ΔΙΑΛΕΞΗ 8

4/12/2020

- **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ - ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**
- **ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΡΜΗ**

8.5 ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ - ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στην πραγματικότητα, μη διατηρητικές δυνάμεις, όπως είναι η τριβή, υπάρχουν συνήθως στα φυσικά συστήματα. Επομένως, η ολική μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Πάντως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για να υπολογίσουμε τις μη διατηρητικές δυνάμεις. Εάν συμβολίσουμε με W_{nc} το έργο που παράγουν πάνω στο σώμα όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις και με W_c το έργο που παράγουν όλες οι διατηρητικές δυνάμεις, μπορούμε να γράψουμε το θεώρημα τού έργου-ενέργειας ως εξής:

$$W_{nc} + W_c = \Delta K$$

Αλλά $W_c = -\Delta U$ (Εξίσωση 8.1) και έτσι έχουμε

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) \tag{8.12}$$

Δηλαδή

> **το έργο που παράγουν όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις ισούται με το άθροισμα μεταβολής τής κινητικής ενέργειας συν τη μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας.**

Εφόσον η ολική μηχανική ενέργεια είναι $E = K + U$, μπορούμε να γράψουμε την Εξίσωση 8.12 ως εξής:

$$W_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = E_f - E_i \tag{8.13}$$

Έργο μη διατηρητικών δυνάμεων

Δηλαδή, *το έργο που παράγουν όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις ισούται με την μεταβολή τής ολικής μηχανικής ενέργειας τού συστήματος.* Προφανώς, όταν δεν υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις, τότε $W_{nc} = 0$ και $E_i = E_f$. Δηλαδή, τότε διατηρείται η ολική μηχανική ενέργεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.3 Σώμα κινούμενο σε κεκλιμένο επίπεδο

Ένα σώμα μάζας 3 kg ολισθαίνει προς τα κάτω σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο μήκους 1 m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.6a. Το σώμα ξεκινά, ενώ βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας, από την κορυφή και υπόκειται σε μία σταθερή δύναμη τριβής μέτρου 5 N. Η γωνία τού κεκλιμένου επιπέδου είναι 30°. (a) Χρησιμοποιήστε ενεργειακές μεθόδους και βρείτε την ταχύτητα που έχει αποκτήσει στο κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου.

Σχήμα 8.6 (Παράδειγμα 8.3) (a) Ένα σώμα ολισθαίνει σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση τής βαρύτητας. Η δυναμική του ενέργεια μειώνεται, ενώ η κινητική του ενέργεια αυξάνεται. (b) Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος.

Εφόσον $v_i = 0$, η αρχική κινητική ενέργεια είναι μηδενική. Εάν μετρούμε την τεταγμένη y από το κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου, τότε $y_i = 0.50$ m. Επομένως, η ολική μηχανική ενέργεια τού σώματος στην κορυφή τού κεκλιμένου επιπέδου ισούται με τη δυναμική ενέργεια, που είναι

$$E_i = U_i = mgy_i = (3\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0.50\ \text{m}) = 14.7\ \text{J}$$

Όταν το σώμα φτάσει κάτω, η κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}mv_f^2$, αλλά η δυναμική του ενέργεια είναι *μηδενική* επειδή τότε βρίσκεται στο $y_f = 0$. Επομένως η ολική μηχανική ενέργεια στο κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου είναι $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$. Δεν μπορούμε όμως να πούμε ότι ισχύει $E_i = E_f$ στην περίπτωση αυτή, διότι υπάρχει μία μη διατηρητική δύναμη που παράγει έργο επί τού σώματος. Είναι η δύναμη τής τριβής και το έργο που παράγει είναι $W_{nc} = -fs$, όπου s είναι η μετατόπιση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. (Ας θυμηθούμε ότι η δύναμη που είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο δεν παράγει έργο, διότι είναι κάθετη στη μετατόπιση). Στην περίπτωση αυτή $f = 5$ N και $s = 1$ m. Επομένως

$$W_{nc} = -fs = (-5 \text{ N})(1 \text{ m}) = -5 \text{ J}$$

Δηλαδή, η παρουσία τής επιβραδύνουσας δύναμης τής τριβής αποτελεί αίτιο απώλειας ενέργειας. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας στη μορφή που τό δίνει η Εξίσωση 8.13 και έχουμε

$$W_{nc} = E_f - E_i$$

$$-fs = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = 14.7 \text{ J} - 5 \text{ J} = 9.7 \text{ J}$$

$$v_f^2 = \frac{19.4 \text{ J}}{3 \text{ kg}} = 6.47 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \boxed{2.54 \text{ m/s}}$$

(b) Ελέγξετε την απάντηση στο (a) χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο τού Newton. Βρείτε όμως πρώτα την επιτάχυνση.

Προσθέτουμε όλες τις δυνάμεις που είναι παράλληλες στο κεκλιμένο επίπεδο και βρίσκουμε

$$mg \sin 30° - f = ma$$

$$a = g \sin 30° - \frac{f}{m} = (9.80 \text{ m/s}^2)(0.500) - \frac{5 \text{ N}}{3 \text{ kg}}$$

$$= 3.23 \text{ m/s}^2$$

Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση $v_f^2 = v_i^2 + 2as$, όπου $v_i = 0$:

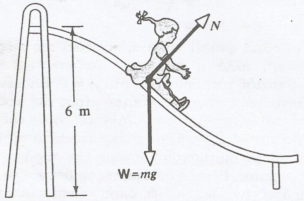
$$v_f^2 = 2as = 2(3.23 \text{ m/s}^2)(1 \text{ m}) = 6.46 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = 2.54 \text{ m/s}$$

Άσκηση 2 Βρείτε την τελική ταχύτητα τού σώματος και την επιτάχυνσή του εάν θεωρηθεί ότι το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο.
Απάντηση 3.13 m/s, 4.90 m/s^2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.4 Κίνηση σε καμπυλόγραμμη τροχιά

Ένα παιδί μάζας *m* γλιστρά πάνω σε μια καμπυλόγραμμη τσουλήθρα ακανόνιστου σχήματος, ύψους *h*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.7. Το παιδί ξεκινά από την κορυφή, ενώ ήταν ακίνητο. (a) Προσδιορίστε το μέτρο ταχύτητας τού παιδιού στο κάτω μέρος τής τσουλήθρας θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν τριβές.



Σχήμα 8.7 (Παράδειγμα 8.4) Εάν η τσουλήθρα δεν έχει τριβές (δηλαδή είναι λεία), το μέτρο τής ταχύτητας τού παιδιού εξαρτάται μόνο από το ύψος και όχι από το σχήμα τής τσουλήθρας.

Προσέξτε ότι η κάθετη δύναμη, *N*, δεν παράγει έργο πάνω στο παιδί επειδή είναι πάντοτε κάθετη σε κάθε στοιχείο τής μετατόπισης. Εφόσον λοιπόν δεν υπάρχει τριβή, $W_{nc} = 0$, και μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Εάν μετρούμε την τεταγμένη *y* από το κάτω μέρος τής τσουλήθρας, τότε $y_i = h$ και $y_f = 0$ και έτσι έχουμε

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Ας σημειωθεί ότι θα βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα εάν το παιδί έπεφτε κατακόρυφα από ύψος *h*! Λογουχάρη, εάν $h = 6$ m, τότε

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\left(9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6 \text{ m})} = \boxed{10.8 \text{ m/s}}$$

(b) Εάν πάνω στο παιδί δρούσε δύναμη τριβής, θα παρήγε η τριβή έργο;

Στην περίπτωση αυτή $W_{nc} \neq 0$, και επομένως *δεν* διατηρείται η μηχανική ενέργεια. Πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 8.13 για να βρούμε το έργο που παράγει η τριβή εάν υποτεθεί ότι γνωρίζουμε την τελική ταχύτητα (δηλαδή την ταχύτητα στο κάτω μέρος τής τσουλήθρας):

$$W_{nc} = E_f - E_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgh$$

Λογουχάρη, εάν $v_f = 8.0$ m/s, $m = 20$ kg και $h = 6$ m, βρίσκουμε

$$W_{nc} = \tfrac{1}{2}(20 \text{ kg})(8.0 \text{ m/s})^2 - (20 \text{ kg})\left(9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6 \text{ m})$$

$$= \boxed{-536 \text{ J}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και πάλι το έργο W_{nc} είναι αρνητικό, *διότι το έργο που παράγει η τριβή ολίσθησης είναι πάντοτε αρνητικό.* Να σημειωθεί, πάντως, ότι, επειδή η τσουλήθρα είναι καμπύλη, η κάθετη δύναμη μεταβάλλει μέτρο και κατεύθυνση κατά τη διάρκεια τής κίνησης. Έτσι μεταβάλλεται και η δύναμη τής τριβής κατά τη διάρκεια τής κίνησης, διότι είναι ανάλογη προς το **N**. Είναι δυνατόν να προσδιορίσετε το *μ* με αυτά τα δεδομένα;

5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5 Πάμε για σκι

Ένας χιονοδρόμος ξεκινά, ενώ ήταν ακίνητος, στην κορυφή ενός βουνού, και κατεβαίνει μια λεία πλαγιά ύψους 20 m και με γωνία κλίσης 20°, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.8. Στο τέλος τής πλαγιάς ο χιονοδρόμος βρίσκει μια τραχιά οριζόντια επιφάνεια, η οποία έχει συντελεστή τριβής ολισθήσεως ανάμεσα στο χιόνι και στα σκι 0.21. Πόσο μακριά θα πάει ο χιονοδρόμος προτού σταματήσει;

Λύση Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο ταχύτητας τού χιονοδρόμου στο κάτω μέρος τής πλαγιάς. Εφόσον η πλαγιά είναι λεία, εφαρμόζουμε την περίπτωση διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας (όπως στο Παράδειγμα 8.4a) και βρίσκουμε

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})} = 19.8\ \text{m/s}$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα έργου-ενέργειας για την τραχιά οριζόντια επιφάνεια. Το έργο που παράγει η δύναμη τριβής είναι $W_{nc} = -fs$, όπου s είναι η οριζόντια μετατόπιση. Επομένως

$$W_{nc} = -fs = K_f - K_i$$

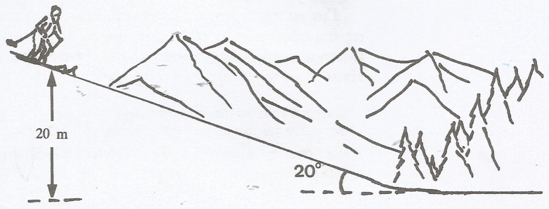
Για να βρούμε την απόσταση που καλύπτει ο χιονοδρόμος ώσπου να σταματήσει, θεωρούμε ότι $K_f = 0$. Αλλά $v_i = 19.8$ m/s και η δύναμη τής τριβής είναι $f = \mu N = \mu mg$. Έτσι βρίσκουμε

$$-\mu mgs = -\tfrac{1}{2}mv_i^2$$

ή

$$s = \frac{v_i^2}{2\mu g} = \frac{(19.8\ \text{m/s})^2}{2(0.21)(9.80\ \text{m/s}^2)} = \boxed{95.2\ \text{m}}$$

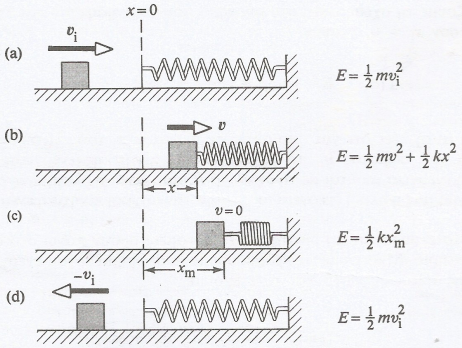
Άσκηση 3 Βρείτε την οριζόντια απόσταση την οποία θα καλύψει ο χιονοδρόμος προτού σταματήσει εάν και η πλαγιά είναι τραχιά με συντελεστή τριβής ολισθήσεως ίσο με 0.21.
Απάντηση 40.3 m.



Σχήμα 8.8 (Παράδειγμα 8.5).

8.6 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΣΕ ΕΝΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Ας μελετήσουμε τώρα ένα άλλο μηχανικό σύστημα, που περιγράφεται απλώς με τη βοήθεια τής έννοιας τής δυναμικής, δηλαδή τής αποθηκευμένης ενέργειας. Σώμα μάζας m ολισθαίνει πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα v_i και συγκρούεται με ένα ελατήριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.9. Για να απλουστευθεί η μελέτη μας, θα υποθέσουμε ότι το ελατήριο



Σχήμα 8.9 Ένα σώμα καθώς ολισθαίνει πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια συγκρούεται με ένα ελαφρό ελατήριο. (a) Στην αρχή όλη η μηχανική ενέργεια είναι κινητική. (b) Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας τού σώματος και τής ελαστικής δυναμικής ενέργειας τού ελατηρίου. (c) Όλη η ενέργεια είναι τώρα δυναμική. (d) όλη η ενέργεια έχει μετατραπεί ξανά σε κινητική ενέργεια τού σώματος. Η ολική μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

είναι πολύ ελαφρό και επομένως έχει αμελητέα κινητική ενέργεια. Καθώς το ελατήριο συμπιέζεται, ασκεί δύναμη πάνω στο σώμα, προς τα αριστερά, και τελικά το σώμα σταματά (Σχήμα 8.9c). Η αρχική ενέργεια τού συστήματος (σώμα + ελατήριο) είναι ίση με την κινητική ενέργεια τού σώματος. Όταν μετά τη σύγκρουση με το ελατήριο το σώμα σταματήσει, η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται. Η δύναμη τού ελατηρίου είναι διατηρητική δύναμη, καμιά από τις εξωτερικές δυνάμεις δεν παράγει έργο (συμπεριλαμβανομένης και τής βαρύτητας) και έτσι η ολική μηχανική ενέργεια τού συστήματος παραμένει σταθερή. Με αυτό τον τρόπο λοιπόν γίνεται μετατροπή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος σε δυναμική ενέργεια, που αποθηκεύεται στο ελατήριο. Τελικά το σώμα κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση και επανακτά την αρχική του κινητική ενέργεια, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 8.9d.

Για να περιγράψουμε την αποθηκευμένη στο ελατήριο δυναμική ενέργεια ας θυμηθούμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι το έργο που παράγει το ελατήριο στο σώμα, καθώς το τελευταίο κινείται από το $x = x_i$ στο $x = x_f$, είναι

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

Λέμε ότι η ποσότητα $\tfrac{1}{2}kx^2$ είναι η **ελαστική δυναμική ενέργεια** που αποθηκεύθηκε στο ελατήριο και τη συμβολίζουμε με U_s:

Δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη σε ελατήριο

$$U_s = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (8.14)$$

Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται είναι μηδενική όταν το ελατήριο δεν είναι συμπιεσμένο ($x = 0$). Τέλος, η U_s παίρνει τη *μέγιστη* τιμή της όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη συμπίεση (Σχήμα 8.9 c). Ας σημειωθεί ότι η U_s είναι *πάντοτε* θετική, αφού είναι ανάλογη προς το x^2.

Η ολική μηχανική ενέργεια τού συστήματος (σώμα + ελατήριο) είναι λοιπόν

$$E = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + \tfrac{1}{2}kx_i^2 = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f^2 \qquad (8.15)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή στο σύστημα που περιγράφεται στο Σχήμα 8.9 και, εφόσον $x_i = 0$, έχουμε

$$E = \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f^2 \qquad (8.16)$$

Η σχέση αυτή λέει ότι για οποιαδήποτε μετατόπιση τού ελατηρίου x_f και ταχύτητα τού σώματος v_f, το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας συν τη δυναμική ενέργεια ισούται με τη *σταθερά* E, που είναι η ολική ενέργεια. Στο παράδειγμά μας η ολική ενέργεια ισούται με την αρχική κινητική ενέργεια τού σώματος.

Υποθέστε τώρα ότι μη διατηρητικές δυνάμεις δρουν πάνω στο σύστημα σώμα-ελατήριο. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας στη μορφή τής Εξίσωσης 8.13 και τότε έχουμε

$$W_{nc} = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}kx_f^2) - (\tfrac{1}{2}mv_i^2 + \tfrac{1}{2}kx_i^2) \qquad (8.17)$$

Δηλαδή, η ολική μηχανική ενέργεια δεν παραμένει σταθερή όταν μη διατηρητικές δυνάμεις δρουν πάνω στο σύστημα. Όταν το W_{nc} οφείλεται σε δύναμη τριβής, τότε το W_{nc} είναι *αρνητικό* και η τελική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική ενέργεια.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Όπως είδαμε, πολλά προβλήματα στη Φυσική μπορούν να λυθούν με την εφαρμογή τής αρχής τής διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Αργότερα θα δούμε και άλλα παραδείγματα, ειδικά με συστήματα στα οποία υπεισέρχονται ελατήρια. Για να εφαρμόσετε λοιπόν την αρχή αυτή, ακολουθήστε τα ακόλουθα βήματα:

1. Ορίστε το σύστημά σας, που μπορεί να αποτελείται από περισσότερα τού ενός αντικείμενα.
2. Επιλέξετε την θέση αναφοράς που αντιστοιχεί στο μηδέν τής δυναμικής ενέργειας (βαρυτικής ή ελατηρίου) και χρησιμοποιήστε την κατά τον ίδιο τρόπο σε όλη την ανάλυσή σας. Εάν υπάρχουν περισσότερες τής μιας διατηρητικές δυνάμεις, μην ξεχάσετε να γράψετε την έκφραση που αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις διατηρητικές δυνάμεις. (Τα Παραδείγματα 8.6 και 8.8 που ακολουθούν αναφέρονται σε συστήματα με ελατήρια και με αντικείμενα των οποίων η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται).
3. Προσδιορίστε κατά πόσον υπάρχουν ή όχι δυνάμεις τριβής. Μην ξεχνάτε ότι εάν υπάρχουν τριβές ή αντίσταση τού αέρα, τότε η μηχανική ενέργεια *δεν διατηρείται.*
4. Εάν διατηρείται η μηχανική ενέργεια, τότε γράψτε την ολική αρχική ενέργεια E_i σε κάποιο σημείο ως άθροισμα τής κινητικής συν την δυναμική ενέργεια. Κατόπιν γράψτε μια σχέση για την τελική ολική ενέργεια $E_f = K_f + U_f$, η οποία αντιστοιχεί στο τελικό σημείο που σάς ενδιαφέρει. Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται, μπορείτε να εξισώσετε τις δύο ολικές ενέργειες και να λύσετε ως προς την άγνωστη ποσότητα.
5. Εάν υπάρχουν δυνάμεις τριβής, τότε πρέπει πρώτα να γράψετε εκφράσεις για την αρχική και την τελική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή όμως η ολική τελική ενέργεια διαφέρει από την ολική αρχική ενέργεια. Η διαφορά τους είναι το έργο που παράγουν οι μη διατηρητικές δυνάμεις. Δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $W_{nc} = E_f - E_i$, όπως στα Παραδείγματα 8.4b και 8.5.

ΑΥΤΗ 5ος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.6 Το όπλο με ελατήριο

Ο μηχανισμός ενός όπλου-παιχνιδιού αποτελείται από ένα ελατήριο άγνωστης σταθεράς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.10a. Όταν το όπλο είναι ακίνητο και κατευθύνεται προς τα πάνω και το ελατήριο συμπιεστεί κατά 0.12 m, τότε το όπλο εκτοξεύει ένα μπαλλάκι μάζας 20 g σε ύψος 20 m. Αγνοήστε όλες τις αντιστάσεις και: (a) Προσδιορίστε την τιμή τής σταθεράς τού ελατηρίου.

Λύση Αφού το μπαλλάκι ξεκινά από την κατάσταση ηρεμίας, η αρχική κινητική ενέργεια τού συστήματος είναι μηδενική. Εάν λάβουμε ως δεδομένο ότι το επίπεδο αναφοράς τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας συμπίπτει με το χαμηλότερο σημείο στο οποίο βρίσκεται η μπάλλα, τότε η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Επομένως, η ολική ενέργεια τού συστήματος ισούται με την ελαστική δυναμική ενέργεια τού ελατηρίου, που είναι $kx^2/2$, όπου $x = 0.12$ m. Όταν το μπαλλάκι φτάσει στο μέγιστο ύψος του, που είναι 20 m, η βαρυτική δυναμική ενέργεια που έχει είναι mgh, η κινητική ενέργειά του είναι μηδενική και η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι επίσης μηδενική. Εφόσον δεν υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = mgh$$

$$\tfrac{1}{2}k(0.12 \text{ m})^2 = (0.02 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})$$

ή

$$k = \boxed{544 \text{ N/m}}$$

5ος

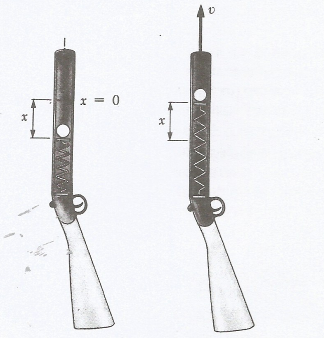
(b) Βρείτε το μέτρο ταχύτητας τής μπάλλας καθώς αυτή διέρχεται από το σημείο ισορροπίας τού ελατηρίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.10b.

Λύση Χρησιμοποιούμε το ίδιο επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, όπως και στο μέρος (a), και βλέπουμε ότι η αρχική ενέργεια τού συστήματος εξακολουθεί να είναι η ελαστική δυναμική ενέργεια $kx^2/2$. Η τελική ενέργεια τού συστήματος καθώς η μπάλλα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας τού ελατηρίου είναι η κινητική ενέργεια τής μπάλλας, $mv^2/2$, και η βαρυτική δυναμική ενέργεια τής μπάλλας mgx. Επομένως, εφαρμόζουμε την περίπτωση τής διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgx$$

Λύνουμε ως προς το v και βρίσκουμε

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx}$$



Σχήμα 8.10 Παράδειγμα 8.6.

$$v = \sqrt{\frac{(544\ \text{N/m})(0.12\ \text{m})^2}{(0.02\ \text{kg})} - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.12\ \text{m})}$$

$$= \boxed{19.7\ \text{m/s}}$$

Άσκηση 4 Ποια είναι η ταχύτητα τής μπάλλας όταν αυτή βρίσκεται σε ύψος 10 m;
Απάντηση 14.0 m/s

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.7 Σύγκρουση σώματος-ελατηρίου

Σώμα μάζας 0.80 kg ωθείται με αρχική ταχύτητα v_i = 1.2 m/s προς τα δεξιά και συγκρούεται με αβαρές ελατήριο ελαστικής σταθεράς k = 50 N/m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.9. (a) Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια είναι λεία, υπολογίστε την αρχική μέγιστη συμπίεση τού ελατηρίου μετά τη σύγκρουση.

Λύση Εφόσον δεν υπάρχουν τριβές, W_{nc} = 0, και η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 8.15 στο σύστημα, με v_f = 0, και έχουμε

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_i = \sqrt{\frac{0.8\ \text{kg}}{50\ \text{N/m}}}\,(1.2\ \text{m/s}) = \boxed{0.152\ \text{m}}$$

(b) Θεωρήστε ότι μια σταθερή δύναμη τριβής δρα ανάμεσα στο σώμα και στην επιφάνεια με μ = 0.5. Εάν το μέτρο ταχύτητας τού σώματος, τη στιγμή που συγκρούεται με το ελατήριο, είναι v_i = 1.2 m/s, ποια είναι η μέγιστη συμπίεση τού ελατηρίου;

Λύση Στην περίπτωση αυτή η μηχανική ενέργεια τού συστήματος *δεν* διατηρείται, γιατί υπάρχει τριβή, η οποία παράγει αρνητικό έργο στο σύστημα. Το μέτρο τής δύναμης τριβής είναι

$$f = \mu N = \mu mg = 0.5(0.80\ \text{kg})\left(9.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3.92\ \text{N}$$

Επομένως, το έργο που παράγει η δύναμη τής τριβής καθώς το σώμα μετατοπίζεται από το σημείο $x_i = 0$ στο $x_f = x$ είναι

$$W_{nc} = -fx = (-3.92x)\ \text{J}$$

Θέτουμε το παραπάνω στην εξίσωση 8.17 και έχουμε

$$W_{nc} = (0 + \tfrac{1}{2}kx^2) - (\tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0)$$

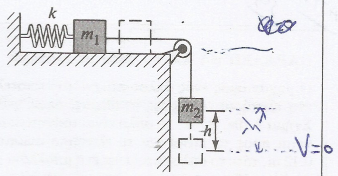
$$-3.92x = \frac{50}{2}x^2 - \frac{1}{2}(0.80)(1.2)^2$$

$$25x^2 + 3.92x - 0.576 = 0$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x και βρίσκουμε x = 0.0924 m και x = − 0.249 m. Η λύση που είναι από φυσική άποψη αποδεκτή είναι η x = 0.0924 m = 9.24 cm. Η αρνητική λύση δεν είναι αποδεκτή, διότι το σώμα πρέπει να μεταβεί προς την άλλη πλευρά τής αρχής τών συντεταγμένων, αφού πρώτα ακινητοποιηθεί. Να σημειωθεί ότι το 9.24 cm είναι *μικρότερο* από την αντίστοιχη απόσταση τής περίπτωσης (a), κατά την οποία δεν υπάρχουν τριβές. Αυτό ήταν επόμενο, αφού η τριβή επιβραδύνει την κίνηση τού συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.8 Κινούμενα συνδεδεμένα σώματα

Δύο σώματα συνδέονται με ένα ελαφρό νήμα που περνάει γύρω από μια τροχαλία χωρίς τριβές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.11. Το σώμα με μάζα m_1 κείται πάνω σε τραχιά επιφάνεια και είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο ενώ ήταν ακίνητο και το ελατήριο δεν είχε εκταθεί. Υπολογίστε τον συντελεστή τριβής ολισθήσεως ανάμεσα στο σώμα m_1 και στην επιφάνεια, όταν το σώμα m_2 κατεβεί αφού διανύσει απόσταση h προτού σταματήσει.



Σχήμα 8.11 (Παράδειγμα 8.8) Καθώς το σύστημα κινείται από το μεγαλύτερο ύψος τού m_2 στο μικρότερο, το σύστημα χάνει βαρυτική δυναμική ενέργεια αλλά κερδίζει δυναμική ελαστική ενέργεια, πού αποθηκεύεται στο ελατήριο. Υπάρχουν όμως απώλειες μηχανικής ενέργειας λόγω τής τριβής ανάμεσα στο m_1 και στην επιφάνεια.

Λύση Στο πρόβλημα αυτό πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν δύο είδη δυναμικής ενέργειας: τη βαρυτική δυναμική ενέργεια και την ελαστική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας

$$(1) \qquad W_{nc} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s$$

όπου ΔU_g είναι η *μεταβολή* τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και ΔU_s είναι η *μεταβολή* τής ελαστικής δυναμικής ενέργειας τού συστήματος. Στην περίπτωση αυτή Δk = 0, γιατί η αρχική και η τελική ταχύτητα τού συστήματος είναι μηδενική. Επίσης, εάν W_{nc} είναι το έργο που παράγει η τριβή, τότε

$$(2) \qquad W_{nc} = -fh = -\mu m_1 g h$$

Η μεταβολή τής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας προέρχεται μόνο από το σώμα m_2, επειδή η κατακόρυφη συνιστώσα τού m_1 δεν μεταβάλλεται. Επομένως έχουμε

$$(3) \qquad \Delta U_g = U_f - U_i = -m_2 g h$$

όπου μετρήσαμε τις συντεταγμένες αρχίζοντας από τη χαμηλότερη θέση τού m_2. Η μεταβολή τής ελαστικής δυναμικής ενέργειας τού ελατηρίου είναι

$$(4) \qquad \Delta U_s = U_f - U_i = \tfrac{1}{2}kh^2 - 0$$

Θέτουμε τις (2), (3) και (4) στην (1) και βρίσκουμε

$$-\mu m_1 g h = -m_2 g h + \tfrac{1}{2}kh^2$$

$$\mu = \frac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι αυτό το παράδειγμα μάς δίνει την πειραματική τεχνική μέτρησης τού συντελεστή τριβής ολισθήσεως. Λογουχάρη, εάν $m_1 = 0.50$ kg, $m_2 = 0.30$ kg, $k = 50$ N/m και $h = 5.0 \times 10^{-2}$ m, βρίσκουμε ότι

$$\mu = \frac{(0.30\ \mathrm{kg})\left(9.80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) - \frac{1}{2}\left(50\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})}{(0.50\ \mathrm{kg})\left(9.80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}$$

$$= 0.345$$

8.7 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στα προηγούμενα μέρη τού κεφαλαίου αυτού είδαμε ότι η έννοια τής δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος σχετίζεται άμεσα με τη διάταξη τού συστήματος στον χώρο, δηλαδή με τις συντεταγμένες τού συστήματος. Είδαμε με λίγα παραδείγματα πώς υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια όταν μάς είναι γνωστή η διατηρητική δύναμη. (Μην ξεχνάτε ότι η έννοια τής δυναμικής ενέργειας ορίζεται μόνο για διατηρητικές δυνάμεις).

Σύμφωνα με την Εξίσωση 8.1, η μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας ενός σώματος υπό τη δράση μιας διατηρητικής δύναμης ισούται με το αρνητικό τού έργου που παράγει η δύναμη αυτή. Εάν το σύστημα μετατοπιστεί λ.χ. απειροστά, μπορούμε να εκφράσουμε την αντιστοιχούσα απειροστή μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας, dU, ως

$$dU = -F_x\, dx$$

Επομένως, η διατηρητική δύναμη σχετίζεται με την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad (8.18)$$

Σχέση που συνδέει τη δύναμη και τη δυναμική ενέργεια

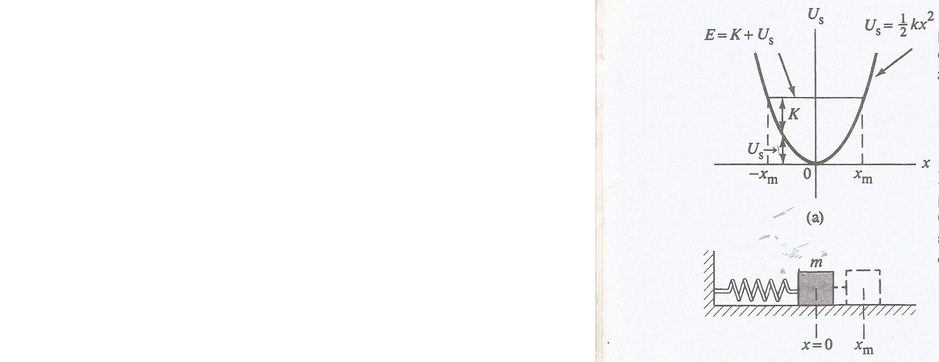
Δηλαδή[3], *η διατηρητική δύναμη ισούται με το αρνητικό τής παραγώγου τής δυναμικής ενέργειας ως προς x.*

Μπορούμε εύκολα να εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή στα παραδείγματα που μελετήσαμε. Για την περίπτωση τού παραμορφωμένου ελατηρίου $U_s = \frac{1}{2}kx^2$, επομένως

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

που είναι η γνωστή μας δύναμη επαναφοράς ελατηρίου. Ξέρουμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $U_g = mgy$. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 8.18 και βρίσκουμε τη γνωστή $F_g = -mg$.

[3] Στα προβλήματα που έχουν σχέση με τον τρισδιάστατο χώρο, η δυναμική ενέργεια U εξαρτάται από τα x, y και z. Συνδέεται με την U μέσω τής σχέσης $\mathbf{F} = -\mathbf{i}\,\partial U/\partial x - \mathbf{j}\,\partial U/\partial y - \mathbf{k}\,\partial U/\partial z$, όπου $\partial/\partial x$ κ.λπ. είναι μερικές παράγωγοι. Στη γλώσσα τού διανυσματικού λογισμού λέμε ότι η δύναμη $\mathbf{F}$ ισούται με το αρνητικό τής βαθμίδας (gradient) τής μονόμετρης ποσότητας $U(x, y, z)$.



Σχήμα 8.12 (a) Η δυναμική ενέργεια συναρτήσει τής μετατόπισης x για το σύστημα ελατηρίου-σώματος τού (b). Το σώμα ταλαντώνεται ανάμεσα στα ακραία σημεία, που έχουν συντεταγμένες $x = \pm x_m$. Σημειώστε ότι η δύναμη επαναφοράς τού ελατηρίου κατευθύνεται πάντοτε προς το $x = 0$, που είναι η θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Βλέπουμε λοιπόν πόσο σημαντική είναι η συνάρτηση U, αφού απλώς με μία παραγώγιση μόνον μπορούμε να βρούμε την αντιστοιχούσα διατηρητική δύναμη. Τέλος, η Εξίσωση 8.18 αποσαφηνίζει ότι δεν έχει καμιά σημασία εάν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε μια σταθερή ποσότητα στη δυναμική ενέργεια.

*8.8 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Εάν αναλύσουμε την καμπύλη δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος, μπορούμε να καταλάβουμε την ποιοτική συμπεριφορά τής κίνησής του. Θεωρήστε τη συνάρτηση τής δυναμικής ενέργειας τού συστήματος μάζα-ελατήριο, $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Το Σχήμα 8.12a δείχνει τη γραφική παράσταση τής δυναμικής ενέργειας ως προς x. Η δύναμη σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια U διά μέσου τής σχέσης

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

Δηλαδή, η δύναμη ισούται με το αρνητικό τής *κλίσης* τής καμπύλης U προς x. Εάν βάλουμε μια ηρεμούσα μάζα στη θέση τής ισορροπίας ($x = 0$), όπου $F = 0$, αυτή θα παραμείνει εκεί, εκτός εάν δράσει επάνω της μια εξωτερική δύναμη. Εάν εκτείνουμε το ελατήριο, παραμορφώνοντάς το ενώ βρισκόταν σε θέση ισορροπίας, το x είναι θετικό και η κλίση dU/dx είναι θετική. Επομένως η δύναμη $\mathbf{F}_s$ είναι αρνητική και η μάζα επιταχύνεται πίσω, προς το $x = 0$. Εάν συμπιέσουμε όμως το ελατήριο, τότε το x είναι αρνητικό και η κλίση είναι αρνητική. Επομένως η δύναμη $\mathbf{F}_s$ είναι θετική και η μάζα επιταχύνεται και πάλι προς το $x = 0$.

Ευσταθής ισορροπία

Από την ανάλυση αυτή συμπεραίνουμε ότι η θέση $x = 0$ είναι θέση **ευσταθούς ισορροπίας.** Δηλαδή, οποιαδήποτε μετατόπιση από τη θέση αυτή συνεπάγεται τη δημιουργία δύναμης που κατευθύνεται πίσω, προς το $x = 0$. Γενικά, *οι θέσεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στα σημεία εκείνα στα οποία η $U(x)$ έχει την ελάχιστη τιμή της.*

Από το Σχήμα 8.12 βλέπουμε ότι εάν μετατοπίσουμε τη μάζα κατά x_m και τήν αφήσουμε ελεύθερη ενώ βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας, τότε η αρχική ολική της ενέργεια θα ισούται με τη δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευθεί στο ελατήριο και είναι $\frac{1}{2}kx_m{}^2$. Καθώς αρχίζει η κίνηση, το σύστημα αποκτά κινητική ενέργεια την οποία προσλαμβάνει από τη δυναμική του ενέργεια, η οποία μειώνεται αντίστοιχα. Αυτή η συνεχής μετατροπή μορφής ενέργειας ανάμεσα στη δυναμική και την κινητική γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στιγμή η ολική ενέργεια να είναι σταθερή. Έτσι η μάζα ταλαντώνεται ανάμεσα στα σημεία $x = \pm x_m$, τα οποία λέγονται *σημεία καμπής*. Μάλιστα, εφόσον δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας (δεν υπάρχει τριβή), η μάζα θα ταλαντώνεται ανάμεσα στο $+x_m$ και στο $-x_m$ διηνεκώς. (Θα μελετήσουμε τις ταλαντώσεις αυτές στο Κεφάλαιο 13). Η ολική ενέργεια τού συστήματος δεν μπορεί να υπερβεί το $\frac{1}{2}kx_m{}^2$, επομένως η μάζα σταματά στα σημεία αυτά και υποχρεώνεται από τη δύναμη τού ελατηρίου να επιταχυνθεί προς το $x = 0$.

Σχήμα 8.13 Γραφική παράσταση τού U ως προς x για ένα σύστημα που έχει ασταθή ισορροπία στο σημείο $x = 0$. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη που ασκείται για πεπερασμένες μετατοπίσεις κατευθύνεται μακριά από το $x = 0$.

Ένα άλλο απλό μηχανικό σύστημα που έχει θέση ευσταθούς ισορροπίας αποτελείται από μια σφαίρα η οποία κυλίεται μέσα σε μια σφαιρική γυάλα. Εάν η σφαίρα μετατοπιστεί από την αρχική θέση της, όταν αφεθεί ελεύθερη θα επιστρέψει στην θέση ισορροπίας.

Θεωρήστε την καμπύλη U προς x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.13. Στην περίπτωση αυτή όταν $x = 0$, τότε $F_x = 0$, επομένως το σώμα ισορροπεί σε αυτό το σημείο. Πάντως, αυτή είναι θέση **ασταθούς ισορροπίας** για τους εξής λόγους: Υποθέστε ότι το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά ($x > 0$). Η κλίση τής καμπύλης είναι αρνητική για $x > 0$. Έτσι η $F_x = -dU/dx$ είναι θετική και το σώμα θα επιταχυνθεί μακριά από το $x = 0$. Υποθέστε τώρα ότι το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά ($x < 0$). Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη είναι *αρνητική* επειδή η κλίση είναι θετική για $x < 0$. Επομένως, και πάλι το σώμα θα επιταχυνθεί απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας. Έτσι, στην περίπτωση αυτή η θέση $x = 0$ ονομάζεται θέση *ασταθούς ισορροπίας*, επειδή για οποιαδήποτε μετατόπιση από το σημείο αυτό η δύναμη ωθεί το σώμα να απομακρυνθεί από το σημείο ισορροπίας. Μάλιστα, η δύναμη ωθεί το σώμα να καταλάβει τη θέση τής χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Μια σφαίρα που είναι πάνω στην κορυφή μιας αναποδογυρισμένης σφαιρικής γυάλας, βρίσκεται προφανώς σε θέση ασταθούς ισορροπίας. Δηλαδή, εάν μετατοπίσουμε λίγο τη σφαίρα από την κορυφή και τήν αφήσουμε ελεύθερη, η σφαίρα θα κυλήσει μακριά από τη γυάλα. Γενικά, *οι θέσεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στα σημεία όπου η $U(x)$ είναι μέγιστη*[4].

Τέλος, μπορεί να έχουμε την περίπτωση κατά την οποία η U είναι σταθερή σε μια περιοχή και επομένως $F = 0$. Αυτό λέγεται σημείο **αδιάφορης ισορροπίας.** Εάν μετατοπιστεί το σώμα λίγο, δεν δημιουργείται καμία δύναμη. Τέτοια περίπτωση αποτελεί μια σφαίρα που κείται πάνω σε επίπεδη οριζόντια επιφάνεια.

Αδιάφορη ισορροπία

8.9 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Είδαμε ότι η ολική μηχανική ενέργεια ενός συστήματος διατηρείται μόνον όταν όλες οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα είναι διατηρητικές. Μπορέσαμε επίσης να αντιστοιχήσουμε ανά μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας για κάθε διατηρητική δύναμη. Με άλλα λόγια, μηχανική ενέργεια χάνεται κάθε φορά που υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις, όπως είναι π.χ. η τριβή.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την αρχή διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω στο σύστημα, διατηρητικές και μη διατηρητικές. Όταν μελετήσουμε τη Θερμοδυναμική, θα δούμε ότι η μηχανική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε θερμική ενέργεια. Λογουχάρη, όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε μια τραχιά επιφάνεια, η μηχανική ενέργεια την οποία χάνει μετατρέπεται προσωρινά σε εσωτερική ενέργεια, που αποθηκεύεται στο σώμα και στο περιβάλλον του, όπως φαίνεται από την αύξηση τής μετρούμενης θερμοκρασίας. Στο ατομικό επίπεδο θα δούμε ότι αυτή η εσωτερική ενέργεια σχετίζεται με τις ταλαντώσεις τών ατόμων γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Οι ατομικές αυτές κινήσεις έχουν κινητική και δυναμική ενέργεια, διότι οφείλονται στις διατηρητικές ηλεκτροστατικές δυνάμεις[5]. Επομένως, εάν συμπεριλάβουμε την αύξηση αυτή τής εσωτερικής ενέργειας τού συστήματος στο θεώρημα έργου-ενέργειας, μπορούμε να πούμε ότι η ολική ενέργεια διατηρείται.

Το παραπάνω είναι ένα απλό παράδειγμα τού πώς μπορούμε να αναλύσουμε ένα σύστημα και να βεβαιωθούμε ότι η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερή. **Μην ξεχνάτε** όμως ότι πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν όλες οι μορφές ενέργειας που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Δηλαδή, *η ενέργεια ποτέ δεν καταστρέφεται και ποτέ δεν δημιουργείται. Η ενέργεια όμως μεταβάλλει μορφές έτσι ώστε* ***κάθε στιγμή*** *η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος είναι σταθερή*. Εάν θέλετε να δείτε το θέμα από «κοσμική» σκοπιά, μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα διατήρησης τής ενέργειας ως εξής: ***η ολική ενέργεια τού Σύμπαντος είναι σταθερή.*** *Επομένως εάν σε κάποιο μέρος τού Σύμπαντος αυξηθεί η ενέργεια, με την πρόσκτηση ενέργειας κάποιας μορφής,* ***ταυτόχρονα,*** *σε ένα άλλο μέρος τού Σύμπαντος πρέπει να μειωθεί,* ***ισόποσα,*** *η ενέργεια με την απώλεια ενέργειας κάποιας (όχι απαραίτητα τής ίδιας) μορφής.* ***Μέχρι σήμερα δεν γνωρίζουμε καμία περίπτωση στην οποία να μην ισχύει αυτός ο νόμος.***

Η ολική ενέργεια διατηρείται πάντοτε

---

(4) Μπορείτε να ελέγξετε με μαθηματικό τρόπο κατά πόσον μια ακραία τιμή τής U είναι θέση ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας εάν βρείτε το πρόσημο τής δεύτερης παραγώγου, d^2U/dx^2.

(5) Εάν εισαγάγουμε την έννοια μιας μη διατηρητικής δύναμης, τής τριβής, μπορούμε να περιορίσουμε τον αριθμό τών μελών τού συστήματος που μελετούμε. Στην πράξη, δηλαδή, ξεπερνάμε το «πρακτικά» πολύπλοκο πρόβλημα τής περιγραφής τής δυναμικής 10^{23} ατόμων ή μορίων και τών αλληλεπιδράσεών τους αντικαθιστώντας το συλλογικό αποτέλεσμά τους με την δύναμη τής τριβής. Έτσι μπορούμε και απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς που πρέπει να κάνουμε σε μακροσκοπικό επίπεδο. Στο επίπεδο τού μικροκόσμου, δεν μπορεί να οριστεί η δύναμη τής τριβής.

Δηλαδή, όλα τα πειράματα που έχουν γίνει μέχρι σήμερα επιβεβαιώνουν τη θεμελιώδη αυτή αρχή τής Φυσικής, την αρχή τής διατήρησης τής ολικής ενέργειας ενός απομονωμένου συστήματος.

Ορισμένα παραδείγματα μετατροπής τής ενέργειας είναι: η ενέργεια την οποία μεταφέρουν τα ηχητικά κύματα που δημιουργούνται από την κρούση μεταξύ δύο αντικειμένων· η ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων την οποία εκπέμπουν επιταχυνόμενα φορτισμένα σωματίδια (λ.χ. από μια κεραία πομπού ασυρμάτου)· η ενέργεια που εκλύεται στις πυρηνικές αντιδράσεις κατά τις οποίες συντελείται μεταστοιχείωση· το φαγητό που τρώμε.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι η έννοια τής ενέργειας και ειδικά η μετατροπή ενέργειας σε διάφορες μορφές συνδέει τα διάφορα μέρη τής Φυσικής. Με άλλα λόγια, δεν μπορείτε να ξεχωρήσετε τη Μηχανική από τον Ηλεκτρομαγνητισμό ή από τη Θερμοδυναμική. Τέλος, ας μη λησμονούμε ότι, στην πράξη, όλες οι μηχανές και οι ηλεκτρονικές συσκευές στηρίζονται σε κάποιο φαινόμενο μετατροπής ενέργειας.

*8.10 ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΑΖΑΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τη θεμελιώδη αρχή τής διατήρησης τής ενέργειας και τις εφαρμογές της σε διάφορα φυσικά φαινόμενα. Μέχρι τις αρχές τού εικοστού αιώνα, οι φυσικοί πίστευαν ότι υπάρχει και ένας άλλος βασικός νόμος, **ο νόμος διατήρησης τής μάζας,** σύμφωνα με τον οποίο στα συνήθη φυσικά ή χημικά φαινόμενα *η ύλη δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται.* Δηλαδή, η μάζα την οποία έχει ένα σύστημα στην αρχή μιας διαδικασίας είναι ίση με την μάζα τού συστήματος μετά τη λήξη τής διαδικασίας.

Στο σημείο αυτό, φαίνεται ότι η μάζα και η ενέργεια είναι δύο ποσότητες που διατηρούνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Πλην όμως, το 1905, ο Einstein διατύπωσε τη γνώμη ότι η ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε μάζα και η μάζα μπορεί να μετατραπεί σε ενέργεια. Η μάζα και η ενέργεια δεν διατηρούνται ξεχωριστά, ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά διατηρούνται μαζί, άρρηκτα συνδεδεμένες, ως ενιαία ποσότητα που λέγεται *μάζα-ενέργεια*. Έτσι θεωρούμε ότι *η μάζα και η ενέργεια είναι ισοδύναμες έννοιες.* Ο Einstein διατύπωσε τη σχέση που συνδέει τη μάζα με την ενέργεια:

$$E_0 = mc^2 \tag{8.19}$$

όπου c είναι η ταχύτητα τού φωτός ($c \approx 3 \times 10^8$ m/s), E_0 είναι η ενέργεια που ισοδυναμεί στη μάζα m. Στη θεωρία τής σχετικότητας η μάζα m που αντιστοιχεί σε ένα ακίνητο σώμα λέγεται **μάζα ηρεμίας** και η ενέργεια E_0 που αντιστοιχεί σ' αυτήν λέγεται **ενέργεια ηρεμίας.** Στο Κεφάλαιο 39 θα δούμε ότι η μάζα αυξάνεται συναρτήσει τής ταχύτητας. Αυτό όμως δεν πρέπει να μάς απασχολεί εφόσον $v \ll c$. Έτσι, οι μάζες που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε φυσικά φαινόμενα τής καθημερινής εμπειρίας είναι μάζες ηρεμίας.

Η ενέργεια ηρεμίας που αντιστοιχεί σε μια μικρή ποσότητα ύλης είναι πράγματι τεράστια. Λογουχάρη, η ενέργεια ηρεμίας που αντιστοιχεί σε μάζα 1 kg *οποιασδήποτε* ουσίας είναι

$$E_0 = mc^2 = (1\ \text{kg})(3 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 9 \times 10^{16}\ \text{J}$$

Με τα σημερινά μέσα μετατροπής ενέργειας, χρειαζόμαστε 15 εκατομμύρια βαρέλια αργού πετρελαίου για να έχουμε αυτή την ενέργεια. Να σημειωθεί ότι τόση είναι η συνολική ημερήσια κατανάλωση ενέργειας στις ΗΠΑ. Προφανώς, εάν ξέραμε πώς να μετατρέψουμε εύκολα αυτήν την ενέργεια σε χρήσιμο έργο, δεν θα υπήρχε ενεργειακό πρόβλημα, διότι, πράγματι, θα είχαμε στη διάθεσή μας αστείρευτες ποσότητες ενέργειας.

Στην πράξη, η ύλη δεν μετατρέπεται σε ενέργεια εύκολα, εκτός από μερικές περιπτώσεις κατά τις οποίες πράγματι ένα σημαντικό ποσοστό τής διαθέσιμης ενέργειας ηρεμίας μετατρέπεται σε χρήσιμο έργο. Τέτοια παραδείγματα έχουμε στις πυρηνικές αντιδράσεις κατά τις οποίες είναι σύνηθες να παρατηρούμε τη μετατροπή τού 10^{-3} περίπου τής μάζας σε ενέργεια. Έτσι συντελείται τεράστια έκλυση ενέργειας όταν ένας πυρήνας ουρανίου-235 σχάται σε δύο μικρότερους. Τότε εκλύεται ενέργεια, διότι η μάζα τού πυρήνα τού ^{235}U είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα τών μαζών τών προϊόντων τής σχάσης. Οι εκρήξεις τών πυρηνικών όπλων αποτελούν τραγική επιβεβαίωση τής αλήθειας ότι σε τέτοιες αντιδράσεις εκλύονται τεράστιες ενέργειες.

Εφόσον η μάζα και η ενέργεια ενός συστήματος μετατρέπονται ταυτόχρονα και αμοιβαία, τίς θεωρούμε ότι είναι διαφορετικές όψεις μιας και τής αυτής ποσότητας, που τήν ονομάζουμε μάζα-ενέργεια. Ο νόμος διατήρησης λοιπόν ορίζει ότι *η μάζα-ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερή.*

Από την Εξίσωση 8.19, που ορίζει τη σχέση μάζας-ενέργειας, προκύπτει ότι η *ενέργεια έχει μάζα.* Κάθε φορά που μεταβάλλεται η ενέργεια ενός σώματος, μεταβάλλεται και η μάζα του, σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \tag{8.20}$$

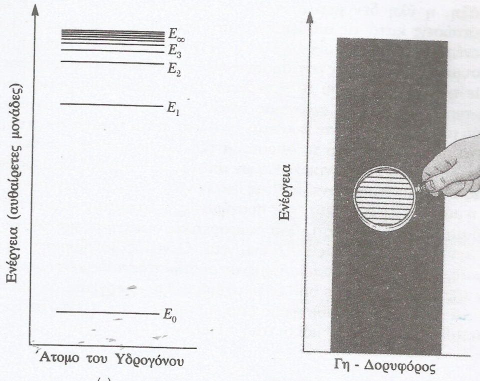
Στα συνήθη πειράματα, εάν προσδώσουμε σε ένα σώμα ενέργεια ΔE υπό οποιαδήποτε μορφή (π.χ. κινητική, δυναμική ή θερμική ενέργεια), η μάζα του μεταβάλλεται κατά $\Delta m = \Delta E/c^2$. Επειδή όμως το c^2 είναι πολύ μεγάλο, η μεταβολή στη μάζα είναι πολύ μικρή, και γι' αυτό είναι πολύ δύσκολο να τή μετρήσουμε με ένα απλό πείραμα.

*8.11 ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ίσως ήδη να γνωρίζετε ότι στο σύνολό της η κοινή ύλη αποτελείται από άτομα και ότι κάθε άτομο είναι ένα σύστημα ηλεκτρονίων και πυρήνα. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι στην κλίμακα τού ατόμου η ύλη δεν είναι συνεχής, όπως φαίνεται στα μάτια μας, αλλά υπάρχει σε διακεκριμμένες (δηλαδή ξεχωριστές) ποσότητες, οι οποίες αντιστοιχούν στις ατομικές μάζες. Στη γλώσσα τής σύγχρονης Φυσικής λέμε ότι η μάζα είναι *κβαντισμένη*. Όπως θα δούμε αργότερα, πολλές φυσικές ποσότητες, μεταξύ άλλων και η ενέργεια, είναι κβαντισμένες. Ο κβαντισμένος χαρακτήρας τής ενέργειας αποκαλύπτεται κατ' εξοχήν στον ατομικό και υποατομικό κόσμο.

Το άτομο τού υδρογόνου αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται γύρω από ένα πρωτόνιο. Ας μελετήσουμε τα ενεργειακά επίπεδά του. Το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται μόνον σε καθορισμένα ενεργειακά επίπεδα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.14a. Τα ενεργειακά αυτά επίπεδα λέγονται *κβαντικές στάθμες (καταστάσεις)*. Η χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη λέγεται *θεμελιώδης στάθμη (κατάσταση)* τού ατόμου και συμβολίζεται με E_0. Η θεμελιώδης αυτή κατάσταση αντιστοιχεί συνήθως στην περίπτωση που το άτομο είναι απομονωμένο. Το άτομο μπορεί να μεταπέσει σε καταστάσεις μεγαλύτερης ενέργειας εάν απορροφήσει ενέργεια από μια εξωτερική πηγή ή αν συγκρουστεί με άλλα άτομα. Η μεγαλύτερη ενέργεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.14a, η E_∞, αντιστοιχεί στην ενέργεια που πρέπει να προσδοθεί στο ηλεκτρόνιο τού ατόμου ώστε αυτό να απομακρυνθεί από το πρωτόνιο και λέγεται ενέργεια *ιοντισμού*. [Σημ. μετφρ.: *ιοντισμός* και όχι *ιονισμός* είναι νομίζουμε η ορθή απόδοση τού αντίστοιχου αντιδάνειου όρου (πρβλ. αγγλ. ionization, γαλλ. ionisation, γερμ. Ionisation)]. Ας σημειωθεί ότι οι ενεργειακές στάθμες πυκνώνουν προς το επάνω μέρος τής ενεργειακής κλίμακας.

Ας μελετήσουμε τώρα έναν δορυφόρο που περιφέρεται γύρω από τη Γη. Εάν σάς ζητούσαν να περιγράψετε την ενέργεια την οποία πιθανόν έχει ο δορυφόρος, δεν θα κάνατε μεγάλο λάθος εάν λέγατε ότι ο δορυφόρος μπορεί να έχει οποιαδήποτε ενέργεια επιλέξετε. Αλλά, όπως και στο άτομο τού



(a) (b)

Σχήμα 8.14 (a) Ενέργεια τών κβαντικών καταστάσεων τού ατόμου τού υδρογόνου. Η χαμηλότερη ενέργεια *E* αντιστοιχεί στη θεμελιώδη κατάσταση. (b) Η ενέργεια ενός τεχνητού δορυφόρου τής Γης είναι και αυτή κβαντισμένη, αλλά τα ενεργειακά επίπεδα είναι τόσο κοντά μεταξύ τους ώστε δεν ξεχωρίζουν.

υδρογόνου, *οι ενεργειακές στάθμες τού δορυφόρου είναι και αυτές κβαντισμένες.* Ωστόσο, αν σχεδιάζαμε το ενεργειακό διάγραμμα τού δορυφόρου, οι κβαντισμένες αυτές ενεργειακές στάθμες θα βρίσκονταν τόσο κοντά η μία στην άλλη ώστε, στην πράξη, θα αποτελούσαν συνεχές φάσμα καταστάσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.14b. Οι ενεργειακές στάθμες μάλιστα βρίσκονται τόσο κοντά ώστε είναι αδύνατο να πούμε ότι δεν είναι συνεχείς. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατο να αισθανθούμε την κβάντωση τής ενέργειας στον μακρόκοσμο, γι' αυτό και δεν τή λαμβάνουμε υπ' όψιν όταν περιγράφουμε τα φυσικά φαινόμενα τής καθημερινής μας εμπειρίας.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μια δύναμη ονομάζεται **διατηρητική,** εάν το έργο που παράγει όταν δρα πάνω σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα ανάμεσα σε δύο σημεία. Ή, ισοδύναμα, μια δύναμη είναι διατηρητική, εάν το έργο που παράγει είναι μηδενικό όταν το σώμα διαγράφει μία τυχαία κλειστή διαδρομή καθώς επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης. Μια δύναμη που δεν εκπληρώνει τα παραπάνω είναι **μη διατηρητική.**

Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση *U* τής **δυναμικής ενέργειας** μόνον σε σχέση με μία διατηρητική δύναμη. Εάν μια διατηρητική δύναμη **F** δρα πάνω σε ένα σώμα που κινείται πάνω στον άξονα τών *x*, από το σημείο x_i στο σημείο x_f, *η μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας ισούται με το αρνητικό τού έργου που παράγει η δύναμη:*

Μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \qquad (8.2)$$

Ο νόμος διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας λέει ότι εάν οι δυνάμεις που δρουν πάνω σε ένα σώμα είναι διατηρητικές, τότε η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται:

Διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας

$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{8.5}$$

Η ολική μηχανική ενέργεια ενός συστήματος ορίζεται ως το άθροισμα τής κινητικής συν τη δυναμική ενέργεια:

Ολική μηχανική ενέργεια

$$E \equiv K + U \tag{8.6b}$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που βρίσκεται σε ύψος y πάνω από την επιφάνεια τής Γης είναι

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

$$U_g \equiv mgy \tag{8.9}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, το έργο που παράγουν όλες οι μη διατηρητικές δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω σε ένα σύστημα ισούται με τη μεταβολή τής ολικής μηχανικής ενέργειας τού συστήματος:

Έργο μη διατηρητικών δυνάμεων

$$W_{nc} = E_f - E_i \tag{8.13}$$

Η ελαστική δυναμική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο που έχει σταθερά k είναι

Δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη σε ελατήριο

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{8.14}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

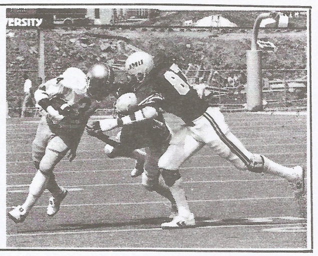
1. Μια μπάλλα τού μπόουλινγκ είναι αναρτημένη με ένα νήμα από την οροφή τού αμφιθεάτρου παραδόσεων Φυσικής. Ο καθηγητής σας εκτρέπει την μπάλλα από τη θέση ισορροπίας, τήν ακουμπάει στη μύτη του και τήν αφήνει ελεύθερη. Πρέπει άραγε να φύγει από τη θέση του για να μην τόν χτυπήσει η μπάλλα καθώς αυτή επιστρέφει; Τί θα συμβεί εάν ο καθηγητής ωθήσει την μπάλλα;
2. Μπορεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος να είναι αρνητική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Κάποιος ρίχνει μια μπάλλα από την ταράτσα ενός κτηρίου, ενώ ένας περαστικός τήν κοιτάζει από τον δρόμο. Συμφωνούν αυτοί οι δύο σε ό,τι αφορά (a) την τιμή τής δυναμικής ενέργειας τής μπάλλας; (b) τη μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας τής μπάλλας; (c) την κινητική ενέργεια τής μπάλλας;
4. Όταν τρέχει ενάς δρομέας στίβου παράγει έργο; (ας σημειωθεί ότι ο δρομέας μπορεί να κινείται ισοταχώς αλλά τα πόδια του και τα χέρια του επιταχύνονται). Πώς επηρεάζει την κατάσταση τού δρομέα η αντίσταση τού αέρα;
5. Όταν περπατούμε, τρέχουμε, πηδούμε κ.λπ., οι μύες τού σώματος ασκούν δύναμη. Αυτή η δύναμη είναι διατηρητική;
6. Παραμένει σταθερή η ολική μηχανική ενέργεια όταν μη διατηρητικές δυνάμεις δρουν σε ένα σύστημα;
7. Πόσους όρους δυναμικής ενέργειας θα έχουμε στην έκφραση τού θεωρήματος έργου-ενέργειας για ένα σύστημα πάνω στο οποίο δρουν τρεις διαφορετικές διατηρητικές δυνάμεις και μία μη διατηρητική;
8. Ένα σώμα είναι αναρτημένο με ένα ελατήριο από την οροφή και ταλαντώνεται (αγνοήστε την αντίσταση τού αέρα). Διατηρείται η ολική ενέργεια τού συστήματος; Πόσα είδη δυναμικής ενέργειας παρατηρείτε;
9. Θεωρήστε μια σφαίρα που είναι σε ένα σημείο της σταθερά συνδεδεμένη από το άκρο μιας ράβδου. Το άλλο άκρο τής ράβδου συνδέεται με ένα σταθεροποιημένο ρουλεμάν έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Ποιες είναι οι θέσεις ευσταθούς και ποιες είναι οι θέσεις ασταθούς ισορροπίας;
10. Μια σφαίρα κυλίεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Σε τί κατάσταση ισορροπίας βρίσκεται η σφαίρα;
11. Μπορεί να υπάρξει φυσικό σύστημα για το οποίο $E - U < 0$;
12. Με τί μοιάζει η γραφική παράσταση τού U ως προς x για ένα σώμα που βρίσκεται σε περιοχή αδιάφορης ισορροπίας;
13. Περιγράψτε τις μετατροπές ενέργειας που συντελούνται κατά τη διάρκεια τών ακόλουθων αθλημάτων: (a) άλματος επί κοντώ· (b) σφαιροβολίας· (c) άλματος σε ύψος. Ποια είναι η πηγή ενέργειας για κάθε περίπτωση;
14. Εξηγήστε τις μετατροπές ενέργειας οι οποίες συντελούνται για να κινηθεί ένα αυτοκίνητο.
15. Μια μπάλλα εκτοξεύεται στον αέρα κατακόρυφα προς τα επάνω. Ποια θέση αντιστοιχεί: (a) στη μέγιστη κινητική ενέργεια; (b) στη μέγιστη δυναμική ενέργεια;
16. Τρεις πανομοιότυπες σφαίρες εκτοξεύονται με το ίδιο μέτρο αρχικής ταχύτητας από την ταράτσα ενός κτηρίου. Η μία οριζόντια, η δεύτερη υπο γωνία *πάνω* από το οριζόντιο επίπεδο και η τρίτη υπό γωνία *κάτω* από το οριζόντιο επίπεδο. Χωρίς να λάβετε υπ' όψιν

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΡΜΗ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

9

Γραμμική ορμή και κρούσεις



Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε την κίνηση ενός συστήματος που αποτελείται από πολλά σώματα. Θα εισαγάγουμε την έννοια τής γραμμικής ορμής και θα δείξουμε ότι η ορμή διατηρείται όταν το σύστημα είναι απομονωμένο από το περιβάλλον. Ο νόμος διατήρησης τής ορμής μάς διευκολύνει πολύ στη μελέτη προβλημάτων, όπως είναι οι κρούσεις και η πρόωση των πυραύλων. Θα εισαγάγουμε επίσης την έννοια τού κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων. Και θα αποδείξουμε ότι η κίνηση ενός συστήματος αλληλεπιδρώντων σωμάτων μπορεί να περιγραφεί με την κίνηση ενός ισοδύναμου σώματος το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας.

9.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΩΘΗΣΗ

Ορίζουμε ότι η **γραμμική ορμή** ενός σώματος μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ είναι ίση με το γινόμενο τής μάζας επί την ταχύτητα(1):

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \qquad (9.1)$$

Ορισμός τής γραμμικής ορμής σώματος

Η ορμή είναι διανυσματική ποσότητα επειδή ισούται με το γινόμενο μιας βαθμωτής ποσότητας, τής μάζας m, και μιας διανυσματικής, τής ταχύτητας $\boldsymbol{v}$. Έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ και οι διαστάσεις της είναι ML/T. Στο SI η ορμή έχει μονάδες kg.m/s.

Εάν ένα σώμα κινείται σε μια τυχαία κατεύθυνση, η ορμή έχει τρεις συνιστώσες και η Εξίσωση 9.1 μπορεί να αντικατασταθεί με τις αντίστοιχες τρεις εξισώσεις τών συνιστωσών της:

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z \qquad (9.2)$$

Εάν εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton, μπορούμε να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στη γραμμική ορμή ενός σώματος και στη δύναμη που δρα πάνω του. *Ο ως προς τον χρόνο ρυθμός μεταβολής τής γραμμικής ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη τών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω στο σώμα*(2). Δηλαδή

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(\overset{p}{mv})}{dt} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (9.3)$$

Ο δεύτερος νόμος τού Newton

---

(1) Αυτή η σχέση δεν είναι σχετικιστική και ισχύει μόνον όταν $v \ll c$, όπου c είναι η ταχύτητα τού φωτός. Στην Ειδική θεωρία τής σχετικότητας ορίζουμε την ορμή με τη σχέση $p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

(2) Η σχέση $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, ισχύει και στην Ειδική θεωρία τής σχετικότητας, υπό τον όρο ότι θα χρησιμοποιήσουμε τον σχετικιστικό ορισμό τής ορμής $p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Θα συνεχίσουμε την σχετικιστική θεώρηση τής κινησης στο Κεφάλαιο 39.

Από την Εξίσωση 9.3 βλέπουμε ότι εάν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική, η ορμή τού σώματος είναι σταθερή. Με άλλα λόγια, η γραμμική ορμή ενός σώματος είναι σταθερή όταν $\boldsymbol{F} = 0$. Προφανώς, όταν ένα σώμα είναι *απομονωμένο* (δηλαδή δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του) και αναγκαστικά $\boldsymbol{F} = 0$, τότε διατηρείται η γραμμική ορμή του $\boldsymbol{p}$. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται και από τον δεύτερο νόμο τού Newton στη μορφή $\boldsymbol{F} = m\, d\boldsymbol{v}/dt$. Δηλαδή, όταν η δύναμη είναι μηδενική, τότε η επιτάχυνσή του είναι μηδενική και έτσι η ταχύτητα είναι σταθερή. Και επειδή (για $v \ll c$) και η μάζα του είναι σταθερή, η γραμμική ορμή του είναι σταθερή.

Ξαναγράφουμε λοιπόν την Εξίσωση 9.3 ως

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\, dt \tag{9.4}$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση αυτή για να βρούμε τη μεταβολή τής ορμής ενός σώματος. Εάν η ορμή ενός σώματος κατά τη στιγμή t_i είναι $\boldsymbol{p}_i$ και κατά τη στιγμή t_f είναι $\boldsymbol{p}_f$, τότε, ολοκληρώνοντας την Εξίσωση 9.4, βρίσκουμε

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\, dt \tag{9.5}$$

Η ποσότητα στο δεξιό μέρος τής Εξίσωσης 9.5 λέγεται *ώθηση* τής δύναμης $\boldsymbol{F}$ για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$. Η ώθηση είναι διάνυσμα που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

Ώθηση δύναμης

$$\boldsymbol{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\, dt = \Delta\boldsymbol{p} \tag{9.6}$$

Δηλαδή,

> **Η *ώθηση* τής δύναμης *F* είναι ίση με τη μεταβολή τής ορμής τού σώματος.**

Θεώρημα ώθησης-ορμής

Το παραπάνω είναι ισοδύναμο με τον δεύτερο νόμο τού Newton και είναι γνωστό ως **θεώρημα τής ώθησης – ορμής.** Από τον ορισμό αυτόν βλέπουμε ότι η ώθηση είναι ένα διάνυσμα τού οποίου το μέτρο ισούται με την επιφάνεια που περιέχεται κάτω από την καμπύλη δύναμης-χρόνου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.1a. Για την κατασκευή τής καμπύλης αυτής έχουμε κάνει την υπόθεση ότι έχει την παραμετρική μορφή τής δύναμης που απεικονίζεται στο Σχήμα 9.10 και ότι είναι διάφορη τού μηδενός στο διάστημα t_i έως t_f. Η κατεύθυνση τού διανύσματος τής ώθησης είναι ίδια με την κατεύθυνση τής μεταβολής τής ορμής. Η ώθηση έχει τις διαστάσεις τις οποίες έχει και η ορμή, δηλαδή ML/T. Ας σημειωθεί ότι η έννοια τής ώθησης δεν περιγράφει ιδιότητα τού σώματος αλλά μάς δίνει το μέτρο τού κατά πόσο μια εξωτερική δύναμη μεταβάλλει την ορμή ενός σώματος. Έτσι, όταν λέμε ότι ένα σώμα υφίσταται ώθηση εννοούμε ότι μεταφέρεται στο σώμα ορμή από μια εξωτερική δύναμη.

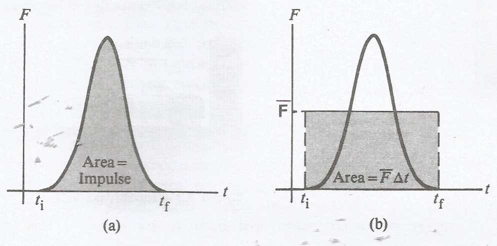
Εφόσον στη γενική περίπτωση μια δύναμη μπορεί να μεταβληθεί συναρτήσει τού χρόνου, για διευκόλυνσή μας ορίζουμε, ως προς τον χρόνο, τη μέση τιμή τής δύναμης $\overline{\boldsymbol{F}}$ ως

$$\overline{\boldsymbol{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\, dt \tag{9.7}$$

όπου $\Delta t = t_f - t_i$. Επομένως, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση 9.6 ως

$$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{F}}\, \Delta t \tag{9.8}$$

Αυτή η μέση δύναμη, που περιγράφεται στο Σχήμα 9.1b, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η σταθερή δύναμη η οποία θα έδινε στο σώμα κατά το ίδιο χρονικό διάστημα Δt την ίδια ώθηση με εκείνην που δίνει η μεταβαλλόμενη (στον χρόνο) δύναμη.



Σχήμα 9.1 (a) Μια δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα μπορεί να μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου. Η ώθηση είναι ίση με την επιφάνεια που περιέχεται κάτω από την καμπύλη τής δύναμης ως προς τον χρόνο. (b) Η μέση δύναμη $\overline{F}$ (οριζόντια γραμμή) θα έδινε την ίδια ώθηση στο σώμα κατά το χρονικό διάστημα Δt, όπως και η πραγματική δύναμη που περιγράψαμε στο (a).

Προφανώς, εάν γνωρίζουμε την $\boldsymbol{F}$ ως συνάρτηση τού χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε την ώθηση από την Εξίσωση 9.6. Εάν η δύναμη είναι σταθερή, ο υπολογισμός είναι πολύ απλός. Στην περίπτωση αυτή $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}$ και η Εξίσωση 9.8 γίνεται

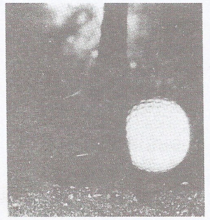
$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\,\Delta t \tag{9.9}$$

Σε διάφορα προβλήματα τής Φυσικής χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη **προσέγγιση τής ώθησης.** Στην προσέγγιση αυτή *υποθέτουμε ότι μία από τις δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω στο σώμα δρα επί μικρό χρονικό διάστημα, αλλά είναι πολύ μεγαλύτερη από τις άλλες δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα.* Αυτή η προσέγγιση μάς διευκολύνει κατ' εξοχήν στην μελέτη κρούσεων κατά τις οποίες η διάρκεια τής κρούσης είναι πολύ μικρή. Όταν κάνουμε την προσέγγιση αυτή ονομάζουμε τη δύναμη *δύναμη ώθησης*. Λογουχάρη, όταν χτυπούμε με το μπαστούνι μια μπάλλα τού μπέιζμπωλ, η κρούση διαρκεί μόνον 0.01 s περίπου και η μέση δύναμη την οποία ασκεί το μπαστούνι πάνω στην μπάλλα είναι μερικές χιλιάδες newton. Η δύναμη αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη τής βαρύτητας και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση τής ώθησης. Δεν πρέπει να μάς διαφεύγει ότι, όταν χρησιμοποιούμε την προσέγγιση αυτή, το $\boldsymbol{p}_i$ και το $\boldsymbol{p}_f$ συμβολίζουν τις αντίστοιχες ορμές *αμέσως* πριν και μετά από την κρούση, αντίστοιχα. Επομένως, στην προσέγγιση αυτή δεν υπάρχουν τα χρονικά περιθώρια για κίνηση τού σώματος κατά τη διάρκεια τής κρούσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.1 Το χτύπημα μιας μπάλλας τού γκολφ

Κάποιος χτυπάει με το μπαστούνι μια μπάλλα τού γκόλφ μάζας 50 g (Σχήμα 9.2). Η δύναμη την οποία ασκεί το μπαστούνι μεταβάλλεται, από μηδενική που ήταν λίγο πριν από την επαφή, και αποκτά τη μέγιστη τιμή της κατά τη στιγμή που η μπάλλα παραμορφώνεται, ενώ μηδενίζεται και πάλι όταν η μπάλλα έχει ήδη εκτοξευθεί. Έτσι, ποιοτικά, η καμπύλη δύναμης-χρόνου είναι ίδια με εκείνην που παριστάνεται στο Σχήμα 9.1. Εάν υποθέσουμε ότι η μπάλλα εκτοξεύεται σε απόσταση 200 m, (a) υπολογίστε την ώθηση που οφείλεται στην κρούση.

Λύση Εάν δεν λάβουμε υπ' όψιν την αντίσταση τού αέρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που δίνει το βεληνεκές βολής, την οποία έχουμε εξαγάγει στο Κεφάλαιο 4:



Σχήμα 9.2 Μια μπάλλα τού γκολφ τη στιγμή που ωθείται από το μπαστούνι. (© Φωτογραφία Harold E. Edgerton, Palm Press, Inc.).

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$

Ας υποθέσουμε ότι η γωνία εκτόξευσης είναι 45°, έτσι ώστε να έχουμε το μέγιστο βεληνεκές για δεδομένο μέτρο αρχικής ταχύτητας. Το μέτρο τής αρχικής ταχύτητας λοιπόν είναι

$$v_0 = \sqrt{Rg} = \sqrt{(200\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)} = 44\ \text{m/s}$$

Εφόσον $v_i = 0$ και $v_f = v_0$, το μέτρο τής ώθησης την οποία δέχθηκε η μπάλλα είναι

$$I = \Delta p = mv_0 = (50 \times 10^{-3}\ \text{kg})\left(44\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = \boxed{2.2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

(b) Υπολογίστε τη χρονική διάρκεια τής κρούσης.

Λύση Από το Σχήμα 9.2 φαίνεται ότι η μπάλλα κατά την εκκίνησή της και ενώ εφάπτονταν με το μπαστούνι είχε διανύσει απόσταση ίση περίπου με μία διαμετρό της, ≈ 2 cm. Ο χρόνος που χρειάστηκε το μπαστούνι για να καλύψει την απόσταση αυτή είναι

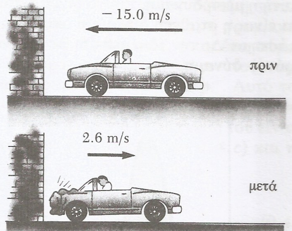
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_0} = \frac{2 \times 10^{-2}\ \text{m}}{44\ \text{m/s}} = \boxed{4.5 \times 10^{-4}\ \text{s}}$$

΄Ασκηση 1 Υπολογίστε το μέτρο τής μέσης δύναμης η οποία ασκήθηκε από το μπαστούνι στην μπάλλα κατά τη διάρκεια τής κρούσης.
Απάντηση 4.9×10^3 N. Η δύναμη αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος τής μπάλλας, το οποίο είναι μόλις 0.49 N.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2 Πόσο καλοί είναι οι προφυλακτήρες τών αυτοκινήτων

Σε εργαστηριακό πείραμα συγκρούσεων αυτοκινήτων, ένα αυτοκίνητο μάζας 1 500 kg συγκρούεται με έναν τοίχο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.3. Τα μέτρα τής αρχικής και τής τελικής ταχύτητας τού αυτοκινήτου είναι $v_i = -15.0$ m/s και $v_f = 2.6$ m/s, αντιστοίχως. Εάν η σύγκρουση διαρκέσει 0.150 s, βρείτε την ώθηση που οφείλεται στη σύγκρουση καθώς και τη μέση δύναμη η οποία έδρασε πάνω στο αυτοκίνητο.

Λύση Τα μέτρα τής αρχικής και τής τελικής ορμής τού αυτοκινήτου είναι



Σχήμα 9.3 (Παράδειγμα 9.2).

$$p_i = mv_i$$
$$= (1500\ \text{kg})(-15.0\ \text{m/s}) = -2.25 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$
$$p_f = mv_f = (1500\ \text{kg})(2.6\ \text{m/s}) = 0.39 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Επομένως, η ώθηση, η οποία ισούται με τη μεταβολή τής ορμής, είναι

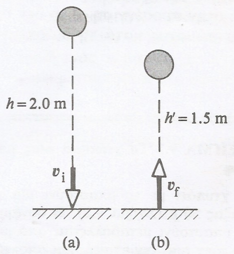
$$I = \Delta p = p_f - p_i$$
$$= 0.39 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s})$$
$$I = \boxed{2.64 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

Η μέση δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο είναι

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = \boxed{1.76 \times 10^5\ \text{N}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.3 Παρακολουθήστε την μπάλλα που αναπηδά

Μια μπάλλα μάζας 100 g πέφτει από ύψος $h = 2$ m πάνω στο πάτωμα (Σχήμα 9.4). Αφού χτυπήσει στο πάτωμα, αναπηδά κατακόρυφα σε ύψος $h' = 1.5$ m. (a) Βρείτε την ορμή τής μπάλλας αμέσως προτού και αμέσως αφού χτυπήσει στο πάτωμα.



Σχήμα 9.4 (Παράδειγμα 9.3) (a) Η μπάλλα πέφτει από ύψος h και όταν προσκρούσει στο έδαφος έχει ταχύτητα $\mathbf{v}_i$. (b) Η μπάλλα αναακρούει με ταχύτητα $\mathbf{v}_f$ και φτάνει σε ύψος h'.

Λύση Με τη χρήση τών ενεργειακών μεθόδων μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα, v_i, που είχε η μπάλλα λίγο προτού χτυπήσει στο πάτωμα,

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 = mgh$$

Εξάλλου, η ταχύτητα τής μπάλλας, v_f, αμέσως αφού χτύπησε στο πάτωμα είναι

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = mgh'$$

Θέτουμε στις παραπάνω σχέσεις τις τιμές $h = 2.0$ m και $h' = 1.5$ m και βρίσκουμε

$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9.80)(2)}\ \text{m/s} = 6.26\ \text{m/s}$$
$$v_f = \sqrt{2gh'} = \sqrt{(2)(9.80)(1.5)}\ \text{m/s} = 5.42\ \text{m/s}$$

Γνωρίζουμε ότι $m = 0.1$ kg. Έτσι, τα διανύσματα τής αρχικής και τής τελικής ορμής είναι

$$p_i = mv_i = \boxed{-0.626j\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

$$p_f = mv_f = \boxed{0.542j\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

(b) Προσδιορίστε τη μέση δύναμη την οποία ασκεί το πάτωμα στην μπάλλα. Υποθέστε ότι η κρούση διαρκεί 10^{-2} s περίπου.

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 9.5 και τον ορισμό τής $\bar{F}$ και βρίσκουμε

$$\Delta p = p_f - p_i = \bar{F}\,\Delta t$$

$$\bar{F} = \frac{[0.542j - (-0.626j)]\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{10^{-2}\ \text{s}} = \boxed{1.17\times10^2 j\ \text{N}}$$

Βλέπουμε και εδώ πόσο πιο μεγάλη από το βάρος τής μπάλλας ($mg \approx 1$ N) είναι η μέση αυτή δύναμη. Δηλαδή, η δύναμη που προέρχεται από την κρούση με το πάτωμα είναι πολύ μεγαλύτερη από τη βαρυτική δύναμη. Σε αυτήν την ελαστική κρούση η ενέργεια που χάνει η μπάλλα μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.

9.2 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

Θεωρήστε ότι δύο σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά είναι απομονωμένα από το περιβάλλον τους (Σχήμα 9.5), δηλαδή τα σώματα ασκούν το ένα στο άλλο δύναμη, αλλά δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις[3]. Υποθέστε ότι κάποια στιγμή t η ορμή τού σώματος 1 είναι $\boldsymbol{p}_1$ και τού σώματος 2 είναι $\boldsymbol{p}_2$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton σε κάθε σώμα και να γράψουμε

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{F}_{21} = \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}$$

όπου $\boldsymbol{F}_{12}$ είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα 2 πάνω στο σώμα 1 και $\boldsymbol{F}_{21}$ είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 πάνω στο σώμα 2. Οι δυνάμεις αυτές μπορεί να είναι βαρυτικές, ηλεκτροστατικές ή οτιδήποτε άλλο· αυτό δεν έχει σημασία σε τούτη εδώ τη μελέτη. Γνωρίζουμε, όμως, από τον τρίτο νόμο τού Newton ότι η $\boldsymbol{F}_{12}$ και η $\boldsymbol{F}_{21}$ έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετες κατευθύνσεις. Δηλαδή, αποτελούν ένα ζεύγος δράσης-αντίδρασης, $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$. Αυτό μπορούμε να τό ξαναγράψουμε ως

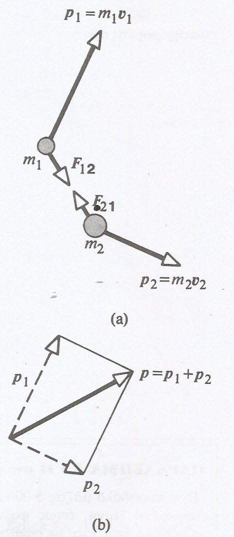
$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$$

ή

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = 0$$

Εφόσον, λοιπόν, η ως προς τον χρόνο παράγωγος τής ολικής ορμής, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, είναι *μηδενική*, συμπεραίνουμε ότι η *ολική* ορμή, $\boldsymbol{P}$, παραμένει σταθερή, δηλαδή

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{σταθερή}} \tag{9.10}$$



Σχήμα 9.5 (a) Κάποια στιγμή η ορμή τού m_1 είναι $\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1$ και τού m_2 είναι $\boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2$. Σημειώστε ότι $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$. (b) Η ολική ορμή τού συστήματος $\boldsymbol{P}$ είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$

[3] Στην πραγματικότητα, είναι αδύνατο να υπάρξει απομονωμένο σύστημα πάνω στη Γη, διότι πάντοτε θα υπάρχει βαρύτητα και τριβή·

Η διανυσματική αυτή εξίσωση ισοδυναμεί με τις τρεις εξισώσεις τών συνιστωσών. Με άλλα λόγια, η Εξίσωση 9.10 σε μορφή συνιστωσών δείχνει ότι η ολική ορμή στη διεύθυνση x είναι σταθερή, όπως και στις διευθύνσεις y και z.

$$P_{ix} = P_{fx} \qquad P_{iy} = P_{fy} \qquad P_{iz} = P_{fz}$$

Ο νόμος αυτός είναι γνωστός ως **νόμος διατήρησης τής γραμμικής ορμής** και λέει ότι:

> **Εάν δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα, τότε η ολική ορμή τού συστήματος διατηρείται, ανεξάρτητα από το είδος τής δύναμης αλληλεπίδρασής τους. Ή, πιο απλά, κάθε φορά που δύο σώματα συγκρούονται (ή αλληλεπιδρούν) η ολική ορμή τους παραμένει σταθερή, εφόσον είναι απομονωμένα.**

Υποθέστε ότι $\mathbf{v}_{1i}$ και $\mathbf{v}_{2i}$ είναι οι αρχικές ταχύτητες τών σωμάτων 1 και 2 και ότι $\mathbf{v}_{1f}$ και $\mathbf{v}_{2f}$ είναι οι ταχύτητές τους κάποια στιγμή αργότερα. Μπορούμε να εκφράσουμε τη διατήρηση τής γραμμικής ορμής αυτού τού απομονωμένου συστήματος γράφοντας την Εξίσωση 9.10 ως εξής:

$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f} \tag{9.11}$$

ή

Διατήρηση τής ορμής

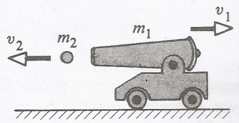
$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \tag{9.12}$$

Δηλαδή, *η ολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος* ***κάθε στιγμή*** *ισούται με την αρχική ολική ορμή*. Μπορούμε να περιγράψουμε τον νόμο διατήρησης τής ορμής και με έναν άλλο τρόπο. Εφόσον απαιτείται το σύστημα που μελετούμε να είναι απομονωμένο, οι μόνες δυνάμεις που είναι δυνατόν να υπάρχουν είναι απαραίτητα εσωτερικές δυνάμεις τού συστήματος (δηλαδή το ζεύγος δράσης-αντίδρασης). Με άλλα λόγια, εάν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, η ολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. Για ένα απομονωμένο σύστημα, δηλαδή, ο νόμος διατήρησης τής ορμής είναι ισοδύναμος με τον τρίτο νόμο τού Newton.

Ο νόμος διατήρησης τής ορμής είναι από τους πιο θεμελιώδεις τής Φυσικής. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος δύο σωμάτων διατηρείται *ανεξάρτητα* από το είδος τών εσωτερικών δυνάμεων. Στο Υποκεφάλαιο 9.7 θα αποδείξουμε ότι ο νόμος διατήρησης τής ορμής ισχύει επίσης και για ένα απομονωμένο σύστημα n σωμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.4 Η ανάκρουση πυροβόλου

Ένα πυροβόλο μάζας 3 000 kg βρίσκεται πάνω σε μια παγωμένη λίμνη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.6. Το πυροβόλο γεμίζεται με σφαιρική οβίδα μάζας 30 kg και πυροδοτείται ενώ σκοπεύει σε οριζόντιο επίπεδο. Εάν το πυροβόλο ανακρούει προς τα δεξιά (όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.6) με ταχύτητα 1.8 m/s, υπολογίστε την αρχική ταχύτητα τής οβίδας.



Σχήμα 9.6 (Παράδειγμα 9.4) Καθώς το κανόνι πυροδοτείται, ανακρούει προς τα δεξιά.

Λύση Θεωρούμε ότι το σύστημά μας αποτελείται από το πυροβόλο και την οβίδα. Το σύστημα στην πραγματικότητα δεν είναι απομονωμένο, διότι υπάρχει η δύναμη τής βαρύτητας καθώς και η κάθετη δύναμη (τριβή δεν υπάρχει, εφόσον θεωρούμε ότι ο πάγος είναι λεία επιφάνεια). Πάντως, και οι δύο αυτές δυνάμεις δρουν σε κατεύθυνση που είναι κάθετη στη διεύθυνση κίνησης τού συστήματος. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο διατήρησης τής ορμής στη διεύθυνση x, επειδή δεν υπάρχουν δυνάμεις στη διεύθυνση αυτή (υποτίθεται πάντοτε η ύπαρξη λείας επιφάνειας).

Η ολική ορμή τού συστήματος πριν από την πυροδότηση είναι μηδενική. Επομένως, η ολική ορμή είναι μηδενική και μετά την πυροδότηση ή

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

Λύνουμε ως προς v_2, κάνουμε τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις, $m_1 = 3\,000$ kg, $v_1 = 1.8$ m/s και $m_2 = 30$ kg και βρίσκουμε

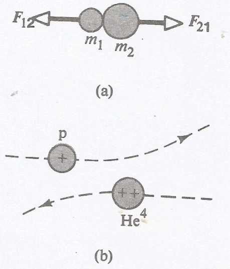
$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1 = -\left(\frac{3000 \text{ kg}}{30 \text{ kg}}\right)(1.8 \text{ m/s}) = \boxed{-180 \text{ m/s}}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η οβίδα κινείται προς τα αριστερά (Σχήμα 9.6), αντίθετα από το ανακρούον πυροβόλο.

9.3 ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Στο μέρος αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο διατήρησης τής ορμής για να περιγράψουμε τί γίνεται όταν δύο σώματα συγκρούονται. Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο **κρούση** για να περιγράψουμε την προσέγγιση τών δύο σωμάτων επί ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, κατά το οποίο ασκούνται δυνάμεις ώθησης από το ένα σώμα στο άλλο. *Υποθέτουμε ότι η δύναμη ώθησης που αναπτύσσεται λόγω τής κρούσης είναι πολύ μεγαλύτερη από οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στα σώματα.*

Η διαδικασία κρούσης, μακροσκοπικά, είναι αποτέλεσμα τής επαφής δύο μακροσκοπικών αντικειμένων, όπως φαίνεται λ.χ. στο Σχήμα 9.7a. Τέτοια παραδείγματα έχετε δει πολλά, όπως λ.χ. την κρούση ανάμεσα σε δύο μπίλιες τού μπιλιάρδου ή το χτύπημα μιας μπάλλας με ρακέτα. Πρέπει όμως να γενικεύσουμε την έννοια τής «κρούσης», διότι η λέξη «επαφή» στον μικρόκοσμο δεν έχει νόημα ούτε ορίζεται. Εκείνο που συμβαίνει είναι ότι αναπτύσσονται δυνάμεις ώθησης, λόγω τής ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα ηλεκτρόνια τών ατόμων τών επιφανειών τών δύο σωμάτων.



Σχήμα 9.7 (a) Κρούση δύο σωμάτων. (b) Κρούση δύο φορτισμένων ηλεκτρικά σωμάτων.

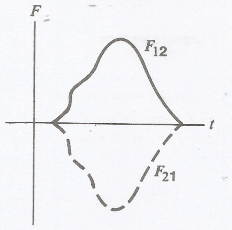
Για να κατανοήσουμε καλύτερα το τί συμβαίνει όταν προσεγγίσουμε το θέμα βαθύτερα ας παρατηρήσουμε το Σχήμα 9.7b, που περιγράφει μια κρούση σε ατομική κλίμακα, λ.χ. την κρούση ενός πρωτονίου με ένα σωματίδιο α (που είναι ο πυρήνας ενός ατόμου ηλίου). Τα δύο σωματίδια είναι φορτισμένα θετικά, γι' αυτό απωθούν το ένα το άλλο λόγω τής ηλεκτροστατικής δύναμης. Στη Φυσική αποδίδουμε τη διαδικασία αυτή με τον όρο *σκέδαση*.

Όταν δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 συγκρούονται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.7, οι δυνάμεις ώθησης μεταβάλλονται συνήθως κατά έναν πολύπλοκο τρόπο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.8. Εάν $\boldsymbol{F}_{12}$ είναι η δύναμη που ασκεί το m_2 πάνω στο m_1, τότε η μεταβολή τής ορμής τού m_1 λόγω τής κρούσης είναι

$$\Delta p_1 = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}_{12}\, dt$$

Εξάλλου, εάν $\boldsymbol{F}_{21}$ είναι η δύναμη την οποία ασκεί το m_1 πάνω στο m_2, τότε η μεταβολή τής ορμής τού m_2 λόγω τής κρούσης είναι

$$\Delta p_2 = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}_{21}\, dt$$



Σχήμα 9.8 Η δύναμη ως συνάρτηση τού χρόνου για την περίπτωση τών συγκρουόμενων σωμάτων τού Σχήματος 9.7a. Σημειώστε ότι $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

Γνωρίζουμε όμως από τον τρίτο νόμο τού Newton ότι η δύναμη την οποία ασκεί το m_2 πάνω στο m_1 είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκεί το m_1 πάνω στο m_2, δηλαδή $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$. Αυτό περιγράφεται με γραφική παράσταση στο Σχήμα 9.8. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$$

Αφού η ολική ορμή τού συστήματος είναι $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, συμπεραίνουμε ότι η *μεταβολή* τής ορμής τού συστήματος λόγω τής κρούσης είναι μηδενική, δηλαδή

$$P = p_1 + p_2 = \text{σταθερή}$$

Αυτό ακριβώς είναι το αποτέλεσμα που περιμένουμε, ότι δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις πάνω στο σύστημα (Υποκεφάλαιο 9.2). Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εάν θεωρήσουμε την κίνηση λίγο πριν και λίγο μετά από την κρούση. Και τούτο συμβαίνει διότι οι δυνάμεις τής ώθησης που αναπτύσσονται είναι εσωτερικές δυνάμεις τού συστήματος και δεν επηρεάζουν την ορμή του. Επομένως συμπεραίνουμε ότι

Η ορμή διατηρείται πάντοτε, σε οποιαδήποτε κρούση

σε οποιαδήποτε κρούση, η ολική ορμή τού συστήματος λίγο πριν από την κρούση είναι ίση με την ολική ορμή τού συστήματος λίγο μετά από την κρούση, διότι η ολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι οποιαδήποτε στιγμή η ίδια.

Όπως είδαμε, λοιπόν, όσες φορές έχουμε κρούση δύο σωμάτων που αποτελούν απομονωμένο σύστημα, *η ολική ορμή τους είναι πάντοτε σταθερή*. Η ολική κινητική τους ενέργεια όμως *δεν* διατηρείται, γενικά (ούτε υπάρχει κανένας νόμος διατήρησης τής κινητικής ενέργειας)· στις περισσότερες κρούσεις, μάλιστα, μέρος τής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια και σε εσωτερική ελαστική δυναμική ενέργεια, όταν δύο σώματα παραμορφώνονται κατά τη διάρκεια τής κρούσης.

Έτσι, γενικά, *η ορμή διατηρείται αλλά όχι και η κινητική ενέργεια·* και τότε λέμε ότι έχουμε μη ελαστική κρούση, οπότε μάλιστα μάς είναι πιο εύκολο να εφαρμόσουμε τον νόμο διατήρησης τής ορμής υπό τη μορφή τής Εξίσωσης 9.11. Όταν, λ.χ., μια λαστιχένια μπάλλα πέφτει πάνω σε ένα σκληρό πάτωμα, η κρούση είναι **μη ελαστική** (ανελαστική), διότι μέρος τής κινητικής ενέργειας τής μπάλλας χάνεται κατά την παραμόρφωσή της τη στιγμή που αγγίζει το πάτωμα. Όταν δύο αντικείμενα συγκρουστούν και κολλήσουν (ή συσσωματωθούν) το ένα με το άλλο μετά από την κρούση λέμε ότι έχουμε **τέλεια μη ελαστική (ή πλαστική) κρούση,** η οποία αποτελεί ακραία περίπτωση μη ελαστικής κρούσης. Λογουχάρη, εάν συγκρουστούν δύο κομμάτια στόκου, θα κολλήσουν το ένα με το άλλο και θα κινηθούν με την ίδια ταχύτητα. Όταν ένας μετεωρίτης πέσει πάνω στη Γη, χώνεται μέσα στο έδαφος και η κρούση είναι τέλεια μη ελαστική. Πάντως, σε μια μη ελαστική κρούση δεν μετατρέπεται απαραιτήτως όλη η αρχική κινητική ενέργεια, διότι τα κολλημένα αντικείμενα δεν παραμένουν κατ' ανάγκην ακίνητα μετά από την κρούση.

Μη ελαστική κρούση

Ελαστική κρούση

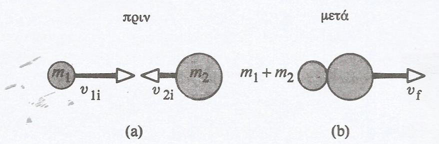
Ορίζουμε την **ελαστική κρούση** ως *κρούση κατά την οποία διατηρούνται η ορμή* **και** *η κινητική ενέργεια.* Οι κρούσεις ανάμεσα στις μπίλιες τού μπιλιάρδου ή οι κρούσεις μορίων ενός αερίου με τα τοιχώματα τού δοχείου που τό περιέχει είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα ελαστικών κρούσεων. Στην πραγματικότητα, όμως, οι μακροσκοπικές κρούσεις είναι μόνον κατά προσέγγιση ελαστικές, διότι πάντοτε παραμένει μια μικρή παραμόρφωση των σωμάτων και επομένως πάντοτε υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας. Πάντως, στον μικρόκοσμο παρατηρούμε ελαστικές κρούσεις ανάμεσα στα ατομικά και υποατομικά σωματίδια. Ώστε, λοιπόν, οι ελαστικές και οι τελείως μη ελαστικές κρούσεις είναι *ακραίες* περιπτώσεις και οι περισσότερες περιπτώσεις κρούσεων εντάσσονται κάπου ανάμεσά τους.

Ιδιότητες ελαστικών και μη ελαστικών κρούσεων

1. ***Μη ελαστική κρούση*** **είναι εκείνη κατά την οποία διατηρείται η ορμή, αλλά δεν διατηρείται η κινητική ενέργεια.**
2. ***Τελείως μη ελαστική (ή πλαστική) κρούση*** **ανάμεσα σε δύο σώματα είναι μια περίπτωση μη ελαστικής κρούσης κατά την οποία τα δύο σώματα κολλούν μεταξύ τους μετά την κρούση και έτσι έχουν την ίδια τελική ταχύτητα.**
3. ***Ελαστική κρούση*** **είναι εκείνη κατά την οποία διατηρείται η ορμή** ***και η κινητική*** **ενέργεια.**

9.4 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Στο υποκεφάλαιο αυτό εξετάζουμε κρούσεις σε μία διάσταση και μελετούμε δύο ακραίες περιπτώσεις κρούσεων: (1) τελείως μη ελαστικές· και (2) ελαστικές. Η πιο σημαντική διαφορά ανάμεσα στα δύο αυτά είδη κρούσεων είναι ότι *η ορμή διατηρείται και στις δύο περιπτώσεις, αλλά η κινητική ενέργεια διατηρείται μόνον στην περίπτωση τής ελαστικής κρούσης.*



Σχήμα 9.9 Σχηματική απεικόνιση μιας πλαστικής μετωπικής κρούσης ανάμεσα σε δύο σώματα: (a) πριν από την κρούση και (b) μετά από την κρούση.

Τελείως μη ελαστική κρούση

Θεωρήστε ότι δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες $\mathbf{v}_{1i}$ και $\mathbf{v}_{2i}$, αντίστοιχα, σε ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.9. Εάν τα δύο σώματα κολλήσουν μεταξύ τους και κινηθούν με κοινή ταχύτητα $\mathbf{v}_f$ μετά την κρούση, τότε μόνον η ορμή διατηρείται. Λέμε, λοιπόν, ότι η ολική ορμή πριν από την κρούση ισούται με την ολική ορμή μετά την κρούση, αφού η ολική ορμή παραμένει σταθερά συνεχώς (και κατά τη διάρκεια τής κρούσης), δηλαδή

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \tag{9.13}$$

$$\boxed{v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}} \tag{9.14}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5 «Φιατάκι» εναντίον Κάντιλακ

Ένα μεγάλο αυτοκίνητο πολυτελείας μάζας 1 800 kg σταματά σε κόκκινο φανάρι και από πίσω του τό χτυπά ένα μικρό αυτοκίνητο μάζας 900 kg. Τα δύο αυτοκίνητα συμπλέκονται τελείως λόγω τής σύγκρουσης. (a) Εάν το μικρό αυτοκίνητο κινούνταν με ταχύτητα 20 m/s πριν από την σύγκρουση, ποια είναι η ταχύτητα τής συσσωματωμένης μάζας μετά τη σύγκρουση;

Λύση Αφού το μεγάλο αυτοκίνητο ήταν σταματημένο πριν από τη σύγκρουση, η ολική ορμή ισούται με την ορμή τού μικρού αυτοκινήτου. Έτσι, η ορμή πριν από την κρούση είναι

$$p_i = m_1 v_i = (900\ \text{kg})(20\ \text{m/s}) = 1.80 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Μετά από τη σύγκρουση, η κινούμενη ενιαία μάζα ισούται με το άθροισμα τών μαζών τού μεγάλου και τού μικρού αυτοκινήτου. Η ολική ορμή λοιπόν είναι

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2700\ \text{kg})(v_f)$$

Εξισώνουμε την ορμή πριν από την σύγκρουση με την ορμή μετά από αυτήν, λύνουμε ως προς v_f, που είναι η ταχύτητα τού συσσωματώματος, και βρίσκουμε

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{2700\ \text{kg}} = \boxed{6.67\ \text{m/s}}$$

(b) Πόση κινητική ενέργεια χάθηκε κατά τη σύγκρουση;

Λύση Αφού το μεγάλο αυτοκίνητο ήταν ακίνητο πριν από τη σύγκρουση, η αρχική κινητική ενέργεια είναι

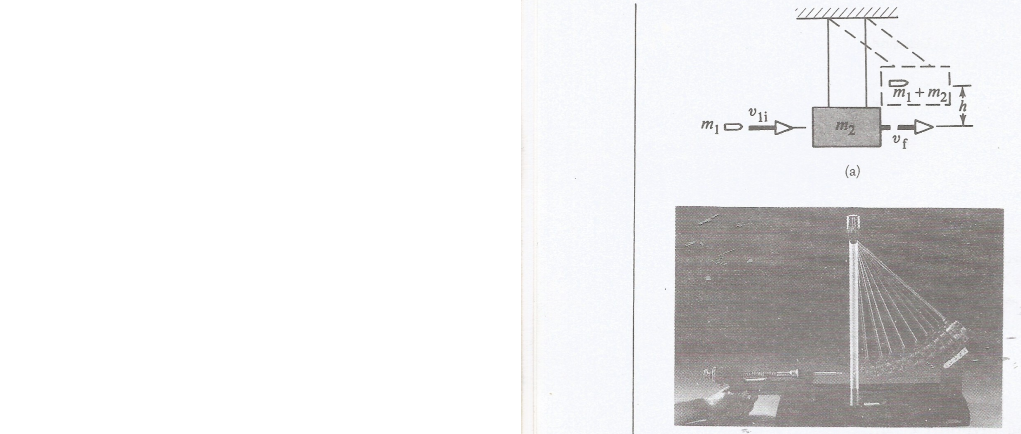
$$K_i = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(900\ \text{kg})(20\ \text{m/s})^2 + 0 = 1.80 \times 10^5\ \text{J}$$

Αλλά τα δύο αυτοκίνητα κινούνται κολλημένα μεταξύ τους ύστερα από τη σύγκρουση και έτσι η τελική κινητική ενέργεια (μετά τη σύγκρουση) είναι

$$K_f = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \tfrac{1}{2}(900\ \text{kg} + 1800\ \text{kg})(6.67\ \text{m/s})^2$$
$$= 0.60 \times 10^5\ \text{J}$$

Η απώλεια κινητικής ενέργειας είναι λοιπόν

$$K_i - K_f = \boxed{1.20 \times 10^5\ \text{J}}$$



Σχήμα 9.10 (Παράδειγμα 9.6) (a) Βαλλιστικό εκκρεμές (σχηματικά). Σημειώστε ότι v_f είναι η ταχύτητα τού συστήματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση. (b) Φωτογραφία, με πολυφλάς, πειράματος βαλλιστικού εκκρεμούς. (Φωτογραφία CENCO).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6. Το βαλλιστικό εκκρεμές

Για να μετρήσουμε την ταχύτητα ενός αντικειμένου που κινείται πολύ γρήγορα, όπως π.χ. μιας σφαίρας, χρησιμοποιούμε το βαλλιστικό εκκρεμές (Σχήμα 9.10). Κρεμούμε ένα μεγάλο καδρόνι από το ένα άκρο του με ελαφρά νήματα και το πυροβολούμε οριζόντια. Η σφαίρα σφηνώνεται μέσα στο καδρόνι, το οποίο κινείται κατά ύψος h. Επειδή η κρούση είναι τελείως μη ελαστική, η Εξίσωση 9.14 δίνει την ταχύτητα v_f τού συστήματος καδρόνι-σφαίρα *αμέσως μετά* την κρούση, σύμφωνα με την προσέγγιση τής ώθησης. Η κινητική ενέργεια *αμέσως μετά* την κρούση είναι

$$(1) \qquad K = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$$

Αλλά $v_{2i} = 0$. Έτσι η Εξίσωση 9.14 δίνει

$$(2) \qquad v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

Θέτουμε την (2) στην (1) και παίρνουμε

$$K = \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

όπου v_{1i} είναι η αρχική ταχύτητα τής σφαίρας. Να σημειωθεί ότι η κινητική ενέργεια τού συστήματος μετά την κρούση είναι *μικρότερη* από την αρχική κινητική ενέργεια τής σφαίρας· αυτό, βεβαίως, αναμενόταν, διότι η σφαίρα, για να σφηνωθεί μέσα στο ξύλο τού καδρονιού, δαπάνησε μεγάλο μέρος τής κινητικής ενέργειάς της θραύοντας τις ίνες τού ξύλου και θερμαίνοντάς το. Ας δούμε όμως τί συμβαίνει αμέσως *μετά* την κρούση: η κινητική ενέργεια τού συστήματος (σφαίρα-καδρόνι) μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια τού συστήματος καθώς αυτό ανυψώνεται κατά ύψος h. Δηλαδή, **μετά** την κρούση δεν έχουμε μη διατηρητικές δυνάμεις (όπως θλάση τού ξύλου και τριβή με αυτό) και μπορούμε να εφαρμόσουμε την περίπτωση διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Έτσι

$$\frac{m_1^2 v_{1i}^2}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)gh$$

$$v_{1i} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

Επομένως, εάν μετρήσουμε το ύψος h κατά το οποίο ανυψώνεται το σύστημα και γνωρίζουμε τη μάζα τής σφαίρας και τη μάζα τού ξύλου, βρίσκουμε την αρχική ταχύτητα τής σφαίρας.

Γιατί θα ήταν λάθος να εξισώσετε την αρχική κινητική ενέργεια τής σφαίρας με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια τού συστήματος σφαίρα-καδρόνι;

Άσκηση 2 Σε ένα πείραμα βαλλιστικού εκκρεμούς τα δεδομένα είναι: $h = 5$ cm, $m_1 = 5$ g και $m_2 = 1$ kg. Βρείτε: (a) την αρχική ταχύτητα τής σφαίρας· και (b) την απώλεια ενέργειας κατά την κρούση.
Απάντηση 199 m/s, 98.5 J.

Ελαστικές κρούσεις

Θεωρήστε τώρα ότι δύο σώματα συγκρούονται ελαστικά κατά μέτωπο (Σχήμα 9.11). Στην περίπτωση αυτή, εκτός από την ορμή, διατηρείται και η κινητική ενέργεια· επομένως

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (9.15)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad (9.16)$$

όπου η ταχύτητα είναι θετική εάν το σώμα κινείται προς τα δεξιά και αρνητική εάν κινείται προς τα αριστερά (όπως βλέπουμε στο σχήμα).

Σε ένα τυπικό πρόβλημα με ελαστική κρούση θα υπάρχουν δύο άγνωστοι, τους οποίους βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα τών Εξισώσεων 9.15 και 9.16. Μπορούμε όμως να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία: Ξαναγράφουμε την Εξίσωση 9.16 ως

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

Εάν παραγοντοποιήσουμε, έχουμε

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \tag{9.17}$$

Εάν τώρα πάρουμε την Εξίσωση 9.15, μπορούμε να τήν ξαναγράψουμε ως

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \tag{9.18}$$

Εάν διαιρέσουμε την Εξίσωση 9.17 με την Εξίσωση 9.18, βρίσκουμε

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

ή

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \tag{9.19}$$

Η εξίσωση αυτή, σε συνδυασμό με την εξίσωση διατήρησης τής ορμής, είναι πολύ χρήσιμη για τη λύση προβλημάτων στα οποία υπεισέρχονται ελαστικές κρούσεις. Σύμφωνα με την Εξίσωση 9.19, η σχετική ταχύτητα τών δύο σωμάτων πριν από την κρούση, $v_{1i} - v_{2i}$, ισούται με το αρνητικό τής σχετικής ταχύτητάς τους μετά από την κρούση, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Υποθέστε ότι οι μάζες και οι αρχικές ταχύτητες τών δύο σωμάτων είναι γνωστές. Μπορούμε να λύσουμε τις Εξισώσεις 9.15 και 9.16 για να βρούμε τις τελικές ταχύτητες συναρτήσει τών αρχικών, αφού έχουμε δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους.

Λύνουμε ως προς v_{1f} και v_{2f} και βρίσκουμε

Ελαστική κρούση: σχέση ανάμεσα στην αρχική και την τελική ταχύτητα

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \tag{9.20}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \tag{9.21}$$

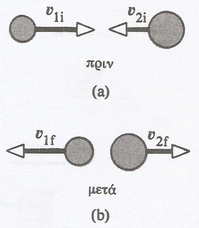
Μην παραλείπετε να βάζετε τα σχετικά πρόσημα στις Εξισώσεις 9.20 και 9.21, δεδομένου ότι η ταχύτητα είναι διάνυσμα. Λογουχάρη, εάν η m_2 κινείται αρχικά προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.11, τότε η v_{2i} είναι αρνητική.

Ας μελετήσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις: Εάν $m_1 = m_2$, τότε βλέπουμε ότι $v_{1f} = v_{2i}$ και $v_{2f} = v_{1i}$. Δηλαδή, εάν τα σώματα έχουν ίσες μάζες, τότε ανταλλάσσουν ταχύτητες. Αυτό τό παρατηρούμε όταν παίζουμε μπιλιάρδο.

Εάν η m_2 είναι αρχικά ακίνητη, τότε $v_{2i} = 0$ και οι εξισώσεις 9.20 και 9.21 γίνονται

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \tag{9.22}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \tag{9.23}$$



Σχήμα 9.11 Σχηματική απεικόνιση ελαστικής μετωπικής κρούσης δύο σωμάτων (a) πριν από την κρούση (b) μετά την κρούση.

Εάν η m_1 είναι πολύ μεγαλύτερη από την m_2, τότε βλέπουμε από τις Εξισώσεις 9.22 και 9.23 ότι $v_{1f} \approx v_{1i}$ και $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Δηλαδή, όταν ένα πολύ βαρύ σώμα συγκρούεται μετωπικά με ένα ελαφρό σώμα που είναι ακίνητο, τότε το βαρύ σώμα συνεχίζει την κίνηση του και μετά την κρούση χωρίς καμιά μεταβολή, ενώ το ελαφρό σώμα κινείται με ταχύτητα δύο φορές μεγαλύτερη από την ταχύτητα τού βαρέος σώματος. Τέτοια περίπτωση είναι η σύγκρουση ενός βαρέος ατόμου, όπως είναι το άτομο του ουρανίου, με ένα ελαφρό άτομο, όπως είναι το άτομο τού υδρογόνου.

Εάν η m_2 είναι πολύ μεγαλύτερη από την m_1 και εάν η m_2 αρχικά ηρεμεί, τότε βρίσκουμε από τις Εξισώσεις 9.22 και 9.23 ότι $v_{1f} \approx -v_{1i}$ και $v_{2f} \approx 0$. Δηλαδή, όταν ένα πολύ ελαφρό σώμα συγκρούεται κατά μέτωπο με ένα πολύ βαρύ σώμα, που αρχικά ήταν ακίνητο, τότε η ταχύτητα τού ελαφρού σώματος αλλάζει κατεύθυνση κατά 180°, ενώ το βαρύ σώμα παραμένει σχεδόν ακίνητο. Για να πεισθείτε, ρίξτε μια μπίλια πάνω σε μια ακίνητη μπάλλα τού μπόουλινγκ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.7 Κρούση δύο σωμάτων με ελατήριο

Ένα σώμα μάζας $m_1 = 1.60$ kg κινείται επάνω σε λεία οριζόντια σιδηροτροχιά προς τα δεξιά, με μέτρο ταχύτητας 4.00 m/s, και συγκρούεται με ένα ελατήριο που είναι στερεωμένο πάνω σε ένα άλλο σώμα μάζας $m_2 =$ 2.10 kg, το οποίο κινείται προς τα αριστερά με μέτρο ταχύτητας 2.50 m/s, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.12 a. Η σταθερά τού ελατηρίου είναι 600 N/m. Σε λίγο, το m_1 κινείται προς τα δεξιά με μέτρο ταχύτητας 3.00 m/s. Προσδιορίστε: (a) την ταχύτητα τού m_2 τη στιγμή αυτή και (b) την απόσταση x κατά την οποία συμπιέστηκε το ελατήριο την ίδια στιγμή.

Λύση (a) Η αρχική ταχύτητα τού m_2 είναι − 2.50 m/s, επειδή κατευθύνεται προς τα αριστερά. Η ολική ορμή τού συστήματος διατηρείται και έτσι

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

$$(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s})$$
$$= (1.60\text{ kg})(3.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$

$$v_{2f} = -1.74\text{ m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο τής v_{2f} σημαίνει ότι τη στιγμή αυτή το m_2 εξακολουθεί να κινείται προς τα αριστερά.

Σχήμα 9.12 (Παράδειγμα 9.7).

(b) Για να υπολογίσουμε την απόσταση x κατά την οποία συμπιέστηκε το ελατήριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.12b, θα χρησιμοποιήσουμε την περίπτωση διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν τριβές στο σύστημα. Αντικαθιστούμε με τις δεδομένες τιμές και το αποτέλεσμα τού μέρους (a) και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$x = 0.173\text{ m}$$

Άσκηση 3 Βρείτε την ταχύτητα τού m_1 και τη συμπίεση τού ελατηρίου τη στιγμή που σταματάει το m_2.
Απάντηση 0.719 m/s, 0.251 m.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.8 Επιβράδυνση νετρονίων με κρούσεις

Σε έναν πυρηνικό αντιδραστήρα παράγονται νετρόνια με τη σχάση τού ισοτόπου $^{235}_{92}U$. Τα νετρόνια αυτά κινούνται με υψηλές ταχύτητες (γύρω στα 10^7 m/s) και πρέπει να επιβραδυνθούν σε ταχύτητες γύρω στα 10^3 m/s. Αυτό επιβάλλεται, γιατί τα βραδέα νετρόνια έχουν μεγάλη πιθανότητα να προκαλέσουν νέα σχάση τού ουρανίου και να υπάρξει έτσι αλυσιδωτή αντίδραση. Για να επιβραδυνθούν τα ταχέα νετρόνια, τά υποχρεώνουμε να περάσουν μέσα από ένα στερεό ή υγρό υλικό που τό ονομάζουμε *επιβραδυντή*. Τα νετρόνια επιβραδύνονται μέσω ελαστικών κρούσεων. Θα αποδείξουμε ότι τα νετρόνια μπορούν να επιβραδυνθούν όταν συγκρούονται με ελαφρούς πυρήνες, όπως π.χ. δευτερίου ή άνθρακα, διότι τότε χάνουν το μεγαλύτερο μέρος τής κινητικής τους ενέργειας. Γι' αυτό τον λόγο χρησιμοποιούμε για επιβραδυντή βαρύ ύδωρ (D_2O) ή γραφίτη (ο γραφίτης περιέχει πάρα πολύ άνθρακα).

Λύση Ας υποθέσουμε ο πυρήνας τού επιβραδυντή έχει μάζα m_2 και στην αρχή είναι ακίνητος και ότι ένα νετρόνιο μάζας m_1 και αρχικής ταχύτητας v_{1i} συγκρούεται μετωπικά μαζί του. Στην περίπτωσή μας λοιπόν θα εφαρμόσουμε τις Εξισώσεις 9.22 και 9.23. Η αρχική κινητική ενέργεια τού νετρονίου είναι

$$K_i = \tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2$$

Μετά την κρούση το νετρόνιο έχει κινητική ενέργεια $\tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2$. Το v_{1f} τό βρίσκουμε από την Εξίσωση 9.22.

Μπορούμε να γράψουμε την κινητική ενέργεια λοιπόν

$$K_1 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2$$

Επομένως, το *κλάσμα* τής ολικής κινητικής ενέργειας που έχει το νετρόνιο *μετά* από την κρούση είναι

$$(1) \qquad f_1 = \frac{K_1}{K_i} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Είναι προφανές από το τελευταίο αποτέλεσμα ότι η τελική κινητική ενέργεια τού νετρονίου είναι μικρή όταν η μάζα m_2 είναι σχεδόν ίση με τη μάζα m_1 και μηδενική όταν $m_1 = m_2$.

Μπορούμε να βρούμε την κινητική ενέργεια τού πυρήνα τού επιβραδυντή μετά την κρούση εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 9.23:

$$K_2 = \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1i}^2$$

Επομένως το κλάσμα τής ολικής κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται στον πυρήνα τού επιβραδυντή είναι

$$(2) \qquad f_2 = \frac{K_2}{K_i} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Η ολική ενέργεια όμως διατηρείται και έτσι θα μπορούσαμε να εξαγάγουμε την (2) από την (1), δεδομένου ότι $f_1 + f_2 = 1$, δηλαδή $f_2 = 1 - f_1$.

Υποθέστε ότι ο επιβραδυντής είναι βαρύ ύδωρ. Οι κρούσεις τών νετρονίων με τους πυρήνες δευτερίου τού D_2O ($m_2 = 2m_1$) σύμφωνα με τις (1) και (2) δίνουν $f_1 = 1/9$ και $f_2 = 8/9$. Δηλαδή, το 89% τής κινητικής ενέργειας τού νετρονίου μεταφέρεται στον πυρήνα τού επιβραδυντή. Στην πράξη, η αποδοτικότητα τού επιβραδυντή είναι χαμηλότερη, διότι κρούσεις κατά μέτωπο είναι σπάνιες. Σε τί θα μετέβαλλε το αποτέλεσμα εάν χρησιμοποιούσαμε γραφίτη ως επιβραδυντή;

9.5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο προηγούμενο Υποκεφάλαιο, καθώς και στο Υποκεφάλαιο 9.2, αποδείξαμε ότι η ολική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων διατηρείται εάν το σύστημα είναι απομονωμένο. Για τη γενική περίπτωση κρούσης στον χώρο, αυτό σημαίνει ότι η ολική ορμή διατηρείται σε *κάθε μία* από τις διευθύνσεις x, y, και z (Εξίσωση 9.12). Δηλαδή, σε ένα πρόβλημα στο οποίο υπεισέρχονται τρεις διαστάσεις θα έχουμε τρεις εξισώσεις.

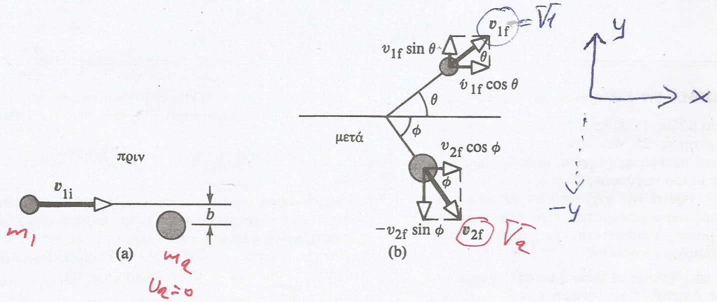
Ας μελετήσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο υπεισέρχονται δύο διαστάσεις και κατά το οποίο ένα σώμα μάζας m_1 συγκρούεται με ένα άλλο μάζας m_2 που ηρεμεί αρχικά (Σχήμα 9.13). Η κρούση δεν είναι μετωπική, αλλά πλάγια. Μετά την κρούση, το m_1 κινείται με γωνία θ σε σχέση με την αρχική του κατεύθυνση και το m_2 με γωνία ϕ. Εφαρμόζουμε τον νόμο διατήρησης τής ορμής σε μορφή συνιστωσών και έχουμε $P_{xi} = P_{xf}$ και $P_{yi} = P_{yf}$. Παρατηρούμε ότι $P_{yi} = 0$ και βρίσκουμε

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi \qquad (9.24a)$$

συνιστώσα x τής ορμής

$$0 = m_1 v_{1f}\sin\theta - m_2 v_{2f}\sin\phi \qquad (9.24b)$$

συνιστώσα y τής ορμής



Σχήμα 9.13 Σχηματική απεικόνιση ελαστικής κρούσης ανάμεσα σε δύο σώματα που συγκρούονται πλάγια: (a) πριν από την κρούση, (b) μετά από την κρούση.

Εάν υποθέσουμε τώρα ότι η κρούση είναι ελαστική, έχουμε και τρίτη εξίσωση από την περίπτωση τής διατήρησης τής κινητικής ενέργειας

Διατήρηση τής ενέργειας

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad (9.25)$$

Εάν γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα, v_{1i}, και τις μάζες, έχουμε τέσσερεις αγνώστους. Επειδή όμως έχουμε μόνο τρεις εξισώσεις, πρέπει να μάς δοθεί ένας από τους τέσσερεις αγνώστους (v_{1f}, v_{2f}, θ ή ϕ) για να περιγράψουμε την κίνηση μετά την κρούση χρησιμοποιώντας μόνο τους νόμους διατήρησης.

Πάντως, *μην ξεχνάτε* ότι εάν η κρούση είναι μη ελαστική, η κινητική ενέργεια *δεν* διατηρείται και τότε δεν ισχύει η Εξίσωση 9.25. Θα δούμε παραδείγματα όχι μόνον ελαστικών αλλά και μη ελαστικών κρούσεων.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Σάς συνιστούμε να ακολουθείτε την ακόλουθη διαδικασία για να λύνετε προβλήματα κρούσης δύο σωμάτων:

1. Ορίσετε ένα σύστημα συντεταγμένων καθώς και τις ταχύτητες στο σύστημα αυτό. Γενικά, για διευκόλυνσή μας μπορούμε να ορίσουμε τη διεύθυνση τού άξονα τών x έτσι ώστε αυτός να συμπίπτει με μία από τις αρχικές ταχύτητες.
2. Σχεδιάστε όλα τα διανύσματα τών ταχυτήτων και βάλτε στο σχεδιάγραμμα όλες τις πληροφορίες τού προβλήματος.
3. Γράψτε τις σχέσεις για τις συνιστώσες x και y τής ορμής κάθε σώματος, πριν και μετά από την κρούση. Μην παραλείψετε να βάλετε το σωστό πρόσημο σε καθεμιά από τις συνιστώσες τών ταχυτήτων. Λογουχάρη, εάν ένα σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση τών x, η συνιστώσα x τής ταχύτητας πρέπει να είναι αρνητική. Εάν δεν δώσετε τη δέουσα προσοχή στα πρόσημα, θα κάνετε λάθη!
4. Γράψτε την *ολική* ορμή στη διεύθυνση x *πριν και μετά* από την κρούση και εξισώσετέ τις. Επαναλάβατε το ίδιο για την διεύθυνση y. Αυτό πρέπει να γίνει διότι η ολική ορμή οποιουδήποτε *απομονωμένου συστήματος* διατηρείται και επομένως η συνιστώσα τής ολικής ορμής σε οποιαδήποτε διεύθυνση είναι σταθερή. Πρέπει να έχετε αποσαφηνίσει στη σκέψη σας ότι εκείνο που διατηρείται είναι η ορμή τού *συστήματος* (τών δύο συγκρουόμενων σωμάτων) και όχι η ορμή καθενός σώματος ξεχωριστά.
5. **Εάν η κρούση είναι μη ελαστική, η κινητική ενέργεια** *δεν* διατηρείται και επομένως έχετε να λύσετε μόνο τις εξισώσεις τής ορμής για να βρείτε τους αγνώστους.
6. Εάν όμως η κρούση είναι ελαστική, τότε διατηρείται και η κινητική ενέργεια. Μπορείτε λοιπόν να εξισώσετε την κινητική ενέργεια πριν από την κρούση με την κινητική ενέργεια μετά από την κρούση. Έτσι έχετε μία επί πλέον εξίσωση, η οποία συνδέει τις διάφορες ταχύτητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.9 Σύγκρουση σε διασταύρωση

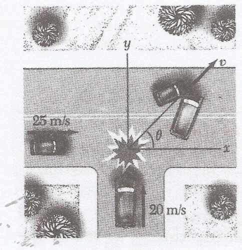
Αυτοκίνητο μάζας 1 500 kg κινείται προς Ανατολάς με μέτρο ταχύτητας 25 m/s και σε μια διασταύρωση συγκρούεται με ένα φορτηγάκι μάζας 2 500 kg, που κινείται με μέτρο ταχύτητας 20 m/s, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.14. Βρείτε την ταχύτητα (σε μέτρο και κατεύθυνση) τού συσσωματώματος τών δύο αυτοκινήτων μετά την κρούση. Υποθέστε ότι έχετε τέλεια μη ελαστική κρούση (πλαστική κρούση).

Λύση Ας επιλέξουμε τη θετική κατεύθυνση τών x να είναι προς Ανατολάς και θετική τών y να είναι προς Βορράν, όπως στο Σχήμα 9.14. Το μόνο σώμα που έχει ορμή στη διεύθυνση τού x πριν από τη σύγκρουση είναι το αυτοκίνητο. Έτσι, η αρχική ορμή τού συστήματος (αυτοκίνητο συν φορτηγάκι) στη διεύθυνση x είναι

$$\sum p_{xi} = (1500 \text{ kg})(25 \text{ m/s}) = 37\,500 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Υποθέστε τώρα ότι το συσσωμάτωμα που είναι αποτέλεσμα τής σύγκρουσης κινείται μετά την κρούση σχηματίζοντας γωνία θ με τον άξονα τών x και έχοντας μέτρο ταχύτητας v, όπως στο Σχήμα 9.14. Έτσι, η ολική ορμή στη διεύθυνση x μετά τη σύγκρουση είναι

$$\sum p_{xf} = (4000 \text{ kg})(v \cos\theta)$$



Σχήμα 9.14 (Παράδειγμα 9.9) Σύγκρουση αυτοκινήτου με ημιφορτηγό.

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο διατήρησης τής ορμής στη διεύθυνση x. Και βρίσκουμε

$$(1) \qquad 37\,500 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4000 \text{ kg})(v \cos\theta)$$

Παρομοίως, η ολική αρχική ορμή τού συστήματος στη διεύθυνση y είναι αυτή την οποία είχε το φορτηγάκι και που είναι (2 500 kg)(20 m/s). Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης τής ορμής στη διεύθυνση τών y και έχουμε

$$\sum p_{yi} = \sum p_{yf}$$

$$(2500 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) = (4000 \text{ kg})(v \sin\theta)$$

$$(2) \qquad 50\,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4000 \text{ kg})(v \sin\theta)$$

Διαιρούμε την (2) δια τής (1) και βρίσκουμε

$$\tan\theta = \frac{50\,000}{37\,500} = 1.33$$

$$\theta = \boxed{53.1°}$$

Αντικαθιστούμε αυτή την τιμή τού θ στην (2) ή στην (1) και βρίσκουμε ότι το μέτρο τής v είναι

$$v = \frac{50\,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4000 \text{ kg})(\sin 53°)} = \boxed{15.6 \text{ m/s}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.10 Σύγκρουση πρωτονίου με πρωτόνιο

Ένα πρωτόνιο συγκρούεται ελαστικά με ένα άλλο πρωτόνιο που αρχικά ήταν ακίνητο. Το πρώτο πρωτόνιο έχει μέτρο αρχικής ορμής 3.5 × 10^5 m/s και συγκρούεται πλάγια με το άλλο πρωτόνιο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.13. (Τα πρωτόνια ασκούν απωστικές ηλεκτροστατικές δυνάμεις μεταξύ τους). Μετά την κρούση, ένα από τα πρωτόνια κινείται σχηματίζοντας γωνία 37° με την αρχική διεύθυνση τής κίνησης και το άλλο σχηματίζει γωνία ϕ με την ίδια διεύθυνση. Βρείτε τη γωνία ϕ και τα μέτρα τών τελικών ταχυτήτων τών δύο πρωτονίων.

Λύση Ξέρουμε ότι $m_1 = m_2$, $\theta = 37°$ και ότι $v_{1i} = 3.5 \times 10^5$ m/s. Αντικαθιστούμε στις Εξισώσεις 9.24 και 9.25

$$v_{1f} \cos 37° + v_{2f} \cos\phi = 3.5 \times 10^5$$

$$v_{1f} \sin 37° - v_{2f} \sin\phi = 0$$

$$v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.5 \times 10^5)^2$$

Λύνουμε αυτές τις τρεις εξισώσεις και βρίσκουμε τους τρεις αγνώστους.

$$v_{1f} = \boxed{2.80 \times 10^5 \text{ m/s}} \qquad v_{2f} = \boxed{2.11 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

$$\phi = \boxed{53.0°}$$

Παρατηρούμε ότι $\theta + \phi = 90°$. Αυτό δεν είναι τυχαίο. *Όταν δύο ίσες μάζες συγκρούονται πλάγια και η μία ήταν αρχικά ακίνητη, τότε οι τελικές τους ταχύτητες είναι κάθετες μεταξύ τους.* Στο επόμενο παράδειγμα περιγράφεται λεπτομερώς το σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.11 Παίζουμε μπιλιάρδο

Σε ένα παιχνίδι μπιλιάρδου, ένας από τους παίκτες θέλει να βάλει μια μπίλια στη γωνιακή τρύπα χτυπώντας την με τη δική του μπίλια (Σχήμα 9.15). Εάν η γωνία την οποία πρέπει να σχηματίσει η μπίλια που θα δεχθεί το χτύπημα τής άλλης είναι 35°, ποια είναι η γωνία υπό την οποία φεύγει η μπίλια τού παίκτη; Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν τριβές, ότι η κρούση είναι ελαστική και ότι η μπίλιες δεν στριφογυρίζουν.

Λύση Αφού ο στόχος αρχικά ηρεμεί, $v_{2i} = 0$. Η αρχή διατήρησης τής κινητικής ενέργειας μάς δίνει

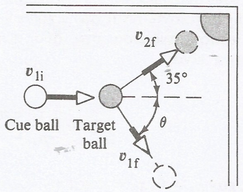
$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Αλλά $m_1 = m_2$. Έτσι

$$(1) \qquad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης τής ορμής σε αυτή την δισδιάστατη κρούση και έχουμε

$$(2) \qquad \mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$



Σχήμα 9.15 (Παράδειγμα 9.11).

Τετραγωνίζουμε τα δύο μέρη τής (2) και έχουμε

$$v_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f})$$

$$= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

Αλλά $\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35°)$ και έτσι

$$(3) \qquad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2 v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35°)$$

Αφαιρούμε την (1) από την (3) και έχουμε

$$2 v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35°) = 0$$

$$\cos(\theta + 35°) = 0$$

$$\theta + 35° = 90° \quad \text{ή} \quad \theta = 55.0°$$

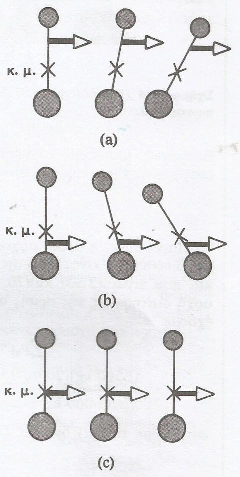
Βλέπουμε λοιπόν και πάλι ότι κάθε φορά που δύο ίσες μάζες συγκρούονται μεταξύ τους πλάγια και ελαστικά και εφόσον η μία ηρεμούσε αρχικά, τότε σκεδάζονται σχηματίζοντας γωνία 90° μεταξύ τους.

COURSE 8 (έως το τέλος του κεφαλαίου)

9.6 ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Στο Υποκεφάλαιο τούτο θα περιγράψουμε την ολική κίνηση ενός συστήματος σε σχέση με ένα πολύ ειδικό σημείο που λέγεται *κέντρο μάζας* τού συστήματος. Το υπό μελέτην σύστημα μπορεί να είναι ένα σύστημα σωμάτων ή ένα μεγάλο αντικείμενο. Θα δούμε ότι το σύστημα κινείται σαν να ήταν όλη η μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας. Τέλος, εάν η συνισταμένη όλων τών εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω στο σύστημα είναι $\mathbf{F}$ και η μάζα τού συστήματος M, τότε το κέντρο μάζας επιταχύνεται με επιτάχυνση $\mathbf{a} = \mathbf{F}/M$. Δηλαδή, το σύστημα κινείται σαν να δρούσε η συνισταμένη δύναμη $\mathbf{F}$ πάνω σε ένα μόνον σώμα μάζας M, που βρίσκεται στο κέντρο μάζας. Πρέπει να προστεθεί ότι στη μελέτη μας μέχρι τώρα δεχθήκαμε σιωπηρώς τα παραπάνω για να δώσουμε παραδείγματα μακροσκοπικών σωμάτων.

Θεωρήστε ότι ένα μηχανικό σύστημα αποτελείται από ένα ζεύγος σωμάτων τα οποία είναι συνενωμένα με μια ελαφρά συμπαγή ράβδο (Σχήμα 9.16). Το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στη γραμμή που ενώνει τα δύο σώματα και πλησιέστερα προς το σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα. Εάν μία μόνο δύναμη εφαρμοστεί πάνω στη ράβδο, σε ένα σημείο κοντά στη μικρότερη μάζα, το σύστημα θα στραφεί κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού (Σχήμα 9.16a). Εάν η δύναμη εφαρμοστεί σε ένα σημείο τής ράβδου πλησιέστερο προς τη μεγάλη μάζα, το σύστημα θα στραφεί με φορά αντίθετη από τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού (Σχήμα 9.16b). Εάν η δύναμη εφαρμοστεί στο κέντρο μάζας, τότε το σύστημα θα κινηθεί στη διεύθυνση τής $\mathbf{F}$, χωρίς να στρέφεται (Σχήμα 9.16c). Έτσι λοιπόν μπορούμε να βρούμε το κέντρο μάζας.



Σχήμα 9.16 Δύο άνισες μάζες συνδέονται με ελαφρά άκαμπτη ράβδο. (a) Το σύστημα περιστρέφεται κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού όταν η δύναμη εφαρμόζεται πάνω από το κέντρο μάζας τους. (b) Το σύστημα περιστρέφεται κατά φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού όταν η δύναμη εφαρμόζεται κάτω από το κέντρο μάζας. (c) Το σύστημα κινείται κατά την κατεύθυνση τής δύναμης $\mathbf{F}$, χωρίς να περιστρέφεται, όταν η δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας.

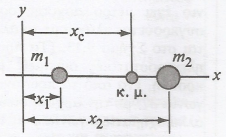
Μπορούμε να πούμε ότι το κέντρο μάζας ενός συστήματος είναι η *μέση θέση* τής μάζας τού συστήματος. Λογουχάρη, το κέντρο μάζας τού ζεύγους σωμάτων που απεικονίζονται στο Σχήμα 9.17 βρίσκεται πάνω στον άξονα x και κείται κάπου ανάμεσα στα δύο σώματα. Ορίζουμε μάλιστα ότι η συντεταγμένη x είναι

$$x_c \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (9.26)$$

Λογουχάρη, εάν $x_1 = 0$, $x_2 = d$ και $m_2 = 2m_1$, βρίσκουμε ότι $x_c = \frac{2}{3}d$. Δηλαδή το κέντρο μάζας κείται πιο κοντά στο σώμα που έχει τη μεγαλύτερη μάζα. Εάν οι δύο μάζες είναι ίσες, το κέντρο μάζας κείται στο μέσο τής απόστασης τών δύο σωμάτων.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια τού κέντρου μάζας σε ένα σύστημα πολλών σωμάτων σε τρεις διαστάσεις. Ορίζουμε ότι η συντεταγμένη x τού κέντρου μάζας n σωμάτων είναι

$$x_c \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad (9.27)$$



Σχήμα 9.17 Το κέντρο μάζας τών δύο σωμάτων βρίσκεται στο σημείο x_c πάνω στον άξονα x. Το x_c βρίσκεται πιο κοντά στη μεγάλη μάζα.

όπου x_i είναι η συντεταγμένη x τού σώματος i και Σm_i είναι η *ολική μάζα* τού συστήματος. Για διευκόλυνσή μας, θα συμβολίσουμε την ολική μάζα με $M =$

Σm_i, όπου αθροίζουμε τα n σώματα. Παρόμοια ορίζουμε τις συντεταγμένες y και z τού κέντρου μάζας.

$$y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{M} \qquad \text{και} \qquad z_c = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} \tag{9.28}$$

Το κέντρο μάζας ορίζεται και από την επιβατική του ακτίνα, $\boldsymbol{r}_c$. Οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες τού $\boldsymbol{r}_c$ είναι οι x_c, y_c και z_c που ορίσαμε με τις Εξισώσεις 9.27 και 9.28. Επομένως,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_c &= x_c\boldsymbol{i} + y_c\boldsymbol{j} + z_c\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\Sigma m_i x_i \boldsymbol{i} + \Sigma m_i y_i \boldsymbol{j} + \Sigma m_i z_i \boldsymbol{k}}{M} \end{aligned} \tag{9.29}$$

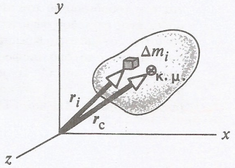
Επιβατική ακτίνα τού κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \tag{9.30}$$

όπου $\boldsymbol{r}_i$ είναι η επιβατική ακτίνα τού σώματος i και ορίζεται ως

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$$

Η θέση τού κέντρου μάζας ενός στερεού (άκαμπτου) αντικειμένου ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αντικείμενό μας αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό σωμάτων (Σχήμα 9.18). Η απόσταση ανάμεσα στα σώματα είναι πολύ μικρή και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε συνεχή κατανομή μάζας. Διαιρούμε λοιπόν το αντικείμενο σε σώματα μάζας Δm_i με συντεταγμένες x_i, y_i και z_i. Από όσα γνωρίζουμε λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι προσεγγιστικά ή συντεταγμένη x τού κέντρου μάζας είναι



Σχήμα 9.18 Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα άκαμπτο σώμα αποτελείται από μια κατανομή μικρών στοιχείων μάζας Δm_i. Το κέντρο μάζας έχει επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}_c$ και συντεταγμένες x_c, y_c, και z_c.

$$x_c \approx \frac{\Sigma x_i \, \Delta m_i}{M}$$

με παρόμοιες εκφράσεις για τα y_c και z_c. Εάν επιτραπεί στον αριθμό τών σωμάτων n να προσεγγίσει το άπειρο, τότε η παραπάνω σχέση ορίζει ακριβώς το x_c. Στο όριο αυτό αντικαθιστούμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα και το Δm_i με το απειροστό dm. Έτσι λοιπόν

$$x_c = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\Sigma x_i \, \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x \, dm \tag{9.31}$$

Παρόμοια για το y_c και z_c

$$y_c = \frac{1}{M}\int y \, dm \qquad \text{and} \qquad z_c = \frac{1}{M}\int z \, dm \tag{9.32}$$

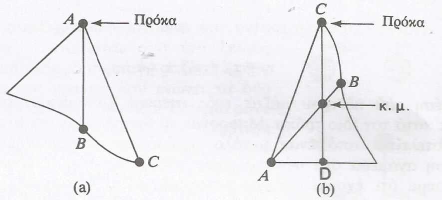
Μπορούμε, συνεπώς, να πούμε ότι η επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}_c$ του κέντρου μάζας ενός στερεού αντικειμένου είναι

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} \, dm \tag{9.33}$$

Αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με τις τρεις βαθμωτές σχέσεις που δίνονται από τις Εξισώσεις 9.31 και 9.32.

Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων κείται πάνω σε έναν άξονα συμμετρίας. Λογουχάρη, το κέντρο μάζας μιας ομογενούς ράβδου βρίσκεται πάνω στη ράβδο και μάλιστα στο μέσον της. Το κέντρο μάζας ενός ομογενούς κύβου ή μιας ομογενούς σφαίρας συμπίπτει, προφανώς, με το γεωμετρικό κέντρο τους. Για να προσδιορίσουμε πειραματικά το κέντρο μάζας ενός επίπεδου σώματος ακαθόριστου σχήματος, τό αναρτούμε από δύο διαφορετικά σημεία (Σχήμα 9.19). Τό αναρτούμε πρώτα από το σημείο A και όταν το σώμα σταθεί ακίνητο χαράζουμε την κατακόρυφη γραμμή AB με τη βοήθεια τού νήματος στάθμης. Κατόπιν αναρτούμε το σώμα από το C και παρόμοια χαράζουμε την κατακόρυφη γραμμή CD. Το κέντρο μάζας συμπίπτει με την τομή αυτών τών δύο γραμμών. Εάν μάλιστα αναρτήσουμε το σώμα από οποιοδήποτε άλλο σημείο, η κατακόρυφη γραμμή που θα χαράξουμε από το σημείο ανάρτησης πρέπει να διέρχεται από το κέντρο μάζας.

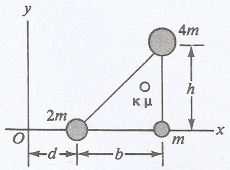
Εφόσον ένα στερεό σώμα είναι μια συνεχής κατανομή μάζας, η δύναμη τής βαρύτητας δρα πάνω σε κάθε μέρος του. Το συνολικό αποτέλεσμα όλων αυτών τών δυνάμεων είναι ισοδύναμο με το αποτέλεσμα τής δράσης μιας δύναμης, Mg, η οποία δρα πάνω σε ένα σημείο που τό ονομάζουμε **κέντρο βάρους.** Εάν η $\boldsymbol{g}$ είναι σταθερή σε όλη την κατανομή μάζας, τότε το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Εάν ένα στερεό αντικείμενο αναρτηθεί από το κέντρο βάρους του, θα ισορροπεί σε οποιαδήποτε διεύθυνση.



Σχήμα 9.19 Πειραματική τεχνική για τον προσδιορισμό τού κέντρου μάζας ενός επίπεδου σώματος ακανόνιστου σχήματος. Κρεμάμε το αντικείμενο από δύο διαφορετικά σημεία του, A και C. Το κέντρο μάζας του είναι η τομή τών κατακόρυφων γραμμών AB και CD.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.12 *Το κέντρο μάζας τριών σωμάτων*

Ένα σύστημα αποτελείται από τρία σώματα τα οποία κείνται στις κορυφές ενός ορθογώνιου τριγώνου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.20. Βρείτε το κέντρο μάζας τού συστήματος.



Σχήμα 9.20 (Παράδειγμα 9.12) Το κέντρο μάζας τών τριών σωμάτων βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.

Λύση Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις που ορίζουν τις συντεταγμένες τού κέντρου μάζας και, εφόσον γνωρίζουμε ότι $z_c = 0$, βρίσκουμε

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{7m}$$

$$= d + \frac{5}{7}b$$

$$y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{M} = \frac{2m(0) + m(0) + 4mh}{7m} = \frac{4}{7}h$$

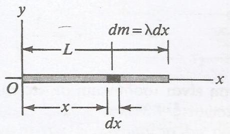
Επομένως, μπορούμε να γράψουμε ότι η επιβατική ακτίνα τού κέντρου μάζας είναι

$$r_c = x_c i + y_c j = \left(d + \frac{5}{7}b\right)i + \frac{4}{7}hj$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.13 *Το κέντρο μάζας μιας ράβδου*

(a) Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας μιας ομογενούς λεπτής κυλινδρικής ράβδου, μάζας M και μήκους L, κείται στο μέσο της (βλ. Σχήμα 9.21).

Λύση Από τη συμμετρία τού προβλήματος, βλέπουμε ότι εάν τοποθετήσουμε τη ράβδο πάνω στον άξονα τών



Σχήμα 9.21 (Παράδειγμα 9.13) Το κέντρο μάζας ομογενούς ράβδου μήκους L βρίσκεται στο μέσο τής $x_c = L/2$.

x, τότε $y_c = z_c = 0$. Εάν τώρα ονομάσουμε τη μάζα ανά μονάδα μήκους λ (δηλαδή γραμμική πυκνότητα), τότε $\lambda = M/L$ για την ομογενή ράβδο μας. Ας χωρίσουμε τώρα τη ράβδο σε στοιχεία απειροστού μήκους dx. Τότε η μάζα κάθε στοιχείου είναι $dm = \lambda\, dx$. Ας πάρουμε τώρα ένα τυχαίο στοιχείο που έχει απόσταση x από την αρχή τών συντεταγμένων και ας εφαρμόσουμε την Εξίσωση 9.31:

$$x_c = \frac{1}{M}\int_0^L x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\bigg]_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Αλλά $\lambda = M/L$. Επομένως

$$x_c = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \boxed{\frac{L}{2}}$$

Θα μπορούσαμε επίσης να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με επιχειρηματολογία συμμετρίας.

(b) Υποθέστε ότι η ράβδος δεν είναι ομογενής και ότι η μάζα ανά μονάδα μήκους μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει τού x σύμφωνα με τη σχέση $\lambda = \alpha x$, όπου το α είναι σταθερό. Βρείτε τη συντεταγμένη x τού κέντρου μάζας ως κλάσμα τού L.

Λύση Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε το dm με το $\lambda\, dx$, όπου το λ όμως *δεν* είναι σταθερό. Επομένως

$$x_c = \frac{1}{M}\int_0^L x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\, dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

Μπορούμε επίσης να απαλείψουμε το α, εφόσον παρατηρούμε ότι η ολική μάζα τής ράβδου σχετίζεται με το α ως εξής

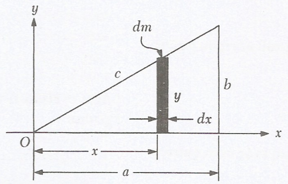
$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx = \int_0^L \alpha x\, dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

Αντικαθιστούμε με αυτό στην έκφραση τού x_c και βρίσκουμε

$$x_c = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \boxed{\frac{2}{3}L}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.14 □

Ένα αντικείμενο μάζας M έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου τριγώνου με τις διαστάσεις που σημειώνονται στο Σχήμα 9.22. Βρείτε τις συντεταγμένες τού κέντρου μάζας, εάν υποτεθεί ότι το αντικείμενο έχει σταθερή μάζα ανά μονάδα επιφάνειας.



Σχήμα 9.22 (Παράδειγμα 9.14).

Λύση Για να βρούμε τη συντεταγμένη x τού κέντρου μάζας χωρίζουμε το τρίγωνο σε λωρίδες πλάτους dx και ύψους y, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.22. Η μάζα κάθε λωρίδας dm ισούται με

$\frac{M}{\frac{1}{2}ab} = \frac{dm}{y\,dx}$

$$dm = \frac{\text{ολική μάζα}}{\text{ολική επιφάνεια}} \times \text{επιφάνεια λωρίδας}$$

$\frac{M}{dm} = \frac{\frac{1}{2}ab}{y \cdot dx}$

ή

$$dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}(y\, dx) = \left(\frac{2M}{ab}\right) y\, dx$$

Επομένως, η συντεταγμένη x τού κέντρου μάζας είναι

$$x_c = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\left(\frac{2M}{ab}\right) y\, dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\, dx$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα πρέπει να εκφράσουμε την μεταβλητή y συναρτήσει τής μεταβλητής x. Από τα όμοια τρίγωνα τού Σχήματος 9.22 βλέπουμε ότι

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{ή} \quad y = \frac{b}{a}x$$

Θέτουμε την τιμή αυτή τού y και βρίσκουμε ότι

$$x_c = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right) dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\, dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \boxed{\frac{2}{3}a}$$

Με έναν παρόμοιο υπολογισμό μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συντεταγμένη y τού κέντρου μάζας είναι $y_c = \frac{1}{3}b$. Επομένως τα αποτελέσματα είναι

$$x_c = \boxed{\frac{2}{3}a} \quad \text{και} \quad y_c = \boxed{\frac{1}{3}b}$$

Άσκηση 4 Να αποδείξετε μόνοι σας ότι η συντεταγμένη y τού κέντρου μάζας είναι πράγματι $y_c = b/3$.

9.7 ΚΙΝΗΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

Για να αρχίσουμε να κατανοούμε τη χρησιμότητα και τη φυσική σημασία τής έννοιας τού κέντρου μάζας παίρνουμε την ως προς τον χρόνο παράγωγο τής επιβατικής ακτίνας τού κέντρου μάζας r_c, που μάς δίνει η Εξίσωση 9.30· υποθέτουμε ότι η ολική μάζα M είναι σταθερή, δηλαδή άλλα σώματα ούτε εισέρχονται στο σύστημα ούτε εξέρχονται από αυτό, και βρίσκουμε την έκφραση που δίνει **την ταχύτητα τού κέντρου μάζας**:

Ταχύτητα τού κέντρου μάζας

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\Sigma m_i v_i}{M} \tag{9.34}$$

όπου $\boldsymbol{v}_i$ είναι η ταχύτητα τού σώματος i. Ξαναγράφουμε την Εξίσωση 9.34 και έχουμε

Ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων

$$Mv_c = \sum m_i v_i = \sum p_i = P \tag{9.35}$$

Το δεξιό μέρος τής Εξίσωσης 9.35 ισούται με την ολική ορμή τού συστήματος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ολική ορμή τού συστήματος *ισούται με την ολική μάζα πολλαπλασιασμένη επί την ταχύτητα τού κέντρου μάζας.* Με άλλα λόγια, η ολική ορμή τού συστήματος είναι ίδια με την ολική ορμή ενός σώματος μάζας M το οποίο κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_c$.

Εάν τώρα παραγωγίσουμε την Εξίσωση 9.34 ως προς τον χρόνο, βρίσκουμε την **επιτάχυνση τού κέντρου μάζας:**

Επιτάχυνση τού κέντρου μάζας

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i a_i \tag{9.36}$$

Ξαναγράφουμε τη σχέση αυτή, χρησιμοποιούμε τον δεύτερο νόμο τού Newton και βρίσκουμε

$$Ma_c = \sum m_i a_i = \sum F_i \tag{9.37}$$

όπου $\boldsymbol{F}_i$ είναι η δύναμη που δρα πάνω στο σώμα i.

Οι δυνάμεις που δρούν πάνω σε κάθε σώμα τού συστήματος περιλαμβάνουν τις εξωτερικές (αυτές που προέρχονται από εκτός τού συστήματος αίτια) και τις εσωτερικές (αυτές που προέρχονται από εντός τού συστήματος αίτια) δυνάμεις. Πάντως, από τον τρίτο νόμο τού Newton γνωρίζουμε ότι η δύναμη την οποία ασκεί το σώμα 1 πάνω στο σώμα 2 είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη την οποία ασκεί το σώμα 2 πάνω στο σώμα 1 κ.ο.κ. Έτσι, όταν στην Εξίσωση 9.37 αθροίζουμε τις εσωτερικές δυνάμεις, αυτές αλληλοαναιρούνται ανά ζεύγη και η ολική δύναμη τού συστήματος οφείλεται στις εξωτερικές δυνάμεις *μόνο*. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την Εξίσωση 9.37 με τη μορφή

Ο δεύτερος νόμος τού Newton για ένα σύστημα σωμάτων

$$\sum F_{ext} = Ma_c = \frac{dP}{dt} \tag{9.38}$$

Δηλαδή, η ολική εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στο σύστημα ισούται με το γινόμενο τής ολικής μάζας τού συστήματος επί την επιτάχυνση τού κέντρου μάζας. Εάν συγκρίνουμε το αποτέλεσμα αυτό με τον δεύτερο νόμο τού Newton για ένα σώμα, βλέπουμε ότι

> **το κέντρο μάζας κινείται σαν να ήταν ένα υποθετικό σώμα μάζας M, το οποίο υπόκειται στην επίδραση τής συνισταμένης τών εξωτερικών δυνάμεων που δρουν πάνω στο σύστημα.**

Όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα, όπως φαίνεται στη φωτογραφία τού Σχήματος 9.23.

Τέλος, βλέπουμε ότι εάν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική, τότε από την Εξίσωση 9.38 έχουμε

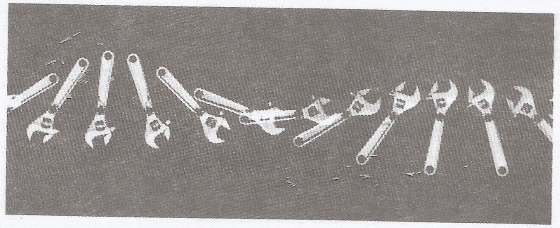
$$\frac{dP}{dt} = Ma_c = 0$$

Έτσι ώστε

$$P = Mv_c = \text{σταθερή} \quad (\text{όταν } \sum F_{ext} = 0) \tag{9.39}$$

Δηλαδή, η ολική γραμμική ορμή ενός συστήματος σωμάτων είναι σταθερή εάν δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις πάνω στο σύστημα. Επομένως, προκύπτει ότι σε ένα ***απομονωμένο*** *σύστημα σωμάτων, η ολική ορμή και ταχύτητα τού κέντρου μάζας είναι σταθερές.* Αυτή είναι η γενίκευση, σε σύστημα πολλών σωμάτων, τού νόμου διατήρησης τής ορμής συστήματος δύο σωμάτων τον οποίο διατυπώσαμε στο Υποκεφάλαιο 9.2.

Υποθέστε ότι ένα απομονωμένο σύστημα που αποτελείται από δύο ή περισσότερα μέλη είναι ακίνητο. Το κέντρο μάζας τού συστήματος θα



Σχήμα 9.23 Φωτογραφία, με πολυφλάς, ενός γαλλικού κλειδιού που κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Το κέντρο μάζας τού κλειδιού κινείται ευθύγραμμα καθώς το κλειδί περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του, που βρίσκεται στο σημειωμένο με μαύρο σταυρό σημείο. (Φωτογραφία Educational Development Center, Newton, Mass).

παραμείνει ακίνητο ωσότου δράσει επάνω του εξωτερική δύναμη. Λογουχάρη, θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από έναν κολυμβητή και ένα κανώ. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο. Εάν ο κολυμβητής βουτήξει από το κανώ στο νερό, το κέντρο μάζας τού συστήματος θα παραμείνει ακίνητο (δεν λαμβάνονται υπ' όψιν οι τριβές ανάμεσα στο κανώ και στο νερό). Επί πλέον, η ορμή τού κολυμβητή θα είναι ίση με την ορμή τού κανώ αλλά αντίθετη σε κατεύθυνση.

Θεωρήστε επίσης ένα ασταθές άτομο το οποίο, ενώ είναι ακίνητο, ξαφνικά διασπάται σε δύο θραύσματα με μάζες M_1 και M_2 και με ταχύτητες $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$, αντίστοιχα. Τέτοιο παράδειγμα έχουμε όταν ένας πυρήνας ουρανίου 238 διασπάται σε ένα σωματίδιο άλφα (πυρήνα ηλίου) και σε έναν πυρήνα θορίου 234. Εφόσον η ολική ορμή τού συστήματος πριν από τη διάσπαση ήταν μηδενική, θα εξακολουθήσει να είναι μηδενική και μετά την διάσπαση. Επομένως, βλέπουμε ότι $M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = 0$. Εάν η ταχύτητα τού ενός από τα προϊόντα τής διάσπασης είναι γνωστή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία ανακρούει το άλλο. Μπορείτε να εξηγήσετε την προέλευση τής κινητικής ενέργειας τών θραυσμάτων;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.15 Εκρηγνυόμενη οβίδα

Μια οβίδα έχει εκτοξευθεί και ξαφνικά εκρήγνυται σε πολλά θραύσματα (Σχήμα 9.24). Τί μπορείται να πείτε για την κίνηση τού κέντρου μάζας της μετά την έκρηξη;

Σχήμα 9.24 (Παράδειγμα 9.15) Όταν μια οβίδα εκρήγνυται, το κέντρο μάζας τών θραυσμάτων της ακολουθεί την ίδια παραβολική τροχιά που θα ακολουθούσε η οβίδα εάν δεν είχε εκραγεί.

Λύση Η μόνη εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στην οβίδα είναι η δύναμη τής βαρύτητας. Επομένως η οβίδα ακολουθεί παραβολική τροχιά. Εάν η οβίδα δεν είχε εκραγεί, θα ακολουθούσε την τροχιά που δείχνει η διακεκομμένη γραμμή τού Σχήματος 9.24. Αλλά επειδή οι δυνάμεις τής έκρηξης είναι όλες εσωτερικές δυνάμεις στο σύστημα το οποίο απαρτίζει η οβίδα, αυτές δεν επηρεάζουν την κίνηση τού κέντρου μάζας. Επομένως και μετά την έκρηξη το κέντρο μάζας τών θραυσμάτων ακολουθεί την *ίδια* παραβολική τροχιά (δηλαδή τη διακεκομμένη γραμμή) την οποία θα είχε ακολουθήσει εάν δεν είχε γίνει η έκρηξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.16 Ο εκρηγνυόμενος πύραυλος

Ένας πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω. Όταν φτάνει σε ύψος 1 000 m και έχει ταχύτητα 300 m/s, εκρήγνυται σε τρία ίσα θραύσματα. Αμέσως μετά την έκρηξη, το ένα από τα θραύσματα εξακολουθεί να κινείται προς τα επάνω με μέτρο ταχύτητας 450 m/s· το δεύτερο θραύσμα έχει μέτρο ταχύτητας 240 m/s και κινείται ανατολικά. (a) Ποια είναι η ταχύτητα τού τρίτου θραύσματος;

Λύση Αν ονομάσουμε M τη μάζα τού πυραύλου, καθένα από τα θραύσματά του έχει μάζα $M/3$. Η ολική ορμή λίγο πριν από την έκρηξη είναι ίση με την ολική ορμή μετά από την έκρηξη, επειδή οι δυνάμεις τής έκρηξης είναι εσωτερικές δυνάμεις τού συστήματος που αποτελεί ο πύραυλος και έτσι δεν επηρεάζουν την ολική ορμή τού συστήματος.

Πριν από την έκρηξη:

$$P_{\mathrm{i}} = Mv_0 = 300M\boldsymbol{j}$$

Μετά την έκρηξη:

$$P_{\mathrm{f}} = 240\left(\frac{M}{3}\right)\boldsymbol{i} + 450\left(\frac{M}{3}\right)\boldsymbol{j} + \frac{M}{3}\boldsymbol{v}$$

όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα τού τρίτου θραύσματος που είναι άγνωστη. Εξισώνουμε τις δύο αυτές σχέσεις και έχουμε

$$M\frac{v}{3} + 80M\boldsymbol{i} + 150M\boldsymbol{j} = 300M\boldsymbol{j}$$

$$v = (-240\boldsymbol{i} + 450\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

(b) Ποια είναι η θέση τού κέντρου μάζας σε σχέση με το έδαφος, 3 s μετά από την έκρηξη; (Υποθέστε ότι δεν λειτουργεί ο κινητήρας τού πυραύλου μετά από την έκρηξη).

Λύση Το κέντρο μάζας τών τριών θραυσμάτων κινείται σαν να ήταν ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα, αφού η έκρηξη δεν επηρεάζει την κίνηση τού κέντρου μάζας (Σχήμα 9.15). Εάν η έκρηξη γίνεται τη στιγμή $t = 0$, τότε το κέντρο μάζας βρίσκεται στο $y_0 = 1\,000$ m και έχει ταχύτητα $v_0 = 300$ m/s. Από την κινητική παίρνουμε την σχέση που δίνει την τεταγμένη y τού κέντρου μάζας

$$y_c = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 1000 + 300t - 4.9t^2$$

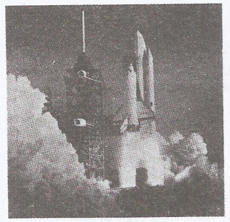
Έτσι την στιγμή $t = 3$ s.

$$y_c = [1000 + 300\,(3) - 4.9(3)^2]\ \mathrm{m} = 1.86\ \mathrm{km}$$

Σημειώστε ότι η τετμημένη x τού κέντρου μάζας δεν μεταβάλλεται. Δηλαδή σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα το δεύτερο θραύσμα κινείται προς τα δεξιά ακριβώς όσο το τρίτο θραύσμα κινείται προς τα αριστερά.

* 9.8 ΠΡΟΩΣΗ ΠΥΡΑΥΛΩΝ

Τα κοινά οχήματα, όπως είναι τα αυτοκίνητα, οι σιδηρόδρομοι, τα σκάφη, κινούνται, δηλαδή προωθούνται, χάρη στην τριβή. Στην περίπτωση τού αυτοκινήτου, κινητήρια δύναμη είναι η δύναμη που ασκεί ο δρόμος στο αυτοκίνητο. Το τραίνο «πιέζει» τις σιδηροτροχιές· έτσι ως κινητήρια δύναμη είναι η δύναμη την οποία ασκούν οι σιδηροτροχιές στο τραίνο. Κατά τον ίδιο τρόπο, ο αέρας «σπρώχνει» ένα αεροπλάνο. Ένας πύραυλος όμως που κινείται στο Διάστημα δεν έχει ούτε αέρα ούτε σιδηροτροχιές ούτε δρόμο ή νερό για να τόν «σπρώξει». Επομένως, το αίτιο τής κίνησης ενός πυραύλου είναι διαφορετικό. Στο Σχήμα 9.25 βλέπουμε τη φωτογραφία τής εκτόξευσης ενός διαστημοπλοίου. *Ένας πύραυλος κινείται λόγω τού νόμου διατήρησης τής ορμής συστήματος σωμάτων, όπου το σύστημα αποτελείται από τον πύραυλο και τα εκτοξευόμενα αέρια που παράγουν τα καύσιμα πρόωσής του.*



Σχήμα 9.25 Απογείωση τού διαστημικού λεωφορείου Columbia. (Φωτογραφία NASA).

Για να καταλάβουμε πώς προωθείται ένας πύραυλος ας θεωρήσουμε ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από ένα βαγονάκι πάνω στο οποίο υπάρχει ένα πολυβόλο. Όταν το πολυβόλο βάλλει, κάθε σφαίρα έχει ορμή $m\boldsymbol{v}$, όπου η ταχύτητά της $\boldsymbol{v}$ μετριέται σε σχέση με τη Γη. Με κάθε βολή, το πολυβόλο και το βαγόνι οπισθοδρομούν (ανακρούουν), διότι η ορμή διατηρείται (όπως στο Παράδειγμα 9.4). Έτσι η δύναμη αντίδρασης τής σφαίρας επιταχύνει το βαγονάκι και το πολυβόλο. Εάν βάλλονται n σφαίρες το δευτερόλεπτο, τότε η μέση δύναμη που δρα στο πολυβόλο είναι $\boldsymbol{F}_{\mathrm{av}} = nm\boldsymbol{v}$.

Με παρόμοιο τρόπο κινείται ο πύραυλος στο Διάστημα (όπου υπάρχουν συνθήκες κενού) *διότι μεταβάλλεται η ορμή του καθώς χάνει μέρος τής μάζας του υπό τη μορφή τών αερίων τα οποία εκτοξεύει* (Σχήμα 9.25). *Δεδομένου ότι τα εκτοξευόμενα αέρια έχουν ορμή, ο πύραυλος κερδίζει ίση ορμή στην αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι, ο πύραυλος κινείται από το «σπρώξιμο», δηλαδή από την ώση τών εκτοξευόμενων αερίων.* Στο ελεύθερο Διάστημα το κέντρο μάζας τού συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα, ανεξάρτητα από τη διαδικασία τής πρόωσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο πύραυλος και το πολυβόλο είναι αντίστροφες περιπτώσεις τής μη ελαστικής κρούσης, διότι, φυσικά, η ορμή διατηρείται αλλά η κινητική ενέργεια αυξάνεται (με αντίστοιχη μείωση τής εσωτερικής ενέργειας).

Υποθέστε ότι κάποια στιγμή t, η ορμή τού πυραύλου μαζί με τα καύσιμα είναι $(M + \Delta m)\mathbf{v}$ (Σχήμα 9.26a). Μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, ο πύραυλος εκτοξεύει καμμένα καύσιμα (δηλαδή αέρια) μάζας Δm και έτσι αυξάνεται η ταχύτητά του στην τιμή $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ (Σχήμα 9.26b). Εάν τα αέρια έχουν ταχύτητα $\mathbf{v}_e$, ως *προς τον πύραυλο*, τότε η ταχύτητα τών αερίων σε σχέση με έναν ακίνητο παρατηρητή είναι $\mathbf{v} - \mathbf{v}_e$. Έτσι, εάν εξισώσουμε την ολική αρχική ορμή τού συστήματος με την ολική τελική ορμή, βρίσκουμε

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

Απλοποιούμε και βρίσκουμε

$$M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

Μπορούσαμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα εάν είχαμε μελετήσει το πρόβλημα στο σύστημα αναφοράς τού κέντρου μάζας, δηλαδή σε ένα σύστημα που κινείται μαζί με το κέντρο μάζας. Στο σύστημα αυτό η ολική ορμή είναι μηδενική· έτσι, όταν εκτοξεύονται αέρια, η ορμή του πυραύλου αυξάνεται κατά $M\Delta v$, ενώ τα εκτοξευόμενα αέρια έχουν ορμή $\Delta m v_e$ στην *αντίθετη* κατεύθυνση, δηλαδή $M\,\Delta\mathbf{v} - \Delta m\mathbf{v}_e = 0$. Αν λάβουμε το όριο καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν, τότε το $\Delta v \to dv$ και το $\Delta m \to dm$. Επί πλέον, η αύξηση τής μάζας τών εκτοξευόμενων αερίων κατά dm αντιστοιχεί σε ίση μείωση τής μάζας τού πυραύλου, δηλαδή $dm = -\,dM$ (θέτουμε αρνητικό πρόσημο στο dM διότι αντιστοιχεί σε μείωση). Έτσι γράφουμε

$$M\,dv = -v_e\,dM \qquad (9.40)$$

ολοκληρώνουμε την εξίσωση αυτή, αφού ονομάσουμε M_i την αρχική μάζα τού πυραύλου συν τα καύσιμα και M_f την τελική μάζα τού πυραύλου μαζί με τα εναπομείναντα καύσιμα, και βρίσκουμε

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Λύση τού προβλήματος τού πυραύλου

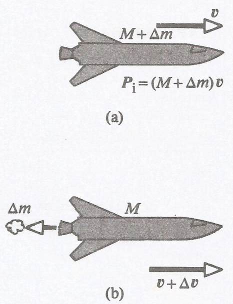
$$\boxed{v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)} \qquad (9.41)$$

Αυτή είναι η βασική σχέση για την πρόωση τού πυραύλου. Σύμφωνα με αυτήν, πρώτα από όλα η αύξηση τής ταχύτητας είναι ανάλογη προς την ταχύτητα εκτόξευσης τών αερίων $\mathbf{v}_e$. Γι αυτό τον λόγο η ταχύτητα εκτόξευσης τών αερίων πρέπει να είναι πολύ υψηλή. Δεύτερο, η αύξηση τής ταχύτητας είναι ανάλογη προς τον λογάριθμο τού λόγου M_i/M_f. Γι αυτό, ο λόγος πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος, πράγμα που σημαίνει ότι ο πύραυλος πρέπει να μεταφέρει όσο το δυνατόν περισσότερα καύσιμα.

Ονομάζουμε *προωστική δύναμη* τη δύναμη την οποία ασκούν πάνω στον πύραυλο τα εκτοξευόμενα αέρια. Εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 9.40, βρίσκουμε μια έκφραση για την προωστική δύναμη:

$$\text{προωστική δύναμη} = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \qquad (9.42)$$

Βλέπουμε λοιπόν εδώ ότι η προωστική δύναμη αυξάνεται καθώς αυξάνεται η ταχύτητα εκτόξευσης και ο ρυθμός μεταβολής τής μάζας (καύση τών καυσίμων).



Σχήμα 9.26 Πρόωση πυραύλων. (a) Η αρχική μάζα τού πυραύλου είναι $M + \Delta m$, τη στιγμή t και το μέτρο τής ταχύτητάς του είναι v. (b) Τη στιγμή $t + \Delta t$ η μάζα τού πυραύλου έχει ελαττωθεί και είναι M, διότι εκτοξεύθηκαν αέρια καυσίμων συνολικής μάζας Δm. Έτσι αυξήθηκε η ταχύτητα τού πυραύλου κατά $\Delta\mathbf{v}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.17. Πύραυλος στο Διάστημα

Ένας πύραυλος κινείται στο ελεύθερο Διάστημα με ταχύτητα 3×10^3 m/s. Κάποια στιγμή τίθενται σε λειτουργία οι κινητήρες του και τα αέρια από τα καιόμενα καύσιμά του εκτοξεύονται με κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν τής κίνησης τού πυραύλου και με ταχύτητα 5×10^3 m/s σε σχέση προς τον πύραυλο. (a) Ποιο είναι το μέτρο ταχύτητας τού πυραύλου όταν η μάζα του μειωθεί στο μισό τής μάζας που είχε προτού τεθούν σε λειτουργία οι κινητήρες;

Λύση Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 9.41 και βρίσκουμε

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$= 3 \times 10^3 + 5 \times 10^3 \ln\left(\frac{M_i}{0.5M_i}\right)$$

$$= \boxed{6.47 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

(b) Ποια είναι η προωστική δύναμη τού πυραύλου εάν αυτός εκτοξεύει αέρια καταναλώνοντας καύσιμα με ρυθμό 50 kg/s;

$$\text{Προωστική δύναμη} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| = \left(5 \times 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(50 \ \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)$$

$$= \boxed{2.50 \times 10^5 \text{ N}}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η **γραμμική ορμή** ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ είναι

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{9.1}$$

Η **ώση (ώθηση)** μιας δύναμης $\boldsymbol{F}$ πάνω σε ένα σώμα είναι ίση με τη μεταβολή τής ορμής τού σώματος και ορίζεται από τη σχέση

Ώθηση

$$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\, dt \tag{9.6}$$

Οι δυνάμεις **ώσης** είναι πολύ πιο μεγάλες σε σχέση με τις άλλες δυνάμεις που δρουν πάνω σε ένα σύστημα και συνήθως **διαρκούν επί ένα** πολύ μικρό χρονικό διάστημα, όπως λ.χ. συμβαίνει με τις κρούσεις.

Ο **νόμος διατήρησης τής ορμής** για δύο αλληλεπιδρώντα σώματα λέει ότι, εάν δύο σώματα αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα, η ολική ορμή διατηρείται, ανεξάρτητα από το είδος τής αλληλεπίδρασής τους. Επομένως, κάθε στιγμή η ορμή τού συστήματος ισούται με την αρχική ορμή

Διατήρηση τής ορμής

$$\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i} = \boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f} \tag{9.12}$$

Όταν δύο σώματα συγκρούονται, τότε η ολική ορμή **κάθε στιγμή** παραμένει σταθερή· επομένως η ολική ορμή μετά την κρούση ισούται με την ολική ορμή πριν από την κρούση, **ανεξάρτητα από το είδος τής κρούσης.** Μια κρούση ονομάζεται **μη ελαστική** όταν δεν διατηρείται η *μηχανική* ενέργεια (προφανώς, η ορμή διατηρείται, όπως πάντοτε). Μια **τελείως μη ελαστική (ή πλαστική)** κρούση αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία τα συγκρουόμενα σώματα «κολλούν» μεταξύ τους και δεν αποχωρίζονται (και προφανώς διατηρείται, όπως πάντοτε, η ορμή). Μια κρούση λέγεται **ελαστική** όταν διατηρείται η κινητική ενέργεια (και προφανώς διατηρείται, όπως πάντοτε, η ορμή).

Ελαστική και μη ελαστική κρούση

Σε κρούση στις περιπτώσεις δύο ή τριών διαστάσεων διατηρούνται οι συνιστώσες τής ορμής για κάθε διεύθυνση ξεχωριστά.

Η επιβατική ακτίνα τού κέντρου μάζας ενός συστήματος από σώματα ορίζεται

Κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων

$$\boldsymbol{r}_c \equiv \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \tag{9.30}$$

όπου $M = \Sigma m_i$, είναι η ολική μάζα τού συστήματος και $\boldsymbol{r}_i$ είναι η επιβατική ακτίνα τής θέσης τού σώματος i.

Η επιβατική ακτίνα τού κέντρου μάζας ενός στερεού σώματος ορίζεται ως εξής:

$$r_c = \frac{1}{M}\int r\,dm \tag{9.33}$$

Κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος

Η ταχύτητα τού κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων είναι

$$v_c = \frac{\Sigma m_i v_i}{M} \tag{9.34}$$

Ταχύτητα τού κέντρου μάζας

Η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων ισούται με την ολική μάζα πολλαπλασιασμένη με την ταχύτητα τού κέντρου μάζας, δηλαδή $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_c$. **Ο δεύτερος νόμος τού Newton για ένα σύστημα σωμάτων** είναι

$$\sum F_{ext} = Ma_c = \frac{dP}{dt} \tag{9.38}$$

Ο δεύτερος νόμος τού Newton για ένα σύστημα σωμάτων

όπου $\boldsymbol{a}_c$ είναι η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας και το άθροισμα περιέχει όλες τις εξωτερικές δυνάμεις. Το κέντρο μάζας, δηλαδή, κινείται σαν να ήταν ένα υποθετικό σώμα μάζας M υπό την επίδραση τής συνισταμένης τών εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω στο σύστημα. Από την Εξίσωση 9.38 προκύπτει ότι εάν δεν δρουν πάνω στο σύστημα εξωτερικές δυνάμεις, τότε η ολική ορμή τού συστήματος παραμένει σταθερή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Εάν η κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι μηδενική, βρείτε τη γραμμική του ορμή. Η ολική ενέργεια ενός σώματος είναι μηδενική· είναι απαραίτητο να έχει μηδενική γραμμική ορμή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
2. Πόσο αυξάνεται η γραμμική ορμή ενός σώματος εάν διπλασιαστεί η ταχύτητά του; Πόσο μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια;
3. Δύο σώματα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες· έχουν απαραίτητα ίσες ορμές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
4. Η μεγαλύτερη δύναμη παράγει πάντοτε μεγαλύτερη ώθηση πάνω σε ένα σώμα από μια μικρότερη; Εξηγήστε την απάντησή σας.
5. Ένα απομονωμένο σύστημα αρχικά ηρεμεί. Είναι δυνατόν αργότερα να κινηθούν μέρη τού συστήματος; Εξηγήστε πώς μπορεί να γίνει αυτό.
6. Ενώ ένα σώμα ηρεμεί, ένα άλλο σώμα πέφτει επάνω του· μπορεί να είναι και τα δύο ακίνητα μετά από την κρούση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
7. Εξηγήστε πώς διατηρείται η ορμή όταν μια μπάλλα αναπηδά στο πάτωμα.
8. Είναι δυνατόν να υπάρξει σύγκρουση στην οποία *όλη* η κινητική ενέργεια χάνεται; Εάν απαντήσετε καταφατικά, δώστε ένα παράδειγμα.
9. Υποθέστε ότι δύο σώματα συγκρούονται ελαστικά· μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια καθενός από τα σώματα αυτά;
10. Καθώς μια μπάλλα κυλίεται προς τα κάτω σε ένα κεκλιμμένο επίπεδο, η ορμή της αυξάνεται. Σημαίνει αυτό ότι δεν διατηρείται η ορμή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
11. Θεωρήστε μία τέλεια μη ελαστική κρούση ανάμεσα σε ένα IX και ένα μεγάλο φορτηγό. Ποιο από τα δύο χάνει περισσότερη κινητική ενέργεια λόγω τής σύγκρουσης;
12. Μπορεί το κέντρο μάζας ενός αντικειμένου να βρίσκεται έξω από αυτό; Δώστε παραδείγματα.
13. Ένα παιδί στέκεται στην πλώρη μιας βάρκας που δεν κινείται ως προς την ακτή. Το παιδί πηγαίνει από την πλώρη στην πρύμνη. Τί συμβαίνει στο κέντρο μάζας τού συστήματος (παιδί + βάρκα); Κινείται η βάρκα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
14. Πετάμε στον αέρα ταυτόχρονα τρεις μπάλλες. Ποια είναι η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας τους όσο βρίσκονται στον αέρα;
15. Πάρτε ένα μονοκόμματο μέτρο και ισορροπήστε το σε οριζόντια θέση χρησιμοποιώντας τους δείκτες τών δύο χεριών σας. Εάν πλησιάσετε τους δείκτες σας μεταξύ τους ώστε να ακουμπήσουν χωρίς να πέσει το μέτρο, θα δείτε ότι οι δείκτες σας συναντώνται πάντοτε στο μέσο τού μέτρου, ανεξάρτητα από την αρχική θέση τών δακτύλων σας. (Δοκιμάστε το!). Εξηγήστε τους λόγους.
16. Ένας φυσιοδίφης έχει βρει μια πολική αρκούδα που κοιμάται πάνω σε έναν παγετώνα. Ο φυσιοδίφης ξέρει το βάρος του. Πώς μπορεί να εκτιμήσει το βάρος τής πολικής αρκούδας χρησιμοποιώντας μόνο ένα μέτρο και ένα σχοινί;
17. Ένας σκοπευτής πυροβολεί με το τυφέκιό του στηρίζοντάς το στον ώμο του. Εάν η προς τα εμπρός ορμή τής σφαίρας είναι ίση με την προς τα πίσω ορμή τού τυφεκίου, γιατί δεν κινδυνεύει να σκοτωθεί ο σκοπευτής από τον υποκόπανο τού όπλου του;
18. Ένα παιδί πετάει μια χούφτα λάσπη πάνω σε έναν τοίχο, όπου η λάσπη κολλάει. Τί γίνεται η ορμή τής λάσπης; Διατηρείται; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
19. Στις αρχές τού αιώνα μας ο Robert Goddard σκόπευε να στείλει έναν πύραυλο στη Σελήνη. Οι αντίπαλοί του είπαν ότι, επειδή ανάμεσα στη Γη και στη Σελήνη