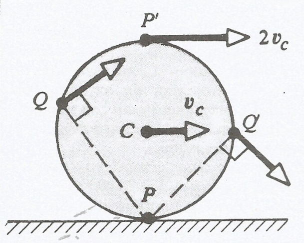
ΤΡΙΤΗ 09/12/2020

ΔΙΑΛΕΞΗ 10

ΚΥΛΙΣΗ - ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ - ΡΟΠΗ



11

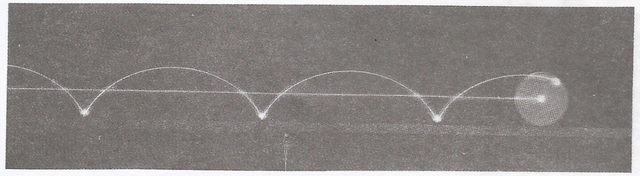
Κύλιση, στροφορμή και ροπή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μάθαμε πώς να αναλύουμε την περιστροφή ενός στερού σώματος γύρω από έναν σταθερό άξονα. Στο κεφάλαιο αυτό μεταξύ άλλων θα δούμε πώς αναλύουμε την περίπτωση κατά την οποία ο άξονας περιστροφής δεν είναι σταθερός στον χώρο. Αρχίζουμε με την περιγραφή τής κύλισης ενός αντικειμένου, λ.χ. ενός κυλίνδρου ή μιας σφαίρας. Κατόπιν ορίζουμε το διανυσματικό γινόμενο. Το διανυσματικό γινόμενο είναι ένα βολικό μαθηματικό εργαλείο για να περιγράφουμε ποσότητες όπως είναι η ροπή ή η στροφορμή. Κεντρικό θέμα τού κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη τής έννοιας τής στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων, έννοιας η οποία αποτελεί κλειδί στη δυναμική των περιστροφών. Θα δούμε ότι, σε αντιστοιχία με τη διατήρηση τής γραμμικής ορμής, η στροφορμή οποιουδήποτε απομονωμένου συστήματος (όπως λ.χ. είναι ένα απομονωμένο στερεό σώμα ή ένα απομονωμένο σμήνος σωματίων) διατηρείται πάντοτε. Αυτός ο νόμος διατήρησης είναι ειδική περίπτωση τού νόμου σύμφωνα με τον οποίο ο ρυθμός μεταβολής τής ολικής στροφορμής οποιουδήποτε συστήματος σωμάτων ισούται με την ολική ροπή τών εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω στο σύστημα.

11.1 ΚΥΛΙΣΗ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν κινούμενο άξονα. Η περιγραφή τής γενικής κίνησης ενός στερεού σώματος στον χώρο είναι πρόβλημα πολύπλοκο. Μπορούμε όμως να απλουστεύσουμε την μελέτη μας εάν περιοριστούμε σε ομογενή σώματα τα οποία έχουν συμμετρικό σχήμα, όπως είναι ένας κύλινδρος, μια σφαίρα ή ένα στεφάνι. Θα υποθέσουμε επί πλέον ότι το σώμα κυλίεται πάνω σε ένα επίπεδο.

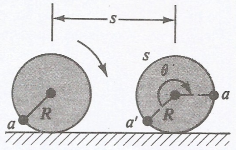
Υποθέστε ότι ένας κύλινδρος κινείται πάνω σε ευθύγραμμη διαδρομή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.1. Το κέντρο μάζας του διαγράφει ευθεία



Σχήμα 11.1 Τα λαμπάκια που έχουν προσαρμοστεί στην περιφέρεια και στο κέντρο ενός κυλιόμενου κυλίνδρου δείχνουν τις διαδρομές που διαγράφουν τα σημεία αυτά. Το κέντρο κινείται ευθύγραμμα. (Φωτογραφία Henry Leap και Jim Lehman).

γραμμή, ενώ ένα σημείο τής περιμέτρου τού κυλίνδρου διαγράφει πιο σύνθετη τροχιά, που αντιστοιχεί στην τροχιά μιας κυκλοειδούς. Όπως θα δούμε αργότερα στο κεφάλαιο αυτό, για διευκόλυνσή μας θα θεωρήσουμε την κίνηση αυτή ως σύνθεση τής περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας και τής γραμμικής μεταφοράς τού κέντρου μάζας.

Θεωρήστε τώρα ότι ένας ομογενής κύλινδρος, ακτίνας R, κυλίεται πάνω σε τραχιά οριζόντια επιφάνεια (Σχήμα 11.2). Καθώς ο κύλινδρος περιστρέφεται κατά γωνία θ, το κέντρο μάζας του μετατοπίζεται κατά $s = R\theta$. Επομένως, η ταχύτητα και η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας για *αμιγή κύλιση* ισούνται με

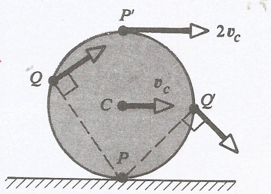


Σχήμα 11.2 Στην περίπτωση τής κύλισης, καθώς ο κύλινδρος περιστρέφεται κατά γωνία θ, το κέντρο τού κυλίνδρου μετατοπίζεται κατά απόσταση $s = R\theta$.

$$v_c = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{11.1}$$

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{11.2}$$

Οι γραμμικές ταχύτητες διαφόρων σημείων τού κυλίνδρου απεικονίζονται στο Σχήμα 11.3. Να σημειωθεί ότι η κατεύθυνση τής γραμμικής ταχύτητας κάθε σημείου είναι κάθετη προς τη γραμμή που τό ενώνει με το σημείο επαφής. Εάν δεν υπάρχει ολίσθηση, τότε το σημείο επαφής P ηρεμεί σε σχέση με την επιφάνεια.



Σχήμα 11.3 Όλα τα σημεία ενός κυλιόμενου σώματος κινούνται σε κατεύθυνση κάθετη προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής P. Το κέντρο τού σώματος κινείται με ταχύτητα v_c, ενώ το σημείο P' κινείται με ταχύτητα $2v_c$.

Ένα τυχαίο σημείο πάνω στον κύλινδρο, λ.χ. το Q, έχει οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα τής ταχύτητας. Το σημείο όμως P και P' και το κέντρο μάζας απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Το κέντρο μάζας κινείται με ταχύτητα $v_c = R\omega$ σε σχέση με την επιφάνεια επάνω στην οποία κυλίεται ο κύλινδρος, ενώ η ταχύτητα τού P είναι μηδενική. Το σημείο P' έχει ταχύτητα ίση με $2v_c = 2R\omega$, επειδή όλα τα σημεία τού κυλίνδρου έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η ολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου κυλίνδρου είναι

$$K = \tfrac{1}{2}I_P\omega^2 \tag{11.3}$$

όπου I_p είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο P. Εφαρμόζουμε το θεώρημα τών παράλληλων αξόνων και βρίσκουμε ότι $I_p = I_c + MR^2$. Θέτουμε το αποτέλεσμα αυτό στην εξίσωση 11.3 και έχουμε

$$K = \tfrac{1}{2}I_c\omega^2 + \tfrac{1}{2}MR^2\omega^2$$

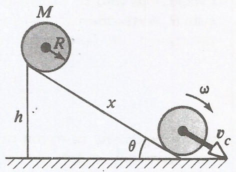
Ολική κινητική ενέργεια κυλιόμενου σώματος

$$K = \tfrac{1}{2}I_c\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_c^{\,2} \tag{11.4}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή σχέση $v_c = R\omega$.

Μπορούμε να σχολιάσουμε την Εξίσωση 11.4 ως εξής: Ο πρώτος όρος, $\frac{1}{2}I_c\omega^2$, περιγράφει την κινητική ενέργεια περιστροφής τού κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του, ενώ ο όρος $\frac{1}{2}Mv_c^{\,2}$ αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια τού κυλίνδρου εάν αυτός πραγματοποιούσε μόνο μεταφορική κίνηση στον χώρο χωρίς περιστροφές. Λέμε λοιπόν ότι

> **η ολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος είναι το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας και τής κινητικής ενέργειας η οποία αντιστοιχεί στη μεταφορική κίνηση τού κέντρου μάζας.**



Σχήμα 11.4 Σώμα κυκλικής διατομής κυλίεται προς τα κάτω. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται εάν δεν υπάρχει ολίσθηση.

Μπορούμε πιο εύκολα να λύσουμε προβλήματα κύλισης σε τραχύ κεκλιμένο επίπεδο εάν χρησιμοποιήσουμε σχέσεις ενέργειας. Θα υποθέσουμε ότι το στερεό σώμα τού Σχήματος 11.4 δεν ολισθαίνει και ότι αρχικά ηρεμούσε στο επάνω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου. Δεν πρέπει να μάς διαφεύγει ότι για να υπάρξει κύλιση είναι απαραίτητη η ύπαρξη δύναμης τριβής ανάμεσα στο αντικείμενο και στο κεκλιμένο επίπεδο, διότι έτσι δημιουργείται η απαραίτητη ροπή γύρω από το κέντρο μάζας. Μολονότι όμως υπάρχει τριβή, δεν υπάρχουν απώλειες μηχανικής ενέργειας, διότι το σημείο επαφής, ανά πάσα στιγμή, είναι ακίνητο σε σχέση με το κεκλιμένο επίπεδο. Αλλά εάν το στερεό σώμα ολισθαίνει, προφανώς χάνει μηχανική ενέργεια λόγω τής τριβής.

Γνωρίζουμε ότι $v_c = R\omega$ προκειμένου για κύλιση. Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 11.4 ως

$$K = \tfrac{1}{2}I_c\left(\frac{v_c}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2}Mv_c^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\frac{I_c}{R^2} + M\right)v_c^2 \qquad (11.5)$$

Όταν ο κυλιόμενος κύλινδρος φτάσει στο κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου ύψους h, θα έχει χάσει δυναμική ενέργεια ίση προς Mgh. Εάν το σώμα αρχικά ηρεμούσε στο επάνω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου, η κινητική ενέργεια που θα έχει όταν φτάσει στο κάτω μέρος, όπως τήν δίνει η Εξίσωση 11.5, ισούται με τη δυναμική ενέργεια την οποία είχε το σώμα στην κορυφή. Εξισώνουμε τις δύο ποσότητες, λύνουμε ως προς v_c, την ταχύτητα τού κέντρου μάζας, και βρίσκουμε:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{I_c}{R^2} + M\right)v_c^2 = Mgh$$

$$v_c = \left(\frac{2gh}{1 + I_c/MR^2}\right)^{1/2} \qquad (11.6)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.1 Σφαίρα που κυλίεται προς το κάτω μέρος κεκλιμένου επιπέδου

5ος

Υποθέστε ότι το στερεό σώμα τού Σχήματος 11.4 είναι συμπαγής σφαίρα. Υπολογίστε την ταχύτητα τού κέντρου μάζας της όταν φτάνει στο κάτω μέρος· προσδιορίστε τη γραμμική επιτάχυνση τού κέντρου μάζας τής σφαίρας.

Λύση Γνωρίζουμε ότι, για συμπαγή ομογενή σφαίρα, $I_c = \frac{2}{5}MR^2$ Έτσι η Εξίσωση 11.6 δίνει

$$v_c = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}\frac{MR^2}{MR^2}}\right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

Γνωρίζουμε από τη Στοιχειώδη Τριγωνομετρία ότι $h = x \sin\theta$. Αντικαθιστούμε και υψώνουμε τα δύο μέλη στο τετράγωνο και βρίσκουμε ότι

$$v_c^2 = \frac{10}{7}gx \sin\theta$$

εάν συγκρίνουμε τη σχέση αυτή με τη γνωστή μας από την Κινητική σχέση $v_c^2 = 2a_cx$, βρίσκουμε ότι η επιτάχυνση είναι

$$a_c = \tfrac{5}{7}g \sin\theta$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι *ανεξάρτητες* από τη μάζα και την ακτίνα τής σφαίρας! Δηλαδή, *όλες οι ομογενείς συμπαγείς σφαίρες έχουν την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση σε ένα δεδομένο κεκλιμένο επίπεδο*. Βρίσκουμε παρόμοια αποτελέσματα εάν επαναλάβουμε τον παραπάνω υπολογισμό για τις περιπτώσεις *κοίλης* σφαίρας, συμπαγούς κυλίνδρου ή στεφανιού. Οι αριθμητικοί συντελεστές τών αποτελεσμάτων για v_c και a_c εξαρτώνται από την ροπή αδράνειας τού συγκεκριμένου σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του. Σε όλες τις περιπτώσεις όμως η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι *μικρότερη* από το $g \sin\theta$, που θα ήταν η επιτάχυνση εάν το κεκλιμένο επίπεδο ήταν λείο και επομένως δεν υπήρχε κύλιση.

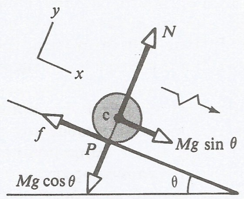
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.2 Δεύτερος τρόπος λύσης τού προβλήματος τής κυλιόμενης σφαίρας

5ος

Θα ξαναλύσουμε το πρόβλημα τού προηγούμενου παραδείγματος αλλά με τη χρησιμοποίηση δυνάμεων. Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος απεικονίζεται στο Σχήμα 11.5.

Λύση Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στην κίνηση τού κέντρου μάζας και έχουμε

$$(1) \qquad \sum F_x = Mg \sin\theta - f = Ma_c$$
$$\sum F_y = N - Mg \cos\theta = 0$$



Σχήμα 11.5 (Παράδειγμα 11.2) Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για την περίπτωση κυλιόμενης σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο.

όπου ο άξονας x είναι παράλληλος προς το κεκλιμένο επίπεδο και η θετική του κατεύθυνση είναι προς τα κάτω. Ας βρούμε τη σχέση που περιγράφει τη ροπή που δρα πάνω στην σφαίρα. Για διευκόλυνσή μας θα χρησιμοποιήσουμε έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο τού σχήματος ο οποίος διέρχεται από το κέντρο τής σφαίρας[1]. Επειδή το βάρος $M\boldsymbol{g}$ και η κάθετη δύναμη $\boldsymbol{N}$ διέρχονται από το κέντρο μάζας, έχουν μηδενικό μοχλοβραχίονα και δεν συνεισφέρουν στη ροπή. Αλλά η δύναμη τής τριβής δημιουργεί ροπή γύρω από τον άξονα αυτό ίση με fR και με κατεύθυνση κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού. Επομένως

$$\tau_c = fR = I_c\alpha$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι $I_c = \frac{2}{5}MR^2$ και $\alpha = a_c/R$. Έτσι

$$(2) \qquad f = \frac{I_c\alpha}{R} = \left(\frac{\frac{2}{5}MR^2}{R}\right)\frac{a_c}{R} = \frac{2}{5}Ma_c$$

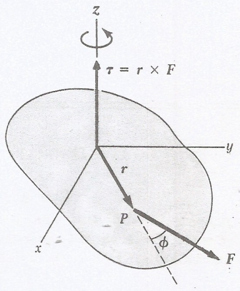
$$a_c = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

θέτουμε τη (2) στην (1) και βρίσκουμε αποτέλεσμα που συμπίπτει με το αποτέλεσμα τού Παραδείγματος 11.1. Ας σημειωθεί ότι το $a_c < g\sin\theta$ οφείλεται στην επιβραδύνουσα δύναμη τριβής.

[1] Να σημειωθεί ότι, αν και το σύστημα κέντρου μάζας τού παραδείγματός μας δεν είναι αδρανειακό επειδή επιταχύνεται, η σχέση $\tau_c = I\alpha$ εξακολουθεί να ισχύει για το σύστημα κέντρου μάζας.

11.2 ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ Η ΡΟΠΗ

Θεωρήστε ότι μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ δρα πάνω σε ένα στερεό σώμα στο σημείο που έχει επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}$ (Σχήμα 11.6). *Υποθέτουμε ότι το σύστημα συντεταγμένων που έχει την αρχή του στο O είναι αδρανειακό και, γι' αυτό, ισχύει ο δεύτερος νόμος τού Newton.* Γνωρίζουμε ότι εξ ορισμού *το μέτρο* τής ροπής την οποία ασκεί η δύναμη $\boldsymbol{F}$ σε σχέση με την αρχή τών συντεταγμένων ισούται με $rF\sin\phi$, όπου ϕ είναι η γωνία που περιέχεται από τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$. Ο άξονας γύρω από τον οποίον η $\boldsymbol{F}$ τείνει να περιστρέψει το σώμα είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$. Εάν η δύναμη κείται στο επίπεδο xy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.6, τότε συμβολίζουμε τη ροπή $\boldsymbol{\tau}$ με ένα διάνυσμα παράλληλο προς τον άξονα τών z. Η δύναμη τού Σχήματος 11.6 δημιουργεί ροπή η οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα σε φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών ρολογιού για έναν παρατηρητή που κοιτάζει παράλληλα προς την κατεύθυνση τού αρνητικού άξονα z. Έτσι, λοιπόν, η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\tau}$ είναι προς τον θετικό άξονα z. Εάν μεταβάλουμε την κατεύθυνση τής $\boldsymbol{F}$ κατά 180°, τότε και η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\tau}$ θα μεταβληθεί κατά 180° και θα λάβει κατεύθυνση προς τον αρνητικό άξονα z. Η ροπή συνεπάγεται, για να οριστεί, δύο διανύσματα, $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$, και εξ ορισμού είναι ίση προς το *διανυσματικό γινόμενο*, το οποίο ορισμένες φορές λέγεται και *εξωτερικό γινόμενο* τών διανυσμάτων $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$:



Σχήμα 11.6 Η κατεύθυνση τού διανύσματος τής ροπής $\boldsymbol{\tau}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}$ και η εφαρμοσμένη δύναμη $\boldsymbol{F}$.

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{11.7}$$

Ας δώσουμε τώρα έναν αυστηρότερο ορισμό τού διανυσματικού γινομένου. Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο τό συμβολίζουμε με $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ και ορίζουμε ότι είναι ίσο με ένα τρίτο διάνυσμα, $\boldsymbol{C}$, που έχει *μέτρο* $AB\sin\theta$, όπου θ είναι η γωνία που περιέχεται ανάμεσα στα διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Έτσι γράφουμε ότι

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{11.8}$$

και το μέτρο του είναι

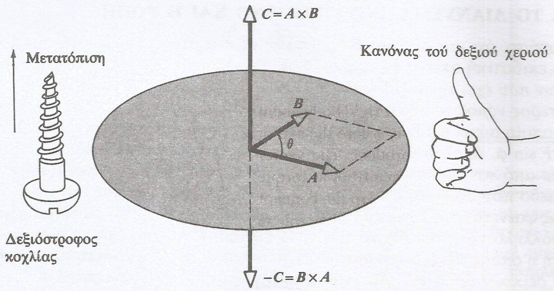
$$C \equiv |\boldsymbol{C}| = |AB\sin\theta| \tag{11.9}$$

Να σημειωθεί ότι η ποσότητα $AB \sin\theta$ ισούται με την επιφάνεια τού παραλληλογράμμου το οποίο σχηματίζουν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.7. Η *διεύθυνση* τού $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ είναι κάθετη στο επίπεδο το οποίο ορίζεται από τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ (βλ. Σχήμα 11.7) και η κατεύθυνσή της καθορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία, καθώς μετατοπίζεται στρεφόμενος από το $\boldsymbol{A}$ προς το $\boldsymbol{B}$ και σαρώνει τη γωνία θ. Είναι πιο εύκολο να βρούμε την κατεύθυνση τού $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τού δεξιού χεριού όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 11.7. Χρησιμοποιούμε το δεξί μας χέρι έτσι ώστε τα τέσσερα δάκτυλα να δείχνουν προς την κατεύθυνση τού πρώτου από τα δύο πολλαπλασιαζόμενα μεταξύ τους διανύσματα, δηλαδή τού $\boldsymbol{A}$. Κατόπιν στρέφουμε τα δάκτυλά μας προς το $\boldsymbol{B}$ σαρώνοντας τη γωνία θ. Η κατεύθυνση τού αντίχειρα μας δείχνει την κατεύθυνση τού $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. Το $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ εκφέρεται και ως $\boldsymbol{A}$ «κρος» $\boldsymbol{B}$ και γι' αυτό, συχνά, το διανυσματικό γινόμενο λέγεται και γινόμενο *κρος*.

Μερικές από τις ιδιότητες τού διανυσματικού γινομένου οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό του, είναι οι εξής:

1. Η σειρά με την οποία δύο διανύσματα πολλαπλασιάζονται για να βρούμε το διανυσματικό τους γινόμενο έχει σημασία (εν αντιθέσει προς το εσωτερικό γινόμενο), δηλαδή

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{11.10}$$



Σχήμα 11.7 Το διανυσματικό γινόμενο $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα $\boldsymbol{C}$, μέτρου $AB \sin\theta$ (που ισούται με την επιφάνεια τού παραλληλογράμμου τού σχήματος). Η διεύθυνση τού $\boldsymbol{C}$ είναι κάθετη προς το επίπεδο που ορίζουν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ και η κατεύθυνσή του δίνεται από τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία.

Επομένως, εάν μεταβάλουμε τη σειρά τών παραγόντων τού διανυσματικού γινομένου πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο. Είναι ενδιαφέρον να τό επιβεβαιώσετε αυτό χρησιμοποιώντας τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία (Σχήμα 11.7).

2. Εάν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι παράλληλα (ή αντιπαράλληλα), τότε $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$. Επομένως, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$
3. Εάν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετα, τότε $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB$
4. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι το διανυσματικό γινόμενο ακολουθεί τον *επιμεριστικό κανόνα*, δηλαδή

Ιδιότητες τού διανυσματικού γινομένου

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{11.11}$$

5. Τέλος, η παράγωγος τού διανυσματικού γινομένου ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως λ.χ. τον χρόνο t, είναι

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} \tag{11.12}$$

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά τών παραγόντων τού γινομένου $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (να μην ξεχνούμε, δηλαδή, την Εξίσωση 11.10).

Σάς δίνουμε ως άσκηση να χρησιμοποιήσετε τις εξισώσεις 11.8 και 11.9 και τον ορισμό τών μοναδιαίων διανυσμάτων για να αποδείξετε ότι για τα ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ και $\boldsymbol{k}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

Διανυσματικό γινόμενο μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0 \tag{11.13a}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \tag{11.13b}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \tag{11.13c}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \tag{11.13d}$$

Τα πρόσημα μετατίθενται· λογουχάρη $\boldsymbol{i} \times (-\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{k}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορίζουσες για να εκφράσουμε το διανυσματικό γινόμενο *οποιωνδήποτε* διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα και βρίσκουμε

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} \tag{11.14}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.3 Το διανυσματικό γινόμενο

Τα διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ κείνται στο επίπεδο xy και ισούνται με $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$. Βρείτε το $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ και επαληθεύσετε ότι $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Λύση Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις 11.13a έως 11.13d που δίνουν το εξωτερικό γινόμενο μοναδιαίων διανυσμάτων και βρίσκουμε

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\times(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})$$
$$= 2\boldsymbol{i}\times 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{j}\times(-\boldsymbol{i}) = 4\boldsymbol{k} + 3\boldsymbol{k} = 7\boldsymbol{k}$$

Παραλείπουμε τους μηδενικούς όρους $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = 0$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = (-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})$$
$$= -\boldsymbol{i}\times 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{j}\times 2\boldsymbol{i} = -3\boldsymbol{k} - 4\boldsymbol{k} = -7\boldsymbol{k}$$

Επομένως, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 11.8, με $A_x = 2$, $A_y = 3$, $A_z = 0$ και $B_x = -1$, $B_y = 2$, $B_z = 0$. Έτσι βρίσκουμε

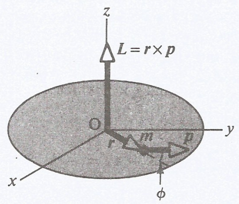
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (0)\boldsymbol{i} + (0)\boldsymbol{j} + [2\times 2 - 3\times(-1)]\boldsymbol{k} = 7\boldsymbol{k}$$

Άσκηση 1 Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα τού παραδείγματος αυτού και την Εξίσωση 11.9 για να βρείτε τη γωνία την οποία περιέχουν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.
Απάντηση 60.3°.

11.3 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ένα σώμα μάζας m έχει επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}$ και κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ (Σχήμα 11.8).

Η *στιγμιαία στροφορμή* $\boldsymbol{L}$ τού σώματος ως προς την αρχή O εξ ορισμού είναι ίση με το διανυσματικό γινόμενο τής επιβατικής του ακτίνας $\boldsymbol{r}$ επί (κρος!) την στιγμιαία γραμμική του ορμή $\boldsymbol{p}$:



Σχήμα 11.8 Η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ ενός σώματος μάζας m και ορμής $\boldsymbol{p}$ που έχει επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}$ είναι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Η τιμή τού $\boldsymbol{L}$ εξαρτάται από την αρχή τών συντεταγμένων και είναι διάνυσμα κάθετο στο $\boldsymbol{r}$ και στο $\boldsymbol{p}$.

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{11.15}$$

Οι μονάδες τής στροφορμής στο SI είναι kg·m^2/s. Μην ξεχάσετε ποτέ ότι το μέτρο και η κατεύθυνση τής στροφορμής εξαρτώνται από την αρχή τών συντεταγμένων ως προς την οποία υπολογίζουμε το $\boldsymbol{L}$. Η διεύθυνση τού $\boldsymbol{L}$ είναι κάθετη προς το επίπεδο που ορίζεται από τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{p}$ και η κατεύθυνσή του δίνεται από τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία. Λογουχάρη, στο Σχήμα 11.8, τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{p}$ κείνται στο επίπεδο xy, οπότε το $\boldsymbol{L}$ έχει την κατεύθυνση τού θετικού άξονα z. Επειδή $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, το μέτρο τού $\boldsymbol{L}$ είναι

$$L = mvr \sin \phi \tag{11.16}$$

όπου ϕ είναι η γωνία που περιέχεται ανάμεσα στα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{p}$. Προφανώς, το $\boldsymbol{L}$ είναι μηδενικό όταν η $\boldsymbol{p}$ είναι παράλληλη προς το $\boldsymbol{r}$ ($\phi = 0°$ ή $180°$). Με άλλα λόγια, όταν το σώμα κινείται επάνω σε ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή τών συντεταγμένων έχει μηδενική στροφορμή ως προς αυτήν την αρχή ή, με άλλα λόγια, δεν τείνει να περιστραφεί προς το σημείο αυτό. Εάν όμως το $\boldsymbol{r}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{p}$ ($\phi = 90°$), τότε το μέτρο τού $\boldsymbol{L}$ έχει τη μέγιστη τιμή του και ισούται με mrv. Τότε, δηλαδή, το σώμα έχει τη μέγιστη τάση να περιστραφεί γύρω από την αρχή. Στην περίπτωση αυτή το σώμα κινείται σαν να βρισκόταν επάνω στην περίμετρο ενός τροχού ο οποίος περιστρέφεται γύρω από την αρχή στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{p}$.

Μπορούμε να πούμε ότι ένα σώμα έχει μη μηδενική στροφορμή ως προς κάποιο σημείο εάν η επιβατική ακτίνα τού σώματος, ως προς το σημείο αυτό, περιστρέφεται γύρω από το σημείο. Εάν όμως το μήκος τής επιβατικής ακτίνας απλώς αυξάνεται ή ελαττώνεται, τότε το σώμα κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή τών συντεταγμένων καί, επομένως, έχει μηδενική στροφορμή ως προς το σημείο αυτό.

Όταν μελετούσαμε τη γραμμική κίνηση ενός σώματος είχαμε δει ότι η συνισταμένη τών δυνάμεων που δρουν πάνω σε ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής γραμμικής ορμής. Θα αποδείξουμε τώρα ότι επακόλουθο τού δεύτερου νόμου τού Newton είναι ότι η ολική ροπή που υφίσταται ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής του. Γράφουμε, λοιπόν, τη ροπή πάνω σε ένα σώμα ως

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{11.17}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$. Ας παραγωγίσουμε τώρα την Εξίσωση 11.15 ως προς τον χρόνο και ας χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τής Εξίσωσης 11.12.

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}_{=v} \times \boldsymbol{p} \quad = mv$$

Πρέπει να διατηρήσουμε τη σειρά τών παραγόντων, διότι $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Ο τελευταίος όρος τής προηγούμενης εξίσωσης είναι μηδέν, διότι το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ είναι παράλληλο προς το $\boldsymbol{p}$. Επομένως

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \underbrace{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}}_{= F} \tag{11.18}$$

Συγκρίνουμε τις εξισώσεις 11.17 και 11.18 και βρίσκουμε ότι

Η ροπή ισούται με τον ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{11.19}$$

που είναι ο αντίστοιχος νόμος, για τις περιπτώσεις περιστροφής, τού δεύτερου νόμου τού Newton $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$. Αυτό το αποτέλεσμα ορίζει λοιπόν ότι

> **η *ροπή* που δρα πάνω σε ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής τού σώματος.**

Πρέπει να σημειωθεί οπωσδήποτε ότι η Εξίσωση 11.19 ισχύει μόνον εάν η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ και η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ μετρώνται ως προς *το ίδιο σημείο*. Αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει μόνος του ότι εάν υπάρχουν περισσότερες από μία δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω στο σώμα, η Εξίσωση 11.19 εξακολουθεί να ισχύει, αλλά το $\boldsymbol{\tau}$ είναι η συνισταμένη ροπή όλων τών δυνάμεων που δρουν πάνω στο σώμα. *Επί πλέον, η σχέση αυτή ισχύει για κάθε αρχή συντεταγμένων η οποία είναι σταθερή σε ένα σύστημα αναφοράς.* Είναι προφανές ότι πρέπει και εδώ να υπολογίζουμε όλες τις ροπές και την στροφορμή ως προς το ίδιο σημείο.

Ένα σύστημα σωμάτων

Η ολική στροφορμή $\boldsymbol{L}$ ενός συστήματος σωμάτων ως προς κάποιο σημείο ισούται με το διανυσματικό άθροισμα τών στροφορμών καθενός από τα σώματα:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \cdots + \boldsymbol{L}_n = \sum \boldsymbol{L}_i$$

όπου το διανυσματικό άθροισμα περιλαμβάνει όλα τα n σώματα τού συστήματος.

Εάν οι επιμέρους ορμές τών σωμάτων μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο, τότε και η ολική στροφορμή θα μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο. Από τις εξισώσεις 11.17 έως 11.18 βρίσκουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής τής ολικής στροφορμής ισούται με το διανυσματικό άθροισμα *όλων* τών ροπών, δηλαδή τών ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις, καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις ανάμεσα στα σώματα τού συστήματος. Η ολική ροπή όμως τών εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Για να καταλάβουμε καλύτερα αυτό το σημείο ας θυμηθούμε τον τρίτο νόμο τού Newton, που μάς λέει ότι οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη, στα οποία οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και ότι κείνται επάνω στη γραμμή που ενώνει τα ζεύγη τών σωμάτων. Επομένως, η ροπή κάθε ζεύγους δράσης-αντίδρασης είναι μηδενική. Εάν κάνουμε την άθροιση, βλέπουμε ότι *η ολική εσωτερική ροπή είναι μηδενική.* Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ολική στροφορμή μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου *μόνο* όταν δρα επάνω στο σύστημα μη μηδενική *εξωτερική* ροπή. Έτσι έχουμε

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \sum \frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \boldsymbol{L}_i = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \qquad (11.20)$$

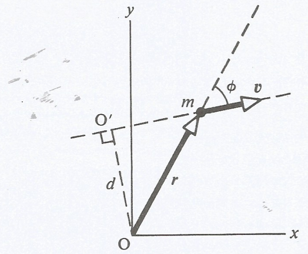
Δηλαδή

> **ο ρυθμός μεταβολής, ως προς τον χρόνο, τής ολικής στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων, όταν μετριέται ως προς κάποιο σημείο ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ισούται με τη συνισταμένη εξωτερική ροπή η οποία δρα επάνω στο σύστημα σωμάτων, όταν αυτή μετριέται ως προς το ίδιο σημείο.**

Ας σημειωθεί ότι η Εξίσωση 11.20 είναι το ανάλογο, ως προς την περιστροφή, τής σχέσης $\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = d\boldsymbol{p}/dt$ για ένα σύστημα σωμάτων (Κεφάλαιο 9).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.4 Γραμμική κίνηση

Ένα σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα στο επίπεδο xy με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ (Σχήμα 11.9). Ποιο είναι το μέτρο και ποια η κατεύθυνση τής στροφορμής ως προς την αρχή O;



Σχήμα 11.9 (Παράδειγμα 11.4) Ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ έχει στροφορμή μέτρου mvd ως προς το σημείο O, όπου η απόσταση τού O από την ευθεία τροχιά είναι $d = r \sin\phi$. Στο παράδειγμά μας το διάνυσμα $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ κατευθύνεται προς το επίπεδο τού σχήματος.

Λύση Από τον ορισμό τής στροφορμής γνωρίζουμε ότι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = rmv \sin\phi\,(-\boldsymbol{k})$. Επομένως, το μέτρο τής στροφορμής είναι

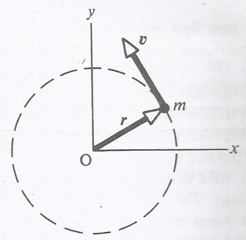
$$L = mvr \sin\phi = mvd$$

όπου η μικρότερη απόσταση τού σώματος από την αρχή τών συντεταγμένων είναι $d = r \sin\phi$. Από τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία προκύπτει ότι η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{L}$ είναι κάθετη προς το επίπεδο τής σελίδας και προς τα μέσα. Μπορούμε να γράψουμε ότι $\boldsymbol{L} = -(mvd)\boldsymbol{k}$. Είναι προφανές ότι η στροφορμή ως προς το σημείο O' είναι μηδενική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.5 Κυκλική κίνηση

Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο xy σε κυκλική τροχιά ακτίνας r, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.10. (a) Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση τής στροφορμής ως προς το O όταν η ταχύτητά του είναι $\boldsymbol{v}$.

Λύση Επειδή το $\boldsymbol{r}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{v}$, $\phi = 90°$, και το μέτρο τού $\boldsymbol{L}$ είναι



Σχήμα 11.10 (Παράδειγμα 11.5). Ένα σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r έχει στροφορμή μέτρου mvr ως προς το κέντρο τού κύκλου. Το διάνυσμα $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ στο παράδειγμά μας κατευθύνεται προς τον αναγνώστη.

$$L = mvr \sin 90° = mvr \qquad (\text{για } \boldsymbol{r} \text{ κάθετο στο } \boldsymbol{v})$$

Η διεύθυνση τού $\boldsymbol{L}$ είναι κάθετη στο επίπεδο τού κύκλου και η κατεύθυνσή του εξαρτάται από την κατεύθυνση τού $\boldsymbol{v}$. Εάν το $\boldsymbol{v}$ έχει φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.10 τότε, εάν εφαρμόσουμε τον κανόνα τού δεξιού χεριού, το $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, κατευθύνεται έξω από τη σελίδα (επάνω σας!). Έτσι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση $\boldsymbol{L} = (mvr)\boldsymbol{k}$. Εάν όμως το σώμα κινούνταν κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού, τότε το $\boldsymbol{L}$ θα κατευθυνόταν *προς* το επίπεδο τής σελίδας.

(b) Βρείτε μια σχέση που να δίνει το L συναρτήσει τής γωνιακής ταχύτητας ω.

Γνωρίζουμε ότι για ένα σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά $v = r\omega$. Έτσι

$$L = mvr = mr^2\omega = I\omega$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας τού σώματος σε σχέση με τον άξονα z, που διέρχεται από το O. Βλέπουμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση αυτή, η στροφορμή έχει *ίδια κατεύθυνση* με το διάνυσμα τής γωνιακής ταχύτητας, $\boldsymbol{\omega}$, (βλ. Υποκεφάλαιο 10.1). Έτσι γράφουμε $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} = I\omega\boldsymbol{k}$.

Άσκηση 2 Ένα αυτοκίνητο μάζας 1 500 kg κινείται με μέτρο ταχύτητας 40 m/s σε κυκλικό στίβο αγώνων ακτίνας 50 m. Ποιο είναι το μέτρο τής στροφορμής του ως προς το κέντρο τού στίβου;
Απάντηση 3.00×10^6 kg·m²/s.

11.4 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ

Ας θεωρήσουμε ότι ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα ο οποίος έχει σταθερή κατεύθυνση. Υποθέτουμε ότι ο άξονας αυτός συμπίπτει με τον άξονα z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.11. Καθένα από τα πολλά μέρη ή επιμέρους σώματα που συναπαρτίζουν το στερεό σώμα περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Το μέτρο τής στροφορμής τού σώματος i, μάζας m_i, είναι $m_i v_i r_i$ ως προς την αρχή τών συντεταγμένων O. Γνωρίζουμε ότι $v_i = \omega r_i$. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το μέτρο τής στροφορμής τού σώματος i ως

$$L_i = m_i r_i^2\, \omega$$

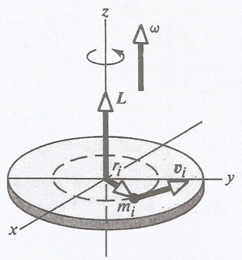
Το διάνυσμα $\mathbf{L}_i$ κατευθύνεται παράλληλα με τον θετικό άξονα z, όπως και το $\boldsymbol{\omega}$.

Ας βρούμε τώρα τη συνιστώσα z τής στροφορμής τού στερεού σώματος αθροίζοντας το L_i πάνω σε όλα τα επιμέρους σώματα που συναπαρτίζουν το στερεό σώμα:

$$L_z = \sum m_i r_i^2\, \omega = \left(\sum m_i r_i^2\right) \omega$$

ή

$$\boxed{L_z = I\omega} \qquad (11.21)$$



Σχήμα 11.11 Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα, η στροφορμή $\mathbf{L}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, διότι $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

όπου L_z είναι η συνιστώσα z τής στροφορμής και I είναι η ροπή αδράνειας τού στερεού σώματος ως προς τον άξονα τών z.

Ας παραγωγίσουμε τώρα ως προς τον χρόνο την Εξίσωση 11.21, χωρίς να μάς διαφεύγει ότι η I είναι σταθερή για ένα στερεό σώμα:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad (11.22)$$

όπου α είναι η γωνιακή επιτάχυνση σε σχέση με τον άξονα περιστροφής. Ξέρουμε όμως ότι το γινόμενο $I\alpha$ είναι ίσο προς τη συνισταμένη ροπή (βλ. Εξίσωση 11.20). Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 11.22 ως

$$\boxed{\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha} \qquad (11.23)$$

Με άλλα λόγια, η συνισταμένη ροπή τών εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο τής ροπής αδράνειας, υπολογιζόμενης ως προς τον άξονα περιστροφής, επί την ως προς τον άξονα περιστροφής υπολογιζόμενη γωνιακή επιτάχυνση.

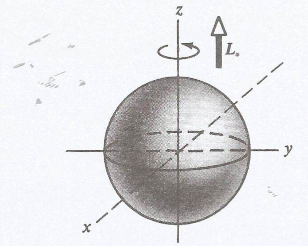
Ας σημειωθεί ότι εάν ένα συμμετρικό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση 11.21 με μορφή διανυσμάτων, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, όπου $\mathbf{L}$ είναι η ολική στροφορμή τού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γενικευθεί για οποιοδήποτε σώμα, ανεξάρτητα από την συμμετρία του, εάν αντί για την ολική $\mathbf{L}$ βάλουμε την συνιστώσα τής $\mathbf{L}$ επάνω στον άξονα περιστροφής[2].

---

[2] Η σχέση $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ δεν ισχύει γενικά. Ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν τυχαίο άξονα δεν έχει τα $\mathbf{L}$ και $\boldsymbol{\omega}$ συγγραμμικά, τα οποία, γενικά, έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή η ροπή αδράνειας δεν είναι πια μονόμετρο μέγεθος. Η εξίσωση $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ ισχύει μόνο για στερεά σώματα, τυχαίου σχήματος, τα οποία περιστρέφονται γύρω από έναν από τους λεγόμενους *κύριους άξονες αδράνειας*, οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο μάζας και είναι τρεις και κάθετοι μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.6 Περιστρεφόμενη σφαίρα

Μια ομογενής συμπαγής σφαίρα ακτίνας $R = 0.50$ m και μάζας 15 kg περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.12. Βρείτε τη στροφορμή της όταν η γωνιακή ταχύτητά της είναι 3 rad/s.



Σχήμα 11.12 (Παράδειγμα 11.6). Μια σφαίρα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της κατά τη φορά που φαίνεται στο σχήμα έχει στροφορμή $\mathbf{L}$ που κατευθύνεται προς τη θετική κατεύθυνση τού άξονα z. Εάν αντιστραφεί η φορά περιστροφής, τότε η στροφορμή $\mathbf{L}$ θα κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα z.

Λύση Η ροπή αδράνειας τής σφαίρας γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της είναι

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(15 \text{ kg})(0.5 \text{ m})^2 = 1.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Επομένως, το μέτρο τής στροφορμής είναι

$$L = I\omega = (1.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(3 \text{ rad/s}) = \boxed{4.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}}$$

α) L=;
β) α_γ=;

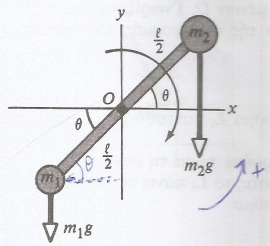
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.7 Περιστρεφόμενη ράβδος

Μια συμπαγής ράβδος μάζας M και μήκους ℓ περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της (Σχήμα 11.13). Στα δύο άκρα τής ράβδου έχουν στερεωθεί δύο σώματα μάζας m_1 και m_2, αντίστοιχα: (a) Προσδιορίστε τη στροφορμή της όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω.

Λύση Η ροπή αδράνειας τού συστήματος ισούται με το άθροισμα τών ροπών αδράνειας τών τριών διαφορετικών μερών τα οποία απαρτίζουν το σύστημα: τής ράβδου, τής m_1 και τής m_2. Χρησιμοποιούμε τους Πίνακες 10.2 και βρίσκουμε ότι η ολική ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα z ο οποίος διέρχεται από το O είναι

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

Επομένως, όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω, η στροφορμή είναι



Σχήμα 11.13 (Παράδειγμα 11.7) Γενικά, για ένα σύστημα με $m_1 \neq m_2$, το οποίο περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, υπάρχει ροπή που δημιουργεί γωνιακή επιτάχυνση σύμφωνα με το $\tau_{\text{net}} = I\alpha$.

$$L = I\omega = \boxed{\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega}$$

(b) Υπολογίστε τη γωνιακή επιτάχυνση τού συστήματος όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο.

Η ροπή την οποία ασκεί το βάρος m_1g γύρω από τον άξονα είναι

$$\tau_1 = m_1 g\frac{\ell}{2}\cos\theta \quad \text{(κατεύθυνση προς τα έξω τού επιπέδου)}$$

Η ροπή την οποία ασκεί το βάρος m_2g γύρω από τον άξονα είναι

$$\tau_2 = -m_2 g\frac{\ell}{2}\cos\theta \quad \text{(κατεύθυνση προς το επίπεδο)}$$

Επομένως, η συνισταμένη ροπή ως προς το O είναι

$$\tau_{\text{net}} = \tau_1 + \tau_2 = \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)g\ell\cos\theta$$

Ας σημειωθεί ότι η συνισταμένη ροπή τ_{net}, κατευθύνεται έξω από το επίπεδο εάν $m_1>m_2$ και προς το επίπεδο εάν $m_1<m_2$. Για να βρούμε το α χρησιμοποιούμε τη $\tau_{\text{net}} = I\alpha$, όπου αντικαθιστούμε την I που βρήκαμε παραπάνω. Έτσι $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$

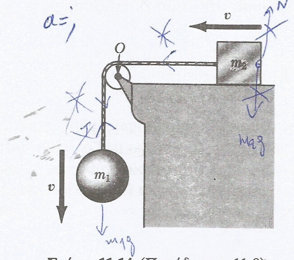
$$\alpha = \frac{\tau_{\text{net}}}{I} = \boxed{\frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{\ell\left(\dfrac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}}$$

Ας σημειωθεί ότι το α είναι μηδέν όταν θ είναι $\pi/2$ ή $-\pi/2$ (κατακόρυφη θέση) και το α είναι μέγιστο όταν το θ είναι 0 ή π (οριζόντια θέση). Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι επειδή το α μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου, η γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος δεν είναι σταθερή.

Άσκηση 3 Εάν $m_1>m_2$, για ποια τιμή τού θ είναι το ω μέγιστο; Εάν γνωρίζετε τη γωνιακή ταχύτητα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, πώς θα υπολογίσετε τη γραμμική ταχύτητα τών m_1 και m_2;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.8 Δύο συνδεδεμένες μάζες

Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με ένα ελαφρό νήμα το οποίο περνά πάνω από μια τροχαλία ακτίνας R και ροπής αδράνειας I ως προς τον άξονά της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.14. Η μάζα m_2 ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Προσδιορίστε την επιτάχυνση των δύο μαζών χρησιμοποιώντας τις έννοιες τής στροφορμής και τής ροπής.



Σχήμα 11.14 (Παράδειγμα 11.8).

Λύση Ας υπολογίσουμε την στροφορμή τού συστήματος, το οποίο αποτελείται από τις δύο μάζες και από την τροχαλία, γύρω από τον άξονα τής τροχαλίας ο οποίος διέρχεται από το O. Την στιγμή που οι μάζες έχουν ταχύτητα v, η στροφορμή τής m_1 είναι m_1vR και τής m_2 είναι m_2vR. Την ίδια στιγμή η στροφορμή τής τροχαλίας είναι $I\omega = Iv/R$. Έτσι η ολική στροφορμή τού συστήματος είναι

$$(1) \qquad L = m_1vR + m_2vR + I\frac{v}{R}$$

Ας υπολογίσουμε την ολική εξωτερική ροπή που υφίσταται το σύστημα ως προς τον άξονα τής τροχαλίας ο οποίος διέρχεται από το O. Η δύναμη την οποία ασκεί ο άξονας πάνω στην τροχαλία έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα και έτσι δεν συνεισφέρει στη ροπή. Η κάθετη δύναμη που δρά πάνω στο m_2 εξισορροπείται από το βάρος του και έτσι δεν συνεισφέρει στη ροπή. Το βάρος τού m_1 είναι m_1g και παράγει γύρω από τον άξονα ροπή με μέτρο m_1gR, όπου R είναι ο μοχλοβραχίονας τής δύναμης ως προς τον άξονα. Αλλά αυτή είναι και η ολική εξωτερική ροπή ως προς το O, δηλαδή $\tau_{\text{ext}} = m_1gR$. Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 11.23, στην οποία αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση, καθώς και την (1)

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1gR = \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)Rv + I\frac{v}{R}\right]$$

ή

$$(2) \qquad m_1gR = (m_1+m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

Αλλά $dv/dt = a$. Λύνουμε λοιπόν προς a και έχουμε

$$a = \frac{m_1g}{(m_1+m_2)+I/R^2}$$

Εάν αναρωτιέστε γιατί δεν λάβαμε υπ' όψιν τις δυνάμεις τάσης τού νήματος κατά τον υπολογισμό τής ολικής ροπής ως προς τον άξονα, η απάντηση είναι ότι οι δυνάμεις τάσης είναι *εσωτερικές* στο εξεταζόμενο σύστημα. Μόνο *εξωτερικές* δυνάμεις συνεισφέρουν στη μεταβολή τής στροφορμής.

11.5 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Στο Κεφάλαιο 9 βρήκαμε ότι η ολική γραμμική ορμή ενός συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερή (διατηρείται) όταν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στο σώμα είναι μηδενική. Έχουμε έναν ανάλογο νόμο διατήρησης στην περιστροφική κίνηση, σύμφωνα με τον οποίο *η ολική στροφορμή ενός συστήματος είναι σταθερή εάν η συνισταμένη εξωτερική ροπή η οποία δρα πάνω στο σύστημα είναι μηδενική.* Αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα τής Εξίσωσης 11.20, όπου βλέπουμε ότι, εάν

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt} = 0 \qquad (11.24)$$

τότε

$$L = \text{ σταθερή} \qquad (11.25)$$

Για ένα σύστημα σωμάτων γράφουμε τον νόμο αυτό ως ΣL_i = σταθερή (constant). Εάν γίνει ανακατανομή τής μάζας ενός σώματος (από εσωτερικές δυνάμεις), τότε είναι προφανές ότι μεταβάλλεται η ροπή αδράνειάς του και γράφουμε τον νόμο διατήρησης τής στροφορμής ως

$$L_i = L_f = \text{σταθερή} \tag{11.26}$$

Εάν το σύστημα είναι ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, λ.χ. τον z, τότε μπορούμε να γράψουμε για την συνιστώσα z τού $\boldsymbol{L}$ ότι $L_z = I\omega$, όπου I είναι η ροπή αδράνειας τού σώματος ως προς τον z. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε τον νόμο διατήρησης τής στροφορμής ως

Διατήρηση τής στροφορμής

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{σταθερή} \tag{11.27}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για τις περιπτώσεις περιστροφής γύρω από σταθερό άξονα ή γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τού συστήματος και παραμένει παράλληλος προς την αρχική του κατεύθυνση. Απαιτείται μόνον να είναι μηδενική η εξωτερική ροπή. Μολονότι δεν αποδεικνύεται εδώ, υπάρχει για τη στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας ένα σημαντικό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο

> **η συνισταμένη ροπή που ασκείται πάνω σε ένα σώμα, ως προς το κέντρο μάζας του, ισούται με τον, ως προς τον χρόνο, ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής του, ανεξάρτητα από την κίνηση τού κέντρου μάζας.**

Το θεώρημα αυτό ισχύει έστω και αν το κέντρο μάζας επιταχύνεται, αρκεί τα $\boldsymbol{\tau}$ και $\boldsymbol{L}$ να υπολογίζονται ως προς το κέντρο μάζας.

Η Εξίσωση 11.27 μάς δίνει έναν *τρίτο νόμο διατήρησης*, ο οποίος προστίθεται στον κατάλογο μαζί με τους άλλους δύο που έχουμε ως τώρα. Έτσι τώρα μπορούμε να πούμε ότι **η ενέργεια, η γραμμική ορμή και η στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος παραμένουν σταθερές.**

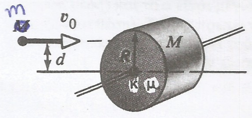
Υπάρχουν πολλά παραδείγματα διατήρησης τής στροφορμής, μερικά από τα οποία είναι πολύ γνωστά. Θα έχετε δει βεβαίως μια αθλήτρια καλλιτεχνικού πατινάζ να στριφογυρίζει πάνω στο παγοδρόμιο. Η γωνιακή ταχύτητα τής αθλήτριας αυξάνεται όταν αυτή συμπτύσσει τα χέρια και τα πόδια της κοντά στο σώμα της. Εάν δεν ληφθεί υπ' όψιν η τριβή τών παγοπεδίλων πάνω στον πάγο, δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές που δρουν πάνω στην αθλήτρια. Η γωνιακή ταχύτητά της μεταβάλλεται διότι η στροφορμή διατηρείται και το γινόμενο $I\omega$ παραμένει σταθερό, έτσι ώστε μείωση τής ροπής αδράνειας προκαλεί αντίστοιχη αύξηση τής γωνιακής ταχύτητας. Παρομοίως, όταν οι ακροβάτες ή οι κολυμβητές καταδύσεων θέλουν να κάνουν πολλές αναστροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους κοντά στο σώμα τους ώστε να στριφογυρίζουν πιο γρήγορα. Στις περιπτώσεις αυτές, η εξωτερική δύναμη τής βαρύτητας δεν προκαλεί ροπές, διότι δρα πάνω στο κέντρο μάζας και έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα ως προς αυτό. Επομένως, η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας διατηρείται, δηλαδή $I_i\omega_i = I_f\omega_f$. Έτσι, όταν οι ακροβάτες θέλουν να διπλασιάσουν τη γωνιακή ταχύτητά τους, πρέπει να μειώσουν τη ροπή αδράνειάς τους στο μισό.

Μπαλαρίνα καλλιτεχνικού πατινάζ καθώς περιστρέφεται. Εάν φέρει τα χέρια της (ή τα πόδια της) κοντά στο σώμα της, αυξάνεται η γωνιακή της ταχύτητα λόγω τής διατήρησης τής στροφορμής. (© G. Aschendorf Photo Researches).

μέχρι εδώ στα courses.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.9 Κρούση βλήματος-κυλίνδρου

Ένα βλήμα μάζας m και αρχικής ταχύτητας v_0 εκτοξεύεται εναντίον συμπαγούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R (Σχήμα 11.15). Ο κύλινδρος αρχικά βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας και είναι εξαρτημένος σε έναν σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Η τροχιά τού βλήματος είναι κάθετη στον άξονα και σε απόσταση $d<R$ πάνω από τον άξονα. Βρείτε τη στροφορμή τού συστήματος όταν το βλήμα χτυπήσει και ενσωματωθεί στον κύλινδρο.



Σχήμα 11.15 (Παράδειγμα 11.9) (Αγνοούμε το βάρος τού βλήματος). Η στροφορμή τού συστήματος πριν από την κρούση ισούται με τη στροφορμή τού συστήματος μετά από την κρούση, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.

Λύση Ας υπολογίσουμε τη στροφορμή τού συστήματος (βλήμα + κύλινδρος) ως προς τον άξονα τού κυλίνδρου, χωρίς να λαμβάνουμε υπ' όψιν το βάρος τού βλήματος. Η συνισταμένη εξωτερική ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο τού άξονα τού κυλίνδρου είναι μηδενική. Επομένως, η στροφορμή τού συστήματος είναι η ίδια πριν και μετά από την κρούση.

Πριν από την κρούση, μόνον το βλήμα έχει στροφορμή ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο τού άξονα τού κυλίνδρου. Το μέτρο τής στροφορμής αυτής είναι mv_0d και κατευθύνεται παράλληλα προς τον άξονα, προς το επίπεδο τής σελίδας. Μετά από την κρούση η ολική στροφορμή τού συστήματος είναι $I\omega$, όπου I είναι η ολική (βλήματος + κυλίνδρου) ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα. Επειδή η ολική στροφορμή διατηρείται, βρίσκουμε

$$L_i = L_f = mv_0d = I\omega = (\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega$$

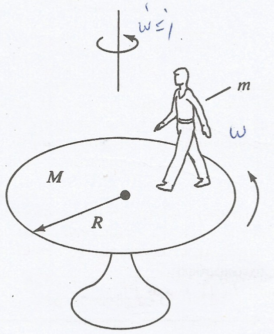
$$\omega = \boxed{\frac{mv_0d}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}}$$

Έτσι δείξαμε άλλον έναν τρόπο μέτρησης τής ταχύτητας βλημάτων.

Άσκηση 4 Στο παράδειγμά μας, δεδομένου ότι η κρούση είναι τελείως μη ελαστική, η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}I\omega^2 < \frac{1}{2}mv_0^2$. Πού πηγαίνει η χαμένη ενέργεια;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.10 «Το γύρω γύρω όλοι»

Μια οριζόντια πλατφόρμα σχήματος κυκλικού δίσκου περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα (Σχήμα 11.16). Η πλατφόρμα έχει μάζα 100 kg και ακτίνα 2 m. Ένας φοιτητής μάζας 60 kg βαδίζει σιγά - σιγά από την περίμετρο τής πλατφόρμας προς το κέντρο της. Εάν η γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος είναι 2 rad/s όταν ο φοιτητής βρίσκεται στην περίμετρο: (a) υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που ο φοιτητής φτάνει σε απόσταση 0.5 m από το κέντρο.



Σχήμα 11.16 (Παράδειγμα 11.10) Καθώς ο φοιτητής προχωρεί προς το κέντρο τής περιστρεφόμενης πλατφόρμας, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος, διότι η στροφορμή παραμένει σταθερή.

Λύση Ας υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας τής πλατφόρμας, I_p, καθώς και τη ροπή αδράνειας τού φοιτητή, I_s. Θεωρούμε ότι ο φοιτητής είναι σημείο μάζας m και γράφουμε για την *αρχική* ροπή αδράνειας τού συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$I_i = I_p + I_s = \tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

όπου M και R είναι η μάζα και η ακτίνα τής πλατφόρμας, αντίστοιχα. Όταν ο φοιτητής έχει φτάσει στη θέση με $r<R$, η ροπή αδράνειας τού συστήματος *ανάγεται* σε

$$I_f = \tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Εφόσον δεν δρουν εξωτερικές ροπές πάνω στο σύστημα (φοιτητής + πλατφόρμα) γύρω από τον άξονα περιστροφής, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο διατήρησης τής στροφορμής:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_i = (\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_f$$

$$\omega_f = \left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_i$$

Αντικαθιστούμε τα M, R, m και ω_i με τις δεδομένες τιμές τους και βρίσκουμε

$$\omega_f = \left(\frac{200 + 240}{200 + 15}\right)(2 \text{ rad/s}) = \boxed{4.1 \text{ rad/s}}$$

(b) Υπολογίστε την αρχική και την τελική κινητική ενέργεια τού συστήματος.

$$K_i = \tfrac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \tfrac{1}{2}(440 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\left(2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = \boxed{880 \text{ J}}$$

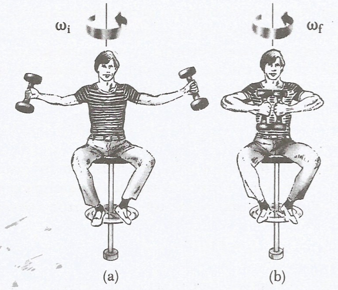
$$K_f = \tfrac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}(215 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\left(4.1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = \boxed{1800 \text{ J}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η κινητική ενέργεια τού συστήματος *αυξάνεται*! Μολονότι μπορεί να μάς εκπλήσσει το αποτέλεσμα αυτό, εξηγείται ως εξής: Καθώς ο φοιτητής προχωρεί προς το κέντρο, καταναλώνει μυϊκή ενέργεια για να παραγάγει θετικό έργο, το οποίο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια τού συστήματος, η οποία έτσι αυξάνεται. Με άλλα λόγια, οι εσωτερικές δυνάμεις τού συστήματος παράγουν έργο. Ο φοιτητής πρέπει να ασκήσει κεντρομόλο δύναμη για να μην εκτιναχθεί έξω από την πλατφόρμα. Έτσι, πρέπει να παράγει έργο ενάντια στην αντίδραση αυτής τής δύναμης.

Άσκηση 5 Αποδείξτε πώς η αύξηση τής κινητικής ενέργειας μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια τού θεωρήματος έργου-ενέργειας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.11 Στριφογυρίζοντας επάνω σε περιστρεφόμενο κάθισμα

Ένας φοιτητής κάθεται επάνω σε ένα περιστρεφόμενο κάθισμα και κρατά δύο βάρη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.17. Το κάθισμα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα. Κάποιος σπρώχνει στιγμιαία τον φοιτητή, ο οποίος αρχίζει να



Σχήμα 11.17 (Παράδειγμα 11.11) (a) Δίνουμε στον φοιτητή αρχική περιστροφή καθώς αυτός κρατάει τα βάρη όπως φαίνεται στο σχήμα. (b) Εάν φέρει τα βάρη κοντά στο σώμα του, τότε περιστρέφεται γρηγορότερα. Γιατί;

Σχήμα 11.18 (Παράδειγμα 11.12) Ο τροχός περιστρέφεται και η φοιτήτρια είναι ακίνητη. Τι θα συμβεί εάν η φοιτήτρια γυρίσει τον τροχό ανάποδα;

περιστρέφεται έχοντας τα χέρια του τεντωμένα. Γιατί αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος όταν ο φοιτητής φέρει τα βάρη προς τα μέσα και τα ακουμπήσει στο στήθος του;

Λύση Η αρχική στροφορμή τού συστήματος είναι $I_i\omega_i$, όπου I_i είναι η αρχική ροπή αδράνειας όλου τού συστήματος (φοιτητής + βάρη + κάθισμα). Όταν ο φοιτητής φέρει τα βάρη στο στήθος του, η στροφορμή τού συστήματος ισούται με $I_f\omega_f$. Να σημειωθεί ότι $I_f<I_i$ διότι όταν τα βάρη βρίσκονται πλησιέστερα στον άξονα περιστροφής, η ροπή αδράνειας μειώνεται. Δεδομένου ότι ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας τού συστήματος, η εξωτερική ροπή είναι μηδενική, η στροφορμή διατηρείται, έτσι $I_i\omega_i = I_f\omega_f$. Επομένως, $\omega_f>\omega_i$, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η κινητική ενέργεια αυξάνεται όταν τα βάρη φερθούν προς τα μέσα. Αυτό συμβαίνει διότι ο φοιτητής καταναλώνει έργο για να φέρει τα βάρη προς τα μέσα.

Άσκηση 6 Ας υποτεθεί ότι ο φοιτητής αντί να φέρει τα βάρη με τα χέρια του προς τα μέσα τα κατεβάζει κατακόρυφα. Πώς εξηγείτε την αύξηση τής κινητικής ενέργειας τού συστήματος τώρα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.12. Ο περιστρεφόμενος τροχός τού ποδηλάτου

Ένα κλασικό σχετικό πείραμα είναι το ακόλουθο: Μια φοιτήτρια (Σχήμα 11.18) κρατά τον άξονα ενός περιστρεφομένου τροχού ποδηλάτου, ενώ η ίδια κάθεται σε ένα κάθισμα το οποίο μπορεί να περιστρέφεται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Η φοιτήτρια και το κάθισμα αρχικά ακινητούν, ενώ ο τροχός περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική στροφορμή L_0, η οποία είναι κατακόρυφη και κατευθύνεται προς τα επάνω. Εξηγήστε τί θα επακολουθήσει εάν η φοιτήτρια γυρίσει ανάποδα τον τροχό (δηλαδή κατά 180°).

Λύση Στο παράδειγμά μας αυτό, το σύστημα αποτελείται από τη φοιτήτρια, τον τροχό και το κάθισμα. Η αρχική στροφορμή είναι L_0 και οφείλεται στον περιστρεφόμενο τροχό τού ποδηλάτου. Για να «γυρίσει τούμπα» ο τροχός, είναι προφανές ότι η φοιτήτρια ασκεί ροπή πάνω στον τροχό, αλλά η ροπή αυτή είναι *εσωτερική* ροπή τού συστήματος. Επειδή *δεν* υπάρχει εξωτερική ροπή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, *η στροφορμή τού συστήματος διατηρείται.*

Αρχικά έχουμε

$$L_{\text{system}} = L_0 \ (\text{προς τα επάνω})$$

Αφού αναποδογυριστεί ο τροχός

$$L_{\text{system}} = -L_0 = L_{\text{φοιτητρια + καθισμα}} + L_{\text{τροχος}}$$

Στην περίπτωση αυτή $L_{\text{τροχος}} = -L_0$, επειδή τώρα περιστρέφεται με φορά αντίθετη από την προηγούμενη. Έτσι

$$L_0 = L_{\text{φοιτητρια + καθισμα}} - L_0$$
$$L_{\text{φοιτητρια + καθισμα}} = 2L_0$$

Δηλαδή, *η φοιτήτρια και το κάθισμα θα αρχίσουν να περιστρέφονται κερδίζοντας τόση στροφορμή ώστε το μέτρο της να είναι διπλάσιο από τη στροφορμή τού περιστρεφομένου τροχού. Η στροφορμή τής φοιτήτριας και τού καθίσματος κατευθύνεται προς τα επάνω.*

Άσκηση 7 Πόση στροφορμή θα κερδίσει η φοιτήτρια εάν ο τροχός (αντί να αναποδογυριστεί) κλίνει έτσι ώστε ο άξονας περιστροφής του να σχηματίσει γωνία θ με την κατακόρυφο;
Απάντηση $L_0\,(1 - \cos\theta)$.

* 11.6 ΚΙΝΗΣΗ ΓΥΡΟΣΚΟΠΙΩΝ ΚΑΙ ΣΤΡΟΒΩΝ

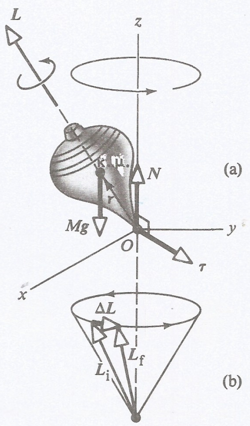
Μια πολύ περίεργη και συνάμα γοητευτική κίνηση είναι η κίνηση ενός στρόβου (σβούρας) που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του, όπως στο Σχήμα 11.19a. Εάν η σβούρα στριφογυρίζει πολύ γρήγορα, ο αξονάς της θα περιφέρεται περιστρεφόμενος γύρω από την κατακόρυφο διαγράφοντας έναν κώνο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.19. Η κίνηση τού άξονα τής σβούρας γύρω από την κατακόρυφο είναι γνωστή ως **μετάπτωση** και, γενικά, είναι πολύ πιο αργή από το στριφογύρισμα τής σβούρας. Είναι φυσικό να αναρωτιέται κανείς, γιατί η σβούρα δεν πέφτει. Επειδή το κέντρο μάζας τής σβούρας δεν βρίσκεται πάνω από τη μύτη τής σβούρας, O, το βάρος $\boldsymbol{Mg}$ ασκεί ροπή επάνω στη σβούρα γύρω από το O. Έτσι βλέπουμε ότι η σβούρα εάν δεν στριφογύριζε, θα έπεφτε. Αλλά, αφού στριφογυρίζει, έχει στροφορμή $\boldsymbol{L}$, που είναι παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας. Θα δείξουμε ότι η μετάπτωση τού άξονα περιστροφής γύρω από την κατακόρυφο (άξονα z) οφείλεται στο ότι η ροπή μεταβάλλει *τη διεύθυνση* τού άξονα περιστροφής. Αυτό αποτελεί κλασικό παράδειγμα για τη σπουδαιότητα τής κατευθυντικής ιδιότητας τής στροφορμής.

Συχνότητα τής μετάπτωσης

Οι δύο δυνάμεις που δρουν πάνω στη σβούρα είναι το βάρος της, $\boldsymbol{Mg}$, που έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω, και η κάθετη δύναμη $\boldsymbol{N}$, που δρα προς το επάνω στο σημείο περιστροφής O. Εφόσον ο μοχλοβραχίονας τής $\boldsymbol{N}$ ως προς το O είναι μηδενικός, η κάθετη δύναμη δεν δημιουργεί ροπή. Η δύναμη τής βαρύτητας, πάντως, δημιουργεί ροπή $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Mg}$ γύρω από το O· η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\tau}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{Mg}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ κείται σε ένα οριζόντιο επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα τής στροφορμής. Η ολική ροπή και η στροφορμή τής σβούρας συνδέονται μέσω τής γνωστής σχέσης

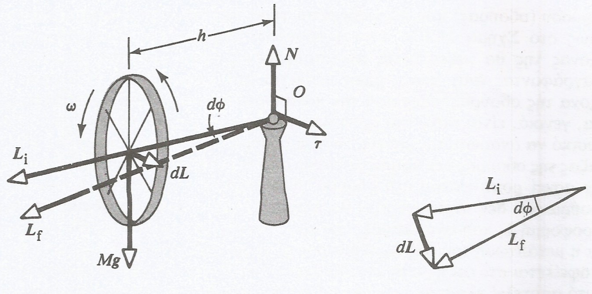
$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η μη μηδενική ροπή προξενεί μια *μεταβολή* στη στροφορμή ίση με $d\boldsymbol{L}$ η οποία έχει την ίδια κατεύθυνση με τη ροπή $\boldsymbol{\tau}$, πρέπει δηλαδή να είναι και αυτή (η dL) κάθετη στην στροφορμή, όπως είναι η $\boldsymbol{\tau}$. Στο Σχήμα 11.19b απεικονίζεται η μετάπτωση τού άξονα τής σβούρας. Η μεταβολή $\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_f - \boldsymbol{L}_i$ που έγινε στον χρόνο Δt ισούται με $\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\tau}\, \Delta t$. Σημειώστε ότι, επειδή το $\Delta \boldsymbol{L}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{L}$, το μέτρο τού $\boldsymbol{L}$ δεν μεταβάλλεται ($|\boldsymbol{L}_i| = |\boldsymbol{L}_f|$). Εκείνο που μεταβάλλεται είναι *η κατεύθυνση* τού $\boldsymbol{L}$. Επειδή η μεταβολή τής κατεύθυνσης τής στροφορμής γίνεται στην κατεύθυνση τής ροπής $\boldsymbol{\tau}$ (η οποία κείται στο επίπεδο xy), η σβούρα υπόκειται σε μετάπτωση. Έτσι, αποτέλεσμα τής ροπής που ασκεί το βάρος είναι η *μεταβολή τής στροφορμής τής σβούρας σε διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα περιστροφής*.



Σχήμα 11.19 Μετάπτωση στρόβου (σβούρας) που περιφέρεται περιστρεφόμενος γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρουν πάνω του είναι το βάρος του, $\boldsymbol{Mg}$, και η κάθετη δύναμη $\boldsymbol{N}$. Η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ έχει την κατεύθυνση τού άξονα συμμετρίας.

Η περιγραφή τής κίνησης τής σβούρας, όπως έγινε πιο πάνω, ήταν κυρίως ποιοτική. Η αυστηρή περιγραφή μιας τέτοιας κίνησης ξεφεύγει από τον σκοπό τού συγγράμματος τούτου. Μπορούμε όμως να δούμε τα βασικά χαρακτηριστικά τής κίνησης αυτής εάν μελετήσουμε ένα απλό γυροσκόπιο (Σχήμα 11.20). Η συσκευή αυτή αποτελείται από έναν τροχό που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, ο οποίος είναι συνδεδεμένος σε ένα σημείο, γύρω από το οποίο μπορεί και ο ίδιος να περιστραφεί, σε απόσταση h από το κέντρο μάζας τού τροχού. Εάν ο τροχός περιστραφεί γύρω από τον άξονά του με αρχική γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, θα αποκτήσει στροφορμή $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$, η οποία κατευθύνεται παράλληλα προς τον άξονα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.20. Ας δούμε τώρα τη ροπή που ασκείται πάνω στον τροχό ως προς το σημείο στήριξης τού άξονα O. Η δύναμη υποστήριξης τού άξονα, $\boldsymbol{N}$, δεν δημιουργεί ροπή ως προς το O. Το βάρος όμως δημιουργεί ροπή $\boldsymbol{Mgh}$ ως προς το O. Η κατεύθυνση τής ροπής αυτής είναι *κάθετη* στον άξονα (και στο $\boldsymbol{L}$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.20. Η ροπή αυτή προκαλεί αλλαγή τής στροφορμής σε διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα. Επομένως, ο άξονας κινείται στην κατεύθυνση τής ροπής, δηλαδή σε οριζόντιο επίπεδο. Για να απλουστεύσουμε τη μελέτη μας πρέπει να κάνουμε την ακόλουθη παραδοχή.



(a) (b)

Σχήμα 11.20 (a) Κίνηση απλού γυροσκοπίου που περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο το οποίο έχει απόσταση h από το κέντρο βάρους του. Να σημειωθεί ότι το βάρος $M\mathbf{g}$ δημιουργεί ροπή ως προς το σημείο περιστροφής, που είναι κάθετη στον άξονα. (b) Το αποτέλεσμα είναι ότι μεταβάλλεται η στροφορμή κατά $d\mathbf{L}$ σε κάθετη προς τον άξονα κατεύθυνση. Ο άξονας σαρώνει γωνία $d\phi$ σε χρόνο dt.

Η *ολική* στροφορμή είναι άθροισμα τής στροφορμής $I\omega$, που οφείλεται στην περιστροφή τού τροχού γύρω από τον άξονά του, και τής στροφορμής που οφείλεται στην περιστροφή τού κέντρου μάζας τού συστήματος γύρω από το σημείο στήριξης O. Θα αγνοήσουμε τον δεύτερο όρο και θα υποθέσουμε ότι η ολική στροφορμή είναι $I\boldsymbol{\omega}$. Όταν η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ είναι μεγάλη, η παραπάνω υπόθεση είναι καλή προσέγγιση.

Στο χρονικό διάστημα dt η ροπή που ασκεί το βάρος προσθέτει στο σύστημα *επί πλέον* στροφορμή ίση με $d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\, dt$ σε κατεύθυνση κάθετη προς το $\mathbf{L}$. Αυτή η επί πλέον στροφορμή, $\boldsymbol{\tau}\, dt$, προστίθεται διανυσματικά στην αρχική στροφορμή $I\boldsymbol{\omega}$ και *μεταβάλλει την κατεύθυνση τής ολικής στροφορμής*. Μπορούμε να γράψουμε το μέτρο αυτής τής μεταβολής τής στροφορμής ως

$$dL = \tau\, dt = (Mgh)\, dt$$

Το διανυσματικό σχεδιάγραμμα τού Σχήματος 11.20 δείχνει ότι στον χρόνο dt το διάνυσμα τής στροφορμής περιστράφηκε κατά γωνία $d\phi$ (που είναι και η γωνία κατά την οποία περιστράφηκε ο άξονας). Έτσι, από το διανυσματικό τρίγωνο τού Σχήματος 11.20 και την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{(Mgh)\, dt}{L}$$

Αλλά $L = I\omega$. Έτσι βρίσκουμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο ο άξονας περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα είναι

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega} \qquad (11.28)$$

Γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης

Η γωνιακή ταχύτητα ω_p ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης.** Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει όταν $\omega_p \ll \omega$. Αλλιώς, η κίνηση είναι πολύ πιο σύνθετη. Ας σημειωθεί ότι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης μειώνεται όσο αυξάνεται η ω, δηλαδή όσο πιο γρήγορα περιστρέφεται ο τροχός γύρω από τον άξονα συμμετρίας.

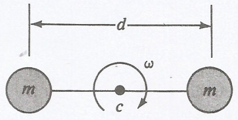
* 11.7 Η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Είδαμε πόσο χρήσιμη είναι η έννοια τής στροφορμής προκειμένου να περιγράψουμε την κίνηση μακροσκοπικών συστημάτων. Η έννοια αυτή είναι επίσης πολύ χρήσιμη προκειμένου να περιγράψουμε φαινόμενα στην ατομική κλίμακα και έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στις θεωρίες τής Ατομικής, Μοριακής και Πυρηνικής Φυσικής. Με το σημερινό γνωστικό επίπεδο στον τομέα τών φαινομένων τού μικροκόσμου, πιστεύουμε ότι η στροφορμή είναι *θεμελιώδης* ιδιότητα τών ατόμων, τών μορίων και τών συστατικών τους.

Ο μόνος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να εξηγήσουμε την πληθώρα τών πειραματικών μετρήσεων στην Ατομική Φυσική είναι να δώσουμε διακεκριμένες (κεχωρισμένες) τιμές στη στροφορμή. Αυτές οι διακεκριμένες τιμές είναι ακέραια πολλαπλάσια τής βασικής μονάδας τής στροφορμής η οποία ισούται με $\hbar = h/2\pi$, όπου η h είναι η σταθερά τού Planck.

$$\text{Στοιχειώδης μονάδα στροφορμής} = \hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Ας δεχθούμε το παραπάνω για την ώρα και ας δούμε πώς μπορούμε να τό χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τη συχνότητα περιστροφής ενός διατομικού μορίου. Ας πάρουμε το μόριο τού οξυγόνου O_2, που αποτελείται από δύο άτομα τα οποία θεωρούμε ότι έχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση d και ότι περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους (Σχήμα 11.21). Μπορούμε να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη συχνότητα περιστροφής εάν εξισώσουμε τη στροφορμή τού μορίου με τη θεμελιώδη μονάδα $\hbar$,



Σχήμα 11.21 Το μοντέλο τού στερεού περιστροφέα ενός διατομικού μορίου. Η περιστροφή γίνεται στο επίπεδο τού σχήματος γύρω από το κέντρο μάζας.

$$I_c\omega \approx \hbar \qquad \text{ή} \qquad \omega \approx \frac{\hbar}{I_c}$$

Στο Παράδειγμα 10.3 βρήκαμε ότι η ροπή αδράνειας τού μορίου O_2 ως προς αυτόν τον άξονα περιστροφής είναι 2.03×10^{-46} kg·m². Επομένως

$$\omega \approx \frac{\hbar}{I_c} = \frac{1.054 \times 10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{2.03 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 5.19 \times 10^{11}\ \text{rad/s}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι επαρκώς σύμφωνο με τις πειραματικές μετρήσεις.

Στο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε είδαμε πόσο χρήσιμες είναι ορισμένες έννοιες τής Κλασικής Φυσικής προκειμένου να περιγραφούν φαινόμενα ατομικών ή μοριακών συστημάτων. Πάντως, για να ερμηνευθεί η πληθώρα τών φαινομένων για τα οποία έχουν γίνει μετρήσεις στον μικρόκοσμο πρέπει να υποθέσουμε ότι η στροφορμή μπορεί να έχει μόνον κεχωρισμένες τιμές.

Ο πρώτος που τό πρότεινε είναι ο Δανός φυσικός Niels Bohr (1885-1962), όταν διατύπωσε την επαναστατική του θεωρία για το άτομο τού υδρογόνου. Οι κλασικές θεωρίες δεν ήταν ικανές να εξηγήσουν το γραμμικό φάσμα τού ατόμου τού υδρογόνου, δηλαδή το γεγονός ότι το υδρογόνο εκπέμπει φωτόνια συγκεκριμένων μόνον συχνοτήτων. Ο Bohr διατύπωσε το αξίωμα ότι οι γύρω από το πρωτόνιο τροχιές τις οποίες μπορούσε να καταλάβει το ηλεκτρόνιο τού ατόμου τού υδρογόνου είναι μόνον εκείνες στις οποίες η στροφορμή τού ηλεκτρονίου ισούται με $n\hbar$, όπου n είναι ακέραιος αριθμός. Με άλλα λόγια, ο Bohr διατύπωσε το αξίωμα ότι η στροφορμή είναι κβαντισμένη, δηλαδή ότι μπορεί να παίρνει ορισμένες μόνο κεχωρισμένες τιμές. Εάν χρησιμοποιήσει κανείς το απλό αυτό μοντέλο, μπορεί να υπολογίσει τη συχνότητα περιστροφής τού ηλεκτρονίου στις διάφορες τροχιές του (Πρόβλημα 35).

Η θεωρία τού Bohr, μολονότι βοήθησε στην κατανόηση ορισμένων πειραμάτων στο ατομικό επίπεδο, περιείχε βασικά σφάλματα. Η ανάπτυξη όμως τής Κβαντικής Μηχανικής από το 1924 ώς το 1930 έδωσε μοντέλα τα οποία δεχόμαστε ακόμη και σήμερα. Θα τά μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 40. Περαιτέρω πειράματα Ατομικής Φυσικής έδειξαν ότι το ηλεκτρόνιο έχει και ένα άλλο είδος στροφορμής, το *σπιν*, που είναι και αυτή θεμελιώδης ιδιότητα τού ηλεκτρονίου. Η στροφορμή σπιν είναι και αυτή κβαντισμένη. Θα επανέλθουμε στο θέμα σε επόμενο κεφάλαιο για να μελετήσουμε λεπτομερέστερα τις ιδιότητες τής στροφορμής σπιν.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η **ολική κινητική ενέργεια** ενός στερεού σώματος, όπως είναι λ.χ. ένας κύλινδρος, που κυλίεται σε μία τραχιά επιφάνεια χωρίς ολίσθηση ισούται με την κινητική ενέργεια περιστροφής ως προς το κέντρο μάζας $\frac{1}{2}I_c\omega^2$, συν την μεταφορική κινητική ενέργεια τού κέντρου μάζας $\frac{1}{2}Mv_c^2$:

Ολική κινητική ενέργεια κυλιόμενου στερεού σώματος

$$K = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 \qquad (11.4)$$

Στην έκφραση αυτή, v_c είναι η ταχύτητα τού κέντρου μάζας· και εάν η κίνηση είναι μόνο κύλιση, τότε $v_c = R\omega$.

Η **ροπή** $\boldsymbol{\tau}$ την οποία προκαλεί η δύναμη $\boldsymbol{F}$ ως προς ένα σημείο ενός αδρανειακού συστήματος (ας πάρουμε το σημείο έτσι ώστε να συμπίπτει με την αρχή αυτού τού αδρανειακού συστήματος) είναι εξ ορισμού

Ροπή

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (11.7)$$

Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, το **διανυσματικό τους γινόμενο** $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ είναι ένα άλλο διάνυσμα $\boldsymbol{C}$, κάθετο στο επίπεδο τών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, που έχει μέτρο

Μέτρο διανυσματικού γινομένου

$$C \equiv |AB \sin\theta| \qquad (11.9)$$

όπου θ είναι η γωνία η οποία περιέχεται ανάμεσα στο $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ και η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{C}$ ορίζεται από τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία. Ορισμένες από τις ιδιότητες τού διανυσματικού γινομένου είναι ότι $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$.

Η **στροφορμή** $\boldsymbol{L}$ ενός σώματος με γραμμική ορμή $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ είναι ίση με

Στροφορμή σώματος ως προς σημείο

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \qquad (11.15)$$

όπου $\boldsymbol{r}$ είναι η επιβατική ακτίνα τού σώματος μετρούμενη ως προς την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος. Εάν η γωνία ανάμεσα στο $\boldsymbol{r}$ και στο $\boldsymbol{p}$ είναι ϕ, τότε το μέτρο τού $\boldsymbol{L}$ είναι

$$L = mvr \sin\phi \qquad (11.16)$$

Η **ολική εξωτερική ροπή** που δρα πάνω σε ένα σωματίδιο ή σε ένα στερεό σώμα ισούται με τον ως προς το χρόνο ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής:

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \qquad (11.20)$$

Η *συνιστώσα z τής στροφορμής* ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα (με τον οποίο συμπίπτει ο άξονας z) ισούται με

Στροφορμή στερεού σώματος ως προς σταθερό άξονα

$$L_z = I\omega \qquad (11.21)$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα περιστροφής και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα.

Η *ολική εξωτερική ροπή* που δρα πάνω σε ένα στερεό σώμα ισούται με το γινόμενο τής ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής επί την γωνιακή επιτάχυνση:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \qquad (11.23)$$

Εάν η ολική εξωτερική ροπή που δρα σε ένα σώμα είναι μηδενική, τότε η ολική στροφορμή τού συστήματος παραμένει σταθερή. Εάν εφαρμόσουμε την *αρχή τής διατήρησης τής στροφορμής* σε ένα σώμα τού οποίου μεταβάλλεται η ροπή αδρανείας, βρίσκουμε

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{ σταθερή} \qquad (11.27)$$

Διατήρηση τής στροφορμής

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Είναι δυνατόν να υπολογίσετε τη ροπή που δρα επάνω σε ένα στερεό σώμα χωρίς να ορίσετε το σημείο ως προς το οποίο την μετράτε; Είναι η ροπή ανεξάρτητη από το σημείο ως προς το οποίο την μετράτε;

2. Ας ορίσουμε το τριπλό γινόμενο $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$. Είναι μονόμετρο μέγεθος ή διάνυσμα; Έχει νόημα το γινόμενο $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$;

3. Ορίσετε στη σχέση $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ τον μοχλοβραχίονα τής δύναμης.

4. Μπορεί να έχει μη μηδενική στροφορμή ένα σώμα το οποίο κινείται ευθύγραμμα;

5. Υποθέστε ότι ένας παρατηρητής κάνει μετρήσεις και διαπιστώνει ότι η στροφορμή ενός σώματος είναι σταθερή. Θα συμφωνήσουν μαζί του και όλοι οι άλλοι παρατηρητές;

6. Η ροπή που δρα πάνω σε ένα σώμα ως προς ένα *τυχαίο σημείο* είναι μηδενική. Τί μπορείτε να πείτε για την στροφορμή τού σώματος ως προς το ίδιο σημείο;

7. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και κάποιος σάς λέει ότι η ροπή του είναι μηδενική ως προς ένα σημείο. Σημαίνει αυτό απαραίτητα ότι η συνισταμένη δύναμη πάνω στο σώμα είναι μηδενική; Μπορείτε να συμπεράνετε ότι η ταχύτητα τού σώματος είναι σταθερή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

8. Υποθέστε ότι το διάνυσμα τής ταχύτητας ενός σώματος είναι γνωστό. Τί μπορείτε να συμπεράνετε για την *κατεύθυνση* τής στροφορμής του σε σχέση με την κατεύθυνση τής κίνησης;

9. Η ολική ροπή (ως προς κάποιο σημείο) ενός στερεού σώματος είναι διάφορη τού μηδενός. Μπορείτε να βρείτε ένα άλλο σημείο ως προς το οποίο η ολική ροπή θα είναι μηδενική;

10. Ένα σύστημα σωμάτων κινείται. Είναι δυνατόν να έχουν μηδενική ολική στροφορμή ως προς κάποιο σημείο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

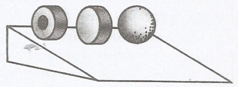
11. Κάποιος πετάει μια μπάλλα έτσι ώστε αυτή να μην περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Είναι αληθές ότι η μπάλλα έχει μηδενική στροφορμή ως προς όλα τα σημεία της; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

12. Γιατί είναι πιο εύκολο να ισορροπείτε σε ένα ποδήλατο που κινείται παρά σε ένα ποδήλατο που είναι ακίνητο;

13. Ένας φυσικός ζήτησε βοήθεια από τον ξενοδόχο ενός ξενοδοχείου για να μεταφέρει μια μυστηριώδη βαλίτσα. Όταν ο ξενοδόχος προσπάθησε να στρίψει σε έναν διάδρομο, η βαλίτσα κινήθηκε ξαφνικά μακριά απ' αυτόν, για κάποια άγνωστη αιτία. Τότε ο ξενοδόχος, έντρομος, πέταξε τη βαλίτσα και τό 'βαλε στα πόδια. Τί νομίζετε ότι υπήρχε μέσα στη βαλίτσα;

14. Ένας κύλινδρος κυλίεται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.4. Υπάρχουν σημεία στον κύλινδρο τα οποία έχουν μόνον κατακόρυφη συνιστώσα τής ταχύτητας σε κάποια στιγμή; Εάν ναι, πού βρίσκονται;

15. Τρία ομογενή στερεά σώματα —μια συμπαγής σφαίρα, ένας συμπαγής κύλινδρος και ένας κοίλος κύλινδρος— έχουν τοποθετηθεί στο επάνω μέρος ενός κεκλιμένου επιπέδου (Σχήμα 11.22). Και τα τρία αντικείμενα βρίσκονται στο ίδιο ύψος και αρχικά ηρεμούν. Εάν τά αφήσουμε ελεύθερα ταυτοχρόνως και κυλήσουν χωρίς να γλιστρούν, ποιο φτάνει κάτω πρώτο και ποιο φτάνει τελευταίο; Κάνετε το πείραμα στο σπίτι σας και θα δείτε ότι το αποτέλεσμα *δεν εξαρτάται* από τις μάζες ή από τα μεγέθη των αντικειμένων.



Σχήμα 11.22 (Ερώτηση 15) Ποιο από τα τρία σώματα θα φτάσει κάτω γρηγορότερα;

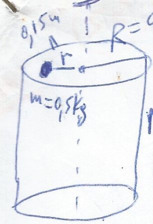
16. Ένα ποντικάκι αρχικά βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ένα οριζόντιο τύμπανο πικάπ που μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα. Εάν το ποντικάκι αρχίσει να βαδίζει γύρω γύρω στην περίμετρο, τί κάνει το τύμπανο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

17. Οι αστέρες δημιουργούνται από μεγάλες ποσότητες αερίων τα οποία περιστρέφονται αργά. Λόγω τής αμοιβαίας βαρυτικής έλξης τους, ο χώρος τον οποίο καλύπτουν τα αέρια σμικρύνεται. Τί συμβαίνει στην γωνιακή ταχύτητα ενός αστέρα καθώς το μέγεθός του σμικρύνεται; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΥΛΙΣΗ - ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ - ΡΟΠΗ

11.28

$\omega = 10 \frac{rad}{s}$



$R = 0{,}25m$

$M = 2kg$

$\omega_f = ;$

$\boxed{I = \frac{1}{2} M R^2}$

ΛΥΣΗ → ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.10

$L_i = L_f \Rightarrow$

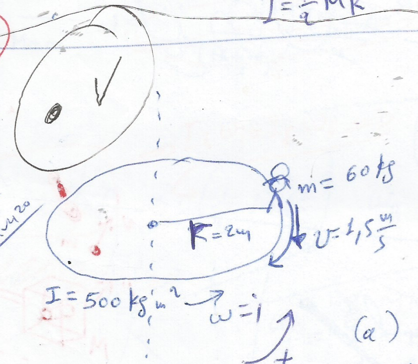
$I\omega_0 = (I + mr^2)\,\omega_f \Rightarrow$

$\boxed{\omega_f = \frac{I\omega_0}{I + mr^2}} = \frac{\frac{1}{2}(2kg)(0{,}25m)^2 (10 \frac{rad}{s})}{\frac{1}{2}(2kg)(0.25m)^2 + 0.5kg(0.15m)^2} = 8.47 \frac{rad}{s}$

$I = \frac{1}{2} M R^2$

SOS 2η

11.29



(α) Κατά ποιά φορά και με ποιό ω περιστρέφεται το τραπέζι;

(β) Πόσο έργο παράγει η γυναίκα για να θέσει σε κίνηση το σύστημα;

σύστημα αρχικά ακίνητο

$I = 500\,kg\,m^2$

$\omega = ;$

(α) L = διατηρείται

$L_i = L_f \Rightarrow$

$0 = mvr + I\omega \Rightarrow$

$\omega = -\frac{mvr}{I} = -\frac{(60)(1{,}5)(2)}{500} = -0{,}36 \frac{rad}{s}$

~~clockwise~~ counterclockwise

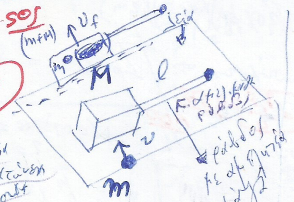
SOS

(β) $W = K_f - K_i = \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2\right) - 0$

$W = \frac{1}{2}(60)(1{,}5)^2 + \frac{1}{2}(500)(0.36)^2 = 99.9\,J$

ΜΕΤΑ: → 11.32 ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

11.33 SOS 3η



το βλήμα ενσωματώνεται στο σώμα

i) $L_i = mvl$

~~$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow L_i = L_f$~~

~~$(m+M)v_f$~~

$\boxed{L_f = (m+M) V l} = (m+M)\frac{m}{(m+M)} v l = mvl = L_i$

$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow L_i = L_f \Rightarrow$

$\Rightarrow mvl = (m+M) v_f\, l \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{m+M} v}$

$\boxed{V = \frac{mv}{m+M}}$

$mv + 0 = (m+M)V \Rightarrow$

$L_f = (m+M)\frac{m}{(m+M)} v\, l = mvl$

βγήκε πίσω σελίδα

i) συγκρουση = ; ονομάζεται σφαίρα-σώμα

ii) $K_i = ;$ πού χάθηκε κατά την κρούση

ii) $K_i = \frac{1}{2} m v^2$, $K_f = \frac{1}{2}(M+m) V^2$