ΔΙΑΛΕΞΗ 6

18/11/2020

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

SERWAY

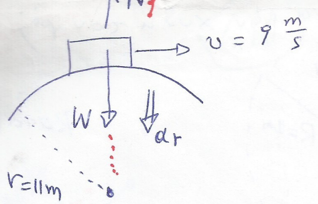
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

6.6 OK, DONE

6.14

$W = 600N$



α) φαινόμενο βάρος =;

β) υ =; αν η γυναίκα αισθάνεται ότι δεν έχει βάρος;

α) $\boxed{mg - N_1 = \frac{mu^2}{r}}$ (1) $\Rightarrow N_1 = mg - \frac{mu^2}{r}$

$\Rightarrow N_1 = 600(N) - \left(\frac{600}{9{,}8}\right)\frac{9^2}{11}$

$\Rightarrow \boxed{N_1 = 149\,N}$

β) Αν $N_1 = 0$ τότε η (1) $\Rightarrow \cancel{m}g = \frac{\cancel{m}u^2}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow u^2 = rg \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{rg}} \Rightarrow u = \sqrt{(11m)(9{,}8\ m/s^2)} \Rightarrow$

$\boxed{u = 10{,}4\ \frac{m}{s}}$

9

6.14
6.15
6.16
6.17
6.20
6.37
6.46
6.50

69 77 - 641 940

Αλέξης Σταμπάκης

ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

1/11/2010

OK

7

Course 5

Έργο και Ενέργεια

Η έννοια τής ενέργειας είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες στη Φυσική και κατ' επέκτασιν σε όλους τους κλάδους τής σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας. Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε την έννοια τής ενέργειας κάθε φορά που σκεπτόμαστε πόσο κοστίζουν τα καύσιμα για την κίνηση τού αυτοκινήτου ή για θέρμανση, κάθε φορά που έρχεται ο λογαριασμός τής ΔΕΗ ή όταν πληρώνουμε το κόστος τών επεξεργασμένων τροφίμων που αγοράζουμε στο σουπερμάρκετ. Όλα αυτά όμως είναι φιλολογικές εφαρμογές τής έννοιας τής ενέργειας· δεν τήν ορίζουν. Μάς λένε μόνο ότι χρειαζόμαστε καύσιμα για να κάνουμε μια εργασία και ότι τα καύσιμα αυτά μάς δίνουν κάτι που τό ονομάζουμε ενέργεια.

Η ενέργεια παρουσιάζεται σε διάφορες μορφές, όπως είναι η μηχανική ενέργεια, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια, η χημική ενέργεια, η θερμική ενέργεια και η πυρηνική ενέργεια. Οι διάφορες μορφές ενέργειας συνδέονται μεταξύ τους μέσω τού νόμου, σύμφωνα με τον οποίο, όταν η ενέργεια αλλάζει μορφές, η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή. Ακριβώς αυτός είναι ο λόγος που κάνει την έννοια τής ενέργειας τόσο χρήσιμη. Ο νόμος τής διατήρησης τής ενέργειας λέει ότι εάν ένα απομονωμένο σύστημα χάσει ενέργεια μιας μορφής, θα κερδίσει ίση ποσότητα ενέργειας σε άλλες μορφές. Λογουχάρη, όταν ένας ηλεκτρικός κινητήρας συνδέεται με μια μπαταρία, η χημική ενέργεια μεταβάλλεται σε ηλεκτρική, η οποία με τη σειρά της μεταβάλλεται σε μηχανική ενέργεια. Αυτή η μεταβολή τής ενέργειας από ένα είδος σε ένα άλλο αποτελεί βασικό μέρος τής μελέτης τής Φυσικής, τών διαφόρων κλάδων τής Μηχανολογίας, τής Χημείας, τής Βιολογίας, τής Γεωλογίας και τής Αστρονομίας.

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

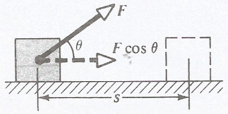
Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με τη λεγόμενη μηχανική ενέργεια. Θα δούμε ότι οι έννοιες τού έργου και τής ενέργειας μπορούν να εφαρμοστούν στη δυναμική ενός μηχανικού συστήματος χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους τού Newton. Πάντως, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι έννοιες τού έργου και τής ενέργειας βασίζονται στους νόμους τού Newton και επομένως δεν συνεπάγονται νέες αρχές τής Φυσικής.

Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουμε καταλήγει στα ίδια αποτελέσματα με τους νόμους τού Newton κατά την περιγραφή τής κίνησης ενός μηχανικού συστήματος. Οι γενικές όμως ιδέες τής έννοιας έργο-ενέργεια μπορούν να εφαρμοστούν με μεγάλη επιτυχία σε ένα πολύ ευρύ φάσμα φαινομένων (που δεν έχουν σχέση με κίνηση) στους κλάδους τού Ηλεκτρομαγνητισμού, τής ατομικής και τής πυρηνικής Φυσικής. Τέλος, πολλές φορές, πολλά πολύπλοκα προβλήματα λύνονται με πολύ απλούστερη ανάλυση εάν χρησιμοποιήσουμε την «ενεργειακή λύση» παρά την άμεση εφαρμογή τών νόμων τού Newton.

Αυτή η νέα μεθοδολογία είναι χρησιμότατη όταν η δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα δεν είναι σταθερή. Στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή και επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις κίνησης που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 3. Πολλές φορές, ένα σώμα υπόκειται σε μια δύναμη που δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται συναρτήσει τής θέσης τού σώματος. Τέτοιες δυνάμεις είναι μεταξύ άλλων η βαρυτική και η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο. Για να αντιμετωπίσουμε διάφορα προβλήματα θα περιγράψουμε τεχνικές που βασίζονται στο *θεώρημα έργου-ενέργειας,* το οποίο και αποτελεί το κύριο αντικείμενο αυτού τού κεφαλαίου.

Αρχίζουμε με τον ορισμό τής έννοιας τού έργου, που αποτελεί τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις έννοιες τής δύναμης και τής ενέργειας. Στο Κεφάλαιο 8 θα περιγράψουμε τον νόμο τής διατήρησης τής ενέργειας και θα τόν εφαρμόσουμε σε διάφορα προβλήματα.

7.2 ΕΡΓΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ



Σχήμα 7.1 Εάν ένα σώμα μετατοπιστεί κατά απόσταση s, τότε το έργο που παρήγαγε η δύναμη $\boldsymbol{F}$ που τό μετατόπισε είναι $(F\cos\theta)s$.

Θεωρήστε ότι ένα σώμα μετατοπίζεται ευθύγραμμα κατά μήκος $\boldsymbol{s}$ υπό την δράση δύναμης $\boldsymbol{F}$, η οποία σχηματίζει γωνία θ με το $\boldsymbol{s}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1.

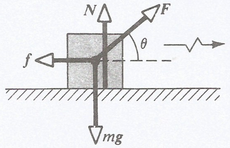
Ορίζουμε ότι το έργο σταθερής δύναμης ισούται με το γινόμενο τής συνιστώσας τής δύναμης πάνω στη διεύθυνση τής μετατόπισης επί το μέτρο τής μετατόπισης.

Επειδή η συνιστώσα τής $\boldsymbol{F}$ στη διεύθυνση $\boldsymbol{s}$ είναι $F\cos\theta$, το έργο W τής F είναι

Έργο σταθερής δύναμης

$$W \equiv (F\cos\theta)s \tag{7.1}$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον ορισμό αυτό, η $\boldsymbol{F}$ παράγει έργο όταν πληρούνται οι ακόλουθοι όροι: (1) το σώμα πρέπει να μετατοπιστεί και (2) η δύναμη $\boldsymbol{F}$ πρέπει να έχει μη μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση τού $\boldsymbol{s}$. Από τον πρώτο όρο βλέπουμε ότι η δύναμη δεν παράγει έργο εάν το σώμα δεν κινηθεί ($s = 0$). Λογουχάρη, εάν κάποιος σπρώχνει έναν τοίχο, ασκεί δύναμη αλλά δεν παράγει έργο όσο ο τοίχος παραμένει ακίνητος. Βεβαίως, το άτομο αυτό καταναλώνει εσωτερική ενέργεια, διότι οι μύες του συστέλλονται (δηλαδή μετατοπίζονται). Έτσι, βλέπουμε ότι η σημασία τής λέξης *έργο* στη Φυσική είναι σαφώς διαφορετική από τη σημασία που έχει η λέξη αυτή κατά τη χρήση της στην καθημερινή ζωή. Επίσης, εάν κρατάτε ένα βάρος με το τεντωμένο χέρι σας, δεν παράγετε έργο πάνω στο βάρος (υποθέτουμε ότι το χέρι σας δεν κινείται ούτε τρέμει). Εσείς πρέπει να ασκείτε μία δύναμη προς τα επάνω, για να κρατάτε το βάρος, αλλά το έργο που παράγει η δύναμη είναι μηδενικό, γιατί η μετατόπιση είναι μηδενική.



Σχήμα 7.2 Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται οριζόντια πάνω σε μία τραχιά επιφάνεια τότε ούτε η κάθετη δύναμη, $\boldsymbol{N}$, ούτε το βάρος, $\boldsymbol{mg}$, παράγουν έργο. Το έργο τό παράγει η δύναμη $\boldsymbol{F}$ και είναι ίσο προς $(F\cos\theta)s$, καθώς και η τριβή, f, τής οποίας το έργο είναι $-fs$.

Από τον δεύτερο όρο είναι σαφές ότι το έργο που παράγει η δύναμη είναι επίσης μηδενικό όταν η δύναμη είναι κάθετη πάνω στη μετατόπιση, επειδή $\theta = 90°$ και $\cos 90° = 0$. Λογουχάρη, στο Σχήμα 7.2, το έργο που παράγει η κάθετη δύναμη καθώς και το έργο που παράγει η βαρύτητα είναι μηδενικό, γιατί και οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση και έχουν μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση τού $\boldsymbol{s}$.

Το πρόσημο τού έργου εξαρτάται επίσης από την κατεύθυνση τής $\boldsymbol{F}$ σε σχέση με το $\boldsymbol{s}$. Το έργο που παράγει η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι θετικό όταν το διάνυσμα που έχει μέτρο $F\cos\theta$ έχει *την ίδια κατεύθυνση* με τη μετατόπιση. Λογουχάρη, όταν σηκώνουμε ένα σώμα, το έργο που παράγει η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι θετικό, επειδή η ανυψωτική δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα επάνω, δηλαδή την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση. Στην περίπτωση αυτή το έργο που παράγει η βαρύτητα είναι αρνητικό. Όταν το διάνυσμα με μέτρο $F\cos\theta$ έχει *αντίθετη* κατεύθυνση από τη μετατόπιση, τότε το έργο W είναι *αρνητικό*. Ο παράγοντας cos θ που υπάρχει στο γινόμενο καθορίζει *αυτόματα* το πρόσημο.

Ένα σύνηθες παράδειγμα στο οποίο το έργο W είναι αρνητικό είναι το έργο που παράγει η δύναμη τριβής όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε μια τραχιά επιφάνεια. Εάν η δύναμη τής τριβής ολισθήσεως είναι $\mathbf{f}$ και το σώμα μετατοπίζεται ευθύγραμμα σε απόσταση s, τότε το έργο που παράγει η δύναμη τριβής είναι

Έργο που παράγει η δύναμη τριβής σε ολισθαίνον σώμα

$$W_f = -fs \tag{7.2}$$

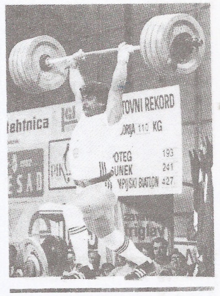
το αρνητικό πρόσημο προέρχεται από το ότι θ = 180° και cos 180° = − 1.

Τέλος, εάν η εφαρμοζόμενη δύναμη δρα στην ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση, τότε θ = 0° και cos 0° = 1. Έτσι η Εξίσωση 7.1 γίνεται

$$W = Fs \tag{7.3}$$

Το έργο είναι μονόμετρη ποσότητα και οι μονάδες του είναι δύναμη πολλαπλασιασμένη επί το μήκος. Έτσι στο Διεθνές Σύστημα (SI) η μονάδα τού έργου είναι το **newton · meter** (N · m), που ονομάζεται **joule** (J). Η μονάδα τού έργου στο σύστημα c.g.s. είναι **dyne · cm**, που ονομάζεται **erg**, και στο βρετανικό σύστημα το lb·ft. Οι μονάδες αυτές αναγράφονται και στον Πίνακα 7.1. Σημειώστε ότι 1 J = 10^7 ergs.

Εφόσον το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος, μπορούμε να προσθέσουμε το έργο που παράγει κάθε δύναμη ξεχωριστά για να υπολογίσουμε το συνολικό έργο. Λογουχάρη, εάν τρεις είναι οι δυνάμεις που συνεισφέρουν στο παραγόμενο έργο, το άθροισμα θα έχει τρεις όρους, καθένας από τους οποίους θα περιγράφει το έργο τής αντίστοιχης δύναμης. Το ακόλουθο παράδειγμα περιγράφει τα παραπάνω.



Παράγει έργο ο αθλητής καθώς κρατάει τα βάρη ψηλά; Παράγει έργο όταν τα σηκώνει; (© M. Brittan / Index Stock International).

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1 Μονάδες έργου στα τρία συνήθη συστήματα

σύστημα	μονάδα έργου	ονομασία μονάδας
SI	newton·meter (N·m)	joule (J)
cgs	dyne·centimeter (dyne·cm)	erg
Βρετανικό μηχανολογικό σύστημα	foot-pound (ft-lb)	foot·pound (ft·lb)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1 Ένα συρόμενο κιβώτιο

Ένα κιβώτιο σύρεται πάνω σε ένα τραχύ πάτωμα από μια σταθερή δύναμη μέτρου 50 N. Η κατεύθυνση τής δύναμης σχηματίζει γωνία 37° πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Μία δύναμη τριβής μέτρου 10 N επιβραδύνει την κίνηση και το κιβώτιο μετατοπίζεται 3 m προς τα δεξιά. (a) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη τών 50 N.

Χρησιμοποιούμε τον ορισμό τού έργου (Εξίσωση 7.1) και αφού είναι δεδομένα ότι F = 50 N, θ = 37° και ότι s = 3 m,

$$W_F = (F\cos\theta)s = (50\ \text{N})(\cos 37°)(3\ \text{m})$$

$$= 120\ \text{N}\cdot\text{m} = \boxed{120\ \text{J}}$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα τής $\mathbf{F}$ δεν παράγει έργο.

(b) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη τριβής.

$$W_f = -fs = (-10\ \text{N})(3\ \text{m}) = -30\ \text{N}\cdot\text{m} = \boxed{-30\ \text{J}}$$

(c) Προσδιορίστε το συνολικό έργο που παράγουν επί τού κιβωτίου όλες οι δυνάμεις οι οποίες δρουν επάνω του.

Η δύναμη τής βαρύτητας $m\mathbf{g}$ και η κάθετη δύναμη $\mathbf{N}$ είναι κάθετες προς τη μετατόπιση και επομένως δεν παράγουν έργο. Το συνολικό έργο λοιπόν που γίνεται πάνω στο κιβώτιο είναι το άθροισμα τού (a) και τού (b):

$$W_{\text{net}} = W_F + W_f = 120\ \text{J} - 30\ \text{J} = \boxed{90\ \text{J}}$$

Θα δούμε αργότερα ότι το συνολικό έργο πάνω στο σώμα ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής του ενέργειας. Αυτός είναι και ο διδακτικότερος τρόπος για να εξηγήσει κανείς τη φυσική σημασία τού W_{net}.

Άσκηση 1 Υποθέτουμε ότι η δύναμη τριβής είναι 15 N. Βρείτε το έργο που παράγεται επί τού κιβωτίου εάν μια οριζόντια δύναμη 50 N τό μετατοπίσει σε απόσταση 3 m.

Απάντηση 105 J.

7.3 ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ (Ή ΜΟΝΟΜΕΤΡΟ Ή ΒΑΘΜΩΤΟ) ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έτσι όπως τό ορίσαμε, το έργο είναι ποσότητα *μονόμετρη* και ισούται με το γινόμενο τού μέτρου τής μετατόπισης επί την συνιστώσα τής δύναμης πάνω στη διεύθυνση τής μετατόπισης. Για διευκόλυνσή μας γράφουμε την Εξίσωση 7.1 χρησιμοποιώντας το εσωτερικό ή βαθμωτό ή *μονόμετρο* γινόμενο τών δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{s}$. Συμβολίζουμε αυτό το μονόμετρο γινόμενο ως $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$. Στα αγγλικά, συχνά, τό αποκαλούμε και *dot product* (από την τελεία = dot που βάζουμε ανάμεσα στα δύο διανύσματα τού γινομένου). Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 7.1 ως

Το έργο σε μορφή εσωτερικού γινομένου

$$\boxed{W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = Fs\cos\theta} \tag{7.4}$$

Με άλλα λόγια, $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ (τό διαβάζετε «$\boldsymbol{F}$ ντοτ $\boldsymbol{s}$») είναι η συνθηματική γραφή που θα χρησιμοποιούμε αντί τού $F\ s\ \cos\ \theta$.

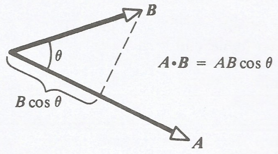
> **Γενικά, το μονόμετρο (ή βαθμωτό ή εσωτερικό ή ντοτ) γινόμενο δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ ορίζεται ως το μονόμετρο μέγεθος που ισούται με το γινόμενο τών μέτρων τών δύο διανυσμάτων επί το συνημίτονο τής γωνίας θ, η οποία περιέχεται από τις κατευθύνσεις τών διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.**

Δηλαδή, το βαθμωτό γινόμενο τών διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ ορίζεται από τη σχέση

Το εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv AB\cos\theta} \tag{7.5}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ τών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, όπως δείχνει το Σχήμα 7.3, A είναι το μέτρο τού $\boldsymbol{A}$ και B το μέτρο τού $\boldsymbol{B}$. Να σημειωθεί ότι τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ δεν είναι αναγκαίο να έχουν τις ίδιες μονάδες.



Σχήμα 7.3 Το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ τών δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ ισούται με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{A}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{B}$ πάνω στο $\boldsymbol{A}$.

Στο Σχήμα 7.3, η προβολή τού $\boldsymbol{B}$ πάνω στην διεύθυνση τού $\boldsymbol{A}$ είναι $B\cos\theta$. Επομένως ο ορισμός τού $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, όπως τόν δώσαμε από την Εξίσωση 7.5, είναι ισοδύναμος με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{A}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{B}$ πάνω στο $\boldsymbol{A}$ ή, ισοδύναμα πάλι, λέμε ότι $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ισούται με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{B}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{A}$ πάνω στο $\boldsymbol{B}$.[1] Από την Εξίσωση 7.5 βλέπουμε ότι το βαθμωτό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή,

Το εσωτερικό γινόμενο ακολουθεί την αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}} \tag{7.6}$$

Τέλος, το εσωτερικό γινόμενο υπακούει στον επιμεριστικό νόμο τού πολλαπλασιασμού. Δηλαδή,

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}} \tag{7.7}$$

Ο υπολογισμός τού βαθμωτού γινομένου είναι πολύ απλός όταν το $\boldsymbol{A}$ είναι

---

(1) Αυτό είναι το ίδιο με το να πούμε ότι το $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ είναι ίσο με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{B}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{A}$ πάνω στο $\boldsymbol{B}$.

κάθετο ή παράλληλο στο $\boldsymbol{B}$. Όταν το $\boldsymbol{A}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{B}$ ($\theta = 90°$) τότε $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Έχουμε επίσης $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ όταν το $\boldsymbol{A}$ ή το $\boldsymbol{B}$ είναι μηδέν. Εάν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση ($\theta = 0°$) τότε $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB$. Εάν το $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση ($\theta = 180°$) τότε $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -AB$. Το βαθμωτό γινόμενο είναι αρνητικό όταν $90° < \theta < 180°$.

Τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, και $\boldsymbol{k}$, τα οποία ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2, κατευθύνονται προς τα θετικά x, y, και z, αντίστοιχα, ενός δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων. Επομένως, εάν εφαρμόσουμε τον ορισμό τού $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, το μονόμετρο γινόμενο αυτών τών διανυσμάτων είναι

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{7.8a}$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \tag{7.8b}$$

Εσωτερικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

Μπορούμε να γράψουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ συναρτήσει τών συνιστωσών τους

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τις Εξισώσεις 7.8a και 7.8b, το βαθμωτό γινόμενο τών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{7.9}$$

Στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2 Το μονόμετρο γινόμενο

Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ και $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$. (a) Προσδιορίστε το μονόμετρο γινόμενο $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) \cdot (-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \\ &= -2\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} \cdot 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \cdot 2\boldsymbol{j} \\ &= -2 + 6 = \boxed{4} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0$. Μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας κατευθείαν την Εξίσωση 7.9 με $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$, και $B_y = 2$.

(b) Βρείτε την γωνία θ που περιέχεται από τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Τα μέτρα τών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 7.5 και τα αποτελέσματα από την (a) και έχουμε

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = 60.3°$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3 Έργο σταθερής δύναμης

Ένα σώμα που κινείται στο επίπεδο xy μετατοπίζεται σε απόσταση $\boldsymbol{s} = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ m υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $\boldsymbol{F} = (5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$ N. (a) Υπολογίστε το μέτρο τής μετατόπισης και τής δύναμης.

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \boxed{\sqrt{13}\ \mathrm{m}}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \boxed{\sqrt{29}\ \mathrm{N}}$$

(b) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\boldsymbol{F}$.

Θέτουμε τις εκφράσεις για το $\boldsymbol{F}$ και το $\boldsymbol{s}$ στην Εξίσωση 7.4, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 7.8 και έχουμε

$$\begin{aligned} W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} &= (5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})\ \mathrm{N \cdot m} \\ &= 5\boldsymbol{i} \cdot 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \cdot 3\boldsymbol{j} = 16\ \mathrm{N \cdot m} = \boxed{16\ \mathrm{J}} \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Υπολογίστε τη γωνία ανάμεσα στην $\boldsymbol{F}$ και την $\boldsymbol{s}$.
Απάντηση 34.5°.

Σχήμα 7.4 (a) Το έργο που παράγει η δύναμη F_x μετατοπίζοντας το σώμα κατά Δx είναι $F_x \Delta x$ και ισούται με την επιφάνεια τού γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου. Το ολικό έργο που παράγεται για να μετατοπιστεί το σώμα από το x_i στο x_f είναι, προσεγγιστικά, ίσο με το άθροισμα τών επιφανειών όλων τών μικρών ορθογωνίων. (b) Το έργο που παράγει η μεταβαλλόμενη δύναμη F_x καθώς το σώμα κινείται υπό την επίδρασή της από το x_i στο x_f ισούται *ακριβώς* με την επιφάνεια που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη.

7.4 ΕΡΓΟ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Θεωρήστε ένα σώμα που μετακινείται πάνω στον άξονα τών x υπό την επίδραση μεταβλητής δύναμης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4. Το σώμα μετατοπίστηκε πάνω στον άξονα τών x από το σημείο x_i στο σημείο x_f. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $W = (F\cos\theta)\,s$ για να υπολογίσουμε το έργο το οποίο παράγει η δύναμη, διότι ο προηγούμενος ορισμός προϋποθέτει ότι η $\boldsymbol{F}$ είναι σταθερή σε μέτρο και διεύθυνση. Ας φανταστούμε όμως ότι το σώμα μετακινείται πάρα πολύ λίγο κατά Δx, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4a, η συνιστώσα x τής δύναμης F δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά σε αυτό το πολύ μικρό διάστημα Δx και μπορούμε να πούμε κατά προσέγγιση ότι είναι σταθερή. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγει η δύναμη για να μετατοπίσει το σώμα κατά Δx

$$\Delta W = F_x\,\Delta x \tag{7.10}$$

Αλλά αυτό ισούται με την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια τού Σχήματος 7.4a. Εάν φανταστούμε ότι η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη τής F_x ως προς x χωρίζεται σε έναν μεγάλο αριθμό πολύ μικρών διαστημάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4a, τότε το συνολικό έργο πού καταναλώνεται για να μετατοπιστεί το σώμα από το x_i στο x_f ισούται με το άθροισμα πολλών όρων, παρόμοιων με τον όρο τής Εξίσωσης 7.10:

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F_x\,\Delta x$$

Εάν οι μετατοπίσεις Δx_i γίνουν απειροστά μικρές, τότε ο αριθμός τών όρων αυξάνεται απεριόριστα, αλλά η τιμή τού αθροίσματος τείνει προς μία ορισμένη τιμή, η οποία ισούται με την *επιφάνεια* που περιορίζεται από την καμπύλη F_x και τον άξονα τών x. Όπως γνωρίζουμε από το μάθημα τού απειροστικού λογισμού, το όριο αυτό τού αθροίσματος ονομάζεται **ολοκλήρωμα** και το συμβολίζουμε με

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x\,\Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx$$

Τα όρια $x = x_i$ και $x = x_f$ καθορίζουν τα όρια τών τιμών τις οποίες μπορεί να λάβει η ανεξάρτητη μεταβλητή x και, γι' αυτό, το ολοκλήρωμά μας λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα.** (Ενώ, όπως ξέρετε, *αόριστο ολοκλήρωμα* είναι το όριο τού αθροίσματος πάνω σε ένα ακαθόριστο διάστημα. Βλ. στο Παράρτημα Β.7 μια σύντομη ανασκόπηση τού ολοκληρωτικού λογισμού). Αυτό λοιπόν το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο αριθμητικά με την επιφάνεια που περιέχεται κάτω από την καμπύλη τής F_x ως προς x, για τιμές τού x ανάμεσα στο x_i και στο x_f. Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε το έργο που παράγει η F_x για να μετατοπίσει το σώμα ανάμεσα στο x_i και x_f ως

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \tag{7.11}$$

Στην περίπτωση που η $F_x = F\cos\theta$ είναι σταθερή, η παραπάνω εξίσωση ανάγεται στην Εξίσωση 7.1, όπως, άλλωστε, ήταν επόμενο.

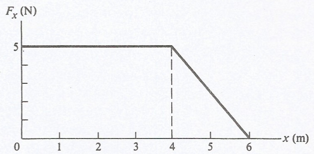
Εάν δρουν πάνω στο σώμα περισσότερες από μία δυνάμεις, τότε το συνολικό έργο είναι, απλώς, το έργο που παράγει η συνισταμένη τους. Εάν συμβολίσουμε τη συνισταμένη τών δυνάμεων στη διεύθυνση x με το ΣF_x, τότε το *συνολικό έργο* που παράγουν όλες οι δυνάμεις καθώς κινούν το σώμα από το x_i στο x_f είναι

$$W_{\text{net}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx \tag{7.12}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4 Έργο σταθερής δύναμης

Μια δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα εξαρτάται από το x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.5. Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη καθώς μετατοπίζει το σώμα από το $x = 0$ στο $x = 6$ m.

Λύση Το έργο που παράγει η δύναμη ισούται με τη συνολική επιφάνεια η οποία βρίσκεται κάτω από την καμπύλη, από το σημείο $x = 0$ στο $x = 6$ m. Η επιφάνεια είναι ίση με την επιφάνεια τού ορθογωνίου από $x = 0$ έως $x = 4$ m συν την επιφάνεια τού τριγώνου από $x = 4$ m έως $x = 6$ m. Η επιφάνεια τού ορθογωνίου είναι (4) (5) N · m = 20 J και η επιφάνεια τού τριγώνου είναι $\frac{1}{2}$(2)(5) N · m = 5 J. Επομένως το συνολικό έργο είναι 25 J.



Σχήμα 7.5 (Παράδειγμα 7.4) Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι σταθερή για τα 4 πρώτα μέτρα τής κίνησης και κατόπιν ελαττώνεται γραμμικά συναρτήσει τού x, από το $x = 4$ m έως το $x = 6$ m. Το ολικό έργο που παράγει η δύναμη ισούται με την επιφάνεια που βρίσκεται ανάμεσα στην καμπύλη και στον άξονα x.

Έργο που παράγεται από ένα ελατήριο

Στο Σχήμα 7.6 φαίνεται ένα σύνηθες σύστημα στο οποίο η δύναμη είναι συνάρτηση τής μετατόπισης. Ένα σώμα που ακουμπάει πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια συνδέεται με τον τοίχο με ένα ελατήριο. Εάν το ελατήριο εκταθεί ή συμπιεσθεί από τη θέση ισορροπίας του, τότε το ελατήριο ασκεί δύναμη πάνω στο σώμα, η οποία ισούται με

$$F_s = -kx \tag{7.13}$$

Δύναμη ελατηρίου

όπου x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) και k είναι μια θετική σταθερά που λέγεται *ελαστική σταθερά* τού ελατηρίου. Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 5, ο νόμος αυτός ονομάζεται **νόμος τού Hooke.** Ας σημειωθεί ότι ο νόμος τού Hooke ισχύει γενικά για μικρές μόνο μετατοπίσεις. Η τιμή τού k είναι ενδεικτική τής σκληρότητας τού ελατηρίου. Σκληρά ελατήρια έχουν μεγάλες τιμές τού k, ενώ μαλακά ελατήρια έχουν μικρές τιμές τού k.

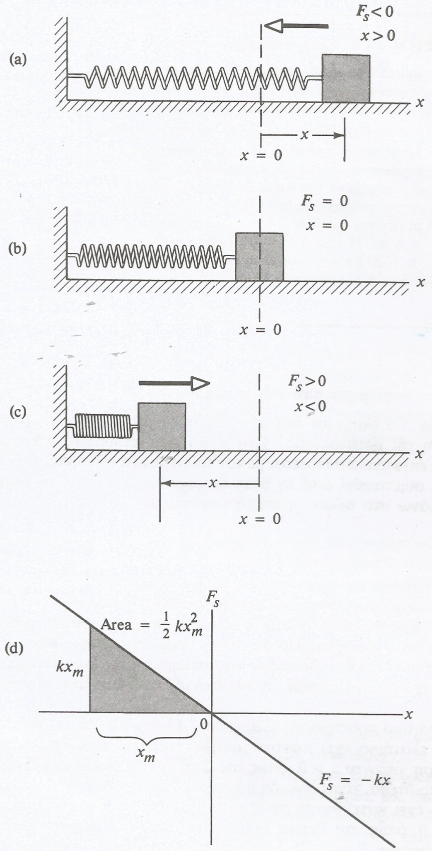
Το αρνητικό πρόσημο τής Εξίσωσης 7.13 σημαίνει ότι η δύναμη την οποία ασκεί το ελατήριο έχει πάντοτε *αντίθετη* κατεύθυνση από τη μετατόπιση. Λογουχάρη, όταν το $x > 0$, όπως στο Σχήμα 7.6a, η δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, είναι δηλαδή αρνητική. Όταν $x < 0$, όπως στο Σχήμα 7.6c, η δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, δηλαδή είναι θετική. Προφανώς, όταν $x = 0$, όπως στο Σχήμα 7.6b, το ελατήριο δεν είναι ούτε τεταμένο ούτε συμπιεσμένο και $F_s = 0$. Οι δυνάμεις τών ελατηρίων κατευθύνονται πάντοτε προς τη θέση ισορροπίας και γι' αυτό ονομάζονται και **δυνάμεις επαναφοράς.** Όταν το σώμα μετατοπιστεί κατά απόσταση x_m από τη θέση ισορροπίας, θα κινηθεί από το $-x_m$ στο $+x_m$ περνώντας από το μηδέν. Περιγραφή τής κίνησης που θα προκύψει θα βρείτε στο Κεφάλαιο 13.

Ας υποθέσουμε ότι σπρώχνουμε το σώμα προς τα αριστερά μέχρι απόσταση x_m από τη θέση ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.6c, και τό αφήνουμε. Ας υπολογίσουμε *το έργο που παράγεται από τη δύναμη τού ελατηρίου* καθώς το σώμα κινείται από το σημείο $x_i = -x_m$ στο $x_f = 0$. Εάν εφαρμόσουμε την Εξίσωση 7.11, παίρνουμε

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s \, dx = \int_{-x_m}^{0} (-kx) \, dx = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \tag{7.14a}$$

Έργο ελατηρίου

Δηλαδή το έργο που παράγεται από τη δύναμη τού ελατηρίου είναι θετικό, επειδή η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση (και οι δύο κατευθύνονται προς τα δεξιά). Εάν υπολογίσουμε το έργο που παράγει η



Σχήμα 7.6 Η δύναμη ενός ελατηρίου μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η θέση τού σώματος από τη θέση ισορροπίας. (a) Όταν το x είναι θετικό (τεταμένο ελατήριο), η δύναμη τού ελατηρίου κατευθύνεται προς τα αριστερά. (b) Όταν το x είναι μηδέν, η δύναμη τού ελατηρίου είναι μηδενική (κανονικό μήκος τού ελατηρίου). (c) Όταν το x είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), τότε η δύναμη τού ελατηρίου κατευθύνεται προς τα δεξιά. (d) Γραφική παράσταση τής μεταβολής τής δύναμης τού ελατηρίου F_s και τού x για το παραπάνω παράδειγμα. Το έργο που παράγει η δύναμη τού ελατηρίου καθώς το σώμα μετατοπίζεται από το $-x_m$ στο 0 ισούται με την επιφάνεια τού γραμμοσκιασμένου τριγώνου, $\frac{1}{2}kx_m^2$.

δύναμη τού ελατηρίου καθώς το σώμα κινείται από το $x_i = 0$ στο $x_f = x_m$, βρίσκουμε ότι $W_s = -\frac{1}{2}kx_m^2$. Επομένως το *συνολικό* έργο που παράγει η δύναμη τού ελατηρίου καθώς το σώμα κινείται από το $x_i = -x_m$ στο $x_f = x_m$ είναι *μηδενικό*.

Εάν κάνουμε μια γραφική παράσταση τού F προς το x, όπως στο Σχήμα 7.6d, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. (Να σημειωθεί ότι το έργο που υπολογίσαμε με την Εξίσωση 7.14a είναι ίσο με την επιφάνεια τού γραμμοσκιασμένου τριγώνου τού Σχήματος 7.6d, με βάση το x_m και ύψος kx_m. Η επιφάνεια τού τριγώνου αυτού είναι $\frac{1}{2}kx_m^2$, δηλαδή ίση με το έργο που υπολογίσαμε με την Εξίσωση 7.14a.

Εάν το σώμα μετατοπιστεί κατά μία *τυχαία* μετατόπιση από το x_i στο x_f, το έργο που παράγει η δύναμη τού ελατηρίου είναι

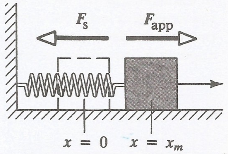
$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \qquad (7.14b)$$

Από την εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι το έργο είναι μηδενικό για κάθε κίνηση η οποία καταλήγει στο σημείο από το οποίο άρχισε ($x_i = x_f$). Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα θα τό χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ας υπολογίσουμε τώρα το έργο που παράγει μια *εξωτερική δύναμη* καθώς εκτείνει *πολύ σιγά* το ελατήριο από το σημείο $x_i = 0$ στο $x_f = x_m$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.7. Μπορούμε να κάνουμε εύκολα τον υπολογισμό εάν προσέξουμε ότι η *εφαρμοζόμενη* δύναμη, $\mathbf{F}_{app}$, είναι ίση και αντίθετη με την δύναμη τού ελατηρίου $\mathbf{F}_s$, για οποιαδήποτε τιμή τής μετατόπισης, έτσι ώστε $F_{app} = -(-kx) = kx$. Επομένως το έργο που παράγει αυτή η εφαρμοζόμενη (ή εξωτερική) δύναμη είναι

$$W_{F_{app}} = \int_0^{x_m} F_{app}\, dx = \int_0^{x_m} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_m^2$$

Να σημειωθεί ότι το έργο αυτό ισούται με το αρνητικό τού έργου που παράγεται από τη δύναμη τού ελατηρίου για αυτήν τη μετατόπιση.



Σχήμα 7.7. Ένα σώμα βρίσκεται πάνω σε λεία επιφάνεια και σύρεται προς τα δεξιά από τη δύναμη $\mathbf{F}_{app}$. Έτσι μετατοπίζεται από το $x = 0$ στο $x = x_m$. Εάν η διαδικασία αυτή γίνει σιγά-σιγά, τότε η εφαρμοσμένη δύναμη $\mathbf{F}_{app}$ είναι ίση και αντίθετη προς τη δύναμη τού ελατηρίου κάθε στιγμή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5 Η δύναμη τού ελατηρίου παράγει έργο

Ένα σώμα που βρίσκεται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια συνδέεται με ένα ελατήριο σταθεράς 80 N/m. Το ελατήριο συμπιέζεται κατά ένα μήκος 3.0 cm από τη θέση ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.6c. Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη τού ελατηρίου καθώς το σώμα κινείται από το σημείο $x_i = -3.0$ cm στη θέση ισορροπίας $x_f = 0$.

Λύση Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 7.14a με $x_m = -3.0$ cm $= -3 \times 10^{-2}$ m, και βρίσκουμε

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}\left(80\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(-3 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$$

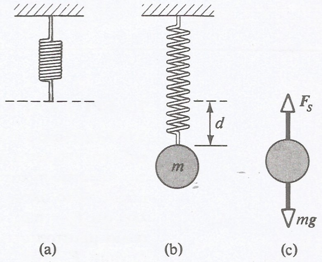
$$= 3.6 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6 Μέτρηση τής σταθεράς *k* ενός ελατηρίου

Στο Σχήμα 7.8 παριστάνεται μια συνήθης μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση τής σταθεράς ενός ελατηρίου. Το ελατήριο αναρτάται κατακόρυφα, όπως στο Σχήμα 7.8a, και από το άκρο του στο κάτω μέρος κρέμεται ένα σώμα μάζας m, όπως φαίνεται στο Σχήμα **7.8**b. Λόγω τού «βάρους», mg, το ελατήριο επιμηκύνεται κατά ένα μήκος d. Η δύναμη τού ελατηρίου κατευθύνεται προς τα επάνω και εξισορροπεί το βάρος. Εφαρμόζουμε τον νόμο τού Hooke, που δίνει

$|F_s| = kd = mg$, ή

$$k = mg/d$$



Σχήμα 7.8 (Παράδειγμα 7.6) Προσδιορισμός τής σταθεράς ενός ελικοειδούς ελατηρίου. Η επιμήκυνσή του d οφείλεται στο βάρος mg. Επειδή η τάση τού ελατηρίου εξισορροπεί το βάρος, έπεται ότι $k = mg/d$.

Λογουχάρη, εάν εκτείνουμε ένα ελατήριο κατά 2.0 cm κρεμώντας σ' αυτό μάζα 0.55 kg, η σταθερά τού ελατηρίου θα είναι

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 2.7 \times 10^2\ \text{N/m}$$

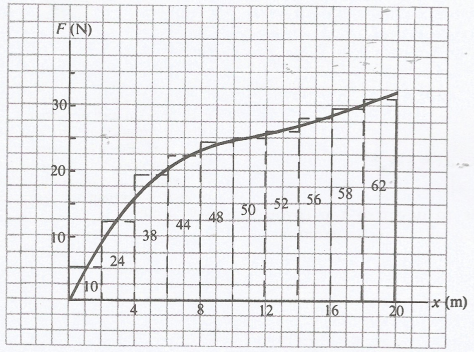
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.7 Έργο για να κινηθεί ένα αυτοκίνητο

Ένα αυτοκίνητο αγώνων ωθείται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια από μια οριζόντια δύναμη που εξαρτάται από την απόσταση, σύμφωνα με την καμπύλη τού Σχήματος 7.9. Υπολογίστε προσεγγιστικά το συνολικό έργο που παράγεται για να κινηθεί το αυτοκίνητο από την θέση $x = 0$ στη θέση $x = 20$ m.

Λύση Ας πάρουμε την καμπύλη και ας χωρίσουμε τη μετατόπιση σε πολλές μικρές μετατοπίσεις. Για ευκολία ας χωρίσουμε τη συνολική μετατόπιση σε δέκα διαδοχικές μετατοπίσεις μήκους 2 m η καθεμιά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.9. Το έργο που παράγεται σε καθεμιά από τις επιμέρους μετατοπίσεις ισούται κατά *προσέγγιση* με την επιφάνεια τού ορθογωνίου που περιγράφεται από την διακεκομένη γραμμή. Λογουχάρη, το έργο που παράγεται στην πρώτη μετατόπιση, από το $x = 0$ έως το $x = 2$ m, ισούται με την επιφάνεια τού μικρότερου ορθογωνίου (2 m) (5 N) = 10 J. Το έργο που παράγεται κατά τη δεύτερη μετατόπιση, από το $x = 2$ m μέχρι $x = 4$ m, είναι η επιφάνεια τού δεύτερου ορθογωνίου και ισούται με (2 m) (12 N) = 24 J. Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο και βρίσκουμε τις επιφάνειες οι οποίες είναι σημειωμένες στο Σχήμα 7.9. Το *άθροισμά* τους δίνει το συνολικό έργο από $x = 0$ έως $x = 20$ m. Το αποτέλεσμα είναι

$$W_{\text{total}} \approx 442 \text{ J}$$

Είναι προφανές ότι η ακρίβεια τού αποτελέσματος βελτιώνεται πολύ όσο περισσότερα είναι τα ορθογώνια.



Σχήμα 7.9 (Παράδειγμα 7.7) Γραφική παράσταση τής δύναμης συναρτήσει τής απόστασης για ένα αυτοκίνητο που κινείται πάνω στον άξονα x. Οι αριθμοί μέσα στα ορθογώνια δίνουν την επιφάνεια τού αντίστοιχου ορθογωνίου, δηλαδή το έργο που έχει παραχθεί σε αυτό το διάστημα.

7.5 ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Στο Κεφάλαιο 5 είδαμε ότι όταν η συνισταμένη τών δυνάμεων οι οποίες δρουν επί ενός σώματος δεν είναι μηδενική, τότε το σώμα επιταχύνεται. Θεωρήστε την περίπτωση κατά την οποία μια σταθερή δύναμη $\mathbf{F}_x$ δρα πάνω σε ένα σώμα μάζας m το οποίο κινείται στη διεύθυνση x. Ο δεύτερος νόμος τού Newton λέει ότι $\mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x$, όπου η $\mathbf{a}_x$ είναι σταθερή, αφού η $\mathbf{F}_x$ είναι σταθερή. Εάν το σώμα μετατοπιστεί από το $x_i = 0$ στο $x_f = s$, τότε το έργο που παράγει η δύναμη $\mathbf{F}_x$ είναι

$$W = F_x s = (ma_x)s \tag{7.15}$$

Στο Κεφάλαιο 3 όμως είδαμε ότι, όταν το σώμα επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$s = \tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t \qquad a_x = \frac{v_f - v_i}{t}$$

όπου v_i είναι η ταχύτητα τη στιγμή $t = 0$ και v_f είναι η ταχύτητα τη στιγμή t. Θέτουμε τις εκφράσεις αυτές στην Εξίσωση 7.15 και έχουμε

$$W = m\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right)\tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$W = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \tag{7.16}$$

Ορίζουμε ότι η *κινητική ενέργεια* ενός σώματος είναι ίση με το γινόμενο τού μισού τής μάζας επί το τετράγωνο τού μέτρου ταχύτητας τού σώματος.

Δηλαδή, η κινητική ενέργεια, K, ενός σώματος μάζας m το οποίο έχει μέτρο ταχύτητας v ορίζεται με την παρακάτω εξίσωση

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{7.17}$$

Κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια που σχετίζεται με την κίνηση ενός σώματος

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει τις ίδιες μονάδες με το έργο. Λογουχάρη, μία μάζα 1 kg η οποία κινείται με ταχύτητα 4.0 m/s έχει κινητική ενέργεια 8.0 J. Στον Πίνακα 7.2 περιέχεται κατάλογος τών κινητικών ενεργειών διαφόρων σωμάτων. Μπορούμε να νοήσουμε την κινητική ενέργεια ως ενέργεια που συνδέεται με την κίνηση ενός σώματος. Για διευκόλυνσή μας, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση 7.16 ως

$$W = K_f - K_i = \Delta K \tag{7.18}$$

Θεώρημα έργου-ενέργειας

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2 Κινητικές ενέργειες διαφόρων σωμάτων

σώμα	μάζα (kg)	μέτρο ταχύτητας (m/s)	κινητική ενέργεια (J)
Η Γη περιφερόμενη γύρω από τον Ήλιο	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.65×10^{33}
Η Σελήνη περιφερόμενη γύρω από τη Γη	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Πύραυλος κινούμενος με ταχύτητα διαφυγής[a]	500	6.18×10^{4}	9.5×10^{13}
Αυτοκίνητο κινούμενο με 55 mi/h	2000	25	6.3×10^{5}
Δρομέας	70	10	3.5×10^{3}
Πέτρα που πέφτει από ύψος 10 m	1	14	9.8×10^{1}
Μπάλλα τού γκολφ κινούμενη με την οριακή της ταχύτητα	0.046	32	2.4×10^{1}
Σταγόνα βροχής που πέφτει με την οριακή της ταχύτητα	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
Ένα μόριο οξυγόνου τής ατμόσφαιρας	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

[a] Ταχύτητα διαφυγής είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα σώμα ώστε να ξεφύγει από το βαρυτικό πεδίο τής Γης.

Δηλαδή

Το έργο που παράγει η συνισταμένη σταθερή δύναμη F καθώς μετατοπίζεται ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος.

Το έργο που παράγεται πάνω σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής του ενέργειας

Η λέξη μεταβολή εδώ σημαίνει τη διαφορά τής τελικής μείον την αρχική κινητική ενέργεια.

Η Εξίσωση 7.18 αποτελεί πολύ σημαντικό αποτέλεσμα και είναι γνωστή ως **θεώρημα έργου-ενέργειας.** Έχουμε εξαγάγει το θεώρημα αυτό για την περίπτωση σταθερής δύναμης, αλλά μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει ακόμη και όταν η δύναμη μεταβάλλεται. Εάν η συνολική δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα στη διεύθυνση x είναι ΣF_x, τότε ξέρουμε από τον δεύτερο νόμο τού Newton ότι $\Sigma F_x = ma$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 7.12 για να υπολογίσουμε το συνολικό παραγόμενο έργο W_{net}:

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx$$

Εφόσον η συνολική δύναμη εξαρτάται από το x, έπεται ότι και η ταχύτητα και η επιτάχυνση εξαρτώνται από το x. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τής διαδοχικής διαφόρισης για να υπολογίσουμε το W_{net}:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Θέτουμε αυτό στην έκφραση για το W και παίρνουμε

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} mv\frac{dv}{dx}\, dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (7.19)$$

Μεταβάλαμε τα όρια τού ολοκληρώματος γιατί αλλάξαμε τη μεταβλητή από το x στο v.

Το θεώρημα έργου-ενέργειας, όπως εκφράζεται στην Εξίσωση 7.18, ισχύει επίσης και για τη γενικότερη περίπτωση κατά την οποία μεταβάλλεται η κατεύθυνση και το μέτρο τής δύναμης καθώς το σώμα κινείται πάνω σε μια οποιαδήποτε τροχιά στις τρεις διαστάσεις. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε

Γενική έκφραση τού έργου που παράγει η δύναμη *F*

$$\boxed{W = \int_i^f \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}} \qquad (7.20)$$

Γραμμικό ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

όπου τα όρια i και f αντιστοιχούν στις αρχικές και στις τελικές συντεταγμένες τού σώματος. Το ολοκλήρωμα τής Εξίσωσης 7.20 ονομάζεται *γραμμικό ολοκλήρωμα*. Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα το οποίο περιγράφει μια απειροστά μικρή μετατόπιση ως $\boldsymbol{ds} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$, αλλά η $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$. Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 7.20

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz \qquad (7.21)$$

Αυτή είναι γενική έκφραση(2) και τή χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το έργο που παράγει μια δύναμη όταν μετατοπίζει το σώμα από το σημείο το οποίο έχει συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i) στο σημείο (x_f, y_f, z_f).

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

Το έργο μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδενικό

το έργο που παράγει σε ένα σώμα η συνισταμένη τών δυνάμεων οι οποίες δρουν επάνω του ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος.

Σύμφωνα επίσης με το θεώρημα έργου-ενέργειας, εάν το συνολικό έργο είναι θετικό (δηλαδή $K_f > K_i$), τότε αυξάνεται το μέτρο ταχύτητας τού σώματος· εάν όμως είναι αρνητικό (δηλαδή $K_f < K_i$), τότε ελαττώνεται το μέτρο τής ταχύτητας. Δηλαδή, η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια ενός σώματος θα μεταβληθούν μόνο εάν μια εξωτερική δύναμη παραγάγει έργο πάνω στο σώμα. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι ίση με το έργο που πρέπει να παραγάγει μια δύναμη στο σώμα ώστε να τό ακινητοποιήσει.

---

(2) Στη γενική περίπτωση την οποία περιγράφει η Εξίσωση 7.21, η συνιστώσα F_x μπορεί να είναι συνάρτηση τών y και z, όπως και τού x. Όταν ολοκληρώνουμε ως προς x θα θεωρούμε τα y και z σταθερά. Το ίδιο ισχύει και για τις F_y και F_z.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.8 ***Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λεία επιφάνεια***

Ένα σώμα μάζας 6 kg, το οποίο αρχικά ηρεμούσε, σύρεται προς τα δεξιά επάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια υπό την δράση σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.10a. Βρείτε το μέτρο ταχύτητας τού σώματος όταν αυτό έχει διανύσει απόσταση 3 m.

Λύση Το βάρος εξισορροπείται από την κάθετη δύναμη, αλλά καμία από αυτές τις δύο δυνάμεις δεν παράγει έργο, γιατί είναι κάθετες πάνω στη μετατόπιση. Εφόσον δεν υπάρχουν τριβές, η συνολική εξωτερική δύναμη είναι 12 N. Επομένως, το έργο που παράγει η δύναμη αυτή είναι

$$W_F = Fs = (12\ \mathrm{N})(3\ \mathrm{m}) = 36\ \mathrm{N\cdot m} = 36\ \mathrm{J}$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα έργου-ενέργειας και, αφού γνωρίζουμε ότι η αρχική κινητική ενέργεια είναι μηδενική, βρίσκουμε

$$W_F = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f^2 = \frac{2W_F}{m} = \frac{2(36\ \mathrm{J})}{6\ \mathrm{kg}} = 12\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$v_f = \boxed{3.46\ \mathrm{m/s}}$$

(a)

(b)

Σχήμα 7.10 (a) (Παράδειγμα 7.8). (b) Παράδειγμα 7.9.

Άσκηση 3 Βρείτε την επιτάχυνση τού σώματος και προσδιορίστε την τελική ταχύτητα χρησιμοποιώντας την εξίσωση $v_f^2 = v_i^2 + 2as$.

$a = 2\ \mathrm{m/s^2}$; $v_f = 3.46\ \mathrm{m/s}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.9 ***Ένα σώμα σύρεται επάνω σε τραχιά επιφάνεια***

Βρείτε την τελική ταχύτητα τού σώματος που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 7.8, εάν η επιφάνεια είναι τραχιά και ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι 0.15.

Λύση Στην περίπτωση αυτή πρέπει να υπολογίσουμε το συνολικό έργο που έχει παραχθεί επί τού σώματος. Το έργο αυτό είναι άθροισμα τού έργου το οποίο παρήγαγε η εφαρμοσθείσα εξωτερική δύναμη τών 12 N και η δύναμη τριβής, **f**, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.10b. Εφόσον η **f** έχει κατεύθυνση προς τα αρνητικά x και η μετατόπιση γίνεται προς τα θετικά x, το έργο της είναι *αρνητικό*. Το μέτρο τής δύναμης τριβής είναι $f = \mu N = \mu mg$. Επομένως, σύμφωνα με την Εξίσωση 7.2, το έργο της είναι

$$W_f = -fs = -\mu mgs = (-0.15)(6\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2})(3\ \mathrm{m})$$
$$= -26.5\ \mathrm{J}$$

Άρα το συνολικό έργο που έχει παραχθεί επί τού σώματος είναι

$$W_{\mathrm{net}} = W_F + W_f = 36.0\ \mathrm{J} - 26.5\ \mathrm{J} = 9.50\ \mathrm{J}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας με $v_i = 0$ και βρίσκουμε

$$W_{\mathrm{net}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f^2 = \frac{2W_{\mathrm{net}}}{m} = \frac{19}{6}\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$v_f = \boxed{1.78\ \mathrm{m/s}}$$

Άσκηση 4 Βρείτε την επιτάχυνση τού σώματος χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο τού Newton· βρείτε επίσης το μέτρο τελικής ταχύτητας τού σώματος χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης.

Απάντηση $a = 0.530\ \mathrm{m/s^2}$, $v_f = 1.78\ \mathrm{m/s}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.10 ***Ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου***

Ένα σώμα μάζας 1.6 kg συνδέεται με ένα ελατήριο σταθεράς 10^3 N/m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.6. Το ελατήριο συμπιέζεται κατά 2 cm και το σώμα αφήνεται ελεύθερο ενώ βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας. (a) Υπολογίστε το μέτρο ταχύτητας τού σώματος καθώς αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, $x = 0$, εάν η επιφάνεια είναι λεία.

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 17.4a, αντικαθιστούμε $x_m = -2.0\ \mathrm{cm} = -2 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$, και βρίσκουμε ότι το έργο που παράγεται από το ελατήριο, είναι

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}\left(10^3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-2 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2 = 0.20\ \mathrm{J}$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα έργου-ενέργειας με $v_i = 0$ και βρίσκουμε ότι

$$W_s = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$
$$0.20\ \mathrm{J} = \tfrac{1}{2}(1.6\ \mathrm{kg})v_f^2 - 0$$
$$v_f^2 = \frac{0.4\ \mathrm{J}}{1.6\ \mathrm{kg}} = 0.25\ \mathrm{m^2/s^2}$$
$$v_f = \boxed{0.50\ \mathrm{m/s}}$$

(b) Υπολογίστε το μέτρο τής ταχύτητας τού σώματος καθώς αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, εάν μια σταθερή δύναμη τριβής μέτρου 4.0 N επιβραδύνει την κίνηση.

Το έργο τής δύναμης τριβής για μετατόπιση 2×10^{-2} m είναι

$$W_f = -fs = -(4\ \mathrm{N})(2 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}) = -0.08\ \mathrm{J}$$

Το συνολικό έργο που παράγεται επί τού σώματος είναι το άθροισμα τού έργου το οποίο παράγει η δύναμη τού ελατηρίου και η δύναμη τριβής. Στο μέρος (a) βρήκαμε ότι $W_s = 0.20$ J. Επομένως

$$W_{\text{net}} = W_s + W_f = 0.20\ \mathrm{J} - 0.08\ \mathrm{J} = 0.12\ \mathrm{J}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας και έχουμε

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = W_{\text{net}}$$

$$\tfrac{1}{2}(1.6\ \mathrm{kg})v_f^2 = 0.12\ \mathrm{J}$$

$$v_f^2 = \frac{0.24\ \mathrm{J}}{1.6\ \mathrm{kg}} = 0.15\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$v_f = \boxed{0.39\ \mathrm{m/s}}$$

Ας σημειωθεί ότι αυτή η τιμή τής v_f είναι μικρότερη από την τιμή που βρήκαμε στην περίπτωση τής λείας επιφάνειας. Σάς φαίνεται λογικό αυτό το αποτέλεσμα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.11 *Σώμα ωθούμενο επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο*

Ένα σώμα μάζας m ωθείται από μια σταθερή δύναμη $\boldsymbol{F}$ προς το επάνω μέρος μιας τραχιάς κεκλιμένης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.11a. Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ έχει διεύθυνση παράλληλη προς την κεκλιμένη επιφάνεια. Το σώμα μετατοπίζεται κατά απόσταση d επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. (a) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη βαρύτητας για τη μετατόπιση αυτή.

Η δύναμη τής βαρύτητας είναι παράλληλη προς την κατακόρυφο. Έτσι έχει μία συνιστώσα που κατευθύνεται παράλληλα προς το *κάτω μέρος* τού κεκλιμένου επιπέδου. Εάν λάβουμε τη θετική κατεύθυνση τού x προς τα επάνω, τότε η συνιστώσα αυτή είναι $-mg \sin\theta$ (Σχήμα 7.11b). Επομένως, το έργο που παράγει η βαρύτητα για τη μετατόπιση d είναι

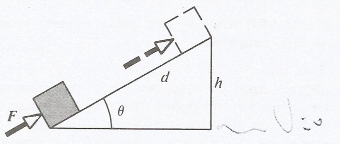
$$W_g = (-mg \sin\theta)d = \boxed{-mgh}$$

όπου $h = d \sin\theta$ είναι η *κατακόρυφη* μετατόπιση. Δηλαδή το έργο που παράγει η βαρύτητα έχει μέτρο το οποίο είναι ίσο με τη δύναμη βαρύτητας πολλαπλασιασμένη με τη *μετατόπιση προς τα επάνω*. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε σώμα που μετατοπίζεται ανάμεσα σε δύο σημεία. Τέλος, το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή ανάμεσα στα σημεία αυτά.

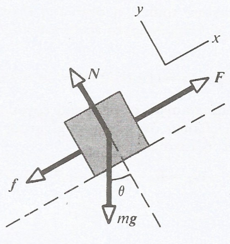
(b) Υπολογίστε το έργο που παράγει η εφαρμοσμένη δύναμη $\boldsymbol{F}$.

Επειδή η $\boldsymbol{F}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση, βρίσκουμε

$$W_F = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = \boxed{Fd}$$



(a)



(b)

Σχήμα 7.11 (Παράδειγμα 7.11) Σταθερή δύναμη $\boldsymbol{F}$ ωθεί το σώμα προς το επάνω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου που έχει τραχιά επιφάνεια.

(c) Εάν ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως είναι μ, βρείτε το έργο που παράγει η τριβή ολισθήσεως.

Το μέτρο τής δύναμης τριβής είναι $f = \mu N = \mu mg \sin\theta$. Επειδή η κατεύθυνση τής δύναμης τριβής είναι *αντίθετη* προς την κατεύθυνση τής μετατόπισης, βρίσκουμε ότι

$$W_f = -fd = \boxed{-\mu mgd \cos\theta}$$

(d) Βρείτε το συνολικό έργο που παράγεται στο σώμα κατά τη διάρκεια αυτής τής μετατόπισης.

Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα από τα (a), (b) και (c) και έχουμε

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= W_g + W_F + W_f \\ &= -mgd \sin\theta + Fd - \mu mgd \cos\theta \end{aligned}$$

ή

$$W_{\text{net}} = \boxed{Fd - mgd(\sin\theta + \mu \cos\theta)}$$

Λογουχάρη, εάν λάβουμε $F = 15$ N, $d = 1.0$ m, $\theta = 25°$, $m = 1.5$ kg και $\mu = 0.30$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} W_g &= -(mg \sin\theta)d \\ &= -(1.5\ \mathrm{kg})\left(9.80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)(\sin 25°)(1.0\ \mathrm{m}) \\ &= -6.2\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

$$W_F = Fd = (15\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m}) = 15\ \mathrm{J}$$

$$W_f = -\mu mgd \cos\theta$$

$$= -(0.30)(1.5 \text{ kg})\left(9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(1.0 \text{ m})(\cos 25°)$$

$$= -4.0 \text{ J}$$

$$W_{net} = W_g + W_F + W_f = 4.8 \text{ J}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.12 Ελάχιστη απόσταση πέδησης

Ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 48 km/h μπορεί να σταματήσει στο ελάχιστο διάστημα τών 40 m εάν χρησιμοποιηθούν τα φρένα του. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση ώστε το ίδιο αυτοκίνητο να σταματήσει εάν κινείται με ταχύτητα 96 km/h;

Λύση Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο δεν «ντεραπάρει». Για να βρούμε την *ελάχιστη* απόσταση πέδησης d, θα θεωρήσουμε ότι η δύναμη τριβής f ανάμεσα στα λάστιχα και στην άσφαλτο είναι η *μέγιστη* δυνατή. Το έργο που παράγει η δύναμη τριβής είναι $-fd$ και ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας τού αυτοκινήτου. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι $\frac{1}{2}mv^2$ και η τελική είναι μηδενική. Έτσι έχουμε

$$W_f = K_f - K_i$$

$$-fd = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$d = \boxed{\frac{mv^2}{2f}}$$

Εάν υποθέσουμε ότι η δύναμη τριβής f είναι ίδια και για τις δύο αρχικές ταχύτητες, μπορούμε να θεωρήσουμε τη m και την f σταθερές. Επομένως ο λόγος τών δύο ελάχιστων αποστάσεων πέδησης είναι

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

Εάν λάβουμε $v_1 = 48$ km/h, $v_2 = 96$ km/h και $d_1 = 40$ m, έχουμε

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{96}{48}\right)^2 = 4$$

$$d_2 = 4d_1 = 4(40 \text{ m}) = \boxed{160 \text{ m}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι *η ελάχιστη απόσταση πέδησης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο τού λόγου τών ταχυτήτων*. Εάν διπλασιαστεί η ταχύτητα, όπως συνέβη στο παράδειγμά μας, η ελάχιστη απόσταση πέδησης τετραπλασιάζεται.

7.6 ΙΣΧΥΣ

Στην πράξη μάς ενδιαφέρει να ξέρουμε όχι μόνο το έργο που παράγεται πάνω σε ένα σώμα αλλά και τον ρυθμό με τον οποίο παράγεται το έργο αυτό. Ορίζουμε ότι *ο ρυθμός τής μεταφοράς ενέργειας* λέγεται **ισχύς**.

Εάν μια εξωτερική δύναμη δράσει πάνω σε ένα σώμα και παράγάγει έργο ΔW μέσα σε ένα χρονικό διάστημα Δt, τότε η **μέση ισχύς** για το χρονικό αυτό διάστημα είναι ίση με τον λόγο τού έργου προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (7.22)$$

Μέση ισχύς

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, το έργο που παράγεται πάνω σε ένα σώμα αυξάνεται συναρτήσει τής ενέργειας τού σώματος. Λέμε λοιπόν ότι ισχύς είναι ο ως προς τον χρόνο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας. Η **στιγμιαία ισχύς** P είναι το όριο τής μέσης ισχύος καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν:

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (7.23)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 7.4, εκφράζουμε το έργο που παράγει μία δύναμη $\mathbf{F}$ καθώς μετατοπίζει ένα σώμα κατά ds, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Η στιγμιαία ισχύς ισούται λοιπόν με

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (7.24)$$

Στιγμιαία ισχύς

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$.

Η μονάδα ισχύος στο SI είναι το J/s και ονομάζεται *watt* (προς τιμήν τού James Watt), συμβολίζεται δε με W:

To watt

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Δεν πρέπει να συγχέουμε το σύμβολο τού watt (βατ), W, με το σύμβολο τού έργου.

Στο βρετανικό σύστημα μονάδα ισχύος είναι ο ίππος (hp).

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}$$

Μπορούμε να ορίσουμε μια νέα μονάδα ενέργειας (ή έργου) εάν χρησιμοποιήσουμε τη μονάδα ισχύος. Μία κιλοβατώρα (kilowatt-hour· σύμβ. kWh) είναι η ενέργεια που μετατράπηκε ή καταναλώθηκε μέσα σε μία ώρα με τον σταθερό ρυθμό ενός kW. Η αριθμητική τιμή μιας kWh είναι

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

Πρέπει να θυμούμαστε ότι η kWh είναι μονάδα ενέργειας και όχι ισχύος. Όταν πληρώνετε τον λογαριασμό τής ΔΕΗ αγοράζετε ενέργεια και γι' αυτό τον λόγο το μέρος τού λογαριασμού σας που σχετίζεται με την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας χρεώνεται σε μονάδες kWh. Λογουχάρη, ένας ηλεκτρικός λαμπτήρας τών 100 W καταναλώνει ενέργεια 3.6×10^5 J σε 1 ώρα.

Αν και χρησιμοποιούμε τα W και kWh συνήθως για να περιγράψουμε κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας, τελευταία τα σύμβολα αυτά χρησιμοποιούνται και σε άλλους κλάδους. Έτσι, μερικοί κατασκευαστές αυτοκινήτων περιγράφουν την ισχύ τών μηχανών τους όχι μόνο σε ίππους, hp, αλλά και σε kW. Είναι πολύ πιθανό ότι στο μέλλον θα περιγράφουμε την ισχύ μιας ηλεκτρικής συσκευής σε hp.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.13. Ισχύς που δίνει μια ηλεκτροκίνητη μηχανή

Ένα ασανσέρ έχει μάζα 1 000 kg και μεταφέρει μέγιστο φορτίο μάζας 800 kg. Η προς τα επάνω κίνηση τού ασανσέρ επιβραδύνεται από μία σταθερή δύναμη τριβής 4 000 N, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.12 (a). Εάν θέλουμε να κινείται προς τα επάνω το ασανσέρ με σταθερή ταχύτητα 3 m/s, ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ισχύς που παράγει ο κινητήρας;

Ο κινητήρας παράγει τη δύναμη T, η οποία έλκει το ασανσέρ προς τα επάνω. Από τον δεύτερο νόμο τού Newton και λόγω τού ότι $a = 0$, εφόσον η ταχύτητα είναι σταθερή, έχουμε

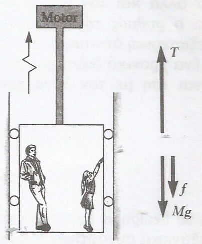
$$T - f - Mg = 0$$

όπου M είναι η *συνολική* μάζα (μάζα τού ασανσέρ συν το φορτίο) η οποία ισούται με 1 800 kg. Έτσι

$$\begin{aligned} T &= f + Mg \\ &= 4 \times 10^3 \text{ N} + (1.8 \times 10^3 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \\ &= 2.16 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 7.24 και, εφόσον το $\mathbf{T}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$, έχουμε

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = Tv \\ &= (2.16 \times 10^4 \text{ N})(3 \text{ m/s}) = 6.49 \times 10^4 \text{ W} \end{aligned}$$



Σχήμα 7.12 (Παράδειγμα 7.13) Ο κινητήρας τού ανελκυστήρα παράγει την τάση $\mathbf{T}$ που κατευθύνεται προς τα επάνω. Η τριβή $\mathbf{f}$ και το βάρος $M\mathbf{g}$ κατευθύνονται προς τα κάτω.

$$= 64.9 \text{ kW} = \boxed{87.0 \text{ hp}}$$

(b) Ποια πρέπει να είναι η ισχύς την οποία παράγει ο κινητήρας ώστε το ασανσέρ να επιταχύνεται προς τα επάνω με επιτάχυνση 1.0 m/s²;

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton και έχουμε

$$T - f - Mg = Ma$$

$$T = M(a+g) + f$$
$$= (1.8 \times 10^3 \text{ kg})(1.0 + 9.80) \text{ m/s}^2 + 4 \times 10^3 \text{ N}$$
$$= 2.34 \times 10^4 \text{ N}$$

Χρησιμοποιούμε λοιπόν την Εξίσωση 7.24 και βρίσκουμε ότι η απαιτούμενη ισχύς είναι

$$P = Tv = (2.34 \times 10^4\, v) \text{ W}$$

Όπου v είναι η στιγμιαία ταχύτητα τού ασανσέρ σε m/s. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η ισχύς αυξάνεται γραμμικά συναρτήσει τής ταχύτητας.

* 7.7 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ

Είναι γνωστό ότι τα βενζινοκίνητα αυτοκίνητα είναι μηχανήματα χαμηλής αποδοτικότητας. Ακόμη και υπό ιδεώδεις συνθήκες, λιγότερο από το 15% τής διαθέσιμης ενέργειας τών καυσίμων χρησιμοποιείται για την κίνηση τού αυτοκινήτου. Η κατάσταση είναι πολύ χειρότερη σε συνθήκες κυκλοφοριακής συμφόρησης. Σκοπός τού υποκεφαλαίου αυτού είναι να χρησιμοποιήσουμε έννοιες τής ενέργειας, τής ισχύος και τών δυνάμεων τριβής για να μελετήσουμε ορισμένους παράγοντες που επηρεάζουν την κατανάλωση καυσίμων.

Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που συντελούν στις απώλειες ενέργειας ενός αυτοκινήτου. Τα δύο τρίτα τής ενέργειας τού καυσίμου σπαταλώνται από τη μηχανή, π.χ. ένα μέρος τής ενέργειας αυτής καταλήγει στην ατμόσφαιρα διά μέσου τής εξάτμισης και τού συστήματος ψύξης. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 22, οι μεγάλες ενεργειακές απώλειες στην εξάτμιση και στο ψυγείο επιβάλλονται από τους νόμους τής Θερμοδυναμικής. Τα 10% περίπου τής διαθέσιμης ενέργειας χάνονται κατά τη μηχανική μετάδοση τής κίνησης στο κιβώτιο ταχυτήτων, στον άξονα, στο διαφορικό και στους τροχούς. Η τριβή στα άλλα κινούμενα μέρη, όπως λ.χ. στον κινητήρα, καταναλώνει το 6% τής διαθέσιμης ενέργειας. Τέλος, ένα 4% καταναλώνεται από τις διάφορες αντλίες, το σύστημα κλιματισμού, τα υδραυλικά φρένα, το τιμόνι και τα φώτα. Έτσι μόνον το 14% τής διαθέσιμης ενέργειας καταλήγει στην κίνηση τού αυτοκινήτου. Αυτή η ενέργεια καταναλώνεται για να υπερνικηθούν οι τριβές με την άσφαλτο και η αντίσταση τού αέρα. Ο Πίνακας 7.3 περιέχει έναν κατάλογο τών ενεργειακών απωλειών ενός μεγάλου αυτοκινήτου, τού οποίου τα καύσιμα παράγουν ισχύ 136 kW, η μάζα τού αυτοκινήτου είναι 1 450 kg και η κατανάλωση καυσίμων 15 περίπου lt ανά 100 km.

Αλλά ας μελετήσουμε λεπτομερειακά την ισχύ που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο για να υπερνικήσει την τριβή τού δρόμου και τού αέρα. Ο συντελεστής τριβής κυλήσεως μ ανάμεσα στα λάστιχα και στην άσφαλτο είναι 0.016 περίπου. Ένα αυτοκίνητο μάζας 1 450 kg έχει βάρος 14 200 N και η δύναμη τριβής κυλήσεως είναι $\mu N = \mu W = 227$ N. Καθώς αυξάνεται η ταχύτητα τού αυτοκινήτου, μειώνεται λίγο η κάθετη δύναμη για λόγους αεροδυναμικούς. Έτσι μειώνεται λίγο η δύναμη τής τριβής κυλήσεως $\mathbf{f}_r$, όπως φαίνεται στον Πίνακα 7.4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3 Απώλειες ισχύος για ένα μεγάλο αυτοκίνητο με μηχανή ισχύος 136 kW

Αίτιο	Απώλειες (kW)	Απώλειες (%)
Εξάτμιση	46	33
Ψυγείο	45	33
Σύστημα μετάδοσης κίνησης	13	10
Εσωτερικές τριβές μηχανής	8	6
Διάφορα εξαρτήματα	5	4
Κίνηση οχήματος	19	14

Ας μελετήσουμε τώρα τα αποτελέσματα τής τριβής με τον αέρα, δηλαδή τής οπισθέλκουσας δύναμης που δημιουργείται καθώς ο αέρας περνάει πάνω από διάφορες εξωτερικές επιφάνειες τού αυτοκινήτου. Όπως είδαμε στο Υποκεφάλαιο 6.4, η οπισθέλκουσα δύναμη για μεγάλα αντικείμενα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο τού μέτρου τής ταχύτητας και μπορούμε να τήν γράψουμε

$$f_a = \tfrac{1}{2} C A \rho v^2 \tag{7.25}$$

όπου C είναι ο συντελεστής αντίστασης, A είναι η επιφάνεια διατομής τού κινούμενου σώματος και ρ η πυκνότητα τού αέρα. Οι τιμές τού Πίνακα 7.4 προκύπτουν από την παραπάνω σχέση για $C = 0.5$, $\rho = 1.293$ kg/m^3 και $A \approx 2$ m^2.

Το μέτρο τής συνολικής δύναμης τριβής, f_t, είναι το άθροισμα τών μέτρων τής τριβής κυλήσεως και τής τριβής με τον αέρα

$$f_t = f_r + f_a \approx \text{σταθερό} + \tfrac{1}{2} C A \rho v^2 \tag{7.26}$$

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 7.4, στις χαμηλές ταχύτητες η αντίσταση τού δρόμου και τού αέρα είναι παρόμοιες, αλλά στις μεγάλες ταχύτητες η αντίσταση τού αέρα είναι η κύρια δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση. Μπορούμε να ελαττώσουμε την τριβή με τον δρόμο εάν χρησιμοποιήσουμε λάστιχα radial και φουσκώσουμε τα λάστιχα λίγο πιο πολύ από το κανονικό. Την αντίσταση τού αέρα μπορούμε να τήν ελαττώσουμε αν χρησιμοποιήσουμε αυτοκίνητα μικρότερης διατομής και με αεροδυναμικό σχήμα. Εάν έχουμε τα τζάμια τών παραθύρων κατεβασμένα, αυξάνουμε την αντίσταση τού αέρα και αυξάνεται η κατανάλωση καυσίμων κατά 3%. Αλλά εάν ανεβάσουμε τα τζάμια και χρησιμοποιήσουμε το σύστημα κλιματισμού, τότε η κατανάλωση καυσίμων αυξάνεται κατά 12%.

Η συνολική ισχύς λοιπόν που απαιτείται για να διατηρείται σταθερή η ταχύτητα v είναι το γινόμενο $f_t v$. Αυτή πρέπει να είναι η ισχύς που φτάνει στους τροχούς. Λογουχάρη, βλέπουμε από τον Πίνακα 7.4 ότι, για $v = 26.8$ m/s, η απαιτούμενη ισχύς είναι

$$P = f_t v = (683 \text{ N}) \left(26.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 18.3 \text{ kW}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4 Απώλειες τριβών και αναγκαία ισχύς για ένα μεγάλο αυτοκίνητο

v (m/s)	N (N)	f_r (N)	f_a (N)	F_t (N)	$P = f_t v$ (kW)
0	14 200	227	0	227	0
8.9	14 100	226	51	277	2.5
17.8	13 900	222	204	426	7.6
26.8	13 600	218	465	683	18.3
35.9	13 200	211	830	1041	37.3
44.8	12 600	202	1293	1495	66.8

Στον πίνακα αυτό, N είναι η κάθετη δύναμη, f_r είναι η τριβή με την άσφαλτο, f_a η τριβή με τον αέρα, f_t η συνολική τριβή και P η ισχύς που φτάνει στους τροχούς.

Το αποτέλεσμα αυτό χωρίζεται σε δύο μέρη: (1) την ισχύ που απαιτείται για να υπερνικηθεί η αντίσταση τής ασφάλτου $f_r v$· και (2) την ισχύ που απαιτείται για να υπερνικηθεί η τριβή τού αέρα $f_a v$. Για ταχύτητα $v = 26.8$ m/s έχουμε

$$P_r = f_r v = (218 \text{ N}) \left(26.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 5.8 \text{ kW}$$

$$P_a = f_a v = (465 \text{ N}) \left(26.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 12.5 \text{ kW}$$

Να σημειωθεί ότι $P = P_r + P_a$.

Αλλά για ταχύτητα $v = 44.7$ m/s βρίσκουμε ότι $P_r = 9.0$ kW, $P_a = 57.8$ kW, και $P = 66.8$ kW. Βλέπουμε λοιπόν πόσο μεγάλη είναι η τριβή τού αέρα στις μεγάλες ταχύτητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.14 Κατανάλωση βενζίνης ενός μεσαίου αυτοκινήτου

Ένα αυτοκίνητο μέσου μεγέθους έχει μάζα 800 kg και απόδοση 14% (δηλαδή 14% τής διαθέσιμης ενέργειας τών καυσίμων φτάνει στους τροχούς). Υπολογίστε πόση βενζίνη καταναλώνεται για να επιταχυνθεί το αυτοκίνητο ώστε να αποκτήσει την ταχύτητα τών 60 mi/h (27 m/s), ενώ αρχικά ήταν ακίνητο. Ας ληφθεί ως δεδομένο ότι ένα γαλόνι (ΗΠΑ) βενζίνης αποδίδει ενέργεια 1.3×10^8 J.

Λύση Η ενέργεια που απαιτείται για να επιταχυνθεί το αυτοκίνητο ώστε, ενώ ήταν ακίνητο, να αποκτήσει την ταχύτητα v είναι η κινητική του ενέργεια, $\frac{1}{2}mv^2$. Στην περίπτωσή μας

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(800\text{ kg})\left(27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 2.9 \times 10^5\text{ J}$$

Εάν ο κινητήρας τού αυτοκινήτου απέδιδε 100%, με κάθε γαλόνι βενζίνης που έκαιγε θα απέδιδε 1.3×10^8 J. Αλλά επειδή ο κινητήρας έχει απόδοση 14%, από κάθε γαλόνι βενζίνης μόνο $(0.14)\ (1.3 \times 10^8$ J$) = 1.8 \times 10^7$ J φτάνουν στους τροχούς. Επομένως, για να επιταχυνθεί το αυτοκίνητο χρειαζόμαστε:

$$\text{Αριθμός γαλονιών} = \frac{2.9 \times 10^5}{1.8 \times 10^7}\,\frac{\text{J}}{\text{J/gal}} = \boxed{0.016\text{ gal}}$$

Με τον ρυθμό αυτό, ένα γαλόνι βενζίνης επαρκεί για 62 τέτοιες επιταχύνσεις. Γι' αυτόν τον λόγο, όταν οδηγείτε να αποφεύγετε τα πολλά σταματήματα και ξεκινήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.15 Ισχύς που φθάνει στους τροχούς

Υποθέστε ότι το αυτοκίνητο τού Παραδείγματος 7.14 καταναλώνει 35 mi/gal όταν κινείται με 60 mi/h. Πόση ισχύς φθάνει στους τροχούς;

Λύση Από τα δεδομένα προκύπτει ότι το αυτοκίνητο καταναλώνει 60/35 = 1.7 gal/h. Αλλά γνωρίζουμε ότι κάθε γαλόνι αντιστοιχεί σε 1.3×10^8 J, βρίσκουμε λοιπόν ότι η συνολική ισχύς που χρησιμοποιείται είναι

$$P = \frac{(1.7\text{ gal/h})(1.3 \times 10^8\text{ J/gal})}{3.6 \times 10^3\text{ s/h}}$$

$$= \frac{2.2 \times 10^8\text{ J}}{3.6 \times 10^3\text{ s}} = \boxed{62\text{ kW}}$$

Αλλά αφού μόνον 14% τής διαθέσιμης ισχύος φτάνει στους τροχούς, η ισχύς που τελικά χρησιμεύει στην κίνηση είναι (0.14) (62 kW) = 8.7 kW. Αυτό είναι το μισό περίπου τής ισχύος που χρειάζεται το μεγάλο αυτοκίνητο, όπως είδαμε στο Υποκεφάλαιο 7.7. Βλέπετε λοιπόν πόσο σημαντικό ρόλο παίζει το μέγεθος τού αυτοκινήτου στην κατανάλωση ισχύος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.16. Αυτοκίνητο που επιταχύνεται καθώς κινείται προς την κορυφή ενός λόφου

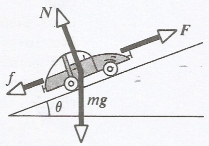
Θεωρήστε ένα αυτοκίνητο μάζας m που επιταχύνεται ενώ κινείται προς την κορυφή ενός λόφου, όπως στο Σχήμα 7.13. Υποθέστε ότι το μέτρο τής αντίστασης τού αέρα είναι

$$|f| = (218 + 0.70v^2)\text{ N}$$

όπου v είναι το μέτρο ταχύτητας σε m/s. Υπολογίστε την ισχύ που πρέπει να μεταδώσει στους τροχούς η μηχανή.

Λύση Στο Σχήμα 7.13 φαίνονται οι δυνάμεις που δρούν πάνω στο αυτοκίνητο: $\boldsymbol{F}$ είναι η δύναμη τής στατικής τριβής που προωθεί το αυτοκίνητο και τα υπόλοιπα σύμβολα έχουν τη συνήθη σημασία τους. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στο κεκλιμένο επίπεδο τού δρόμου και έχουμε

$$\sum F_x = F - |f| - mg\sin\theta = ma$$
$$F = ma + mg\sin\theta + |f|$$
$$= ma + mg\sin\theta + (218 + 0.70v^2)$$



Σχήμα 7.13 (Παράδειγμα 7.16).

Επομένως η ισχύς που είναι απαραίτητη για την επιταχυνόμενη κίνηση είναι

$$P = Fv = mva + mvg\sin\theta + 218v + 0.70v^3$$

Στην έκφραση αυτή ο όρος mva αντιπροσωπεύει την ισχύ που πρέπει να αποδώσει η μηχανή για να επιταχυνθεί το αυτοκίνητο. Εάν το αυτοκίνητο κινείται ισοταχώς, ο όρος αυτός μηδενίζεται και απαιτείται μικρότερη ισχύς. Ο όρος $mvg\sin\theta$ ισούται με την ισχύ που πρέπει να καταναλωθεί για να υπερνικηθεί η δύναμη τής βαρύτητας καθώς το αυτοκίνητο κινείται προς την κορυφή τού λόφου. Ο όρος αυτός μηδενίζεται όταν η κίνηση γίνεται σε οριζόντιο επίπεδο. Ο όρος $218v$ δίνει την ισχύ που είναι αναγκαία για να υπερνικηθεί η τριβή κυλήσεως. Τέλος, ο όρος $0.70v^3$ δίνει την απαιτούμενη ισχύ για να υπερνικηθεί η τριβή με τον αέρα.

Εάν πάρουμε m = 1 450 kg, v = 27 m/s = (60 mi/h), a = 1 m/s^2, και θ = 10°, μπορούμε να υπολογίσουμε τους διαφόρους όρους τής P

$$mva = (1450\text{ kg})(27\text{ m/s})(1\text{ m/s}^2) = 39\text{ kW} = 52\text{ hp}$$

$$mvg\sin\theta = (1450\text{ kg})(27\text{ m/s})(9.80\text{ m/s}^2)(\sin 10°) = 67\text{ kW} = 89\text{ hp}$$

$$218v = 218(27) = 5.9\text{ kW} = 7.9\text{ hp}$$

$$0.70v^3 = 0.70(27)^3 = 14\text{ kW} = 18\text{ hp}$$

Επομένως η συνολική αναγκαία ισχύς είναι 126 kW ή 167 hp. Ας σημειωθεί ότι εάν το ζητούμενο ήταν να υπολογιστεί η ισχύς για κίνηση με *σταθερό* μέτρο ταχύτητας σε οριζόντιο επίπεδο, θα βρίσκαμε μόνον 20 kW (26 hp), αποτέλεσμα που προκύπτει από το άθροισμα τών δύο τελευταίων όρων. Να σημειωθεί επίσης ότι εάν το αυτοκίνητο είχε μισή μάζα, η απαιτούμενη ισχύς θα ήταν σχεδόν η μισή.

* 7.8 ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Οι νόμοι τής Νευτώνειας Μηχανικής ισχύουν μόνο όταν περιγράφουν τις κινήσεις σωμάτων που κινούνται με ταχύτητες τών οποίων το μέτρο είναι μικρό σε σύγκριση με την ταχύτητα τού φωτός c ($\approx 3 \times 10^8$ m/s). Όταν το μέτρο ταχύτητας ενός σώματος πλησιάζει το c, τότε οι εξισώσεις τής Νευτώνειας Μηχανικής πρέπει να αντικατασταθούν από πιο γενικές εξισώσεις, που προκύπτουν στη θεωρία τής σχετικότητας. Μία από τις συνέπειες τής θεωρίας τής σχετικότητας είναι ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m το οποίο κινείται με μέτρο ταχύτητας v δεν είναι $K = mv^2/2$. Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σχετικιστική μορφή τής κινητικής ενέργειας

Σχετικιστική κινητική ενέργεια

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) \tag{7.27}$$

Σύμφωνα με αυτή την έκφραση, ταχύτητες μεγαλύτερες από το c δεν είναι επιτρεπτές, διότι τότε η κινητική ενέργεια K θα είναι φανταστική για $v>c$. Επίσης, καθώς το v τείνει προς το c, η K τείνει προς το ∞. Αυτό είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα πειραμάτων στα οποία επιταχύνονται υποατομικά σωματίδια, όπως είναι τα ηλεκτρόνια ή τα πρωτόνια. Όπως έχει διαπιστωθεί, τα σωματίδια αυτά ποτέ δεν μπορούν να υπερβούν την ταχύτητα τού φωτός. (Δηλαδή το c είναι φράγμα τής ταχύτητας). Από τη σκοπιά τού θεωρήματος έργου-ενέργειας, το v μπορεί να τείνει προς το c, χωρίς όμως να εξισώνεται, διότι απαιτείται άπειρο έργο για να φτάσουμε στο $v = c$.

Όλες οι σχέσεις τής θεωρίας τής σχετικότητας *πρέπει* να ανάγονται στις αντίστοιχες σχέσεις τής Νευτώνειας Μηχανικής για μικρές ταχύτητες. Αξίζει τον κόπο να δείξουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση τής κινητικής ενέργειας εάν αναλύσουμε τη Σχέση 7.27, όταν το v είναι πολύ μικρότερο τού c. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, η K θα πρέπει να ισούται με την νευτώνεια έκφραση $K = mv^2/2$. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα τού διωνύμου για να αναπτύξουμε την ποσότητα $[1-(v/c)^2]^{-1/2}$, με $v/c \ll 1$. Εάν αντικαταστήσουμε το $x = (v/c)^2$, τότε η ανάπτυξη δίνει

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$$

Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα αυτό στη Σχέση 7.27 και έχουμε

$$K = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

$$\approx \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{για} \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

Έτσι βλέπουμε ότι πράγματι η σχετικιστική κινητική ενέργεια ανάγεται στη νευτώνεια σχέση για ταχύτητες τών οποίων το μέτρο είναι μικρό σε σύγκριση με την ταχύτητα τού φωτός c. Θα επανέλθουμε στη σχετικότητα και θα τή μελετήσουμε προσεκτικότερα στο Κεφάλαιο 39.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Το **έργο** που παράγει μια *σταθερή* δύναμη $\boldsymbol{F}$ η οποία δρά πάνω σε ένα σώμα ορίζεται ως το γινόμενο τής συνιστώσας τής δύναμης επάνω στην κατεύθυνση τής μετατόπισης επί το μέτρο τής μετατόπισης. Εάν η δύναμη σχηματίζει γωνία θ με τη μετατόπιση $\boldsymbol{s}$, το έργο που παράγει η $\boldsymbol{F}$ είναι

$$W \equiv Fs \cos\theta \tag{7.1}$$

Έργο σταθερής δύναμης

Το **βαθμωτό** ή **εσωτερικό** ή **dot γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv AB \cos\theta \tag{7.5}$$

Εσωτερικό γινόμενο

Το αποτέλεσμα τού πολλαπλασιασμού αυτού είναι μία βαθμωτή ποσότητα και θ είναι η γωνία ανάμεσα στα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Το βαθμωτό γινόμενο υπακούει στον αντιμεταθετικό και στον επιμεριστικό κανόνα.

Το **έργο** που παράγει μια *μεταβλητή* δύναμη η οποία δρα σε ένα σώμα που κινείται πάνω στον άξονα τών x από το x_i στο x_f ισούται με

$$W \equiv \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{7.11}$$

Έργο μεταβλητής δύναμης

όπου F_x είναι η συνιστώσα τής δύναμης πάνω στη διεύθυνση τών x. Εάν πάνω σε ένα σώμα δρουν πολλές δυνάμεις, το συνολικό έργο όλων αυτών τών δυνάμεων είναι ίσο με το άθροισμα τών επιμέρους έργων τής καθεμιάς δύναμης.

Η **κινητική ενέργεια** ενός σώματος μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα v (όπου η v είναι μικρή σε σύγκριση με την ταχύτητα τού φωτός) είναι ίση με

$$K \equiv \tfrac{1}{2} mv^2 \tag{7.17}$$

Κινητική ενέργεια

Το **θεώρημα έργου-ενέργειας** λέει ότι το συνολικό έργο που παράγουν πάνω σε ένα σώμα οι εξωτερικές δυνάμεις ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος:

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2} mv_f^2 - \tfrac{1}{2} mv_i^2 \tag{7.18}$$

Θεώρημα έργου-ενέργειας

Ορίζουμε ότι η **στιγμιαία ισχύς** ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό με τον οποίο παράγεται το έργο. Εάν μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ εφαρμοστεί πάνω σε ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$, τότε τού παρέχει ισχύ ίση προς

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{7.24}$$

Στιγμιαία ισχύς

Όταν τα σώματα κινούνται με ταχύτητες που είναι συγκρίσιμες με την ταχύτητα τού φωτός, c, τότε υπολογίζουμε την κινητική τους ενέργεια χρησιμοποιώντας τη σχετικιστική έκφραση

Σχετικιστική κινητική ενέργεια

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) \qquad (7.27)$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Όταν ένα σώμα κινείται κυκλικά, τότε επάνω του δρα *κεντρομόλος δύναμη* που κατευθύνεται προς το κέντρο τού κύκλου. Εξηγήστε γιατί η δύναμη αυτή δεν παράγει έργο πάνω στο σώμα.

2. Εξηγήστε γιατί το έργο που παράγει η δύναμη τής τριβής ολισθήσεως είναι αρνητικό όταν ένα σώμα μετατοπίζεται πάνω σε τραχιά επιφάνεια.

3. Μπορείτε να ορίσετε την κατεύθυνση χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;

4. Υποθέστε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι θετικό. Είναι απαραίτητο να έχουν τα διανύσματα θετικές ορθογώνιες συνιστώσες;

5. Δεν περιμένει κανείς να ισχύει επ' άπειρον η γραμμική σχέση που περιγράφει το Σχήμα 7.6d, καθώς αυξάνεται το φορτίο πάνω σε ένα ελατήριο που είναι αναρτημένο κατακόρυφα. Εξηγήστε ποιοτικά (δηλαδή χωρίς κατ' ανάγκην να χρησιμοποιήσετε αριθμούς) τί πρόκειται να συμβεί καθώς αυξάνεται το m.

6. Μπορεί η κινητική ενέργεια ενός σώματος να είναι αρνητική;

7. Πώς επηρεάζεται η κινητική ενέργεια ενός σώματος όταν διπλασιάζεται η ταχύτητά του;

8. Τί μπορείτε να πείτε για το μέτρο ταχύτητας ενός σώματος εάν το συνολικό έργο που παράγεται πάνω του είναι μηδενικό;

9. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα έργου-ενέργειας και εξηγήστε γιατί η δύναμη τής τριβής ολισθήσεως έχει πάντοτε ως αποτέλεσμα την *μείωση* τής κινητικής ενέργειας ενός σώματος;

10. Μπορεί ποτέ η στιγμιαία ισχύς να είναι ίση με τη μέση ισχύ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

11. Στο Παράδειγμα 7.13, αυξάνεται ή μειώνεται η απαιτούμενη ισχύς καθώς μειώνεται η δύναμη τής τριβής;

12. Ένας πωλητής αυτοκινήτων προσπαθεί να σάς πείσει ότι στο αυτοκινητάκι (!) που θέλετε να αγοράσετε πρέπει να βάλετε κινητήρα 300 hp αντί τής στάνταρ μηχανής τών 130 hp. Εσείς δεν έχετε σκοπό να οδηγείτε με ταχύτητα μεγαλύτερη από 55 mi/h και δεν πρόκειται να κινηθείτε ποτέ σε ανηφορικούς ή κατηφορικούς δρόμους. Τί θα τού απαντήσετε;

13. Η μάζα σφαίρας είναι διπλάσια από τη μάζα μιας δεύτερης σφαίρας. Και οι δύο κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Ποια έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια; Ποιος είναι ο λόγος τών κινητικών ενεργειών τών δύο σφαιρών;

14. Ένας ποδοσφαιριστής κλωτσάει μια μπάλλα. Παράγει έργο πάνω στην μπάλλα όσο τήν αγγίζει το πόδι του; Παράγει έργο όταν η μπάλλα έχει απομακρυνθεί από το πόδι του; Υπάρχουν δυνάμεις που παράγουν έργο επάνω στην μπάλλα όταν αυτή βρίσκεται στον αέρα;

15. Σχολιάστε το έργο που παράγει ένας αθλητής καθώς ρίχνει μια μπάλλα τού μπέιζμπωλ. Πόση περίπου απόσταση διανύει η μπάλλα όσο η δύναμη δρα επάνω της;

16. Υπολογίστε πόση ώρα κάνετε για να ανεβείτε τις σκάλες ενός ορόφου. Υπολογίστε προσεγγιστικά την ισχύ που πρέπει να έχετε. Εκφράστε την απάντησή σας σε ίππους (hp).

17. Έχουν πάντοτε οι δυνάμεις τριβής ως αποτέλεσμα τη μείωση τής κινητικής ενέργειας; Εάν η απάντησή σας είναι «όχι», δώστε τα σχετικά παραδείγματα.

18. Δώστε δύο παραδείγματα στα οποία η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα δεν παράγει έργο.

19. Δύο σκοπευτές χρησιμοποιούν ίδιες σφαίρες. Αλλά η κάννη τού όπλου τού ενός είναι 2 cm μακρύτερη από την κάννη τού άλλου. Ποια σφαίρα θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα εξόδου; (Η σφαίρα επιταχύνεται από τα εκτονούμενα αέρια).

20. Δύο φορτοεκφορτωτές φορτώνουν ένα φορτηγό αυτοκίνητο και θέλουν να χρησιμοποιήσουν μια φαρδιά σανίδα από το έδαφος στην καρότσα. Ο ένας λέει ότι όσο μεγαλύτερο μήκος έχει η σανίδα τόσο λιγότερο έργο θα έχουν να κάνουν, γιατί έτσι ελαττώνεται η γωνία κλίσης τής σανίδας. Συμφωνείτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

21. Ένα απλό εκκρεμές ταλαντώνεται. Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο σφαιρίδιο είναι το βάρος του, η τάση τού νήματος και η αντίσταση τού αέρα. (a) Ποια από αυτές τις δυνάμεις παράγει μηδενικό έργο; (b) Ποια παράγει συνεχώς αρνητικό έργο; (c) Περιγράψτε το έργο που παράγει η βαρύτητα καθώς το εκκρεμές ταλαντώνεται.

22. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο περιγράφεται η κίνηση. Δώστε ορισμένα παραδείγματα που να περιγράφουν το σημείο αυτό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υποκεφάλαιο 7.2 Έργο σταθερής δύναμης

1. Ένας άνθρωπος ανεβάζει έναν κουβά νερό μάζας 20 kg από ένα πηγάδι και παράγει έργο ίσο με 6 kJ. Πόσο βαθύ ήταν το πηγάδι; Υποθέστε ότι η ταχύτητα τού κουβά κατά την άνοδό του παραμένει σταθερή.

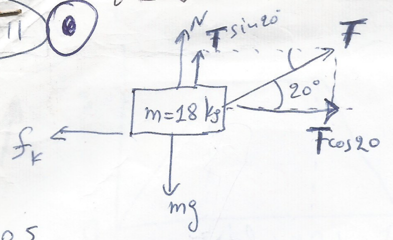
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

7.11 ⓐ $v = \sigma\tau\alpha\theta$ $v=\sigma\tau\alpha\theta$

-1-

SERWAY ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7



a) $T = ;$

$d = 20m$

β) $W_T = ;$

γ) $W_f = ;$

DONE ✓

C1

$\mu = 0{,}5$

α) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + T\sin 20 = mg$ ①

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos 20 - f_k = 0 \Rightarrow$

$T\cos 20 - \mu N = 0$

$\boxed{N = \frac{T\cos 20}{\mu}}$ ②

$① \overset{②}{\Rightarrow} \frac{T\cos 20}{\mu} + T\sin 20 = mg \Rightarrow$

$T\left(\frac{\cos 20}{\mu_{=0,5}} + \sin 20\right) = mg \Rightarrow \boxed{T = 79{,}4\,N}$

β) $W_T = T\cos 20 \cdot d = 1{,}49\,kJ$

γ) $f_K = T\cos 20 = 74{,}6\,N$

$W_{f_K} = -f_K d = -1{,}49\,kJ$

DONE ✓

7.46
7.48
7.49
7.79
7.81
7.82
7.86

7 - ασκήσεις

$\boxed{7.27}$ C2

$m_1 = 4\,kg$

$y_1 = 2{,}5\,cm$

α) $m_2 = 1{,}5\,kg$

$y_2 = ;$

β) $W = ;$ $y = 4\,cm$

$k = \frac{F}{y} = \frac{mg}{y} = \frac{4 \cdot 9{,}8}{0{,}025} \Rightarrow$

$k = 1570\,\frac{N}{m}$

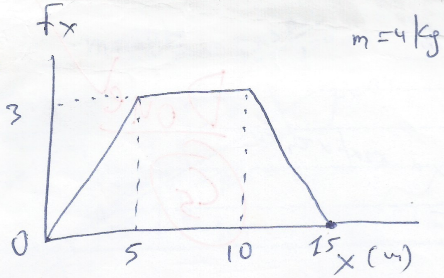
α) $y_1 = \frac{mg}{k} = \frac{1{,}5 \cdot 9{,}8}{1570} = 0{,}938\,cm$

β) $W = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}1570 \cdot 0{,}04^2 = 1{,}25\,J$

$y = \frac{mg}{k} = \frac{\cancel{4 \cdot 9{,}8}}{1570}$ 4 cm

—3—

-38



m = 4 kg α) $v = ;$ $x = 5\ m$

β) $x = 10$

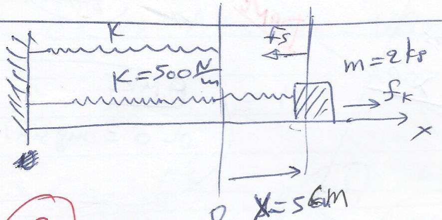
$$W_{x:0\to5} = \Delta K \Rightarrow \frac{5\cdot 3}{2} = \Delta K \Rightarrow \Delta K = 7,5\ J \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \overset{4}{m} v_f^2 - 0 = 7,5 \Rightarrow$$

$$v_f = 1,94\ \frac{m}{s}$$

$$W = \Delta K \Rightarrow 7,5 + (10-5)\cdot 3 = \frac{1}{2} m v_f'^2 \Rightarrow v_f' = 3,35$$

7.44



THIS

DONE

C4

$\leftarrow v = ;$ (χωρίς τριβή, $\mu = 0,35$)

α)

$$W_{ελ} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k \cancel{x_f}^2 = \frac{1}{2} 500 (0,05)^2 = 0,625\ J$$

0

$$\underset{W_{spring}}{W_{net}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v_i}^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 W_{net}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,625}{2}}$$

$$v_f = 0,791\ \frac{m}{s}$$

β) $$W_s - W_f = \frac{1}{2} m v_f'^2 \Rightarrow 0,625^{(J)} - \underbrace{\mu\, m\, g\, s}_{0,343} = 0,282\ J \Rightarrow$$

$\mu = 0,35$, $m = 2$, $g = 9,8$, $s = 0,05$

$$v_f' = 0,531\ m/s$$

7.56 $\mu = 0,4$, $v = 5\ m/s$

για να έχει v = σταθ $\Rightarrow F = f = \mu mg$

$$P = f \cdot v = \mu mg v = 3990\,W$$

β) $W = Pt = 3990\,(3\,min \times 60\,s) = 706\,kJ$

7.57 α) $W = \Delta K = \frac{1}{2}\, 1500 \cdot 10^2 = 75\,kJ$

β) $P = \frac{W}{t} = \frac{75\,kJ}{3} = 25\,kW$

γ) $P = f\,v = m\,a\,\underbrace{v}_{at} = m\,a\,at = ma^2 t$ $\Big\}$ $= 33{,}3\,kW$

$a = \frac{10\ m/s}{3s}$

$t = 2s$

Σ10

7.61 Αθλητής $m = 65\,kg$, διανύει $600\,m$ πάνω στο δρόμο με γων. κλίση $20°$

$t = 80\,s$

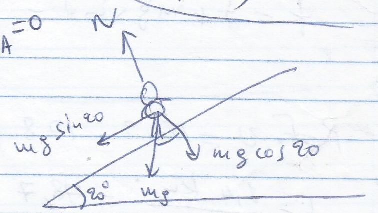
Υπόθεση ότι v = σταθ $\Rightarrow \Delta K = 0$

α) $W_{παραγ.}$

β) $P = ;$

$\Delta W_{net} = \Delta W_g + \Delta W_{Αθλ.} = \Delta K = 0$

$-mg\sin 20 \cdot \Delta S + \Delta W_A = 0$



$\Delta W_A = 131\,kJ$

$P = \frac{\Delta W_A}{\Delta t = 80s} = 1{,}64\,kW$

√ SOS

THIS

$\boxed{7.75}$ OK done $m = 4kg$ $\longrightarrow x$

$x = t + 2t^3$

C 19

a) $K(t) = ;$

β) $a(t) = ;$

(γ) $P(t) = ;$

(δ) $W(t)_{t=0 \to 2s} = ;$

$x = t + 2t^3$

a) $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$ $\boxed{v = 1 + 6t^2}$

άρα $K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} 4 (1 + 6t^2)^2$

$\boxed{K = (2 + 24t^2 + 72t^4)\ J}$

β) $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = (12t)\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$F = m a = 4(12t) = 48t\ (N)$

γ) $P = F \cdot v = (48t)(1 + 6t^2) = (48t + 288t^3)\ W$

δ) $W = \int_0^2 P \cdot dt = \int_0^2 (48t + 288t^3)\, dt = 1250\ J$