τών προηγούμενων κεφαλαίων ήταν να πεισθείτε ότι μπορείτε να προβλέψετε την κίνηση ενός σώματος εάν γνωρίζετε τις αρχικές συνθήκες που περιγράφουν την κινητική του κατάσταση και τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν επάνω του. Εάν μια δύναμη μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου, τότε θα μεταβληθεί και η επιτάχυνσή του και, επομένως, η ταχύτητά του. Όταν η δύναμη που δρά πάνω σε ένα σώμα είναι ανάλογη προς την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας, έχουμε μια πολύ ειδική κίνηση. Εάν η δύναμη κατευθύνεται πάντοτε προς τη θέση ισορροπίας τού σώματος, θα έχουμε μια επαναλαμβανομένη κίνηση και το σώμα θα περνά συνεχώς πίσω - μπρος από τη θέση ισορροπίας (θα παλινδρομεί) σε τακτό χρονικό διάστημα, δηλαδή *περιοδικά*. Λέμε τότε ότι η κίνηση είναι *ταλάντωση*.

Γνωρίζετε αρκετά παραδείγματα περιοδικών κινήσεων, όπως λ.χ τις ταλαντώσεις μιας μάζας που είναι αναρτημένη από ένα ελατήριο, την κίνηση ενός απλού εκκρεμούς, τις ταλαντώσεις τών χορδών διαφόρων μουσικών οργάνων κ.ά. Ο αριθμός τών συστημάτων που εκτελούν ταλαντώσεις είναι πολύ μεγάλος. Λογουχάρη, τα μόρια τών στερεών εκτελούν ταλάντωση γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως λ.χ., το φως, τα κύματα τού ραντάρ και τα ραδιοκύματα, περιγράφονται από ταλαντούμενα διανύσματα που χαρακτηρίζουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο τους. Στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, η τάση, το ρεύμα και το φορτίο ταλαντώνονται περιοδικά συναρτήσει τού χρόνου.

Το μεγαλύτερο μέρος αυτού τού κεφαλαίου είναι αφιερωμένο στην *απλή αρμονική κίνηση*. Κατά την κίνηση αυτή, ένα αντικείμενο ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο θέσεις στον χώρο για απεριόριστο χρόνο, χωρίς απώλειες μηχανικής ενέργειας. Στα υπαρκτά όμως μηχανικά συστήματα υπάρχουν πάντοτε τριβές, οι οποίες μειώνουν τη μηχανική ενέργεια τού συστήματος μεταφέροντάς την στο περιβάλλον. Την κίνηση αυτή τήν ονομάζουμε *φθίνουσα ταλάντωση*. Εάν τώρα εφαρμόσουμε μια εξωτερική δύναμη έτσι ώστε να προσδώσουμε στο σύστημα ενέργεια, τότε τήν ονομάζουμε *εξαναγκασμένη ταλάντωση*.

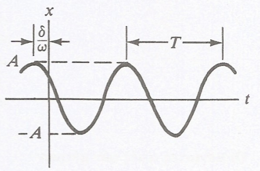
13.1 ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Λέμε ότι ένα σώμα εκτελεί **απλή αρμονική κίνηση** όταν η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου σύμφωνα με τη σχέση

Μετατόπιση ως προς τον χρόνο για απλή αρμονική κίνηση

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{13.1}$$

όπου τα A, ω και δ είναι σταθερές τής κίνησης. Για να δούμε τη φυσική σημασία τών σταθερών αυτών μπορούμε να κάνουμε μια γραφική παράσταση τού x συναρτήσει τού t, όπως στο Σχήμα 13.1. Η σταθερά A ονομάζεται **πλάτος** τής ταλάντωσης, που είναι ίσο με τη *μέγιστη απομάκρυνση* από τη θέση ισορροπίας τού σώματος προς τη θετική ή αρνητική κατεύθυνση x. Η σταθερά ω ονομάζεται *κυκλική συχνότητα* (ορίζεται στην Εξίσωση 13.4). Η σταθερά δ ονομάζεται **αρχική φάση** (ή γωνία φάσης). Το πλάτος A και η φάση δ ορίζονται μονοσήμαντα από την αρχική μετατόπιση και την ταχύτητα τού σώματος και μάς δίνουν την τιμή τής μετατόπισης κατά τη στιγμή $t = 0$. Η ποσότητα $(\omega t + \delta)$ λέγεται φάση τής κίνησης και μάς χρησιμεύει στη σύγκριση τών κινήσεων δύο συστημάτων σωμάτων. Να σημειωθεί ότι η συνάρτηση x είναι περιοδική και επαναλαμβάνεται κάθε φορά που το ωt αυξάνεται κατά 2π ακτίνια.



Σχήμα 13.1 Γραφική παράσταση τής μετατόπισης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση ως συνάρτηση τού χρόνου. Το πλάτος τής κίνησης είναι A και η περίοδος T.

Η **περίοδος**, T, είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα για να συμπληρώσει έναν πλήρη κύκλο τής κίνησής του. Δηλαδή, η τιμή τού x κατά τη στιγμή t είναι ίση με την τιμή τού x κατά τη στιγμή $t + nT$ (όπου $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$). Θα αποδείξουμε ότι $T = 2\pi/\omega$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η φάση αυξάνεται κατά 2π ακτίνια στο χρονικό διάστημα T:

$$\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t + T) + \delta$$

Επομένως, $\omega T = 2\pi$ ή

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad (13.2)$$

Περίοδος

Το αντίστροφο τής περιόδου λέγεται **συχνότητα** τής κίνησης, f. Η συχνότητα αντιπροσωπεύει *τον αριθμό τών ταλαντώσεων που κάνει το σώμα ανά χρονική μονάδα:*

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \qquad (13.3)$$

Συχνότητα

Μονάδες τής συχνότητας είναι οι κύκλοι ανά δευτερόλεπτο, cycles/s, δηλαδή το hertz (Hz).

Ξαναγράφουμε την Εξίσωση 13.3 ως

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \qquad (13.4)$$

Κυκλική ή Γωνιακή συχνότητα

Η σταθερά ω ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** και έχει μονάδες rad/s. Θα σχολιάσουμε τη γεωμετρική σημασία τού ω στο Υποκεφάλαιο 13.4.

Για να βρούμε την ταχύτητα ενός σώματος το οποίο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση παραγωγίζουμε την Εξίσωση 13.1 ως προς τον χρόνο:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)} \qquad (13.5)$$

Ταχύτητα τής απλής αρμονικής κίνησης

Γνωρίζουμε όμως ότι η επιτάχυνση ενός σώματος είναι dv/dt:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)} \qquad (13.6)$$

Επιτάχυνση τής απλής αρμονικής κίνησης

Αλλά $x = A \cos(\omega t + \delta)$· έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 13.6 ως

$$\boxed{a = -\omega^2 x} \qquad (13.7)$$

Από την Εξίσωση 13.5 και από το γεγονός ότι οι τιμές τών συναρτήσεων τού ημιτόνου και τού συνημιτόνου κυμαίνονται γύρω στο ± 1, βλέπουμε ότι οι ακραίες τιμές τής v είναι $\pm\ \omega A$. Επίσης, η Εξίσωση 13.6 μάς λέει ότι οι ακραίες τιμές τής επιτάχυνσης είναι $\pm\ \omega^2 A$. Επομένως, οι μέγιστη τιμή τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης είναι:

Οι μέγιστες τιμές τών μέτρων τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης στην απλή αρμονική κίνηση

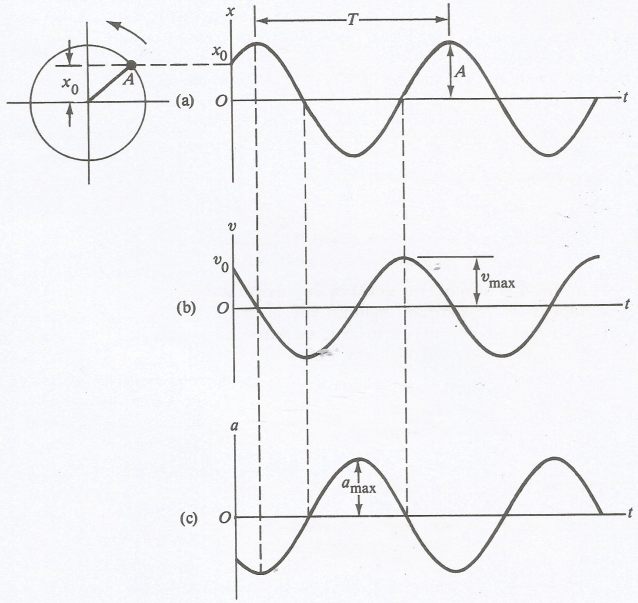
$$v_{\max} = \omega A \tag{13.8}$$

$$a_{\max} = \omega^2 A \tag{13.9}$$

Στο Σχήμα 13.2a απεικονίζεται η μεταβολή τής μετατόπισης ως προς τον χρόνο, για μια αυθαίρετη τιμή τής αρχικής φάσης.

Οι καμπύλες ταχύτητας και επιτάχυνσης παριστάνονται στα Σχήματα 13.2b και 13.2c. Βλέπουμε από τις καμπύλες αυτές ότι η φάση τής ταχύτητας διαφέρει από τη φάση τής μετατόπισης κατά 90° ή $\pi/2$ ακτίνια. Δηλαδή, όταν το x είναι μέγιστο ή ελάχιστο, τότε η ταχύτητα είναι μηδενική. Παρομοίως, όταν το x είναι μηδέν, η ταχύτητα είναι μέγιστη ή ελάχιστη (δηλαδή έχει μέγιστο μέτρο αλλά αρνητικό πρόσημο). Τέλος, σημειώστε ότι η φάση τής επιτάχυνσης διαφέρει από τη φάση τής μετατόπισης κατά 180° ή π ακτίνια. Δηλαδή, όταν το x είναι μέγιστο ή ελάχιστο, η επιτάχυνση είναι ελάχιστη ή μέγιστη, αντίστοιχα.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η λύση $x = A\cos(\omega t + \delta)$ είναι γενική λύση τής εξίσωσης κίνησης, όπου η αρχική φάση δ και το πλάτος A έχουν τιμές τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες τού προβλήματος.



Σχήμα 13.2 Γραφική απεικόνιση τής απλής αρμονικής κίνησης: (a) μετατόπισης ως προς τον χρόνο, (b) ταχύτητας ως προς τον χρόνο και (c) επιτάχυνσης ως προς τον χρόνο. Να σημειωθεί ότι η ταχύτητα παρουσιάζει διαφορά φάσης 90° ως προς τη μετατόπιση και η επιτάχυνση παρουσιάζει διαφορά φάσης 180° ως προς τη μετατόπιση.

Είναι προφανές ότι μπορούμε να γράψουμε για τη λύση $x = A \sin(\omega t + \delta_1)$, όπου η δ_1 διαφέρει από τη δ κατά $\pi/2$. Η αρχική φάση δ είναι σημαντική όταν συγκρίνουμε ταλαντώσεις δύο ή περισσότερων σωμάτων. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την αρχική θέση x_0 και την αρχική ταχύτητα v_0 ενός ταλαντωτή, δηλαδή κατά τη στιγμή $t = 0$, $x = x_0$ και $v = v_0$. Υπό αυτές τις συνθήκες οι εξισώσεις $x = A \cos(\omega t + \delta)$ και $v = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$ δίνουν

$$x_0 = A \cos \delta \qquad \text{και} \qquad v_0 = -\omega A \sin \delta$$

Διαιρούμε τις δύο εξισώσεις, απαλείφουμε το A και παίρνουμε

$$\frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan \delta$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γωνία φάσης ϕ και το πλάτος A από τις αρχικές συνθήκες

$$\tan \delta = -\frac{v_0}{\omega x_0} \tag{13.10a}$$

Επίσης εάν πάρουμε το άθροισμα $x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2 \cos^2 \delta + A^2 \sin^2 \delta$

και λύσουμε ως προς A, βρίσκουμε

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \tag{13.10b}$$

Έτσι βλέπουμε ότι εάν γνωρίζουμε τα x_0, v_0 και ω, βρίσκουμε τα δ και A. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα λύσουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Τελειώνουμε το υποκεφάλαιο αυτό με την υπογράμμιση τών παρακάτω σημαντικών ιδιοτήτων τής απλής αρμονικής κίνησης, δηλαδή τού απλού αρμονικού ταλαντωτή:

Ιδιότητες τής απλής αρμονικής κίνησης

1. **Η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση μεταβάλλονται ημιτονοειδώς (ή συνημιτονοειδώς) ως προς τον χρόνο, αλλά δεν έχουν την ίδια φάση, όπως άλλωστε φαίνεται στο Σχήμα 13.2.**
2. **Η επιτάχυνση τού ταλαντωτή είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση αλλά έχει αντίθετη κατεύθυνση.**
3. **Η συχνότητα και η περίοδος τής κίνησης είναι ανεξάρτητες από το πλάτος τής ταλάντωσης.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.1 Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής, δηλαδή ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση, ταλαντώνεται κατά τον άξονα x. Η μετατόπισή του μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου σύμφωνα με την εξίσωση

$$x = (4.0 \text{ m}) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

όπου ο χρόνος t είναι σε s και οι γωνίες σε ακτίνια: (a) προσδιορίστε το πλάτος, τη συχνότητα και την περίοδο τής κίνησης.

Λύση Εάν συγκρίνουμε την Εξίσωση κίνησης τού προβλήματος με την Εξίσωση τής απλής αρμονικής κίνησης $x = A \cos(\omega t + \delta)$, βρίσκουμε ότι $A = 4.0$ m και $\omega = \pi$ rad/s. Επομένως $f = \omega/2\pi = \pi/2\pi = 0.50 \text{ s}^{-1}$ και $T = 1/f = 2.0$ s.

(b) Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση τού ταλαντωτή για οποιονδήποτε χρόνο t:

$$v = \frac{dx}{dt} = -4.0 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$= -(4\pi \text{ m/s}) \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t)$$
$$= -(4\pi^2 \text{ m/s}^2) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

(c) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα τού (b) και προσδιορίστε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση τού ταλαντωτή κατά τη στιγμή $t = 1$ s.

Εφόσον οι γωνίες είναι υπολογισμένες σε ακτίνια, βρίσκουμε για τη στιγμή $t = 1$ s.

$$x = (4.0 \text{ m}) \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (4.0 \text{ m}) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= (4.0 \text{ m})(-0.707) = \boxed{-2.83 \text{ m}}$$

$$v = -(4\pi \text{ m/s}) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -(4\pi \text{ m/s})(-0.707) = 8.89 \text{ m/s}$$

$$a = -(4\pi^2 \text{ m/s}^2) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -(4\pi^2 \text{ m/s}^2)(-0.707)$$
$$= \boxed{27.9 \text{ m/s}^2}$$

(d) Προσδιορίστε τη μέγιστη ταχύτητα και επιτάχυνση τού ταλαντωτή.

Από τις σχέσεις για το v και a που βρήκαμε στο (b) και αφού γνωρίζουμε ότι το μέγιστο τού ημιτόνου και τού συνημιτόνου είναι 1, βρίσκουμε ότι η μέγιστη v είναι $\pm 4\pi$ m/s και η μέγιστη a είναι $\pm 4\pi^2$ m/s². Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $v_{max} = \omega A$ και $a_{max} = \omega^2 A$, όπου $A = 4.0$ m και $\omega = \pi$ rad/s.

(e) Βρείτε τη μετατόπιση τού σώματος ανάμεσα στην στιγμή $t = 0$ και $t = 1$ s.

Η συντεταγμένη x την στιγμή $t = 0$ είναι

$$x_0 = (4.0 \text{ m}) \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = (4.0 \text{ m})(0.707) = 2.83 \text{ m}$$

Στο (c) είχαμε ήδη βρει ότι, τη στιγμή $t = 1$ s, $x = -2.8$ m. Επομένως η μετατόπιση ανάμεσα στη στιγμή $t = 0$ και $t = 1$ s είναι

$$\Delta x = x - x_0 = -2.83 \text{ m} - 2.83 \text{ m} = \boxed{-5.66 \text{ m}}$$

Η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο μέσα στο πρώτο δευτερόλεπτο. Έτσι η μετατόπιση Δx *δεν* είναι η ίδια με την απόσταση που κάλυψε ο ταλαντωτής κατά το πρώτο δευτερόλεπτο.

(f) Ποια είναι η φάση τής κίνησης τη στιγμή $t = 2$ s; Η φάση ορίζεται ως $\omega t + \delta$. Στη δική μας περίπτωση $\omega = \pi$ και $\delta = \pi/4$. Επομένως, τη στιγμή $t = 2$ s βρίσκουμε

$$\text{Φάση} = (\omega t + \delta)_{t=2} = \pi(2) + \pi/4 = \boxed{9\pi/4 \text{ rad}}$$

13.2 ΜΑΖΑ ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΗ ΑΠΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Στο Κεφάλαιο 7 είχαμε εισαγάγει το φυσικό σύστημα που αποτελείται από μια μάζα συνδεδεμένη με ένα ελατήριο και στο οποίο η μάζα μπορεί να κινείται πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα 13.3). Εάν κινήσουμε το σύστημα από το σημείο ισορροπίας $x = 0$, όπου το ελατήριο δεν έχει εκταθεί, γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι το σύστημα θα ταλαντωθεί. Εάν η επιφάνεια είναι λεία, τότε η μάζα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Στο Σχήμα 13.4 βλέπουμε μια απλή πειραματική διάταξη που αποτελείται από μια μάζα αναρτημένη από ένα ελατήριο. Καθώς η μάζα ταλαντώνεται, η γραφίδα που έχει επάνω της χαράζει εμφανώς την ημιτονοειδή καμπύλη τής απλής αρμονικής κίνησης κυλιόμενη στο χαρτί. Για να κατανοήσουμε ποιοτικά τί συμβαίνει ας εκτείνουμε το ελατήριο κατά απόσταση x από τη θέση ισορροπίας που έχει χωρίς φορτίο. Το ελατήριο ασκεί δύναμη πάνω στη μάζα m. Τη δύναμη αυτή μάς τή δίνει ο **νόμος τού Hooke**.

$$F = -kx \tag{13.11}$$

όπου k είναι η σταθερά τού ελατηρίου. Τη δύναμη αυτή τήν ονομάζουμε **γραμμική δύναμη επαναφοράς,** επειδή είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση και κατευθύνεται πάντοτε προς το σημείο ισορροπίας, *αντίθετα* προς τη μετατόπιση. Δηλαδή, όταν η μάζα τού Σχήματος 13.3 είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά, η μετατόπιση x είναι θετική αλλά η δύναμη επαναφοράς είναι αρνητική. Όταν η μάζα είναι μετατοπισμένη στα αριστερά τού σημείου $x = 0$, δηλαδή έχει αρνητική μετατόπιση, τότε η δύναμη F είναι θετική. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στην κίνηση τής μάζας m στη διεύθυνση x και βρίσκουμε

$$F = -kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x \tag{13.12}$$

δηλαδή, *η επιτάχυνση είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση και έχει αντίθετη κατεύθυνση προς αυτήν*. Έστω ότι η μάζα μετατοπίζεται κατά απόσταση $x = A$ κάποια στιγμή και, ενώ αρχικά ηρεμεί, αφήνεται ελεύθερη. Η *αρχική* της επιτάχυνση θα είναι $-kA/m$ (δηλαδή η επιτάχυνση έχει τη μέγιστη αρνητική τιμή της). Όταν η μάζα περάσει από το σημείο ισορροπίας $x = 0$, τότε η επιτάχυνση είναι μηδενική και τη στιγμή αυτή η ταχύτητά της έχει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της. Θα εξακολουθήσει να κινείται προς τα αριστερά μέχρις ότου φτάσει στο σημείο $x = -A$ και την στιγμή εκείνη η επιτάχυνσή της είναι $a = kA/m$ (έχει τη μέγιστη τιμή της) και η ταχύτητά της είναι πάλι μηδενική. Έτσι βλέπουμε ότι η μάζα ταλαντώνεται ανάμεσα στα ακραία σημεία ή στις ακραίες θέσεις επαναφοράς, $x = \pm A$. Σε έναν πλήρη κύκλο ταλάντωσης η μάζα διανύει απόσταση $4A$.

Θα περιγράψουμε τώρα την κίνηση ποσοτικά. Θυμηθείτε ότι $a = dv/dt = d^2x/dt^2$. Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 13.12 ως

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{13.13}$$

Ας αντικαταστήσουμε όμως το k/m με το ω^2

$$\omega^2 = k/m \tag{13.14}$$

Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 13.13 στη μορφή

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{13.15}$$

Τώρα πρέπει να βρούμε τη λύση τής Εξίσωσης 13.15. Πρέπει δηλαδή να βρούμε τη συνάρτηση $x(t)$ που ικανοποιεί την Εξίσωση 13.15, η οποία είναι γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Όταν βρούμε την $x(t)$, θα τή θέσουμε στην 13.15 και τότε πρέπει να αναχθεί η διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική ταυτότητα εάν η $x(t)$ είναι η σωστή λύση. Επειδή οι εξισώσεις 13.15 και 13.7 είναι ισοδύναμες, ας δοκιμάσουμε ως λύση την συνάρτηση:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Ας παραγωγίσουμε την

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

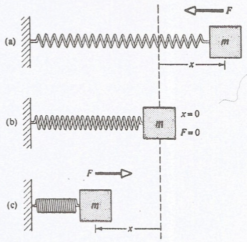
Τότε

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \delta) = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$$

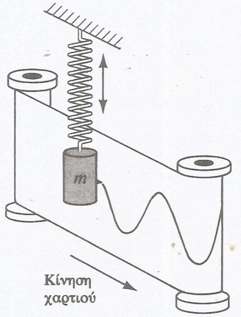
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$

Θέτουμε την τελευταία σχέση στην Εξίσωση 13.15 και βρίσκουμε $0 = 0$. Άρα η $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ είναι λύση τής Εξίσωσης 13.15.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω μπορούμε να πούμε το εξής:



Σχήμα 13.3 Μάζα που είναι συνδεδεμένη με ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική κίνηση πάνω σε λεία επιφάνεια. (a) Όταν η μάζα μετατοπίζεται προς τα δεξιά τής θέσης ισορροπίας, η μετατόπιση είναι θετική, αλλά η επιτάχυνση είναι αρνητική. (b) Στη θέση ισορροπίας, $x = 0$, η ταχύτητα έχει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της και η επιτάχυνση είναι μηδενική. (c) Όταν η μετατόπιση είναι αρνητική, η επιτάχυνση είναι θετική.



Σχήμα 13.4 Πειραματική συσκευή που δείχνει την απλή αρμονική κίνηση. Η γραφίδα που βρίσκεται πάνω στο ταλαντούμενο σώμα αποτυπώνει ημιτονοειδή καμπύλη πάνω στο κυλιόμενο χαρτί.

Εάν η δύναμη η οποία δρα πάνω σε ένα σώμα είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση και έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση τής μετατόπισης, τότε το σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.

Θα δώσουμε πρόσθετα παραδείγματα στα επόμενα υποκεφάλαια.

Γνωρίζουμε ότι η περίοδος $T = 2\pi/\omega$ και ότι η συχνότητα είναι το αντίστροφο τής περιόδου. Μπορούμε λοιπόν να εκφράσουμε την περίοδο και τη συχνότητα τής κίνησης τού συστήματος ως

Περίοδος και συχνότητα τού συστήματος μάζας-ελατηρίου

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.16}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.17}$$

Όπως βλέπουμε, η περίοδος και η συχνότητα εξαρτώνται *μόνο* από τη μάζα και από τη σταθερά τού ελατηρίου. Και όπως αναμενόταν, η συχνότητα αυξάνεται (με την τετραγωνική ρίζα) όσο πιο σκληρό είναι το ελατήριο· και μειώνεται όσο αυξάνεται (πάλι με την τετραγωνική ρίζα) η μάζα.

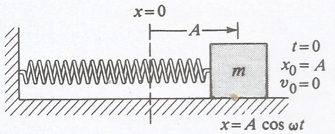
Μια μάζα, εάν είναι αναρτημένη από ένα κατακόρυφο ελατήριο τού οποίου το άλλο άκρο έχει στερεωθεί στον τοίχο, θα ταλαντωθεί με απλή αρμονική κίνηση. Μολονότι εδώ υπάρχει επί πλέον η βαρύτητα, η εξίσωση κίνησης ανάγεται στην Εξίσωση 13.15, όταν η μετατόπιση μετράται από το σημείο ισορροπίας τής αναρτημένης μάζας. Απόδειξη τών παραπάνω αποτελεί το Πρόβλημα 56.

Ειδική περίπτωση Ι Για να καταλάβουμε καλύτερα τη φυσική σημασία τής λύσης τής εξίσωσης κίνησης, ας μελετήσουμε την παρακάτω ειδική περίπτωση. Ας εκτείνουμε το ελατήριο έλκοντας τη μάζα από τη θέση ισορροπίας κατά απόσταση A και ας τήν αφήσουμε ελεύθερη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.5. Πρέπει η λύση μας $x(t)$ να υπακούει τις *αρχικές συνθήκες* τού προβλήματός μας, δηλαδή τη στιγμή $t = 0$, το $x_0 = A$ και $v_0 = 0$. Οι συνθήκες αυτές πληρούνται εάν επιλέξουμε την αρχική φάση $\delta = 0$, οπότε η λύση αυτή είναι $x = A\cos\omega t$. Ας σημειωθεί ότι έτσι η λύση αυτή είναι σύμφωνη με τη γενική λύση $x = A\cos(\omega t + \delta)$, όπου $x_0 = A$ και $\delta = 0$. Αντικαθιστούμε στη λύση $t = 0$ και βλέπουμε ότι πράγματι $x_0 = A$, δεδομένου ότι τη στιγμή $t = 0$ το $\cos 0 = 1$. Βλέπουμε λοιπόν ότι πράγματι οι A και δ περιέχουν την πληροφορία τών αρχικών συνθηκών τού προβλήματος. Ας διερευνήσουμε τώρα τη συμπεριφορά τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης στην ειδική αυτή περίπτωση. Εφόσον $x = A\cos\omega t$, βρίσκουμε ότι

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t$$

και

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t$$



Σχήμα 13.5 Σύστημα μάζας - ελατηρίου που ξεκινάει από την κατάσταση ηρεμίας στο σημείο $x_0 = A$. Στην περίπτωση αυτή, $\delta = 0$ και επομένως $x = A\cos\omega t$.

Από τη σχέση που δίνει την ταχύτητα βλέπουμε ότι κατά τη στιγμή $t = 0$ πράγματι $v_0 = 0$, όπως απαιτούν οι αρχικές συνθήκες. Η σχέση τής επιτάχυνσης δίνει για τη στιγμή $t = 0$ ότι $a_0 = -\omega^2 A$. Από φυσική σκοπιά αυτό το αρνητικό πρόσημο είναι σωστό, διότι όταν η μετατόπιση είναι θετική (προς τα δεξιά), η δύναμη (άρα και η επιτάχυνση) είναι αρνητική. Αυτή η τιμή τής αρχικής επιτάχυνσης $a_0 = -\omega^2 A = -kA/m$ είναι σύμφωνη με την τιμή τής αρχικής δύναμης $F_0 = -kA$, που από τον δεύτερο νόμο τού Newton αντιστοιχεί σε επιτάχυνση $-kA/m$.

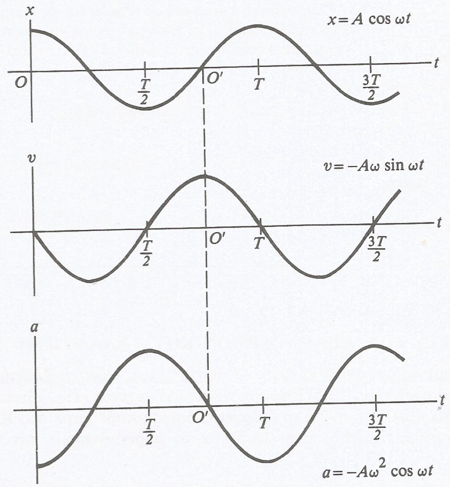
Θα μπορούσαμε επίσης να ακολουθήσουμε πιο αυστηρή μεθοδολογία και να δείξουμε ότι η $x = A\cos\omega t$ είναι η σωστή λύση χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 13.10a, $\tan\delta = -v_0/\omega x_0$. Επειδή $v_0 = 0$ τη στιγμή $t = 0$, τότε $\delta = 0$. Οι καμπύλες, ως προς τον χρόνο, τής μετατόπισης, τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης φαίνονται στο Σχήμα 13.6. Ας σημειωθεί ότι οι ακραίες τιμές τής επιτάχυνσης είναι $\pm\omega^2 A$ και αντιστοιχούν στις ακραίες τιμές τής μετατόπισης $\pm A$. Η ταχύτητα επίσης παίρνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της $\pm\omega A$ για $x = 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αυστηρή λύση συμφωνεί με την ποιοτική περιγραφή τού συστήματος που κάναμε.

Ειδική περίπτωση ΙΙ Υποθέστε ότι αρχικά (δηλαδή κατά τη στιγμή $t = 0$) ωθούμε τη μάζα και τής προσδίδουμε ταχύτητα v_0 προς τα *δεξιά*, όταν το ελατήριο δεν ήταν εκτεταμένο έτσι ώστε όταν $t = 0$, $x_0 = 0$ και $v = v_0$ (Σχήμα 13.7). Η λύση που θα βρούμε πρέπει να ικανοποιεί τους όρους αυτούς. Επειδή η μάζα κινείται προς το θετικό x τη στιγμή $t = 0$ και τότε $x_0 = 0$, η λύση μας έχει τη μορφή $x = A\sin\omega t$.

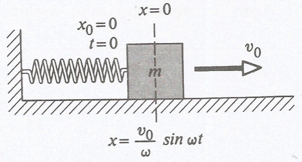
Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\tan\delta = -v_0/\omega x_0$ και την αρχική συνθήκη $x_0 = 0$ όταν $t = 0$ και βρίσκουμε $\tan\delta = -\infty$ ή $\delta = -\pi/2$. Δηλαδή, η λύση είναι $x = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin\omega t$. Επί πλέον, από την Εξίσωση 13.10b βλέπουμε ότι $A = v_0/\omega$, επομένως μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση μας ως

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στην περίπτωση αυτή λοιπόν είναι



Σχήμα 13.6 Μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση ως προς τον χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με αρχικές συνθήκες $x_0 = A$ και $v_0 = 0$ κατά τη στιγμή $t = 0$.



Σχήμα 13.7 Το σύστημα μάζας-ελατηρίου αρχίζει την κίνησή του τη στιγμή $t = 0$ από τη θέση ισορροπίας $x_0 = 0$. Αν η αρχική ταχύτητα είναι v_0 προς τα δεξιά. Η συνιστώσα τού x μεταβάλλεται ως $x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \omega v_0 \sin \omega t$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με το γεγονός ότι η μέγιστη τιμή τής ταχύτητας αντιστοιχεί στη θέση ισορροπίας $x = 0$, ενώ, αντίστοιχα, η δύναμη και η επιτάχυνση είναι μηδενικές. Οι καμπύλες τών ποσοτήτων αυτών ως προς τον χρόνο στο Σχήμα 13.6 αντιστοιχούν στην αρχή O'. Ποια θα ήταν η λύση τού x εάν η μάζα αρχικά κινούνταν προς τα αριστερά στο Σχήμα 13.7;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.2 Το αυτοκίνητο χρειάζεται καινούργια ελατήρια ανάρτησης

Αυτοκίνητο μάζας 1300 kg έχει 4 ελατήρια ανάρτησης, τα οποία στηρίζουν το βάρος πάνω από κάθε τροχό. Η σταθερά καθενός ελατηρίου είναι 20 000 N/m. Εάν ο οδηγός και ο δεύτερος επιβάτης τού αυτοκινήτου έχουν και οι δύο συνολική μάζα 160 kg, βρείτε τη συχνότητα με την οποία θα ταλαντωθεί το αυτοκίνητο όταν περάσει πάνω από μια λακκούβα.

Λύση Θα υποθέσουμε ότι το βάρος είναι ισοκατανεμημένο. Δηλαδή, το κάθε ελατήριο στηρίζει το 1/4 τού φορτίου. Εφόσον η ολική μάζα είναι 1 460 kg, κάθε ελατήριο στηρίζει μάζα 365 kg. Η συχνότητα ταλάντωσης είναι λοιπόν

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20\,000 \text{ N/m}}{365 \text{ kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

Άσκηση 1 Πόσος χρόνος περνάει ώσπου να κάνει το αυτοκίνητο δύο ταλαντώσεις; t=2T=....
Απάντηση 1.70 s.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.3 Σύστημα μάζας-ελατηρίου

Μάζα 200 g είναι συνδεδεμένη με ένα ελαφρό ελατήριο σταθεράς 5 N/m και μπορεί να ταλαντώνεται ελεύθερα πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. Εκτρέπουμε τη μάζα κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και τήν αφήνουμε ελεύθερη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.5 (δηλαδή έχει μηδενική αρχική ταχύτητα). (a) Βρείτε την περίοδο τής ταλάντωσης.

Λύση Το πρόβλημα αυτό αντιστοιχεί στην Ειδική Περίπτωση Ι η οποία περιγράφηκε προηγουμένως και όπου $x = A \cos \omega t$ και $A = 5 \times 10^{-2}$ m. Επομένως

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5 \text{ rad/s}$$

Έτσι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.26 \text{ s}$$

(b) Προσδιορίστε τη μέγιστη ταχύτητα τής μάζας.

$$v_{max} = \omega A = (5 \text{ rad/s})(5 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.250 \text{ m/s}$$

(c) Ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση τής μάζας;

$$a_{max} = \omega^2 A = (5 \text{ rad/s})^2 (5 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

(d) Εκφράστε τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση ως συναρτήσεις τού χρόνου.

Η έκφραση $x = A \cos \omega t$ είναι η ειδική λύση για την Ειδική Περίπτωση Ι. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από τα (a), (b) και (c) και βρίσκουμε

$$x = A \cos \omega t = (0.05 \text{ m}) \cos 5t$$

$$v = -\omega A \sin \omega t = -(0.25 \text{ m/s}) \sin 5t$$

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t = -(1.25 \text{ m/s}^2) \cos 5t$$

13.3 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ

Ας μελετήσουμε τη μηχανική ενέργεια τού συστήματος μάζας-ελατηρίου που απεικονίζεται στο Σχήμα 13.5. Εφόσον η επιφάνεια είναι λεία, εξυπακούεται ότι διατηρείται η ολική μηχανική ενέργεια, όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 8. Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 13.5 για να περιγράψουμε την κινητική ενέργεια

Κινητική ενέργεια τού απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \qquad (13.18)$$

Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο λόγω τής έκτασής του κατά x είναι $\frac{1}{2}kx^2$. Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 13.1 και βρίσκουμε

Δυναμική ενέργεια τού απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \tag{13.19}$$

Βλέπουμε ότι τα K και U είναι *πάντοτε* θετικές ποσότητες. Γνωρίζουμε ότι $\omega^2 = k/m$. Έτσι εκφράζουμε την *ολική ενέργεια* τού απλού αρμονικού ταλαντωτή ως

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)]$$

Αλλά $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, όπου $\theta = \omega t + \delta$. Επομένως, η τελευταία σχέση γίνεται

Ολική ενέργεια τού απλού αρμονικού ταλαντωτή

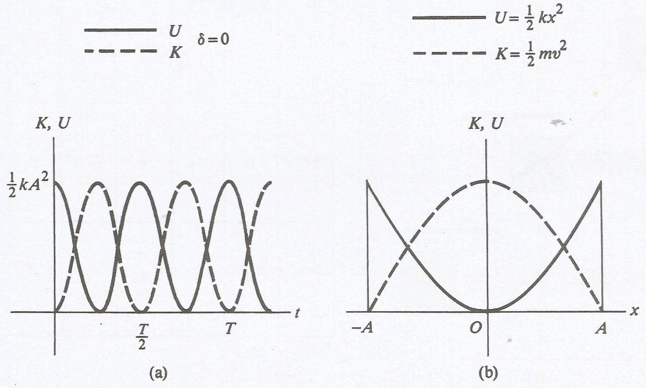
$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \tag{13.20}$$

Δηλαδή

η ολική μηχανική ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση είναι σταθερά τής κίνησης και είναι ανάλογη προς το τετράγωνο τού πλάτους.

Η ολική μηχανική ενέργεια ισούται προς τη μέγιστη δυναμική ενέργεια η οποία είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο όταν $x = \pm A$. Στα ακραία αυτά σημεία η ταχύτητα είναι μηδενική και, επομένως, η κινητική ενέργεια είναι μηδενική. Έτσι όλη η μηχανική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ως δυναμική ελαστική ενέργεια. Έτσι, στο σημείο ισορροπίας, $x = 0$ και $U = 0$, όλη η μηχανική ενέργεια έχει γίνει κινητική. Δηλαδή, στο σημείο $x = 0$, $E = \frac{1}{2}mv^2_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$.

Στο Σχήμα 13.8a βλέπουμε γραφικές παραστάσεις τής κινητικής και τής δυναμικής ενέργειας ως προς τον χρόνο (έχουμε επιλέξει $\delta = 0$). Στην περίπτωση αυτή τα K και U είναι πάντοτε θετικά (όπως είναι επόμενο να συμβαίνει στην απλή αρμονική κίνηση) και το άθροισμά τους ισούται πάντοτε με τη σταθερά $\frac{1}{2}kA^2$, που είναι η ολική ενέργεια τού συστήματος. Στο Σχήμα 13.8b θα δείτε ότι τα K και U εξαρτώνται από τη μετατόπιση. Όπως



Σχήμα 13.8 (a) Κινητική και δυναμική ενέργεια συναρτήσει τού χρόνου για απλό αρμονικό ταλαντωτή με $\delta = 0$. (b) Κινητική και δυναμική ενέργεια για απλό αρμονικό ταλαντωτή συναρτήσει τής μετατόπισης. Να σημειωθεί ότι και στις δύο παραστάσεις $K + U$ = σταθερή.

βλέπουμε, η ενέργεια μεταβάλλει συνεχώς μορφή από κινητική σε δυναμική και τανάπαλιν, έτσι όμως ώστε *κάθε στιγμή* το άθροισμα τής κινητικής με τη δυναμική ενέργεια να είναι σταθερό και ίσο με $\frac{1}{2}kA^2$. Στο Σχήμα 13.9 απεικονίζονται η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια τού συστήματος μάζα-ελατήριο για μια πλήρη περίοδο τής κίνησης. Τα περισσότερα σημεία τής μελέτης μας περιέχονται στο σχήμα αυτό. Σας συνιστούμε να μελετήσετε το Σχήμα 13.9 με προσοχή και με κριτικό πνεύμα.

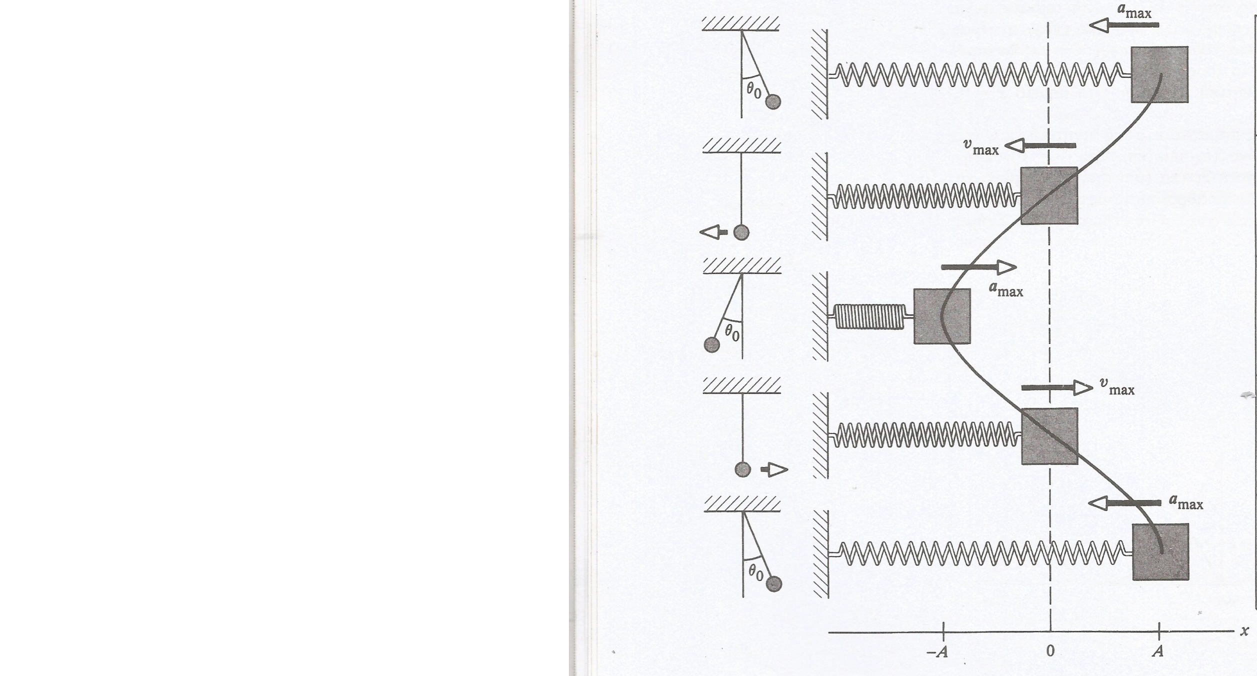
Τέλος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση τής ενέργειας για να βρούμε την ταχύτητα για οποιαδήποτε μετατόπιση x, εάν εκφράσουμε την ολική ενέργεια ως συνάρτηση τής μετατόπισης:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Το μέτρο τής ταχύτητας συναρτήσει τής μετατόπισης τού απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (13.21)$$

Βλέπουμε λοιπόν και από την Εξίσωση 13.21 ότι η ταχύτητα έχει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της όταν $x = 0$ και είναι μηδενική στα ακραία σημεία, $x = \pm A$.



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-A\omega$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	$A\omega$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Σχήμα 13.9 Απλή αρμονική κίνηση για σύστημα μάζας-ελατηρίου και απλό εκκρεμές στην αντίστοιχη φάση. Ο πίνακας περιγράφει τις παραμέτρους τού συστήματος ελατηρίου-μάζας και υποτίθεται ότι τη στιγμή $t = 0$, $x = A$ έτσι ώστε $x = A\cos\omega t$ (Περίπτωση Ι).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.4 Ταλαντώσεις σε οριζόντια επιφάνεια

Μάζα 0.5 kg είναι συνδεδεμένη με ελαφρό ελατήριο σταθεράς 20 N/m και ταλαντώνεται σε μια οριζόντια λεία επιφάνεια: (a) Υπολογίστε την ολική ενέργεια τού συστήματος και το μέγιστο μέτρο τής ταχύτητας εάν το πλάτος τής κίνησης είναι 3 cm.

Λύση Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 13.20 και βρίσκουμε

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}\left(20\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(3\times10^{-2}\ \text{m})^2$$
$$= 9.00\times10^{-3}\ \text{J}$$

Όταν η μάζα βρίσκεται στο $x = 0$, τότε $U = 0$ και $E = \frac{1}{2}mv^2_{\max}$. Επομένως

$$\tfrac{1}{2}mv^2_{\max} = 9.00\times10^{-3}\ \text{J}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{18\times10^{-3}\ \text{J}}{0.5\ \text{kg}}} = 0.190\ \text{m/s}$$

(b) Ποια είναι η ταχύτητα τής μάζας όταν η μετατόπιση είναι 2 cm;

Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 13.21 κατευθείαν:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\sqrt{\frac{20}{0.5}(3^2 - 2^2)\times10^{-4}}$$
$$= \pm 0.141\ \text{m/s}$$

Η φυσική σημασία τού θετικού και τού αρνητικού προσήμου είναι ότι η μάζα κινείται δεξιά ή αριστερά από το σημείο ισορροπίας, αντίστοιχα.

(c) Υπολογίστε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια τού συστήματος όταν $x = 2$ cm.

Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα (b) και έχουμε

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.5\ \text{kg})(0.14\ \text{m/s})^2 = 5.00\times10^{-3}\ \text{J}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}\left(20\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(2\times10^{-2}\ \text{m})^2 = 4.00\times10^{-3}\ \text{J}$$

Ας σημειωθεί ότι το άθροισμα $K + U$ ισούται με την ολική ενέργεια E που βρήκαμε στο (a).

Άσκηση 2 Για ποιες τιμές τού x η απόλυτη τιμή τής ταχύτητας είναι 0.10 m/s;

Απάντηση ±2.55 m.

13.4 ΤΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Το απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές είναι ένα άλλο σύστημα που εκτελεί περιοδικές ταλαντώσεις. Αποτελείται από μια σημειακή μάζα m που αιωρείται από ένα ελαφρό νήμα μήκους L, στο ένα άκρο ενώ το άλλο άκρο τού νήματος είναι αναρτημένο σε ένα υποστήριγμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.10. Η κίνηση γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο και οδηγείται από τη δύναμη τής βαρύτητας. Θα αποδείξουμε ότι το απλό εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική κίνηση εάν η μέγιστη γωνία θ που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο είναι μικρή.

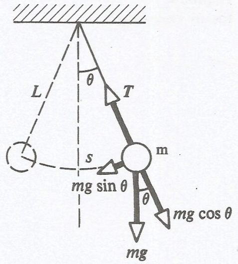
Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στη μάζα είναι η τάση, $\boldsymbol{T}$, που έχει την κατεύθυνση τού νήματος, και το βάρος, $m\boldsymbol{g}$. Η εφαπτομενική (στην τροχιά) συνιστώσα τού βάρους είναι η $mg \sin\theta$, κατευθύνεται πάντοτε προς το σημείο ισορροπίας και εναντιώνεται στη μετατόπιση. Δηλαδή, η εφαπτομενική συνιστώσα τού βάρους παίζει τον ρόλο δύναμης επαναφοράς. Έτσι γράφουμε την εξίσωση κίνησης στην εφαπτομενική διεύθυνση

$$F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

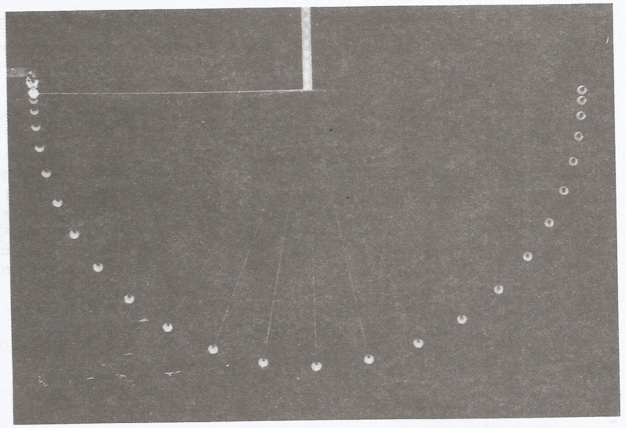
όπου s είναι η μετατόπιση την οποία μετρούμε επάνω στο τόξο και το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η F_t κατευθύνεται προς το σημείο ισορροπίας. Γνωρίζουμε όμως ότι $s = L\theta$ και ότι το L είναι σταθερό. Η τελευταία εξίσωση ανάγεται λοιπόν στην

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Ο όρος στο δεξιό μέρος είναι $\sin\theta$, και όχι θ, επομένως η κίνηση δεν είναι απλή αρμονική. Εάν όμως περιορίσουμε το πρόβλημά μας στις περιπτώσεις



Σχήμα 13.10 Όταν η γωνία θ είναι μικρή, τότε το απλό εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική κίνηση γύρω από τη θέση ισορροπίας ($\theta = 0$). Η δύναμη επαναφοράς $mg \sin\theta$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα τού βάρους.



Κίνηση απλού εκκρεμούς απεικονισμένη με φωτογραφία πολυφλάς. Είναι αυτή η κίνηση απλή αρμονική; (Φωτογραφία © Berenice Abbott, Science Source/Photo Researches).

εκείνες στις οποίες το θ είναι *μικρό*, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\sin\theta \approx \theta$, όταν το θ μετράται σε ακτίνια[1]. Έτσι λοιπόν η εξίσωση κίνησης γίνεται

Εξίσωση κίνησης τού απλού εκκρεμούς (για μικρή θ)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\theta \tag{13.22}$$

Η εξίσωση αυτή όμως έχει ακριβώς την μορφή τής Εξίσωσης 13.15, δηλαδή τής απλής αρμονικής κίνησης. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι για μικρές γωνίες $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$, όπου θ_0 είναι η *μέγιστη γωνιακή μετατόπιση* και η γωνιακή συχνότητα ω είναι

Η γωνιακή συχνότητα τής ταλάντωσης τού απλού εκκρεμούς

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.23}$$

Η περίοδος τής ταλάντωσης είναι

Περίοδος ταλάντωσης τού απλού εκκρεμούς

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.24}$$

Με άλλα λόγια, *η περίοδος και η συχνότητα τού απλού εκκρεμούς εξαρτώνται μόνο από το μήκος τού νήματος και από την επιτάχυνση τής βαρύτητας.* Εφόσον η περίοδος είναι *ανεξάρτητη* από τη μάζα, συμπεραίνουμε ότι *όλα* τα απλά εκκρεμή με ίσο μήκος νήματος έχουν τήν ίδια περίοδο στον ίδιο γεωγραφικό τόπο[2].

Το Σχήμα 13.9 απεικονίζει την αντιστοιχία ανάμεσα στο απλό εκκρεμές και στο σύστημα μάζας-ελατηρίου.

Το απλό εκκρεμές χρησιμοποιείται για τη μέτρηση τού χρόνου, καθώς και

---

(1) Για να γίνει κατανοητή η προσέγγιση αυτή, αναπτύσσουμε το $\sin\theta$ σε σειρά, οπότε $\sin\theta = \theta - \theta^3/3! + \ldots$ Βλέπουμε λοιπόν ότι για μικρές τιμές τού θ, $\sin\theta \approx \theta$. Η προσέγγιση αυτή έχει σφάλμα 1% για $\theta = 15°$.

(2) Η περίοδος ταλάντωσης τού απλού εκκρεμούς τυχαίου πλάτους είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \cdots\right)$$

όπου θ_0 είναι η μέγιστη μετατόπιση σε ακτίνια.

για ακριβείς μετρήσεις τής επιτάχυνσης τής βαρύτητας. Οι μετρήσεις αυτές είναι σημαντικές, διότι πολλές φορές μάς οδηγούν στην ανακάλυψη τών τοπικών αιτίων μεταβολής τού g, τα οποία συχνά οφείλονται στην ύπαρξη κοιτασμάτων πετρελαίου ή διαφόρων μεταλλευμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.5 Ποιο είναι το ύψος τού πύργου;

Κάποιος μπαίνει σε έναν ψηλό πύργο. Πρέπει να μετρήσει το ύψος τού κτηρίου. Παρατηρεί ότι από την οροφή τού πύργου είναι αναρτημένο ένα μακρύ εκκρεμές που φτάνει σχεδόν ώς το δάπεδο και έχει περίοδο 12 s. Ποιο είναι το ύψος τού πύργου;

Λύση Χρησιμοποιούμε τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ και λύνουμε ως προς L:

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(9.80 \text{ m/s}^2)(12 \text{ s})^2}{4\pi^2} = \boxed{35.7 \text{ m}}$$

Άσκηση 3 Εάν πάρουμε το παραπάνω εκκρεμές και τό μεταφέρουμε στη Σελήνη, όπου η επιτάχυνση τής βαρύτητας είναι 1.67 m/s^2, ποια θα είναι η περιοδός του;

Απάντηση 29.1 s.

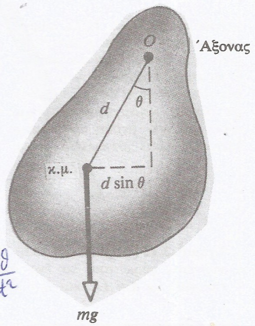
Το φυσικό εκκρεμές

Το φυσικό ή σύνθετο εκκρεμές αποτελείται από ένα επίπεδο στερεό σώμα αναρτημένο από έναν σταθερό άξονα, που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, και μπορεί ελεύθερα να περιστρέφεται γύρω από αυτόν τον άξονα. Το σύστημα αυτό ταλαντώνεται όταν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του. Θεωρήστε ότι ένα στερεό σώμα είναι αναρτημένο από το σημείο O διά τού οποίου διέρχεται ένας οριζόντιος άξονας. Το σημείο O έχει απόσταση d από το κέντρο μάζας τού σώματος (Σχήμα 13.11). Η δύναμη τής βαρύτητας προκαλεί ροπή γύρω από το O, τής οποίας το μέτρο είναι $mgd \sin\theta$. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\tau = I\alpha$, όπου I είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής στο O, και βρίσκουμε

$$-mgd \sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\cancel{\theta = \omega t} \Rightarrow$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \overset{\alpha_\gamma}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$



Σχήμα 13.11 Φυσικό εκκρεμές είναι κάθε στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο O το οποίο είναι διαφορετικό από το κέντρο μάζας του. Όταν ισορροπεί, το διάνυσμα τού βάρους διέρχεται από το O και τότε $\theta = 0$. Η ροπή επαναφοράς, για εκτροπή θ γύρω από το O, είναι ίση προς $mgd \sin\theta$.

Το αρνητικό πρόσημο στα αριστερά δείχνει ότι η ροπή γύρω από το O τείνει να ελαττώσει το θ. Με άλλα λόγια, η δύναμη τής βαρύτητας προκαλεί ροπή επαναφοράς.

Εάν πάλι υποθέσουμε ότι η γωνία εκτροπής θ είναι μικρή, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\sin\theta \approx \theta$ και έτσι η διαφορική εξίσωση κίνησης ανάγεται στην

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta \tag{13.25}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει την ίδια μορφή με την Εξίσωση 13.15 και επομένως, είναι η εξίσωση τής απλής αρμονικής ταλάντωσης. Έτσι η λύση τής Εξίσωσης 13.25 είναι η $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$, όπου θ_0 είναι η μέγιστη γωνιακή απόκλιση και

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

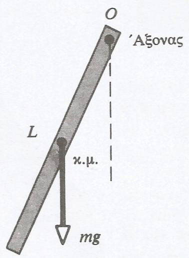
Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{13.26}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία σχέση για να μετρήσουμε τη ροπή αδράνειας ενός επίπεδου στερεού σώματος. Όταν γνωρίζουμε τη θέση τού κέντρου μάζας και, επομένως, την απόσταση d, μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας εάν μετρήσουμε την περίοδο. Ας σημειωθεί, τέλος, ότι όταν $I = md^2$, δηλαδή όταν όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας, η Εξίσωση 13.26 είναι ακριβώς ίδια με την εξίσωση τού απλού εκκρεμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6 Η ράβδος που ταλαντώνεται

Μια ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της (Σχήμα 13.12). Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης εάν το πλάτος τής ταλάντωσης είναι μικρό.



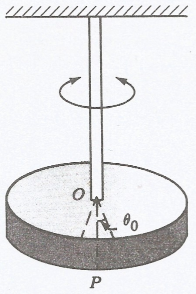
Σχήμα 13.12 (Παράδειγμα 13.6) Μια συμπαγής ράβδος ταλαντώνεται γύρω από το ένα άκρο της. Αποτελεί φυσικό εκκρεμές με $d = L/2$ και $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$.

Λύση Στο Κεφάλαιο 10 βρήκαμε ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της είναι $\frac{1}{3}ML^2$. Η απόσταση τού κέντρου μάζας από τον άξονα εξάρτησης είναι $L/2$. Θέτουμε τις ποσότητες αυτές στην Εξίσωση 13.26 και βρίσκουμε

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Σχόλιο Κατά την πρώτη προσελήνωση το 1969 μία από τις ζώνες τής διαστημικής στολής ενός αστροναύτη ξεκουμπώθηκε στο ένα άκρο της και ταλαντωνόταν, καθώς κρεμόταν από το άλλο άκρο της, σαν φυσικό εκκρεμές. Ένας φυσικός στη Γη παρακολουθούσε την προσελήνωση στην τηλεόραση και υπολόγισε τη σεληνιακή επιτάχυνση τής βαρύτητας από την κίνηση τής ζώνης. Πώς έκανε τον υπολογισμό της;

Άσκηση 4 Υπολογίστε την περίοδο ενός μέτρου που ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα καρφί το οποίο περνάει από το ένα άκρο του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.12.
Απάντηση 1.64 s.



Σχήμα 13.13 Το στροφικό εκκρεμές αποτελείται από ένα στερεό σώμα αναρτημένο από ένα σύρμα τού οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο καλά. Το σώμα ταλαντώνεται γύρω από τη γραμμή OP με πλάτος θ_0.

Στροφικό εκκρεμές

Στο Σχήμα 13.13 βλέπουμε ένα στερεό σώμα αναρτημένο από ένα σύρμα που περνάει από το κέντρο μάζας του και που είναι στερεωμένο κάπου. Όταν το σώμα περιστραφεί κατά μικρή γωνία θ, τότε το συστραμμένο σύρμα ασκεί πάνω στο σώμα ροπή στρέψης, που παίζει τον ρόλο ροπής επαναφοράς, ανάλογη προς τη γωνιακή εκτροπή. Δηλαδή

$$\tau = -\kappa\theta$$

όπου το κ λέγεται σταθερά στρέψης τού σύρματος. Για να μετρήσουμε τη σταθερά κ εφαρμόζουμε γνωστή ροπή συστρέφοντας το σύρμα κατά γωνία θ. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton για περιστροφική κίνηση και βρίσκουμε

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad (13.27)$$

Βλέπουμε και πάλι ότι αυτή είναι η διαφορική εξίσωση κίνησης τού απλού αρμονικού ταλαντωτή με $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ και περίοδο

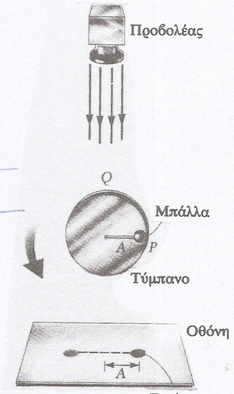
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}} \tag{13.28}$$

Το σύστημα αυτό ονομάζεται *στροφικό εκκρεμές*. Παρατηρούμε ότι εδώ δεν χρειάστηκε να κάνουμε την προσέγγιση τών μικρών γωνιών· ο μόνος περιορισμός είναι ότι το θ πρέπει να έχει τιμή τέτοια ώστε να μην υπερβαίνει το όριο ελαστικότητας τού σύρματος. Στροφικά εκκρεμή χρησιμοποιούνται στα γαλβανόμετρα τών εργαστηρίων καθώς και στον στρεπτικό ζυγό τού Cavendish.

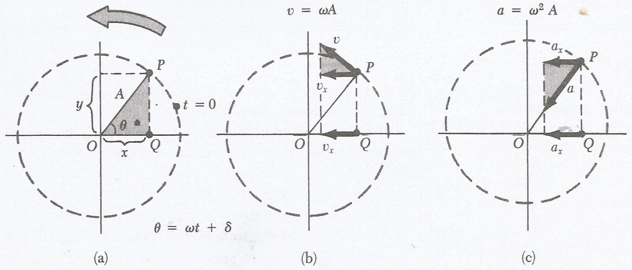
* 13.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα την απλή αρμονική κίνηση πάνω σε ευθεία γραμμή εάν διερευνήσουμε τη σχέση της με την ομαλή κυκλική κίνηση. Στο Σχήμα 13.14 απεικονίζεται μια πειραματική διάταξη που είναι χρήσιμη για τη μελέτη μας. Απεικονίζεται το τύμπανο ακτίνας A ενός φωνογράφου ο οποίος είναι γυρισμένος πλάγια. Στην περίμετρο τού τυμπάνου είναι κολλημένη μια ελαφρά μπάλλα. Το σύστημα φωτίζεται από τα πλάγια με προβολέα. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη σκιά τής μπάλλας πάνω σε μια οθόνη. Βρίσκουμε ότι *καθώς το τύμπανο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, η σκιά τής μπάλλας κινείται παλινδρομικά εκτελώντας απλή αρμονική κίνηση*.

Θεωρήστε ότι ένα σώμα στο σημείο P κινείται σε κύκλο ακτίνας A με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (Σχήμα 13.15a). Θα θεωρήσουμε επίσης τον κύκλο αυτό ως *κύκλο αναφοράς* τής κίνησης. Καθώς το σώμα περιστρέφεται, το διάνυσμα θέσης τού σώματος περιστρέφεται γύρω από την αρχή O. Κάποια στιγμή t η γωνία ανάμεσα στο OP και στον άξονα x είναι $\omega t + \delta$, όπου δ είναι η γωνία που σχηματίζει η OP με τον άξονα x κατά τη στιγμή $t = 0$. Αυτό τό λαμβάνουμε ως σημείο αναφοράς για να μετρούμε τη γωνιακή μετατόπιση. Καθώς το σώμα περιστρέφεται πάνω στον κύκλο αναφοράς, η γωνία που σχηματίζει το OP με τον άξονα x *μεταβάλλεται* συναρτήσει τού χρόνου. Επί πλέον, η προβολή τού P



Σχήμα 13.14 Συσκευή απόδειξης τής σχέσης μεταξύ απλής αρμονικής κίνησης και ομαλής κυκλικής κίνησης. Καθώς η μπάλλα κινείται με το περιστρεφόμενο τύμπανο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, η σκιά της πάνω στην οθόνη κινείται πίσω-μπρός εκτελώντας απλή αρμονική κίνηση.



Σχήμα 13.15 Σχέση ανάμεσα στην ομαλή κυκλική κίνηση την οποία εκτελεί το P και στην απλή αρμονική που εκτελεί το Q. Το σώμα P κινείται σε κύκλο ακτίνας A με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. (a) Οι συντεταγμένες x τών P και Q είναι ίσες και εξαρτώνται από τον χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $x = A\cos(\omega t + \delta)$. (b) Η συνιστώσα x τής ταχύτητας τού P ισούται με την ταχύτητα τού Q. (c) Η συνιστώσα x τής επιτάχυνσης τού P ισούται με την επιτάχυνση τού Q.

πάνω στον άξονα τών x, που είναι το σημείο Q, κινείται παλινδρομικά πάνω στη διάμετρο τού κύκλου αναφοράς, η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα τών x, ανάμεσα στα όρια $\pm A$.

Ας σημειωθεί ότι τα σημεία P και Q έχουν την *ίδια* συντεταγμένη x. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OPQ βλέπουμε ότι η συντεταγμένη x τών P και Q δίνεται από τη σχέση

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{13.29}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το σημείο Q εκτελεί απλή αρμονική κίνηση πάνω στον άξονα x. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

η προβολή ενός σημείου το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε μια διάμετρο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση πάνω στη διάμετρο αυτή.

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δούμε από το Σχήμα 13.15a ότι και η προβολή τού P πάνω στον άξονα y εκτελεί απλή αρμονική κίνηση. Επομένως, *η ομαλή κυκλική κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε δύο απλές αρμονικές κινήσεις πάνω σε δύο κάθετους άξονες με σχετική διαφορά φάσης 90°*.

Η γεωμετρική εικόνα που παρουσιάσαμε δείχνει ότι ο χρόνος για μια πλήρη περιστροφή τού σημείου P πάνω στον κύκλο αναφοράς είναι ίσος με την περίοδο τής κίνησης. Δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα τού σημείου P είναι ίδια με τη γωνιακή συχνότητα ω απλής αρμονικής κίνησης πάνω στον άξονα x. Η αρχική φάση δ τής απλής αρμονικής κίνησης αντιστοιχεί στην αρχική γωνία την οποία σχηματίζει το OP με τον άξονα τών x. Η ακτίνα A τού κύκλου αναφοράς είναι ίση με το πλάτος τής απλής αρμονικής κίνησης.

Εφόσον η σχέση που συνδέει τη γραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα είναι $v = r\omega$, το σώμα που περιστρέφεται πάνω στον κύκλο αναφοράς έχει γραμμική ταχύτητα $v = \omega A$. Από τη γεωμετρία τού Σχήματος 13.15b διαπιστώνουμε ότι η συνιστώσα x τής ταχύτητας αυτής είναι $-\omega A \sin(\omega t + \delta)$. Εξ ορισμού, το σημείο Q έχει ταχύτητα ίση προς dx/dt. Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο την Εξίσωση 13.29 και βρίσκουμε ότι η ταχύτητα τού Q είναι ίδια με τη συνιστώσα x τής ταχύτητας τού P.

Η επιτάχυνση τού σημείου P πάνω στον κύκλο αναφοράς κατευθύνεται ακτινικά προς το σημείο O *και το μέτρο της είναι* $v^2/A = \omega^2 A$. Από την γεωμετρία τού Σχήματος 13.15c βλέπουμε ότι η συνιστώσα x τής επιτάχυνσης αυτής είναι $-\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$. Αυτή εξάλλου είναι και η επιτάχυνση τού σημείου τής προβολής Q πάνω στον άξονα τών x, όπως μπορείτε να επαληθεύσετε από την Εξίσωση 13.29.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.7 Κυκλική κίνηση με σταθερό μέτρο ταχύτητας

Ένα σώμα περιστρέφεται με φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού πάνω στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας 3.0 m, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 8 rad/s, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.15. Την στιγμή $t = 0$ η συντεταγμένη x τού σώματος είναι 2.0 m. (a) Προσδιορίστε την συντεταγμένη x συναρτήσει τού χρόνου.

Λύση Επειδή το πλάτος τής κίνησης τής συντεταγμένης x τού σώματος ισούται με την ακτίνα τού κύκλου και $\omega = 8$ rad/s, έχουμε

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = (3.0 \text{ m})\cos(8t + \delta)$$

Την αρχική φάση δ μπορούμε να τήν υπολογίσουμε εάν χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη ότι $x = 2.0$ m όταν $t = 0$:

$$2.0 \text{ m} = (3.0 \text{ m})\cos(0 + \delta)$$

$$\delta = \cos^{-1}(\tfrac{2}{3}) = 48^\circ = 0.841 \text{ rad}$$

Επομένως, η συνιστώσα x συναρτήσει τού χρόνου t είναι

$$x = (3.0 \text{ m})\cos(8t + 0.841)$$

Ας σημειωθεί ότι οι γωνίες στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις εκφράζονται σε ακτίνια.

(b) Βρείτε την συνιστώσα x τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης τού σώματος σε οποιονδήποτε χρόνο t.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.0)(8)\sin(8t + 0.84)$$

$$= \boxed{-(24 \text{ m/s})\sin(8t + 0.841)}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-24)(8)\cos(8t + 0.841)$$

$$= \boxed{-(192 \text{ m/s}^2)\cos(8t + 0.841)}$$

Από τα αποτελέσματα αυτά συμπεραίνουμε ότι $v_{max} =$ 24 m/s και $Q_{max} = 192$ m/s^2. Ας σημειωθεί ότι οι τιμές αυτές ισούνται με την εφαπτομενική ταχύτητα ωA και την κεντρομόλο επιτάχυνση $\omega^2 A$.

* 13.6 ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ Ή ΑΠΟΣΒΕΝΝΥΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Οι ταλαντώσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα αναφέρονταν σε εξιδανικευμένα συστήματα, δηλαδή σε συστήματα χωρίς τριβές τα οποία ταλαντώνονται επ' άπειρον υπό τη δράση γραμμικής δύναμης επαναφοράς. Στην ζωή όμως η ταλάντωση επιβραδύνεται από την παρουσία δυνάμεων ασωτείας, όπως είναι οι δυνάμεις τριβής, που μεταφέρουν ενέργεια στο περιβάλλον. Έτσι, η μηχανική ενέργεια τού συστήματος ελαττώνεται με την πάροδο τού χρόνου και τότε λέμε ότι η ταλάντωση *φθίνει, είναι φθίνουσα ή αποσβεννυμένη.*

Μια κοινή επιβραδύνουσα δύναμη που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 6 είναι ανάλογη προς την ταχύτητα και αντίθετη προς την κατεύθυνση τής κίνησης. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν τα αντικείμενα κινούνται διά μέσου αερίου, όπως λ.χ. τής ατμόσφαιρας. Επειδή μπορούμε να εκφράσουμε την επιβραδύνουσα δύναμη ως $\boldsymbol{R} = -b\boldsymbol{v}$, όπου το b λέγεται σταθερά απόσβεσης εάν η δύναμη επαναφοράς είναι ίση με $-kx$, τότε μπορούμε να γράψουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton ως

$$\sum F_x = -kx - bv = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{13.30}$$

Για να λυθεί η εξίσωση αυτή απαιτούνται γνώσεις μαθηματικών τις οποίες πιθανώς δεν έχετε ακόμη (θεωρία διαφορικών εξισώσεων). Γι' αυτό θα δώσουμε την λύση χωρίς απόδειξη. Όταν η επιβραδύνουσα δύναμη είναι μικρή σε σύγκριση με το kx, δηλαδή όταν έχουμε μικρό b, η λύση τής Εξίσωσης 13.30 είναι

$$x = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta) \tag{13.31}$$

όπου η κυκλική συχνότητα τής κίνησης είναι

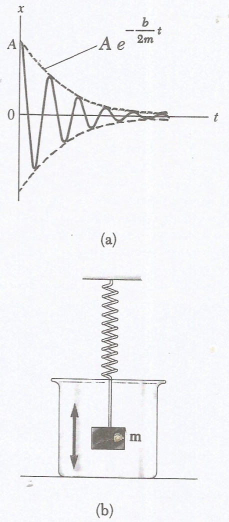
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{13.32}$$

Μπορείτε να βεβαιωθείτε ότι η Σχέση 13.31 είναι πράγματι λύση τής Εξίσωσης 13.30 με κατευθείαν αντικατάσταση. Στο Σχήμα 13.16a βλέπουμε την λύση τού προβλήματος με γραφική παράσταση, δηλαδή την μετατόπιση ως συνάρτηση τού χρόνου. Παρατηρούμε λοιπόν ότι, *όταν η επιβραδύνουσα δύναμη είναι μικρή σε σύγκριση με τη δύναμη επαναφοράς, εξακολουθεί να υπάρχει ταλάντωση αλλά το πλάτος της φθίνει εκθετικά συναρτήσει τού χρόνου,* δηλαδή αποσβέννυται, και στο τέλος η ταλάντωση σταματά. Η ταλάντωση αυτή λέγεται και **φθίνουσα ταλάντωση με μικρή απόσβεση.** Η διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 13.16a που περιέχει την καμπύλη τής ταλάντωσης απεικονίζει τον εκθετικό παράγοντα τής Εξίσωσης 13.31. Αυτή η γραμμή δείχνει την *εκθετική μείωση τού πλάτους συναρτήσει τού χρόνου.* Για δεδομένες σταθερά ελατηρίου και μάζα σώματος οι ταλαντώσεις μειώνονται τόσο γρηγορότερα όσο η μέγιστη τιμή τής επιβραδύνουσας δύναμης πλησιάζει στη μέγιστη τιμή τής δύναμης επαναφοράς. Ένα κλασικό παράδειγμα αποσβεννύμενης ταλάντωσης είναι ο ταλαντωτής που έχει βυθιστεί μέσα σε ένα υγρό, όπου οι δυνάμεις ασωτείας ή τριβής με το υγρό απορροφούν την ενέργεια, όπως στο Σχήμα 13.16b.

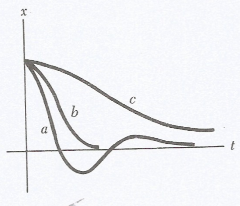
Για διευκόλυνσή μας γράφουμε την κυκλική συχνότητα ταλάντωσης με τη μορφή

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ είναι η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης τού συστήματος χωρίς



Σχήμα 13.16 (a) Γραφική παράσταση τής μετατόπισης ως προς τον χρόνο για αποσβεννύμενο ταλαντωτή. Να σημειωθεί η μείωση τού πλάτους με την πάροδο τού χρόνου. (b) Όταν μια μάζα που είναι αναρτημένη από ένα ελατήριο ταλαντώνεται μέσα σε ένα υγρό, τότε εκτελεί αποσβεννύμενη ταλάντωση.



Σχήμα 13.17 Γραφική παράσταση μετατόπισης ως προς τον χρόνο για (a) φθίνοντα ταλαντωτή με μικρή απόσβεση, (b) κρίσιμα αποσβεννύμενο ταλαντωτή και (c) ταλαντωτή με μεγάλη απόσβεση.

επιβραδύνουσα δύναμη ($b = 0$), δηλαδή απλή αρμονική ταλάντωση. Καθώς η τιμή τής επιβραδύνουσας δύναμης πλησιάζει στην τιμή τής δύναμης επαναφοράς τού ελατηρίου, οι ταλαντώσεις αποσβέννυνται γρηγορότερα. Όταν το b πάρει την τιμή $b_c = 2m\omega_0$, το σύστημα δεν ταλαντώνεται ($\omega = 0$) και λέμε ότι έχουμε **κρίσιμη απόσβεση.** Τότε το σύστημα, απλώς, επανέρχεται στη θέση ισορροπίας, όπου και σταματά, όπως δείχνει η καμπύλη τού Σχήματος 13.17.

Εάν το μέσο έχει μεγάλο ιξώδες, η επιβραδύνουσα δύναμη ασωτείας μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη επαναφοράς, δηλαδή $b/2m > \omega_0$, τότε το σύστημα παρουσιάζει **μεγάλη απόσβεση,** δεν ταλαντώνεται και επανέρχεται στη θέση ισορροπίας. Καθώς αυξάνεται το ιξώδες, το σύστημα καθυστερεί περισσότερο ώσπου να φτάσει στο σημείο ισορροπίας, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 13.17. Πάντως, όταν υπάρχει τριβή, η μηχανική ενέργεια τού ταλαντωτή τελικά θα γίνει μηδενική. Η χαμένη μηχανική ενέργεια τού ταλαντωτή μεταφέρεται μέσω τού υλικού τής αντίστασης στο περιβάλλον με τη μορφή θερμικής ενέργειας.

* 13.7 ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο ότι η ενέργεια ενός αποσβεννύμενου ταλαντωτή μειώνεται συναρτήσει τού χρόνου, διότι η ενέργειά του διοχετεύεται στο περιβάλλον. Μπορούμε όμως να προσθέσουμε ενέργεια στο σύστημα εάν εφαρμόσουμε δύναμη η οποία παράγει θετικό έργο στο σύστημα και δρα στην ίδια κατεύθυνση με την δύναμη επαναφοράς. Λογουχάρη, όταν ένα παιδάκι κάνει κούνια, τό σπρώχνετε κάθε τόσο την κατάλληλη στιγμή. Εάν η ενέργεια που προσδίδουμε στο σύστημα ανά περίοδο είναι ίση με την αντίστοιχη απώλεια, τότε κρατούμε σταθερό το πλάτος τής ταλάντωσης.

Συνήθης τύπος εξαναγκασμένου ταλαντωτή είναι ένας αποσβεννύμενος ταλαντωτής με την πρόσθεση μιας ξένης δύναμης που μεταβάλλεται αρμονικά, όπως π.χ. $F = F_0 \cos \omega t$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα τής δύναμης και η F_0 είναι σταθερή. Εάν συμπεριλάβουμε την εξωτερική αυτή δύναμη, που θα τήν ονομάσουμε οδηγήτρια δύναμη, στην Εξίσωση κίνησης 13.30, έχουμε

$$F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (13.33)$$

Και πάλι δεν θα λύσουμε την εξίσωση. Θα σάς παρουσιάσουμε όμως την μερική λύση τής εξίσωσης, η οποία περιγράφει το σύστημά μας μετά από αρκετό χρόνο από την έναρξη τής ταλάντωσης, οπότε η προσφορά ενέργειας εξισορροπεί σε κάθε περίοδο την απώλεια ενέργειας. Τότε, δηλαδή, που το σύστημα έχει φτάσει στην λεγόμενη *σταθερή κατάσταση*, κατά την οποία η ταλάντωση συνεχίζεται με σταθερό πλάτος. Έτσι, στη σταθερή κατάσταση η λύση τής Εξίσωσης 13.33 είναι:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (13.34)$$

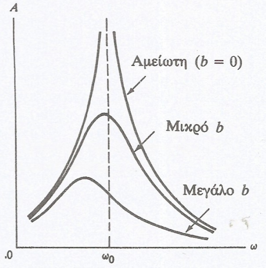
όπου

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad (13.35)$$

και όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ είναι η κυκλική συχνότητα τού αντίστοιχου αρμονικού ταλαντωτή ($b = 0$, $F = 0$). Θα μπορούσατε να έχετε μαντέψει με το φυσικό σας αισθητήριο ότι η συχνότητα ταλάντωσης στη σταθερή κατάσταση πρέπει να είναι ίδια με τη συχνότητα τής οδηγήτριας δύναμης, οπότε περιμένετε λύση σαν την Εξίσωση 13.34. Εάν θέσουμε την Έκφραση 13.34 στην Εξίσωση 13.33 θα δούμε ότι πράγματι είναι λύση τής διαφορικής εξίσωσης, υπό τον όρο όμως ότι το πλάτος που υπεισέρχεται στη λύση θα ισούται με εκείνο τής Έκφρασης 13.35.

Βλέπουμε από την Εξίσωση 13.35 ότι η ταλάντωση τού εξαναγκασμένου ταλαντωτή δεν αποσβέννυται, γιατί η οδηγήτρια δύναμη τόν εξαναγκάζει σε ταλάντωση. Δηλαδή, η οδηγήτρια δύναμη παρέχει την απαιτούμενη ενέργεια για να υπερνικηθούν οι απώλειες που δημιουργούν οι κάθε είδους τριβές και δυνάμεις ασωτείας. Ας σημειωθεί ότι ο ταλαντωτής ταλαντώνεται με την κυκλική συχνότητα ω τής οδηγήτριας δύναμης. Όταν η απόσβεση είναι μικρή (b μικρό), το πλάτος τής εξαναγκασμένης ταλάντωσης αυξάνεται όσο η συχνότητα ω τής οδηγήτριας δύναμης είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα τής ταλάντωσης, δηλαδή $\omega \approx \omega_0$, όπου ω_0 είναι η συχνότητα τού αντίστοιχου αρμονικού ταλαντωτή. Η γρήγορη αύξηση τού πλάτους κοντά στην ιδιοσυχνότητα ονομάζεται **συντονισμός** και η συχνότητα ω_0 είναι **η συχνότητα συντονισμού** τού συστήματος.

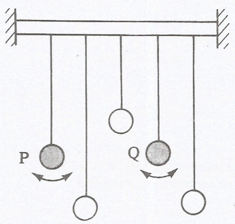
Από φυσική σκοπιά, η μεγάλη αύξηση τού πλάτους στην συχνότητα ταλάντωσης οφείλεται στο ότι τότε μεταφέρεται ενέργεια στο σύστημα κατά τον βέλτιστο τρόπο. Για να τό καταλάβετε αυτό πάρτε την πρώτη ως προς τον χρόνο παράγωγο τού x, δηλαδή την ταχύτητα τού ταλαντωτή. Θα δείτε ότι η v είναι ανάλογη προς το $\sin(\omega t + \delta)$. Ο ρυθμός με τον οποίο η οδηγήτρια δύναμη F προσφέρει έργο (δηλαδή η ισχύς) στο σύστημα είναι Fv. Όταν όμως η F και η v έχουν την ίδια φάση, τότε το γινόμενό τους είναι θετικό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κατά τον *συντονισμό η οδηγήτρια δύναμη βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα και έτσι η ισχύς μεταφέρεται από την οδηγήτρια δύναμη στον ταλαντωτή κατά τον βέλτιστο τρόπο.*



Σχήμα 13.18 Γραφική παράσταση τού πλάτους ως προς τη συχνότητα για αποσβεννύμενο ταλαντωτή που διεγείρεται από εξωτερική περιοδική δύναμη. Το φαινόμενο τού συντονισμού συμβαίνει όταν η κυκλική συχνότητα τής οδηγήτριας δύναμης ισούται με την κυκλική ιδιοσυχνότητα, ω_0, τού συστήματος. Σημειώστε ότι το σχήμα τής καμπύλης συντονισμού εξαρτάται από το μέγεθος τής σταθεράς απόσβεσης, b.

Στο Σχήμα 13.18 βλέπουμε γραφική απεικόνιση τού πλάτους, ως συνάρτηση τής συχνότητας τής οδηγήτριας δύναμης, με ή χωρίς δυνάμεις τριβής (ασωτείας). Ας σημειωθεί ότι καθώς η απόσβεση μειώνεται ($b \to 0$), το πλάτος αυξάνεται. Επίσης, η καμπύλη συντονισμού ευρύνεται καθώς αυξάνεται η απόσβεση. Σε σταθερή κατάσταση, για οποιαδήποτε συχνότητα τής οδηγήτριας δύναμης, η ενέργεια που παίρνει το σύστημα από την οδηγήτρια δύναμη είναι ίση με την ενέργεια που μεταφέρει στο περιβάλλον η επιβραδύνουσα δύναμη· έτσι παραμένει σταθερή η μέση ενέργεια τού ταλαντωτή. Όταν δεν υπάρχει επιβραδύνουσα δύναμη ($b = 0$), βλέπουμε από την Εξίσωση 13.35 ότι το πλάτος τής ταλάντωσης σταθερής κατάστασης τείνει στο άπειρο καθώς η συχνότητα τής οδηγήτριας δύναμης $\omega \to \omega_0$. Με άλλα λόγια, εάν δεν υπάρχει τρόπος απορρόφησης τής ενέργειας τού συστήματος από το περιβάλλον και εμείς προσδίδουμε ενέργεια μέσω τής ημιτονοειδούς οδηγήτριας δύναμης σε έναν αρχικά ακίνητο ταλαντωτή σε φάση με την ταχύτητα ταλάντωσης, το πλάτος τής ταλάντωσης αυξάνεται απεριόριστα (Σχήμα 13.18). Στην πραγματικότητα, βέβαια, αυτό δεν συμβαίνει, διότι πάντοτε υπάρχει κάποια απόσβεση (τριβή). Δηλαδή, κατά τον συντονισμό το πλάτος θα είναι πάρα πολύ μεγάλο αλλά όχι άπειρο για μικρή απόσβεση.

Ένα απλό πείραμα που δείχνει το φαινόμενο τού συντονισμού απεικονίζεται στο Σχήμα 13.19. Εκκρεμή με διαφορετικά μήκη είναι αναρτημένα από ένα τεντωμένο νήμα. Εάν ταλαντώσουμε ένα μόνον εκκρεμές, λ.χ. το P, θα ταλαντωθούν και τα υπόλοιπα, επειδή συνδέονται μέσω τού οριζόντιου νήματος. Από όλα τα εκκρεμή που, λόγω τής σύζευξής τους, υποχρεώνονται να ταλαντωθούν, το εκκρεμές Q, που έχει το ίδιο μήκος με το P (και επομένως τα εκκρεμή P και Q έχουν την ίδια ιδιοσυχνότητα), θα ταλαντωθεί με το μεγαλύτερο πλάτος.



Σχήμα 13.19 Εάν το εκκρεμές P αρχίσει να ταλαντώνεται, κάποτε το εκκρεμές Q θα έχει το μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης λόγω τής σύζευξής τους και επειδή έχουν την ίδια ιδιοσυχνότητα.

Στη συνέχεια τού συγγράμματός μας θα δείτε ότι το φαινόμενο τού συντονισμού τό συναντούμε σε διάφορα μέρη τής Φυσικής. Λογουχάρη, πολλά ηλεκτρικά κυκλώματα έχουν ιδιοσυχνότητες (δηλαδή συχνότητες συντονισμού). Ακόμη και πολύπλοκες κατασκευές, όπως είναι λ.χ. οι γέφυρες, έχουν ιδιοσυχνότητες που μπορούν να συντονιστούν από την κατάλληλη οδηγήτρια δύναμη. Ένα κλασικό παράδειγμα τέτοιου συντονισμού με στατικά στοιχεία συνέβη το 1940, οπότε κατέρρευσε η γέφυρα Tacoma Narrows στην Πολιτεία Washington τών Ηνωμένων Πολιτειών λόγω συντονισμένων ταλαντώσεων. Η γέφυρα δεν κατέρρευσε εξαιτίας τής δύναμης τού ανέμου αυτής καθ' εαυτήν (ο άνεμος δεν ήταν τόσο πολύ ισχυρός), αλλά διότι ο άνεμος, καθώς φυσούσε, δημιούργησε στροβίλους με συχνότητα που ταίριασε με την ιδιοσυχνότητα τής γέφυρας. Το δοκίμιο στο τέλος τού κεφαλαίου αυτού αναλύει λεπτομερώς το αξιοσημείωτο αυτό συμβάν.

Μπορούμε να δώσουμε πολλά άλλα παραδείγματα ταλαντώσεων συντονισμού. Ένα σύνηθες παράδειγμα που γνωρίζετε όλοι είναι το σφύριγμα που ακούγεται από τα τηλεφωνικά καλώδια όταν φυσά άνεμος. Πολλές φορές, μηχανές έχουν καταστραφεί διότι κάποιο ταλαντούμενο κομμάτι τους είχε συντονιστεί με ένα άλλο κινούμενο μέρος τής μηχανής. Τέλος, όταν τμήματα στρατού βαδίζουν με «βήμα» πάνω σε γέφυρα, συχνά διεγείρουν συχνότητες συντονισμού στη στατική δομή της, με αποτέλεσμα την κατάρρευση τής γέφυρας. Ένα τέτοιο πολύ γνωστό ατύχημα συνέβη στη Γαλλία το 1850: μια γέφυρα κατέρρευσε και 226 στρατιώτες σκοτώθηκαν. Από τότε, όταν ένα τμήμα στρατού περνάει πάνω από γέφυρα, οι στρατιώτες προχωρούν με ελεύθερο βηματισμό.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η απόσταση τού αρμονικού ταλαντωτή από την θέση ισορροπίας μεταβάλλεται περιοδικά συναρτήσει τού χρόνου σύμφωνα με τη σχέση

Η μετατόπιση συναρτήσει τού χρόνου για την απλή αρμονική κίνηση

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{13.1}$$

όπου A είναι το πλάτος τής ταλάντωσης ω η κυκλική συχνότητα και δ είναι η αρχική φάση τού ταλαντωτή η οποία εξαρτάται από την αρχική θέση και από την αρχική ταχύτητα τού απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Το χρονικό διάστημα για μια πλήρη ταλάντωση ονομάζεται **περίοδος** τής κίνησης και ορίζεται ως

Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{13.2}$$

Το αντίστροφο τής περιόδου ονομάζεται **συχνότητα** και δίνει τον αριθμό των ταλαντώσεων ανά δευτερόλεπτο.

Η **ταχύτητα** και η **επιτάχυνση** τής απλής αρμονικής κίνησης δίνονται από τις σχέσεις

Το μέτρο τής ταχύτητας στην απλή αρμονική κίνηση

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \delta) \tag{13.5}$$

Το μέτρο τής επιτάχυνσης στην απλή αρμονική κίνηση

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) \tag{13.6}$$

Έτσι βλέπουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα είναι ωA και η επιτάχυνση $\omega^2 A$. Η ταχύτητα τού ταλαντωτή είναι μηδενική στα ακραία σημεία, όπου $x = \pm A$, και το μέτρο τής ταχύτητας αποκτά την μέγιστη τιμή του στο σημείο ισορροπίας, όπου $x = 0$. Το μέτρο τής επιτάχυνσης έχει τη μέγιστη τιμή του στα ακραία σημεία και είναι μηδενική στην θέση ισορροπίας.

Ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας που ταλαντώνεται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια έχει περίοδο που ισούται με

Περίοδος ταλάντωσης για ταλαντωτή ελατηρίου

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.16}$$

όπου k είναι η σταθερά τού ελατηρίου και m είναι η μάζα η οποία είναι συνδεδεμένη με το ελατήριο.

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή μεταβάλλονται συναρτήσει τού χρόνου και ισούνται, αντίστοιχα, με

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια τού απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \delta) \tag{13.18}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \tag{13.19}$$

Η **ολική ενέργεια** ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι σταθερά τής κίνησης και ισούται με

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \tag{13.20}$$

Ολική ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η δυναμική ενέργεια ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι μέγιστη όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται στα ακραία σημεία (μέγιστη μετατόπιση από την θέση ισορροπίας) και είναι μηδενική στη θέση ισορροπίας. Η κινητική ενέργεια είναι μηδενική στα ακραία σημεία και μέγιστη όταν ο ταλαντωτής διέρχεται από την θέση ισορροπίας.

Ένα **απλό εκκρεμές,** μήκους L, όταν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, για μικρές εκτροπές από την κατακόρυφο η *περίοδός* του είναι ίση με

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.24}$$

Περίοδος ταλάντωσης τού απλού εκκρεμούς

Όπως βλέπουμε, η περίοδος είναι *ανεξάρτητη* από τη μάζα.

Ένα **φυσικό εκκρεμές** ταλαντώνεται με απλή αρμονική κίνηση γύρω από άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Η περίοδος τής ταλάντωσής του είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{13.26}$$

Περίοδος ταλάντωσης τού φυσικού εκκρεμούς

όπου I είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο ταλαντώνεται και d είναι η απόσταση τού κέντρου μάζας από τον άξονα εξάρτησης.

Εάν σε μια ταλάντωση υπάρχει επιβραδύνουσα δύναμη, τότε η ταλάντωση είναι **αποσβεννύμενη ή φθίνουσα**. Εάν ένα τέτοιο σύστημα αρχίσει να ταλαντώνεται και κατόπιν αφεθεί μόνο του, η μηχανική του ενέργεια ελαττώνεται συνεχώς λόγω τής παρουσίας τής μη διατηρητικής επιβραδύνουσας δύναμης. Είναι δυνατόν να αντικαθιστούμε την ενέργεια που χάνεται εάν εφαρμόζουμε στο σύστημα μια εξωτερική περιοδική δύναμη που βρίσκεται σε φάση με την κίνηση τού συστήματος. Όταν η συχνότητα τής οδηγήτριας δύναμης συμπέσει με την ιδιοσυχνότητα τού αντίστοιχου *απλού αρμονικού ταλαντωτή*, τότε μεταφέρεται ενέργεια στον ταλαντωτή και το πλάτος τής ταλάντωσης αυξάνεται απεριόριστα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Ποια είναι η συνολική απόσταση την οποία καλύπτει ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση μέσα σε διάστημα ίσο με την περίοδό του εάν το πλάτος τής ταλάντωσης είναι A;

2. Εάν η συνιστώσα x ενός σώματος μεταβάλλεται ως $x = -A\cos\omega t$, ποια είναι η σταθερά φάσης δ στην Εξίσωση 13.1; Σε ποιο σημείο αρχίζει το σώμα την κίνησή του;

3. Είναι ίση απαραίτητα η μετατόπιση ενός ταλαντωτή για το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως t (όπου t είναι οποιοσδήποτε χρόνος) με την θέση του ταλαντωτή τη στιγμή t; Εξηγήστε.

4. Προσδιορίστε ποιές από τις παρακάτω ποσότητες μπορεί να έχουν την ίδια κατεύθυνση για έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή: (a) μετατόπιση και ταχύτητα· (b) ταχύτητα και επιτάχυνση· (c) μετατόπιση και επιτάχυνση.

5. Μπορείτε να υπολογίσετε το πλάτος A και την αρχική φάση δ ενός ταλαντωτή εάν γνωρίζετε μόνον την θέση κατά τη στιγμή $t = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση ενός συστήματος μάζας - ελατηρίου χωρίς να αγνοήσετε το βάρος τού ελατηρίου.

7. Εάν αναρτήσετε κατακόρυφα ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου και τού δώσετε αρχική ταλάντωση γιατί, τελικά, το σύστημα παύει να κινείται;

8. Εξηγήστε γιατί η δυναμική ή η κινητική ενέργεια ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου δεν μπορεί να είναι ποτέ αρνητική.

9. Ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου ταλαντώνεται με απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A. Εάν διπλασιαστεί η μάζα, και το πλάτος παραμείνει σταθερό, μεταβάλλεται η ολική ενέργεια; Εξαρτάται η δυναμική ή η κινητική ενέργεια από τη μάζα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

10. Μεταβάλλεται η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς εάν διπλασιαστεί το μήκος τού νήματος; Μεταβάλλεται η