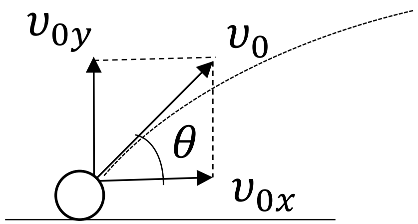
ΔΙΑΛΕΞΗ 4
12/11/2020

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ 2-D



$$\boxed{x = v_{0x}t} \implies x = v_0 cos\theta\, t_{o\lambda} \implies x = v_0 cos\theta\, 2t_{\alpha\nu} \quad (1)$$

Όμως $\boxed{v_y = v_{0y} - gt} \implies v_y = v_0 sin\theta - gt$

Στο μέγιστο σημείο ανόδου: $v_y = 0\,,\ t = t_{\alpha\nu}\,,\ x = R$

$$\implies t_{\alpha\nu} = \frac{v_0 sin\theta}{g} \quad (2)$$

Από (1) και (2) και επειδή x=R (βεληνεκές) έχουμε:

$$R = v_0 cos\theta\, 2\frac{v_0 sin\theta}{g} \implies R = \frac{v_0^2 2 sin\theta\, cos\theta}{g} \implies \boxed{R = \frac{v_0^2 sin2\theta}{g}}$$

$$\boxed{y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2} \implies y - y_0 = v_0 sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \implies y - y_0 = v_0 sin\theta\, t_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}g\,(t_{\alpha\nu})^2 \implies$$

$$y - y_0 = v_0 sin\theta\, \frac{v_0 sin\theta}{g} - \frac{1}{2}g\,\left(\frac{v_0 sin\theta}{g}\right)^2 \implies y - y_0 = \frac{{v_0}^2 sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2}g\frac{{v_0}^2 sin^2\theta}{g^2} \implies$$

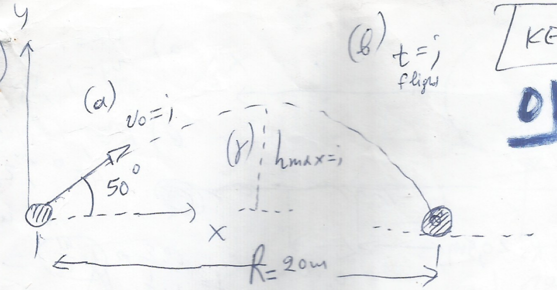
$$y - y_0 = \frac{{v_0}^2 sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2 sin^2\theta}{g} \implies \boxed{h_{max} = \frac{{v_0}^2 sin^2\theta}{g}}$$

4.14

ΚΕΦ 4

OK

(β) $t_{flight}=;$



α) $R=\frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{R\cdot g}{\sin 2\theta_0}}=\sqrt{\frac{20\cdot 9,8}{\sin 100^\circ}}=14,1\ m/s$

β) Στο h_{max}, $v_y=0$

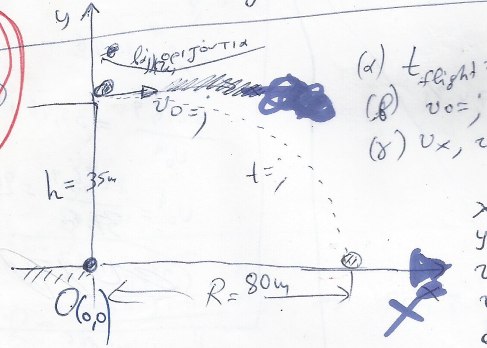
$v_y=v_0\sin\theta_0-gt$ $\Rightarrow t_{αν}=\frac{v_0\sin\theta_0}{g}$

Άρα $t_{ολ}=2t_{αν}=\frac{2v_0\sin\theta_0}{g}=\frac{2\cdot 14,1\sin 50}{9,8}=2,21\ s$

γ) $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}=\frac{14,1^2\sin^2 50^\circ}{2\cdot 9,8}=5,95\ m$

SOS

ΘΕΜΑ 4.15



(α) $t_{flight}=;$

(β) $v_0=;$

(γ) $v_x, v_y=;$ πριν κτυπήσει στο έδαφος

$x_0=0$

$y_0=35\ m$

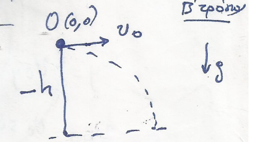
$v_{x_0}=v_0$

$v_{y_0}=0$

$a_x=0$

$a_y=9,8$

Β' τρόπος



$y-y_0=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$

$-h=-\frac{1}{2}gt^2$

(α) όταν $x=80m$, $y=0$, $y-y_0=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$

$0=y=y_0+v_{y_0}t-\frac{1}{2}gt^2=35-\frac{1}{2}9,8\,t^2 \Rightarrow t^2=\frac{35}{4,90} \Rightarrow$

$t=2,67\ s$

(β) $x=\cancel{x_0}+v_{0x}t \Rightarrow x=v_0 t \Rightarrow 80=v_0\, 2,67 \Rightarrow$

$v_0=29,9\ m/s$

(γ) $v_x=v_{x_0}=29,9\ m/s$

$v_y=v_{y_0}-gt=0-9,8\cdot 2,67=-26,2\ m/s$

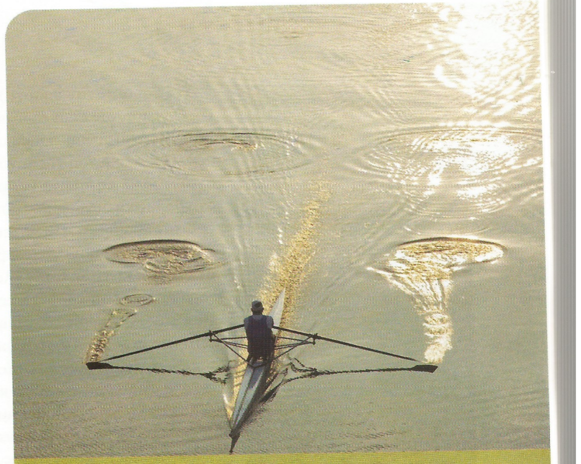
$$y-y_0=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y-y_0=v_0\sin\theta\ t-\frac{1}{2}gt^2$$

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

κεφάλαιο **M5**

Οι νόμοι της κίνησης



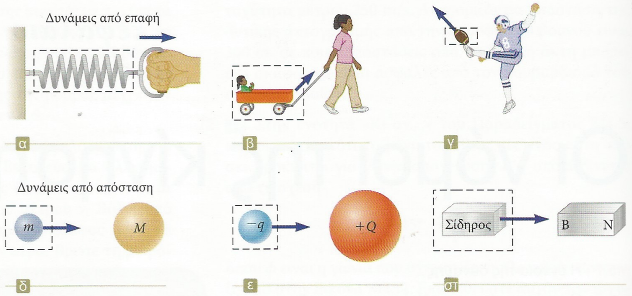
Κωπηλασία σε ήρεμα νερά. Οι δυνάμεις που ασκεί το νερό στα κουπιά επιταχύνουν τη βάρκα. (*Tetra Images/Getty Images*)

Στα Κεφάλαια M2 και M4, *περιγράψαμε* την κίνηση ενός σώματος ως συνάρτηση της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσής του χωρίς να λάβουμε υπόψη τι μπορεί να *επηρεάσει* αυτή την κίνηση. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε αυτή την επίδραση: Γιατί μεταβάλλεται η κίνηση ενός σώματος; Τι είναι αυτό που κάνει ένα σώμα να παραμένει σε ηρεμία και ένα άλλο να επιταχύνει; Γιατί ένα μικρό αντικείμενο μετακινείται πιο εύκολα από ένα μεγάλο; Οι δύο κύριοι παράγοντες που πρέπει να εξετάσουμε είναι οι *δυνάμεις* που ασκούνται σε ένα σώμα και η *μάζα* του σώματος. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη της *δυναμικής* περιγράφοντας τους τρεις βασικούς νόμους της κίνησης, που αφορούν δυνάμεις και μάζες, τους οποίους διατύπωσε πριν από τρεις αιώνες ο Ισαάκ Νεύτωνας.

M5.1 Η έννοια της δύναμης

Όλοι αντιλαμβανόμαστε την έννοια της δύναμης από την καθημερινή εμπειρία μας. Όταν σπρώχνετε ένα άδειο πιάτο του φαγητού, ασκείτε μια δύναμη πάνω του. Παρομοίως, όταν πετάτε ή κλωτσάτε μια μπάλα, ασκείτε δύναμη σε αυτή. Σε αυτά τα παραδείγματα, η λέξη *δύναμη* αναφέρεται σε μια αλληλεπίδραση με ένα σώμα μέσω μυϊκής δραστηριότητας και σε κάποια μεταβολή στην ταχύτητά του. Όμως, οι δυνάμεις δεν προκαλούν πάντα κίνηση. Για παράδειγμα, όταν κάθεστε, στο σώμα σας ασκείται η δύναμη της βαρύτητας αλλά παραμένετε ακίνητοι. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι όταν σπρώχνετε (δηλαδή, ασκείτε δύναμη) έναν βράχο χωρίς να καταφέρνετε να τον μετακινήσετε.

Εικόνα Μ5.1 Μερικά παραδείγματα ασκούμενων δυνάμεων. Σε κάθε περίπτωση, η δύναμη ασκείται στο σώμα το οποίο βρίσκεται μέσα στο πλαίσιο με τη διακεκομμένη γραμμή. Η δύναμη ασκείται στο σώμα από κάποιον παράγοντα του περιβάλλοντος ο οποίος βρίσκεται έξω από το διακεκομμένο πλαίσιο.

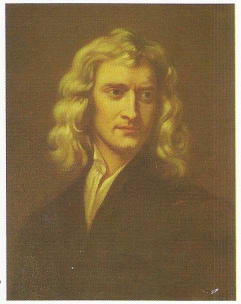


Τι είναι αυτό (αν υπάρχει) που αναγκάζει τη Σελήνη να περιφέρεται γύρω από τη Γη; Ο Νεύτωνας απάντησε σε αυτό το ερώτημα, αλλά και σε άλλα σχετικά, δηλώνοντας ότι το αίτιο που προκαλεί μεταβολές στην ταχύτητα ενός σώματος είναι οι δυνάμεις. Η κατεύθυνση της ταχύτητας της Σελήνης μεταβάλλεται καθώς περιφέρεται σε σχεδόν κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη. Αυτή η μεταβολή της ταχύτητας οφείλεται στη βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη στη Σελήνη.

Όταν τραβήξετε ένα σπειροειδές ελατήριο, όπως στην Εικόνα Μ5.1α, το ελατήριο επιμηκύνεται. Όταν τραβήξετε ένα ακίνητο καρότσι, όπως στην Εικόνα Μ5.1β, το καρότσι κινείται. Όταν κλωτσήσετε μια μπάλα, όπως στην Εικόνα Μ5.1γ, η μπάλα παραμορφώνεται και μετά κινείται. Οι παραπάνω περιπτώσεις αποτελούν παραδείγματα μιας κατηγορίας δυνάμεων που ονομάζονται *δυνάμεις από επαφή*. Δηλαδή, είναι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά τη φυσική επαφή μεταξύ δύο σωμάτων. Άλλα παραδείγματα δυνάμεων από επαφή είναι η δύναμη που ασκούν τα μόρια ενός αερίου στα τοιχώματα ενός δοχείου και η δύναμη που ασκούν τα πόδια σας στο δάπεδο.

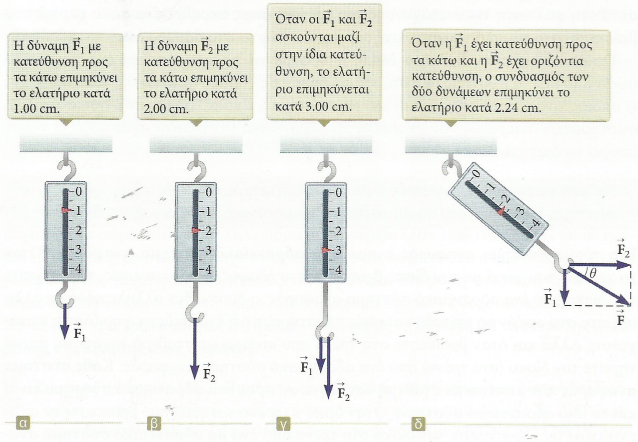
Μια άλλη κατηγορία δυνάμεων είναι οι *δυνάμεις από απόσταση*, οι οποίες δεν περιλαμβάνουν φυσική επαφή μεταξύ δύο σωμάτων. Τέτοιες δυνάμεις δρουν μέσω του κενού. Ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας δυνάμεων είναι η ελκτική δύναμη λόγω βαρύτητας μεταξύ δύο σωμάτων με μάζα, η οποία φαίνεται στην Εικόνα Μ5.1δ. Η βαρυτική δύναμη συγκρατεί τα σώματα πάνω στη Γη και τους πλανήτες σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Μια άλλη γνωστή δύναμη από απόσταση είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκεί ένα ηλεκτρικό φορτίο σε κάποιο άλλο (Εικ. Μ5.1ε), όπως τα φορτία του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου τα οποία σχηματίζουν ένα άτομο υδρογόνου. Ένα τρίτο παράδειγμα δύναμης από απόσταση είναι η δύναμη που ασκεί ένας μαγνήτης πάνω σε ένα κομμάτι σιδήρου (Εικ. Μ5.1στ).

Η διάκριση μεταξύ δυνάμεων από επαφή και δυνάμεων από απόσταση δεν είναι τόσο ξεκάθαρη όσο περιγράψαμε προηγουμένως. Σε ατομικό επίπεδο, όλες οι δυνάμεις που ταξινομούμε ως δυνάμεις από επαφή αποδεικνύεται ότι οφείλονται σε ηλεκτρικές δυνάμεις (από απόσταση), όπως αυτή που φαίνεται στην Εικόνα Μ5.1ε. Παρ' όλα αυτά, όταν αναπτύσσουμε μοντέλα για μακροσκοπικά φαινόμενα, είναι βολικό να χρησιμοποιούμε και τις δύο ταξινομήσεις των δυνάμεων. Όλες οι γνωστές *θεμελιώδεις* δυνάμεις στη φύση είναι δυνάμεις από απόσταση: (1) *βαρυτικές δυνάμεις* μεταξύ σωμάτων, (2) *ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις* μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων, (3) *ισχυρές* (ή *πυρηνικές*) *δυνάμεις* μεταξύ υποατομικών σωματιδίων, και (4) *ασθενείς δυνάμεις* που αναπτύσσονται σε ορισμένες διεργασίες ραδιενεργούς διάσπασης. Στην κλασική φυσική, ασχολούμαστε μόνο με βαρυτικές και ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Οι ισχυρές και ασθενείς δυνάμεις περιγράφονται στο Κεφάλαιο Σ8 της Σύγχρονης φυσικής.



Bridgeman-Giraudon/Art Resource, NY

Ισαάκ Νεύτωνας
Άγγλος φυσικός και μαθηματικός (1642–1727)
Ο Ισαάκ Νεύτωνας ήταν ένας από τους πιο λαμπρούς επιστήμονες στην ιστορία. Πριν καν φτάσει στην ηλικία των 30 ετών, είχε διατυπώσει τις βασικές έννοιες και τους νόμους της μηχανικής και είχε ανακαλύψει τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας και τις μαθηματικές μεθόδους του μαθηματικού λογισμού. Με τη βοήθεια των θεωριών του κατάφερε να εξηγήσει τις κινήσεις των πλανητών, την άμπωτη και την πλημμυρίδα, και πολλά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των κινήσεων της Σελήνης και της Γης. Επίσης, ερμήνευσε αρκετές θεμελιώδεις παρατηρήσεις σχετικά με τη φύση του φωτός. Οι συνεισφορές του στις θεωρίες της φυσικής κυριάρχησαν στην επιστημονική σκέψη για δύο αιώνες και εξακολουθούν να είναι σημαντικές ακόμα και σήμερα.



Εικόνα Μ5.2 Μπορούμε να διαπιστώσουμε τη διανυσματική φύση μιας δύναμης χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά ελατηρίου.

Η διανυσματική φύση της δύναμης

Μπορούμε να μετρήσουμε μια δύναμη χρησιμοποιώντας την παραμόρφωση ενός ελατηρίου. Ας υποθέσουμε ότι σε μια ζυγαριά ελατηρίου με σταθερό επάνω άκρο ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη προς τα κάτω (Εικόνα Μ5.2α). Το ελατήριο επιμηκύνεται κάτω από την επίδραση της δύναμης και ο δείκτης στη ζυγαριά δείχνει την επιμήκυνσή του. Μπορούμε να βαθμονομήσουμε το ελατήριο ορίζοντας ως δύναμη αναφοράς $\vec{F}_1$ τη δύναμη για την οποία ο δείκτης της ζυγαριάς δείχνει 1.00 cm. Αν εφαρμόσουμε μια διαφορετική δύναμη $\vec{F}_2$ με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο διπλάσιο από τη δύναμη αναφοράς $\vec{F}_1$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.2β, ο δείκτης μετακινείται στα 2.00 cm. Στην Εικόνα Μ5.2γ φαίνεται ότι η συνδυασμένη επίδραση των δύο συγγραμικών δυνάμεων είναι το άθροισμα των επιδράσεων των επιμέρους δυνάμεων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι δύο δυνάμεις ασκούνται ταυτόχρονα. Η $\vec{F}_1$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω ενώ η $\vec{F}_2$ έχει οριζόντια κατεύθυνση όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.2δ. Σε αυτή την περίπτωση, η ένδειξη της ζυγαριάς είναι 2.24 cm. Η δύναμη $\vec{F}$ η οποία θα προκαλούσε μόνη της αυτή την ένδειξη είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.2δ. Το μέτρο αυτής της δύναμης είναι $|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 2.24$ μονάδες, και η κατεύθυνσή της $\theta = \tan^{-1}(-0.500) = -26.6°$. Καθώς έχει επαληθευτεί πειραματικά ότι οι δυνάμεις συμπεριφέρονται ως διανύσματα, για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα *πρέπει* να εφαρμόσουμε τους κανόνες της πρόσθεσης διανυσμάτων.

Μ5.2 Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα και τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των δυνάμεων εξετάζοντας μερικές περιπτώσεις ενός δίσκου ο οποίος βρίσκεται πάνω σε ένα τελείως οριζόντιο τραπέζι του χόκεϊ με αέρα (Εικ. Μ5.3). Είναι αναμενόμενο ότι αν τοποθετήσουμε τον δίσκο απαλά πάνω στο τραπέζι θα παραμείνει ακίνητος. Τώρα φανταστείτε ότι το τραπέζι βρίσκεται μέσα σε ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε απολύτως ευθύγραμμες ράγες. Αν τοποθετήσουμε τον δίσκο στο τραπέζι, θα παραμείνει και πάλι ακίνητος. Αν όμως

Εικόνα Μ5.3 Ο αέρας ο οποίος διοχετεύεται στις τρύπες που βρίσκονται στην επιφάνειά του τραπεζιού του χόκεϊ επιτρέπει στον δίσκο να κινείται σχεδόν χωρίς τριβές. Αν το τραπέζι δεν επιταχύνει, ο δίσκος που έχει τοποθετηθεί πάνω σε αυτό θα παραμείνει ακίνητος.

το τρένο επιταχύνει, ο δίσκος θα αρχίσει να κινείται πάνω στο τραπέζι με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της επιτάχυνσης του τρένου, όπως ακριβώς ένα πάκο χαρτιά που βρίσκεται στο ταμπλό του αυτοκινήτου σας και πέφτει στο δάπεδο όταν πατάτε γκάζι.

Όπως είδαμε στην Ενότητα Μ4.6, μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα κινούμενο σώμα από πολλά συστήματα αναφοράς. Ο **πρώτος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα,** ο οποίος αναφέρεται συχνά και ως *νόμος της αδράνειας,* ορίζει ένα ειδικό σύνολο συστημάτων αναφοράς που ονομάζονται *αδρανειακά συστήματα αναφοράς.* Ο νόμος μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ▶

Αν ένα σώμα δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση.

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς ▶

Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς ονομάζεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς.** Όταν το τραπέζι του χόκεϊ με τον δίσκο βρίσκεται στο έδαφος, όπως και εσείς, παρατηρείτε τον δίσκο από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς· ο δίσκος δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα στο οριζόντιο επίπεδο και εσείς παρατηρείτε ότι έχει μηδενική οριζόντια επιτάχυνση. Αλλά και όταν βρίσκεστε στο τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα, παρατηρείτε τον δίσκο (στο τρένο) από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. **Κάθε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα είναι και το ίδιο αδρανειακό σύστημα.** Όταν όμως το τρένο και εσείς που βρίσκεστε σε αυτό επιταχύνετε, παρατηρείτε τον δίσκο στο τρένο από ένα **μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς** επειδή το τρένο επιταχύνει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης. Παρότι, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις σας, ο δίσκος στο τρένο φαίνεται να επιταχύνει, υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ο δίσκος έχει μηδενική επιτάχυνση. Για παράδειγμα, ένας παρατηρητής που στέκεται στο έδαφος έξω από το τρένο βλέπει τον δίσκο να ολισθαίνει ως προς το τραπέζι, αλλά να κινείται πάντα με την ίδια ταχύτητα ως προς το έδαφος, την οποία είχε το τρένο πριν αρχίσει να επιταχύνει (επειδή δεν υπάρχει σχεδόν καθόλου τριβή για να συγκρατήσει τον δίσκο επάνω στο τρένο). Επομένως, ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα εξακολουθεί να ισχύει παρότι εσείς, ως επιβάτης του τρένου, παρατηρείτε μια φαινόμενη επιτάχυνση του σώματος ως προς τον εαυτό σας.

Η καλύτερη προσέγγιση αδρανειακού συστήματος είναι ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τους μακρινούς απλανείς αστέρες. Στα περισσότερα προβλήματα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Γη είναι ένα τέτοιο σύστημα. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, η Γη δεν είναι αδρανειακό σύστημα επειδή περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Και στις δύο αυτές κινήσεις υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση. Ωστόσο, αυτές οι επιταχύνσεις είναι μικρές σε σύγκριση με το g και συχνά μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Για τον λόγο αυτό, μοντελοποιούμε τη Γη και κάθε σύστημα που είναι προσαρτημένο σε αυτή ως αδρανειακό σύστημα.

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε ένα σώμα από κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. (Θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά στις παρατηρήσεις που γίνονται σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς στην Ενότητα Μ6.3.) Πριν από το 1600 περίπου, οι επιστήμονες πίστευαν ότι η φυσιολογική κατάσταση της ύλης ήταν η ακινησία (ή ηρεμία). Οι παρατηρήσεις έδειχναν ότι τα κινούμενα σώματα κάποια στιγμή σταματούσαν να κινούνται. Ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που υιοθέτησε μια διαφορετική προσέγγιση όσον αφορά την κίνηση και τη φυσιολογική κατάσταση της ύλης. Διατύπωσε νοητικά πειράματα και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι από τη στιγμή που ένα σώμα τεθεί σε κίνηση, δεν είναι φυσιολογικό να σταματήσει: αντίθετα, το φυσιολογικό είναι να *αντισταθεί στις μεταβολές της κίνησής του.* Όπως έγραψε, «Κάθε ταχύτητα που προσδίδεται σε ένα κινούμενο σώμα διατηρείται αμείωτη εφόσον εκλείπουν τυχόν εξωτερικά αίτια επιβράδυνσης». Για παράδειγμα, ένα διαστημόπλοιο που κινείται στο διάστημα με τον κινητήρα του σβηστό θα συνεχίσει να κινείται για πάντα. *Δεν* πρόκειται να αναζητήσει μια «φυσιολογική κατάσταση» ακινησίας.

Αποφυγή παγίδων Μ5.1

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα *δεν* ορίζει τι συμβαίνει σε ένα σώμα με *μηδενική συνισταμένη δύναμη,* δηλαδή σε ένα σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές δυνάμεις οι οποίες εξισορροπούνται· ορίζει τι συμβαίνει *όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις.* Αυτή η λεπτή αλλά σημαντική διαφορά μάς επιτρέπει να ορίσουμε τη δύναμη ως αυτό που προκαλεί μεταβολή στην κίνηση. Η περιγραφή ενός σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων που εξισορροπούνται καλύπτεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Με βάση τα όσα αναφέραμε για τις παρατηρήσεις που γίνονται από αδρανειακά συστήματα αναφοράς, μια πιο πρακτική διατύπωση του πρώτου νόμου της κίνησης του Νεύτωνα είναι η εξής:

> Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι παρατηρήσεις γίνονται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα ακίνητο σώμα θα παραμείνει σε ηρεμία και ένα σώμα που κινείται θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή, ευθύγραμμα και με ταχύτητα σταθερού μέτρου).

◀ **Μια διαφορετική διατύπωση του πρώτου νόμου του Νεύτωνα**

Με άλλα λόγια, **όταν δεν ασκούνται δυνάμεις σε ένα σώμα, η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική.** Από τον πρώτο νόμο συμπεραίνουμε ότι κάθε *απομονωμένο σώμα* (δηλαδή ένα σώμα που δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του) είτε βρίσκεται σε ηρεμία είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η τάση ενός σώματος να αντιστέκεται σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του ονομάζεται **αδράνεια.** Με βάση τον παραπάνω πρώτο νόμο, συμπεραίνουμε ότι ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να δέχεται κάποια δύναμη. Συνεπώς, ο πρώτος νόμος μας επιτρέπει να ορίσουμε τη **δύναμη** ως το **αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος.**

◀ **Ορισμός της δύναμης**

***Σύντομο ερώτημα* M5.1** Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (α) Ένα σώμα μπορεί να κινείται χωρίς να ασκούνται δυνάμεις σε αυτό. (β) Σε ένα σώμα είναι δυνατόν να ασκούνται δυνάμεις χωρίς το σώμα να κινείται. (γ) Ούτε η πρόταση (α) ούτε η πρόταση (β) είναι σωστές. (δ) Οι προτάσεις (α) και (β) είναι και οι δύο σωστές.

M5.3 Μάζα

Φανταστείτε ότι προσπαθείτε να πιάσετε μια μπάλα του μπάσκετ ή του μπόουλινγκ. Ποια μπάλα είναι πιο πιθανό να συνεχίσει να κινείται όταν προσπαθήσετε να την πιάσετε; Ποια μπάλα απαιτεί μεγαλύτερη προσπάθεια για να την πετάξετε; Η μπάλα του μπόουλινγκ απαιτεί μεγαλύτερη προσπάθεια. Στη γλώσσα της φυσικής, λέμε ότι η μπάλα του μπόουλιγκ προβάλλει μεγαλύτερη αντίσταση στη μεταβολή της ταχύτητάς της από ό,τι η μπάλα του μπάσκετ. Πώς μπορούμε να εκφράσουμε ποσοτικά την έννοια αυτή;

Μάζα είναι η ιδιότητα ενός σώματος η οποία καθορίζει πόση αντίσταση προβάλλει το σώμα στις μεταβολές της ταχύτητάς του. Όπως μάθαμε στην Ενότητα M1.1, η μονάδα της μάζας στο σύστημα SI είναι το χιλιόγραμμο. Πειράματα έχουν δείξει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο λιγότερο επιταχύνει το σώμα όταν ασκείται πάνω του μια συγκεκριμένη δύναμη.

◀ **Ορισμός της μάζας**

Για να περιγράψουμε τη μάζα ποσοτικά, πραγματοποιούμε πειράματα όπου συγκρίνουμε τις επιταχύνσεις που προκαλεί μια συγκεκριμένη δύναμη σε διαφορετικά σώματα. Ας υποθέσουμε ότι μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα μάζας m_1 και προκαλεί μια μεταβολή στην κίνησή του η οποία μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά με την επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_1$ του σώματος, ενώ όταν η *ίδια δύναμη* ασκείται σε ένα σώμα μάζας m_2 προκαλεί επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_2$. Ορίζουμε τον λόγο των δύο μαζών ως τον *αντίστροφο* λόγο των μέτρων των επιταχύνσεων που προκαλεί η δύναμη:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1} \qquad \textbf{(M5.1)}$$

Για παράδειγμα, αν μια δύναμη η οποία ασκείται σε ένα σώμα μάζας 3 kg προκαλεί επιτάχυνση 4 m/s^2, τότε η ίδια δύναμη όταν ασκείται σε ένα σώμα μάζας 6 kg προκαλεί επιτάχυνση 2 m/s^2. Με βάση πλήθος παρόμοιων παρατηρήσεων, συμπεραίνουμε ότι **το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του όταν ασκείται σε αυτό μια συγκεκριμένη δύναμη.** Αν το ένα σώμα έχει γνωστή μάζα, η μάζα του άλλου σώματος μπορεί να υπολογιστεί από μετρήσεις της επιτάχυνσης.

Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα ενός σώματος και είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον του σώματος και από τη μέθοδο μέτρησής της. Επίσης, **η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος** και άρα υπακούει στους κανόνες της απλής αριθμητικής. Για παράδειγμα, αν προσθέσετε μια μάζα 3 kg με μια μάζα 5 kg, η συνολική μάζα είναι 8 kg. Μπορείτε να επαληθεύσετε αυτό το αποτέλεσμα πειραματικά συγκρίνοντας χωριστά την επιτάχυνση που προκαλεί μια γνωστή δύναμη σε πολλά σώματα με την επιτάχυνση που προκαλεί η ίδια δύναμη στα ίδια σώματα, όταν αυτά θεωρηθούν ως ενιαίο σύστημα.

Η μάζα και το βάρος είναι διαφορετικά μεγέθη

Δεν πρέπει να συγχέετε τη μάζα με το βάρος. Η μάζα και το βάρος είναι διαφορετικά μεγέθη. Το βάρος ενός σώματος είναι ίσο με το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκείται στο σώμα και μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση (δείτε την Ενότητα Μ5.5). Για παράδειγμα, ένας άνθρωπος που στη Γη έχει βάρος 800 N, στη Σελήνη έχει βάρος μόλις 130 N. Από την άλλη πλευρά, η μάζα των σωμάτων είναι ίδια παντού: ένα σώμα που έχει μάζα 2 kg στη Γη έχει μάζα 2 kg και στη Σελήνη.

Μ5.4 Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν δεν ασκούνται δυνάμεις σε αυτό: το σώμα είτε παραμένει ακίνητο είτε κινείται ευθύγραμμα με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν ασκούνται πάνω του μία ή περισσότερες δυνάμεις.

Φανταστείτε ότι εκτελείτε ένα πείραμα στο οποίο σπρώχνετε έναν κύβο μάζας m πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Όταν ασκείτε οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στον κύβο, αυτός κινείται με επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$. Αν ασκήσετε διπλάσια δύναμη στον ίδιο κύβο, τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η επιτάχυνση του κύβου θα διπλασιαστεί. Αν αυξήσετε την ασκούμενη δύναμη σε $3\vec{\mathbf{F}}$, η επιτάχυνση θα τριπλασιαστεί, κ.ο.κ. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογη προς τη δύναμη που ασκείται σε αυτό: $\vec{\mathbf{F}} \propto \vec{\mathbf{a}}$. Παρουσιάσαμε αυτό το συμπέρασμα για πρώτη φορά στην Ενότητα Μ2.4 όταν αναφερθήκαμε στην κατεύθυνση της επιτάχυνσης ενός σώματος. Ξέρουμε, επίσης, από την προηγούμενη ενότητα ότι το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του: $|\vec{\mathbf{a}}| \propto 1/m$.

Αποφυγή παγίδων Μ5.2

Η δύναμη προκαλεί μεταβολές στην κίνηση

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, ένα σώμα μπορεί να κινείται χωρίς να ασκούνται σε αυτό δυνάμεις. Μη θεωρείτε λοιπόν ότι η δύναμη είναι η αιτία της *κίνησης*. Η δύναμη είναι η αιτία της *μεταβολής* της κίνησης, την οποία μετράμε με την επιτάχυνση.

Αυτές οι πειραματικές παρατηρήσεις συνοψίζονται στον **δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:**

Όταν παρατηρούμε ένα σώμα από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση του σώματος είναι ανάλογη προς τη συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό και αντιστρόφως ανάλογη προς τη μάζα του:

$$\vec{\mathbf{a}} \propto \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m}$$

Αν ορίσουμε τη σταθερά αναλογίας ίση με 1, μπορούμε να συσχετίσουμε τη μάζα, την επιτάχυνση, και τη δύναμη με την ακόλουθη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:[1]

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad \text{(M5.2)}$$

Και οι δύο διατυπώσεις του νόμου υποδεικνύουν ότι η επιτάχυνση ενός σώματος οφείλεται στη *συνολική δύναμη* $\sum \vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται σε αυτό. Η **συνολική δύναμη** που ασκείται σε ένα σώμα είναι το διανυσματικό άθροισμα, δηλαδή η συνισταμένη, όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Μερικές φορές αναφερόμαστε στη *συνολική δύναμη* ως *συνισταμένη δύναμη*. Κατά την επίλυση προβλημάτων με τον δεύτερο

[1] Η Εξίσωση Μ5.2 ισχύει μόνο όταν το σώμα κινείται πολύ πιο αργά από το φως. Περιγράφουμε τη σχετικιστική περίπτωση στο Κεφάλαιο Σ1.

νόμο του Νεύτωνα, είναι σημαντικό να προσδιορίζετε σωστά τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται ένα σώμα. Σε ένα σώμα μπορεί να ασκούνται πολλές δυνάμεις, αλλά η επιτάχυνση είναι μία.

Η Εξίσωση M5.2 είναι διανυσματική σχέση, οπότε ισοδυναμεί με τρεις εξισώσεις συνιστωσών:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \qquad \text{(M5.3)}$$

◀ **Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών**

Σύντομο ερώτημα **M5.2** Ένα σώμα δεν έχει επιτάχυνση. Ποιο από τα παρακάτω *δεν μπορεί* να ισχύει για το σώμα; (α) Στο σώμα ασκείται μία δύναμη. (β) Στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις. (γ) Στο σώμα ασκούνται δυνάμεις, αλλά αλληλοεξουδετερώνονται.

Σύντομο ερώτημα **M5.3** Σπρώχνετε ένα, αρχικά ακίνητο, σώμα πάνω σε ένα δάπεδο χωρίς τριβές ασκώντας σταθερή δύναμη για χρονικό διάστημα Δt. Το σώμα αποκτάει τελική ταχύτητα μέτρου v. Επαναλαμβάνετε το πείραμα ασκώντας διπλάσια δύναμη. Πόσος χρόνος απαιτείται για να επιτευχθεί η ίδια τελική ταχύτητα μέτρου v; (α) $4\,\Delta t$ (β) $2\,\Delta t$ (γ) Δt (δ) $\Delta t/2$ (ε) $\Delta t/4$

Αποφυγή παγίδων M5.3

Το $m\vec{a}$ δεν είναι δύναμη
Η Εξίσωση M5.2 *δεν* ορίζει ότι το γινόμενο $m\vec{a}$ είναι δύναμη. Η δύναμη στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι η συνισταμένη η οποία προκύπτει από τη διανυσματική άθροιση του συνόλου των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα. Αυτή η συνισταμένη δύναμη εξισώνεται στη συνέχεια με το γινόμενο της μάζας του σώματος και της επιτάχυνσης που προκαλεί η συνισταμένη δύναμη. *Μην* συμπεριλαμβάνετε τη «δύναμη $m\vec{a}$» όταν αναλύετε τις δυνάμεις που δρουν σε ένα σώμα.

Η μονάδα SI της δύναμης είναι το **newton** (N). Το 1 N είναι η δύναμη η οποία, όταν ασκείται σε ένα σώμα μάζας 1 kg, του προσδίδει επιτάχυνση 1 m/s². Από τον παραπάνω ορισμό και τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, διαπιστώνουμε ότι το newton μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των παρακάτω θεμελιωδών μονάδων της μάζας, του μήκους, και του χρόνου:

$$1\text{ N} \equiv 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad \text{(M5.4)}$$

◀ **Ορισμός του newton**

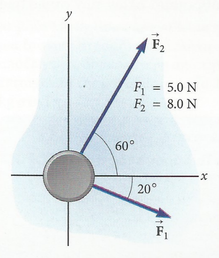
Στο Παραδοσιακό Σύστημα των Η.Π.Α., η μονάδα της δύναμης είναι η **λίβρα** (pound, lb). Η 1 lb είναι η δύναμη η οποία, όταν ασκείται σε ένα σώμα μάζας 1 slug (σλαγκ),[2] του προκαλεί επιτάχυνση 1 ft/s²:

$$1\text{ lb} \equiv 1\text{ slug}\cdot\text{ft/s}^2 \qquad \text{(M5.5)}$$

Μια χρήσιμη προσέγγιση είναι $1\text{ N} \approx \frac{1}{4}\text{ lb}$.

Παράδειγμα M5.1 Επιταχυνόμενος δίσκος του χόκεϊ

Ένας δίσκος του χόκεϊ με μάζα 0.30 kg ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στην οριζόντια επιφάνεια ενός παγοδρομίου. Δύο μπαστούνια του χόκεϊ χτυπάνε τον δίσκο ταυτόχρονα, ασκώντας επάνω του τις δυνάμεις που φαίνονται στην Εικόνα M5.4. Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μέτρο 5.0 N, ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει μέτρο 8.0 N. Προσδιορίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.



Εικόνα M5.4 (Παράδειγμα M5.1) Ένας δίσκος του χόκεϊ, ο οποίος κινείται σε μια επιφάνεια χωρίς τριβές, δέχεται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Μελετήστε την Εικόνα M5.4. Χρησιμοποιήστε τις γνώσεις σας στην πρόσθεση διανυσμάτων που αποκτήσατε στο Κεφάλαιο M3 για να προβλέψετε κατά προσέγγιση την κατεύθυνση του διανύσματος της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο δίσκος. Η επιτάχυνση του δίσκου θα έχει την ίδια κατεύθυνση.

συνεχίζεται

[2]Το σλαγκ είναι η μονάδα μάζας στο Παραδοσιακό Σύστημα των Η.Π.Α. και αντιστοιχεί στη μονάδα SI του χιλιόγραμμου. Επειδή οι περισσότεροι υπολογισμοί στη μελέτη της κλασικής μηχανικής γίνονται σε μονάδες SI, το σλαγκ χρησιμοποιείται σπάνια στο βιβλίο.

Μ5.1 *συν.*

Κατηγοριοποίηση Επειδή μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση, κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα που μπορεί να λυθεί με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Ανάλυση Βρείτε τη συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο δίσκος στη διεύθυνση του άξονα x:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos(-20°) + F_2 \cos 60°$$
$$= (5.0\text{ N})(0.940) + (8.0\text{ N})(0.500) = 8.7\text{ N}$$

Βρείτε τη συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο δίσκος στη διεύθυνση του άξονα y:

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin(-20°) + F_2 \sin 60°$$
$$= (5.0\text{ N})(-0.342) + (8.0\text{ N})(0.866) = 5.2\text{ N}$$

Χρησιμοποιήστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών (Εξ. Μ5.3) για να βρείτε τις συνιστώσες x και y της επιτάχυνσης του δίσκου:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7\text{ N}}{0.30\text{ kg}} = 29\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2\text{ N}}{0.30\text{ kg}} = 17\text{ m/s}^2$$

Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης:

$$a = \sqrt{(29\text{ m/s}^2)^2 + (17\text{ m/s}^2)^2} = \boxed{34\text{ m/s}^2}$$

Βρείτε την κατεύθυνση της επιτάχυνσης ως προς τον θετικό ημιάξονα x:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = \boxed{31°}$$

Ολοκλήρωση Προσθέστε τα διανύσματα στην Εικόνα Μ5.4 με τη γραφική μέθοδο για να επαληθεύσετε την ορθότητα της απάντησή σας. Επειδή το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης, ένα σχεδιάγραμμα με το διάνυσμα της συνισταμένης δύναμης θα σας βοηθήσει να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησής σας. (Δοκιμάστε να το σχεδιάσετε!)

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι τρία μπαστούνια του χόκεϊ χτυπάνε τον δίσκο ταυτόχρονα, με δύο από αυτά να ασκούν τις δυνάμεις που φαίνονται στην Εικόνα Μ5.4. Η εφαρμογή των τριών δυνάμεων προσδίδει στον δίσκο *μηδενική* επιτάχυνση. Ποιες πρέπει να είναι οι συνιστώσες της τρίτης δύναμης;

Απάντηση Εφόσον η επιτάχυνση είναι μηδενική, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον δίσκο πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Άρα, οι τρεις δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται. Έχουμε βρει τις συνιστώσες των δύο πρώτων δυνάμεων. Οι αντίστοιχες συνιστώσες της τρίτης δύναμης πρέπει να έχουν ίσο μέτρο και αντίθετο πρόσημο από αυτές ώστε το άθροισμα όλων των συνιστωσών να είναι μηδέν. Επομένως, $F_{3x} = -8.7$ N και $F_{3y} = -5.2$ N.

Μ5.5 Δύναμη της βαρύτητας και βάρος

Όλα τα σώματα δέχονται την έλξη της Γης. Η ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη στα σώματα ονομάζεται δύναμη της βαρύτητας ή **βαρυτική δύναμη** $\vec{\mathbf{F}}_g$. Η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης,[3] και το μέτρο της ονομάζεται **βάρος** του σώματος.

Στην Ενότητα Μ2.6, είδαμε ότι ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση έχει επιτάχυνση $\vec{\mathbf{g}}$ με κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ σε ένα σώμα μάζας m που εκτελεί ελεύθερη πτώση, με $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ και $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_g$, παίρνουμε

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$$

Αποφυγή παγίδων Μ5.4
«Το βάρος ενός σώματος» Όλοι γνωρίζουμε την καθημερινή φράση το «βάρος ενός σώματος». Όμως, το βάρος δεν είναι μια εγγενής ιδιότητα ενός σώματος· αντίθετα, είναι ένα μέτρο της βαρυτικής δύναμης η οποία αναπτύσσεται μεταξύ του σώματος και της Γης (ή κάποιου άλλου πλανήτη). Επομένως, το βάρος είναι ιδιότητα ενός *συστήματος* αντικειμένων: του σώματος και της Γης.

[3] Η πρόταση αυτή αγνοεί το γεγονός ότι η μάζα της Γης δεν είναι κατανεμημένη τελείως σφαιρικά.

Άρα, το βάρος ενός σώματος, το οποίο ορίσαμε ως το μέτρο της $\vec{\mathbf{F}}_g$, είναι ίσο με mg:

$$F_g = mg \qquad \text{(M5.6)}$$

Επειδή το βάρος εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g, μεταβάλλεται ανάλογα με τη γεωγραφική θέση. Το g μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από το κέντρο της Γης, επομένως τα σώματα έχουν μικρότερο βάρος σε μεγάλα ύψη από ό,τι στο επίπεδο της θάλασσας. Για παράδειγμα, μια παλέτα με τούβλα μάζας 1 000 kg που χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή του Εμπάιρ Στέιτ στη Νέα Υόρκη είχε βάρος 9 800 N στο επίπεδο του δρόμου, αλλά ζύγιζε περίπου 1 N λιγότερο όταν την ανέβασαν στην κορυφή του κτιρίου. Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα. Έστω ότι ένας σπουδαστής έχει μάζα 70.0 kg. Το βάρος του, σε μια τοποθεσία όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.80$ m/s^2, είναι 686 N (περίπου 150 lb). Στην κορυφή ενός βουνού, όμως, όπου $g = 9.77$ m/s^2, το βάρος του είναι μόνο 684 N. Άρα, αν θέλετε να χάσετε βάρος χωρίς να κάνετε δίαιτα, ανεβείτε σε ένα βουνό ή ζυγιστείτε στα 30 000 ft μέσα σε ένα αεροπλάνο!

Η Εξίσωση M5.6 εκφράζει ποσοτικά τη δύναμη που ασκεί η βαρύτητα στο σώμα. Παρατηρήστε, όμως, ότι η εξίσωση δεν απαιτεί να κινείται το σώμα. Η Εξίσωση M5.6 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και στην περίπτωση ενός ακίνητου σώματος ή ενός σώματος που δέχεται πολλές δυνάμεις, προκειμένου να υπολογίσουμε τη δύναμης της βαρύτητας. Το αποτέλεσμα μάς επιτρέπει να ερμηνεύσουμε τη μάζα m στην εξίσωση λίγο διαφορετικά. Η μάζα m στην Εξίσωση M5.6 καθορίζει την ένταση της βαρυτικής έλξης ανάμεσα στο σώμα και στη Γη. Ο ρόλος της μάζας εδώ είναι εντελώς διαφορετικός από αυτόν που αναφέραμε στην Ενότητα M5.3, ότι δηλαδή αποτελεί ένα μέτρο της αντίστασης στις μεταβολές της κίνησης που προκαλεί μια εξωτερική δύναμη. Σε αυτό το πλαίσιο, η μάζα ονομάζεται και **αδρανειακή μάζα.** Η μάζα m στην Εξίσωση M5.6 είναι γνωστή ως **βαρυτική μάζα.** Αν και αυτό το μέγεθος συμπεριφέρεται διαφορετικά από την αδρανειακή μάζα, σύμφωνα με ένα από τα πειραματικά συμπεράσματα της νευτώνειας δυναμικής, η βαρυτική μάζα και η αδρανειακή μάζα έχουν την ίδια τιμή.

Αν και εστιάσαμε την ανάλυσή μας στη βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη σε ένα σώμα, γενικά η έννοια της βαρύτητας υφίσταται σε όλους τους πλανήτες. Η τιμή του g διαφέρει από πλανήτη σε πλανήτη, αλλά το μέτρο της βαρυτικής δύναμης δίνεται πάντα από την τιμή του γινομένου mg.

***Σύντομο ερώτημα* M5.4** Υποθέστε ότι μιλάτε μέσω διαπλανητικού τηλεφώνου με έναν φίλο σας που ζει στη Σελήνη. Σας λέει ότι μόλις κέρδισε ένα newton χρυσού σε έναν διαγωνισμό. Ενθουσιασμένος του λέτε ότι πήρατε μέρος στον αντίστοιχο διαγωνισμό της Γης και κερδίσατε επίσης ένα newton χρυσού! Ποιος είναι πιο πλούσιος; (α) Εσείς. (β) Ο φίλος σας. (γ) Είστε το ίδιο πλούσιοι.

Αποφυγή παγίδων M5.5

Το χιλιόγραμμο δεν είναι μονάδα βάρους

Ίσως έχετε δει τη «μετατροπή» 1 kg = 2.2 lb. Παρά τις συνεχείς αναφορές σε βάρη τα οποία εκφράζονται σε χιλιόγραμμα, το χιλιόγραμμο δεν είναι μονάδα *βάρους*, είναι μονάδα *μάζας*. Η σχέση της μετατροπής δεν είναι ισότητα· είναι *ισοδυναμία* και ισχύει μόνο στην επιφάνεια της Γης.

NASA/Eugene Cernan

Η μονάδα υποστήριξης ζωτικών λειτουργιών που ήταν προσδεδεμένη στην πλάτη του αστροναύτη Harrison Schmitt είχε μάζα 136 kg και στη Γη ζύγιζε 300 lb. Στη διάρκεια της εκπαίδευσής του, χρησιμοποιήθηκε ένα ομοίωμα 50 lb με μάζα 23 kg. Παρότι με αυτόν τον τρόπο προσομοιώθηκε αποτελεσματικά το μειωμένο βάρος που θα είχε η μονάδα στη Σελήνη, δεν συνέβη το ίδιο για την αμετάβλητη μάζα. Η επιτάχυνση της μονάδας με μάζα 136 kg (ίσως με ένα άλμα ή μια ξαφνική στροφή) στη Σελήνη αποδείχτηκε δυσκολότερη από την επιτάχυνση της μονάδας με μάζα 23 kg στη Γη.

Εννοιολογικό Παράδειγμα M5.2 Πόσο είναι το βάρος σας στο ασανσέρ;

Σίγουρα έχετε βρεθεί σε ένα ασανσέρ που επιταχύνει προς τα πάνω καθώς κατευθύνεται προς κάποιο όροφο ενός κτιρίου. Τη στιγμή της επιτάχυνσης, νιώθετε ότι έχετε μεγαλύτερο βάρος. Αν μάλιστα εκείνη τη στιγμή στέκεστε επάνω σε μια ζυγαριά, η ζυγαριά θα μετρήσει μια δύναμη μεγαλύτερη από το βάρος σας. Άρα, έχετε απτά στοιχεία και μετρήσεις που σας κάνουν να πιστεύετε ότι κάτω από αυτές τις συνθήκες ζυγίζετε περισσότερο. Ζυγίζετε *όντως* περισσότερο;

συνεχίζεται

Μ5.2 *συν.*

ΛΥΣΗ

Όχι· το βάρος σας είναι αμετάβλητο. Η εμπειρία σας οφείλεται στο γεγονός ότι βρίσκεστε σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για να επιταχυνθείτε προς τα πάνω, θα πρέπει το δάπεδο ή η ζυγαριά να ασκήσουν στα πόδια σας μια δύναμη προς τα πάνω η οποία θα έχει μεγαλύτερο μέτρο από το βάρος σας. Εσείς νιώθετε αυτή τη μεγαλύτερη δύναμη και νομίζετε ότι ζυγίζετε περισσότερο. Επειδή λοιπόν η ζυγαριά μετράει αυτή την ανοδική δύναμη, και όχι το βάρος σας, η ένδειξή της αυξάνεται.

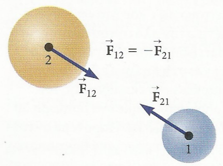
Μ5.6 Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

Αν πιέσετε μια γωνία του βιβλίου με την άκρη του δαχτύλου σας, το βιβλίο σάς πιέζει και αυτό προκαλώντας ένα μικρό βαθούλωμα στο δέρμα σας. Αν πιέσετε περισσότερο, το βιβλίο κάνει το ίδιο και το βαθούλωμα στο δέρμα είναι λίγο μεγαλύτερο. Αυτό το απλό παράδειγμα δείχνει ότι οι δυνάμεις είναι *αλληλεπιδράσεις* μεταξύ δύο σωμάτων: όταν το δάχτυλό σας πιέζει το βιβλίο, το βιβλίο πιέζει και αυτό το δάχτυλό σας. Αυτή η σημαντική αρχή είναι γνωστή ως **τρίτος νόμος του Νεύτωνα:**

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ▶

Αν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad \text{(Μ5.7)}$$



Εικόνα Μ5.5 Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα. Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση με τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.

Όταν είναι σημαντικό να συμβολίζουμε τις δυνάμεις ως αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωμάτων, θα χρησιμοποιούμε συμβολισμό με δείκτες, όπου το $\vec{\mathbf{F}}_{ab}$ σημαίνει «η δύναμη που ασκεί *το* a *στο* b». Ο τρίτος νόμος φαίνεται στην Εικόνα Μ5.5. Η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι γενικά γνωστή ως *δράση*, ενώ η δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1 ως *αντίδραση*. Οι όροι με πλάγιους χαρακτήρες δεν είναι επιστημονικοί όροι, και επιπλέον, οποιαδήποτε από τις δύο δυνάμεις μπορεί να χαρακτηριστεί ως δράση ή ως αντίδραση. Θα χρησιμοποιούμε αυτούς τους όρους για λόγους ευκολίας. Σε κάθε περίπτωση, η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε *διαφορετικά* σώματα και πρέπει να είναι του ίδιου τύπου (βαρυτικές, ηλεκτρικές, κ.λπ.). Για παράδειγμα, σε ένα βλήμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση η Γη ασκεί στο βλήμα βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = \vec{\mathbf{F}}_{\Gamma\beta}$ (Γ = Γη, β = βλήμα), με μέτρο ίσο με mg. Η αντίδραση σε αυτή τη δύναμη είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί το βλήμα στη Γη $\vec{\mathbf{F}}_{\beta\Gamma} = -\vec{\mathbf{F}}_{\Gamma\beta}$. Η δύναμη της αντίδρασης $\vec{\mathbf{F}}_{\beta\Gamma}$ πρέπει να επιταχύνει τη Γη προς το βλήμα ακριβώς όπως ακριβώς η δύναμη της δράσης $\vec{\mathbf{F}}_{\Gamma\beta}$ επιταχύνει το βλήμα προς τη Γη. Όμως, επειδή η Γη έχει τεράστια μάζα, η επιτάχυνσή της λόγω της αντίδρασης είναι αμελητέα.

Θεωρήστε μια ακίνητη οθόνη υπολογιστή πάνω σε ένα τραπέζι (Εικόνα Μ5.6α). Η αντίδραση στη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = \vec{\mathbf{F}}_{\Gamma o}$ που δρα στην οθόνη είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{o\Gamma} = -\vec{\mathbf{F}}_{\Gamma o}$ που ασκεί η οθόνη στη Γη. Η οθόνη δεν επιταχύνει επειδή τη συγκρατεί το τραπέζι. Το τραπέζι ασκεί στην οθόνη μια δύναμη $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{F}}_{\tau o}$, κατακόρυφα προς τα πάνω που ονομάζεται **κάθετη δύναμη.** Η δύναμη αυτή, η οποία δεν επιτρέπει στην οθόνη να πέσει, μπορεί να πάρει όποια τιμή χρειάζεται, με μέγιστη τιμή τη δύναμη θραύσης του τραπεζιού. Επειδή η επιτάχυνση της οθόνης είναι μηδέν, εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην οθόνη παίρνουμε $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{n}} + m\vec{\mathbf{g}} = 0$, και

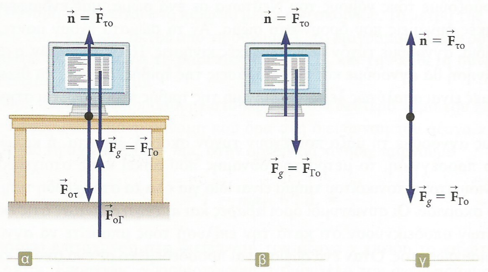
Κάθετη δύναμη ▶

άρα $n\hat{\mathbf{j}} - mg\hat{\mathbf{j}} = 0$, ή $n = mg$. Η κάθετη δύναμη εξισορροπεί τη δύναμη που ασκεί η βαρύτητα στην οθόνη, άρα η συνισταμένη δύναμη που δρα στην οθόνη είναι μηδενική. Η αντίδραση στην $\vec{\mathbf{n}}$ είναι η δύναμη που ασκεί η οθόνη στο τραπέζι, δηλαδή $\vec{\mathbf{F}}_{οτ} = -\vec{\mathbf{F}}_{το} = -\vec{\mathbf{n}}$.

Παρατηρήστε ότι οι δυνάμεις που δρουν στην οθόνη είναι οι $\vec{\mathbf{F}}_g$ και $\vec{\mathbf{n}}$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.6β. Οι δύο δυνάμεις $\vec{\mathbf{F}}_{οΓ}$ και $\vec{\mathbf{F}}_{οτ}$ δεν ασκούνται στην οθόνη.

Η Εικόνα Μ5.6 παρουσιάζει ένα εξαιρετικά σημαντικό βήμα για την επίλυση προβλημάτων με δυνάμεις. Στην Εικόνα Μ5.6α φαίνονται πολλές από τις δυνάμεις που εμπλέκονται στη συγκεκριμένη περίπτωση: οι δυνάμεις που δρουν στην οθόνη, μία δύναμη η οποία ασκείται στο τραπέζι, και μία που ασκείται στη Γη. Αντίθετα, το διάγραμμα της Εικόνας Μ5.6β δείχνει μόνο τις δυνάμεις που δρουν σε *ένα σώμα*, στη συγκεκριμένη περίπτωση την οθόνη, και ονομάζεται **διάγραμμα δυνάμεων**. Το σημαντικό διάγραμμα της Εικόνας Μ5.6γ ονομάζεται **διάγραμμα ελεύθερου σώματος**. Στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος χρησιμοποιείται το μοντέλο του σωματιδίου. Το σώμα αναπαρίσταται ως τελεία και οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα φαίνονται να ασκούνται στην τελεία. Όταν αναλύουμε ένα σώμα που δέχεται δυνάμεις, ουσιαστικά αναζητούμε τη συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα το οποίο έχουμε μοντελοποιήσει ως σωματίδιο. Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος μας βοηθάει να απομονώσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να αφαιρέσουμε τις υπόλοιπες δυνάμεις από την ανάλυσή μας.

***Σύντομο ερώτημα* Μ5.5** **(i)** Αν μια μύγα συγκρουστεί με το παρμπρίζ ενός λεωφορείου που κινείται γρήγορα, ποιος δέχεται δύναμη πρόσκρουσης με μεγαλύτερο μέτρο; (α) Η μύγα. (β) Το λεωφορείο. (γ) Και οι δύο δέχονται την ίδια δύναμη. **(ii)** Ποιος δέχεται μεγαλύτερη επιτάχυνση; (α) Η μύγα. (β) Το λεωφορείο. (γ) Και οι δύο δέχονται την ίδια επιτάχυνση.



Εικόνα Μ5.6 (α) Όταν η οθόνη του υπολογιστή είναι ακίνητη πάνω στο τραπέζι, οι δυνάμεις που δρουν στην οθόνη είναι η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ και η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$. Η αντίδραση στην $\vec{\mathbf{n}}$ είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{οτ}$ που ασκεί η οθόνη στο τραπέζι. Η αντίδραση στην $\vec{\mathbf{F}}_g$ είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{οΓ}$ που ασκεί η οθόνη στη Γη. (β) Το διάγραμμα με τις δυνάμεις που ασκούνται στην οθόνη. (γ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος δείχνει την οθόνη ως μαύρη τελεία και τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή.

Αποφυγή παγίδων Μ5.6

Δεν ισχύει πάντα $n = mg$

Στην περίπτωση που φαίνεται στην Εικόνα Μ5.6, αλλά και σε πολλές άλλες, διαπιστώνουμε ότι ισχύει $n = mg$ (η κάθετη δύναμη έχει ίδιο μέτρο με τη βαρυτική δύναμη). Ωστόσο, αυτό *δεν* ισχύει γενικά. Αν ένα σώμα βρίσκεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, αν ασκούνται δυνάμεις οι οποίες έχουν κατακόρυφες συνιστώσες, ή αν το σύστημα επιταχύνει κατακόρυφα, τότε ισχύει $n \neq mg$. Να εφαρμόζετε *πάντα* τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να βρίσκετε τη σχέση μεταξύ των n και mg.

Αποφυγή παγίδων Μ5.7

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

Να θυμάστε ότι οι δυνάμεις της δράσης και της αντίδρασης που προβλέπει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα δρουν σε *διαφορετικά* σώματα. Για παράδειγμα, στην Εικόνα Μ5.6, έχουμε:

$$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{F}}_{το} = -m\vec{\mathbf{g}} = -\vec{\mathbf{F}}_{Γο}.$$

Οι δυνάμεις $\vec{\mathbf{n}}$ και $m\vec{\mathbf{g}}$ έχουν ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση, αλλά δεν αποτελούν ζεύγος δράσης-αντίδρασης επειδή και οι δύο δρουν στο *ίδιο* σώμα, δηλαδή στην οθόνη.

Αποφυγή παγίδων Μ5.8

Διαγράμματα ελεύθερου σώματος

Το *πιο σημαντικό* βήμα στην επίλυση προβλημάτων με τους νόμους του Νεύτωνα είναι η σχεδίαση του διαγράμματος ελεύθερου σώματος. Βεβαιωθείτε ότι σχεδιάζετε μόνο εκείνες τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα το οποίο απομονώνετε. Βεβαιωθείτε ότι σχεδιάζετε όλες τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα, συμπεριλαμβανομένων και τυχόν δυνάμεων από απόσταση, όπως η βαρυτική δύναμη.

Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ5.3 Αν με σπρώξεις θα σε σπρώξω

Ένας μεγαλόσωμος άνδρας και ένα μικρό αγόρι στέκονται ο ένας απέναντι από τον άλλο πάνω σε μια παγωμένη επιφάνεια χωρίς τριβές. Σπρώχνουν δυνατά με τα χέρια τους ο ένας τον άλλο μέχρι να αρχίσουν να απομακρύνονται.

(Α) Ποιος απομακρύνεται πιο γρήγορα;

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω περίπτωση είναι παρόμοια με αυτή του Σύντομου ερωτήματος Μ5.5. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκεί ο άνδρας στο αγόρι και η δύναμη που ασκεί το αγόρι στον άνδρα αποτελούν ζεύγος δυνάμεων δράσης και αντίδρασης, άρα πρέπει να έχουν ίσα μέτρα. (Αν μπορούσαμε να μετρήσουμε τις δυνάμεις στα χέρια τους με έναν ζυγό, θα παίρναμε την ίδια ένδειξη, ανεξάρτητα από το ποια από τις δύο δυνάμεις καταγράφαμε.) Επομένως, επειδή το αγόρι έχει μικρότερη μάζα, θα έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση. Και οι δύο επιταχύνουν για το ίδιο χρονικό διάστημα, αλλά επειδή το αγόρι αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση μέσα σε αυτό το διάστημα, θα κινηθεί γρηγορότερα μετά την αλληλεπίδρασή τους.

(Β) Ποιος απομακρύνεται περισσότερο ενόσω τα χέρια τους βρίσκονται σε επαφή;

ΛΥΣΗ

Επειδή το αγόρι έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση και, άρα, μεγαλύτερη μέση ταχύτητα, απομακρύνεται περισσότερο από τον άνδρα κατά το χρονικό διάστημα που τα χέρια τους βρίσκονται σε επαφή.

Μ5.7 Μοντέλα ανάλυσης τα οποία βασίζονται στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε δύο μοντέλα ανάλυσης για να επιλύουμε προβλήματα στα οποία τα σώματα είτε βρίσκονται σε ισορροπία ($\vec{\mathbf{a}} = 0$) είτε επιταχύνουν ευθύγραμμα υπό την επίδραση σταθερών εξωτερικών δυνάμεων. Θυμηθείτε ότι όταν εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε ένα σώμα, μας ενδιαφέρουν μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σώμα. Αν τα σώματα έχουν μοντελοποιηθεί ως σωματίδια, αγνοούμε τυχόν περιστροφικές κινήσεις. Προς το παρόν, στα προβλήματα με κίνηση θα αγνοούμε και τις επιδράσεις της τριβής, δηλαδή θα θεωρούμε ότι οι επιφάνειες είναι *απολύτως λείες*. (Η δύναμη της τριβής περιγράφεται στην Ενότητα Μ5.8.)

Συνήθως αγνοούμε τη μάζα που έχουν τυχόν σκοινιά, νήματα, ή καλώδια. Στην παραπάνω προσέγγιση, το μέτρο της δύναμης που ασκεί κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός σκοινιού στο γειτονικό του τμήμα είναι ίδιο για όλα τα στοιχειώδη τμήματα κατά μήκος του σκοινιού. Οι συνώνυμοι όροι *αβαρές* και *αμελητέας μάζας* στις εκφωνήσεις προβλημάτων υποδεικνύουν ότι κατά την επίλυσή τους μπορείτε να αγνοήσετε τη μάζα κάποιου σώματος. Όταν ένα σώμα είναι προσδεδεμένο σε ένα σκοινί και έλκεται με αυτό, το σκοινί ασκεί μια δύναμη στο σώμα με διεύθυνση παράλληλη με το σκοινί και φορά από το σώμα προς το σκοινί. Το μέτρο T αυτής της δύναμης ονομάζεται **τάση** του σκοινιού. Η τάση είναι βαθμωτό μέγεθος επειδή είναι το μέτρο ενός διανυσματικού μεγέθους.

Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο σε ισορροπία

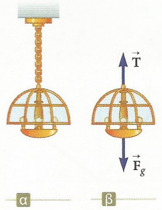
Αν η επιτάχυνση ενός σώματος που έχουμε μοντελοποιήσει ως σωματίδιο είναι μηδενική, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο τού **σωματιδίου σε ισορροπία**. Σε αυτό το μοντέλο, η συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα είναι μηδενική:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad \text{(Μ5.8)}$$

Θεωρήστε μια λάμπα που κρέμεται από μια αβαρή αλυσίδα στερεωμένη στην οροφή (Εικόνα Μ5.7α). Το διάγραμμα δυνάμεων για τη λάμπα (Εικ. Μ5.7β) δείχνει ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στη λάμπα είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$ με κατεύθυνση προς τα κάτω και η δύναμη που ασκεί η αλυσίδα $\vec{\mathbf{T}}$ με κατεύθυνση προς τα πάνω. Επειδή δεν ασκούνται δυνάμεις στη διεύθυνση του άξονα x, η σχέση $\sum F_x = 0$ δεν παρέχει κάποια χρήσιμη πληροφορία. Η συνθήκη $\sum F_y = 0$ δίνει

$$\sum F_y = T - F_g = 0 \text{ ή } T = F_g$$

Και πάλι, παρατηρήστε ότι οι δυνάμεις $\vec{\mathbf{T}}$ και $\vec{\mathbf{F}}_g$ *δεν* αποτελούν ζεύγος δυνάμεων δράσης-αντίδρασης επειδή ασκούνται στο ίδιο σώμα, δηλαδή τη λάμπα. Η αντίδραση στη δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ είναι μια δύναμη με κατεύθυνση προς τα κάτω την οποία ασκεί η λάμπα στην αλυσίδα.



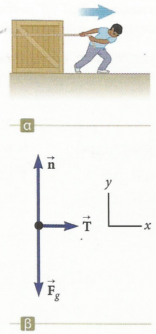
Εικόνα Μ5.7 (α) Μια λάμπα κρέμεται από την οροφή με αλυσίδα αμελητέας μάζας. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στη λάμπα είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$ και η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί η αλυσίδα.

Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης

Αν ένα σώμα επιταχύνει, τότε μπορούμε να αναλύσουμε την κίνησή του με το μοντέλο τού **σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης**. Η κατάλληλη εξίσωση για το μοντέλο αυτό είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, δηλαδή η Εξίσωση Μ5.2:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad \textbf{(M5.2)}$$

Θεωρήστε ένα αγόρι που τραβάει ένα κιβώτιο προς τα δεξιά πάνω σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές (Εικόνα Μ5.8α). Φυσικά, το δάπεδο κάτω από το αγόρι πρέπει να έχει τριβές· διαφορετικά, τα πόδια του απλώς θα γλιστρήσουν όταν προσπαθήσει να τραβήξει το κιβώτιο! Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση του κιβωτίου και τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο σε αυτό. Οι δυνάμεις που δρουν στο κιβώτιο φαίνονται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος στην Εικόνα Μ5.8β. Παρατηρήστε ότι η οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ ασκείται στο κιβώτιο μέσω του σκοινιού. Το μέτρο της $\vec{\mathbf{T}}$ είναι ίσο με την τάση του σκοινιού. Εκτός από τη δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$, το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το κιβώτιο περιλαμβάνει τη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g$ και την κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ που ασκεί το δάπεδο στο κιβώτιο.



Εικόνα Μ5.8 (α) Ένα αγόρι τραβάει ένα κιβώτιο προς τα δεξιά πάνω σε ένα δάπεδο χωρίς τριβές. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος αναπαριστά τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο κιβώτιο.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε στο κιβώτιο τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών. Η μόνη δύναμη που δρα στη διεύθυνση του άξονα x είναι η $\vec{\mathbf{T}}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση $\sum F_x = ma_x$ στην οριζόντια κίνηση παίρνουμε

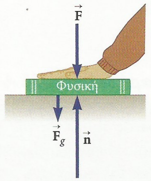
$$\sum F_x = T = ma_x \quad \text{ή} \quad a_x = \frac{T}{m}$$

Δεν υπάρχει επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα y επειδή το κιβώτιο κινείται μόνο οριζόντια. Επομένως, χρησιμοποιούμε το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία στη διεύθυνση του άξονα y. Εφαρμόζοντας τη συνιστώσα y της Εξίσωσης Μ5.8 παίρνουμε

$$\sum F_y = n + (-F_g) = 0 \quad \text{ή} \quad n = F_g$$

Δηλαδή, η κάθετη δύναμη έχει το ίδιο μέτρο με τη βαρυτική δύναμη αλλά αντίθετη κατεύθυνση.

Αν η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ είναι σταθερή, η επιτάχυνση $a_x = T/m$ θα είναι επίσης σταθερή. Άρα, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κιβώτιο ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα x και, επομένως, να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της κινηματικής από το Κεφάλαιο Μ2 για να υπολογίσουμε τη θέση x και την ταχύτητα v_x του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου.



Εικόνα Μ5.9 Όταν ένα σώμα ασκεί μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ κατακόρυφα προς τα κάτω σε ένα άλλο σώμα, τότε η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$ που ασκείται στο σώμα είναι μεγαλύτερη από τη βαρυτική δύναμη: $n = F_g + F$.

Στην περίπτωση που μόλις περιγράψαμε, το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{\mathbf{n}}$ ισούται με το μέτρο της βαρυτικής δύναμης $\vec{\mathbf{F}}_g$, αλλά, όπως επισημαίνουμε στην Αποφυγή παγίδων Μ5.6, αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα βιβλίο βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι και εσείς το σπρώχνετε προς τα κάτω ασκώντας δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.9. Επειδή το βιβλίο βρίσκεται σε ηρεμία και άρα δεν επιταχύνει, έχουμε $\Sigma F_y = 0$, το οποίο δίνει $n - F_g - F = 0$, ή $n = F_g + F = mg + F$. Στην περίπτωση αυτή, η κάθετη δύναμη είναι *μεγαλύτερη* από τη βαρυτική δύναμη. Αργότερα θα παρουσιάσουμε και άλλα παραδείγματα στα οποία ισχύει $n \neq F_g$.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Προτείνουμε να ακολουθείτε την εξής μέθοδο όταν λύνετε προβλήματα όπου πρέπει να εφαρμόσετε τους νόμους του Νεύτωνα:

1. **Μοντελοποίηση.** Σχεδιάστε ένα απλό αλλά σαφές διάγραμμα του συστήματος. Το διάγραμμα θα σας βοηθήσει να αναπαραστήσετε νοητικά το πρόβλημα. Ορίστε βολικούς άξονες συντεταγμένων για κάθε σώμα του συστήματος.

2. **Κατηγοριοποίηση.** Αν κάποια συνιστώσα της επιτάχυνσης για ένα σώμα είναι μηδενική, τότε το σώμα μοντελοποιείται ως σωματίδιο σε ισορροπία στη συγκεκριμένη διεύθυνση και $\Sigma F = 0$. Στην αντίθετη περίπτωση, το σώμα μοντελοποιείται ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στη συγκεκριμένη διεύθυνση και $\Sigma F = ma$.

3. **Ανάλυση.** Απομονώστε το σώμα την κίνηση του οποίου θέλετε να αναλύσετε. Σχεδιάστε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σώμα αυτό. Για συστήματα τα οποία περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα σώματα, σχεδιάστε *ξεχωριστά* διαγράμματα ελεύθερου σώματος για κάθε σώμα. *Μη* συμπεριλάβετε στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος τις δυνάμεις που ασκεί το σώμα στο περιβάλλον του.

   Βρείτε τις συνιστώσες των δυνάμεων κατά μήκος των αξόνων συντεταγμένων. Εφαρμόστε το κατάλληλο μοντέλο από το βήμα της Κατηγοριοποίησης για κάθε διεύθυνση. Ελέγξτε τις διαστάσεις για να βεβαιωθείτε ότι όλοι οι όροι έχουν μονάδες δύναμης.

   Λύστε τις εξισώσεις των συνιστωσών ως προς όλες τις άγνωστες μεταβλητές. Να θυμάστε γενικά ότι για να βρείτε την πλήρη λύση πρέπει να έχετε τόσες εξισώσεις όσες είναι οι άγνωστες μεταβλητές.

4. **Ολοκλήρωση.** Βεβαιωθείτε ότι τα αποτελέσματά σας συμφωνούν με το διάγραμμα ελεύθερου σώματος. Επίσης, ελέγξτε πώς διαμορφώνονται οι λύσεις σας όταν δίνετε ακραίες τιμές στις μεταβλητές. Με αυτόν τον τρόπο, μπορείτε συχνά να εντοπίζετε λάθη στα αποτελέσματά σας.

Παράδειγμα Μ5.4 Φωτεινός ακίνητος σηματοδότης

Φωτεινός σηματοδότης που ζυγίζει 122 N κρέμεται από συρματόσκοινο προσδεδεμένο σε δύο άλλα συρματόσκοινα, τα οποία είναι στερεωμένα σε οριζόντια δοκό (Εικόνα Μ5.10α). Τα πάνω συρματόσκοινα σχηματίζουν γωνίες 37.0° και 53.0° με την οριζόντιο. Αυτά τα δύο συρματόσκοινα δεν είναι τόσο ανθεκτικά όσο το κατακόρυφο συρματόσκοινο και θα σπάσουν αν η τάση σε αυτά υπερβεί τα 100 N. Σε αυτή την περίπτωση, θα συνεχίσει να κρέμεται ο σηματοδότης ή θα σπάσει ένα από τα συρματόσκοινα;

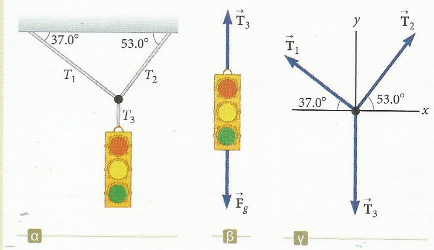
ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Εξετάστε το σχεδιάγραμμα στην Εικόνα Μ5.10α. Ας υποθέσουμε ότι τα συρματόσκοινα δεν σπάνε και ότι τίποτα δεν κινείται.

M5.4 *συν.*

Κατηγοριοποίηση Αν τίποτα δεν κινείται, κανένα τμήμα του συστήματος δεν επιταχύνει. Μπορούμε λοιπόν να μοντελοποιήσουμε τον σηματοδότη ως ένα σωματίδιο σε ισορροπία στο οποίο ασκείται μηδενική συνισταμένη δύναμη. Παρομοίως, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον κόμβο (Εικ. M5.10γ) είναι μηδενική.

Ανάλυση Σχεδιάζουμε το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται στον φωτεινό σηματοδότη (Εικ. M5.10β) και το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τον κόμβο που συγκρατεί τα τρία συρματόσκοινα (Εικ. M5.10γ). Μας διευκολύνει να επιλέξουμε τον κόμβο επειδή όλες οι δυνάμεις που μας ενδιαφέρουν έχουν κατευθύνσεις που διέρχονται από αυτόν.



Εικόνα M5.10 (Παράδειγμα M5.4) (α) Ένας φωτεινός σηματοδότης ο οποίος κρέμεται από συρματόσκοινα. (β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον φωτεινό σηματοδότη. (γ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τον κόμβο που συγκρατεί τα τρία συρματόσκοινα.

Εφαρμόστε την Εξίσωση M5.8 για τον σηματοδότη στη διεύθυνση του άξονα y:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_3 - F_g = 0$$
$$T_3 = F_g = 122 \text{ N}$$

Επιλέξτε τους άξονες συντεταγμένων όπως φαίνεται στην Εικόνα M5.10γ και βρείτε τις συνιστώσες των δυνάμεων που ασκούνται στον κόμβο:

Δύναμη	Συνιστώσα x	Συνιστώσα y
$\vec{T}_1$	$-T_1 \cos 37.0°$	$T_1 \sin 37.0°$
$\vec{T}_2$	$T_2 \cos 53.0°$	$T_2 \sin 53.0°$
$\vec{T}_3$	0	-122 N

Μοντελοποιήστε τον κόμβο ως σωματίδιο σε ισορροπία:

$$(1) \sum F_x = -T_1 \cos 37.0° + T_2 \cos 53.0° = 0$$
$$(2) \sum F_y = T_1 \sin 37.0° + T_2 \sin 53.0° + (-122 \text{ N}) = 0$$

Η Εξίσωση (1) δείχνει ότι οι οριζόντιες συνιστώσες των δυνάμεων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ πρέπει να έχουν ίσα μέτρα, και η Εξίσωση (2) δείχνει ότι το άθροισμα των κατακόρυφων συνιστωσών $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ πρέπει να εξισορροπεί τη δύναμη $\vec{T}_3$ με κατεύθυνση προς τα κάτω, η οποία έχει μέτρο ίσο με το βάρος του σηματοδότη.

Λύστε την Εξίσωση (1) ως προς T_2 συναρτήσει του T_1:

$$(3) \; T_2 = T_1\left(\frac{\cos 37.0°}{\cos 53.0°}\right) = 1.33 T_1$$

Αντικαταστήστε την τιμή T_2 στην Εξίσωση (2):

$$T_1 \sin 37.0° + (1.33 T_1)(\sin 53.0°) - 122 \text{ N} = 0$$
$$T_1 = 73.4 \text{ N}$$
$$T_2 = 1.33 T_1 = 97.4 \text{ N}$$

Οι δύο τιμές είναι μικρότερες από 100 N (οριακά επιτρεπτή για την τάση T_2), οπότε τα συρματόσκοινα δεν θα σπάσουν.

Ολοκλήρωση Για να ολοκληρώσουμε το πρόβλημα, ας φανταστούμε την εξής μεταβολή στο σύστημα.

ΚΙ ΑΝ...; Ας υποθέσουμε ότι οι δύο γωνίες στην Εικόνα M5.10α είναι ίσες. Ποια θα είναι η σχέση μεταξύ των T_1 και T_2;

Απάντηση Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι δύο τάσεις T_1 και T_2 είναι ίσες. Από μαθηματικής άποψης, αν συμβολίσουμε τις δύο ίσες γωνίες με θ, η Εξίσωση (3) γίνεται

$$T_2 = T_1\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right) = T_1$$

κάτι που επίσης μας λέει ότι οι τάσεις είναι ίσες. Αν δεν γνωρίζουμε την τιμή της γωνίας θ, δεν μπορούμε να βρούμε τις τιμές των τάσεων T_1 και T_2. Ωστόσο, οι τάσεις θα είναι ίσες, ανεξάρτητα από την τιμή του θ.

Εννοιολογικό Παράδειγμα **Μ5.5** Δυνάμεις μεταξύ των βαγονιών ενός συρμού

Τα βαγόνια των σιδηροδρομικών συρμών συνδέονται με μηχανισμούς σύνδεσης, που ονομάζονται ζεύκτες, στους οποίους ασκείται τάση όταν η μηχανή τραβάει τον συρμό. Φανταστείτε ότι είστε επιβάτης σε ένα τρένο που έχει σταθερή επιτάχυνση. Μετρώντας την τάση σε κάθε ομάδα ζευκτών, ξεκινώντας από τη μηχανή μέχρι το τελευταίο βαγόνι, διαπιστώνετε ότι η τάση αυξάνεται, μειώνεται, ή παραμένει ίδια; Όταν ο μηχανοδηγός φρενάρει, οι ζεύκτες υφίστανται θλίψη (συμπίεση). Πώς μεταβάλλεται αυτή η δύναμη συμπίεσης από τη μηχανή μέχρι το τελευταίο βαγόνι; (Υποθέστε ότι φρενάρουν μόνο οι τροχοί της μηχανής.)

ΛΥΣΗ

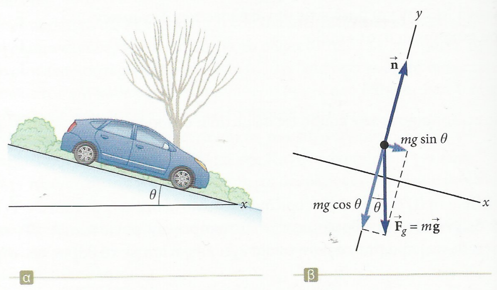
Καθώς το τρένο επιταχύνει, η τάση μειώνεται όσο προχωράτε προς το πίσω μέρος του συρμού. Ο ζεύκτης μεταξύ της μηχανής και του πρώτου βαγονιού πρέπει να ασκήσει αρκετή δύναμη για να επιταχύνει τα υπόλοιπα βαγόνια. Καθώς προχωράτε προς το πίσω μέρος του συρμού, κάθε ζεύκτης επιταχύνει μικρότερη μάζα πίσω από αυτόν. Ο τελευταίος ζεύκτης πρέπει να επιταχύνει μόνο το τελευταίο βαγόνι, οπότε δέχεται τη μικρότερη τάση.

Όταν ο μηχανοδηγός φρενάρει, η δύναμη μειώνεται ξανά από μπροστά προς τα πίσω. Ο ζεύκτης που συνδέει τη μηχανή με το πρώτο βαγόνι πρέπει να ασκήσει μεγάλη δύναμη για να επιβραδύνει τα υπόλοιπα βαγόνια, αλλά ο τελευταίος ζεύκτης πρέπει να εφαρμόσει δύναμη για να επιβραδύνει μόνο το τελευταίο βαγόνι.

Παράδειγμα **Μ5.6** Αυτοκίνητο εκτός ελέγχου

Αυτοκίνητο μάζας m βρίσκεται πάνω σε παγωμένο δρόμο με κλίση θ (Εικόνα Μ5.11α).

(Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου, υποθέτοντας ότι ο δρόμος δεν έχει τριβές.



Εικόνα Μ5.11 (Παράδειγμα Μ5.6) (α) Ένα αυτοκίνητο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβές. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το αυτοκίνητο. Η μαύρη τελεία αναπαριστά τη θέση του κέντρου μάζας του αυτοκινήτου. Θα μάθουμε περισσότερα για το κέντρο μάζας στο Κεφάλαιο Μ9.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με τη βοήθεια της Εικόνας Μ5.11α. Γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι ένα αυτοκίνητο το οποίο βρίσκεται σε έναν παγωμένο κατηφορικό δρόμο θα επιταχύνει προς τα κάτω. (Το ίδιο συμβαίνει και σε ένα αυτοκίνητο που βρίσκεται σε μια κατηφόρα όταν ο οδηγός δεν πατάει φρένο.)

Κατηγοριοποίηση Εφόσον το αυτοκίνητο επιταχύνει το κατηγοριοποιούμε ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Επιπλέον, το παράδειγμα αυτό ανήκει σε μια πολύ συνηθισμένη κατηγορία προβλημάτων, στα οποία ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας σε κεκλιμένο επίπεδο.

Ανάλυση Στην Εικόνα Μ5.11β φαίνεται το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το αυτοκίνητο. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο αυτοκίνητο είναι η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$, και η κατακόρυφη βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ με κατεύθυνση προς τα κάτω. Στα προβλήματα με κεκλιμένα επίπεδα, μας διευκολύνει να επιλέγουμε τους άξονες συντεταγμένων έτσι ώστε ο άξονας x να είναι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και ο άξονας y να είναι κάθετος προς αυτό (Εικόνα Μ5.11β). Σε αυτό το σύστημα αξόνων, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη βαρυτική δύναμη με μια συνιστώσα μέτρου $mg \sin\theta$ στον θετικό ημιάξονα x και μια συνιστώσα μέτρου $mg \cos\theta$ στον αρνητικό άξονα y. Η επιλογή των αξόνων μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στη διεύθυνση του άξονα x και ως σωματίδιο σε ισορροπία στη διεύθυνση του άξονα y.

Μ5.6 *συν.*

Εφαρμόστε τα μοντέλα αυτά στο αυτοκίνητο: (1) $\sum F_x = mg\sin\theta = ma_x$

(2) $\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$

Λύστε την Εξίσωση (1) ως προς a_x: (3) $a_x = \boxed{g\sin\theta}$

Ολοκλήρωση Προσέξτε ότι η συνιστώσα a_x της επιτάχυνσης είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του αυτοκινήτου! Εξαρτάται μόνο από τη γωνία της κλίσης και από το g.

Από την Εξίσωση (2), συμπεραίνουμε ότι η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσα τής $\vec{\mathbf{F}}_g$ εξισορροπείται από την κάθετη δύναμη· δηλαδή, ότι $n = mg\cos\theta$. Πρόκειται για μία ακόμα περίπτωση όπου το μέτρο της κάθετης δύναμης *δεν* είναι ίσο με το βάρος του σώματος.

Είναι εφικτό, αν και πιο δύσκολο, να λύσετε το πρόβλημα με «κανονικούς» οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες. Μπορείτε, αν θέλετε, να το επιχειρήσετε για εξάσκηση.

(Β) Υποθέστε ότι αφήνουμε το αυτοκίνητο από κατάσταση ηρεμίας στην κορυφή της κατηφόρας και ότι η απόσταση του μπροστινού προφυλακτήρα από το τέλος της κατηφόρας είναι d. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει ο προφυλακτήρας στο τέλος της κατηφόρας, και πόσο γρήγορα θα κινείται το αυτοκίνητο όταν θα φτάσει εκεί;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι το αυτοκίνητο ολισθαίνει προς τα κάτω και ότι μετράτε με ένα χρονόμετρο τον χρόνο μέχρι να φτάσει στο τέλος της κατηφόρας.

Κατηγοριοποίηση Αυτό το μέρος του προβλήματος ανήκει περισσότερο στην κινηματική παρά στη δυναμική, και η Εξίσωση (3) δείχνει ότι η επιτάχυνση a_x είναι σταθερή. Συνεπώς, σε αυτό το ερώτημα πρέπει να μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Ανάλυση Ορίζοντας την αρχική θέση του μπροστινού προφυλακτήρα ως $x_i = 0$, την τελική θέση ως $x_f = d$, και $v_{xi} = 0$, εφαρμόστε την Εξίσωση Μ2.16, $x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$: $d = \frac{1}{2}a_x t^2$

Λύστε ως προς t: (4) $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a_x}} = \boxed{\sqrt{\dfrac{2d}{g\sin\theta}}}$

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.17, με $v_{xi} = 0$, για να βρείτε την τελική ταχύτητα του αυτοκινήτου: $v_{xf}{}^2 = 2a_x d$

(5) $v_{xf} = \sqrt{2a_x d} = \boxed{\sqrt{2gd\sin\theta}}$

Ολοκλήρωση Από τις Εξισώσεις (4) και (5) βλέπουμε ότι, σε αντίθεση με την επιτάχυνση, η χρονική στιγμή t κατά την οποία το αυτοκίνητο φτάνει στο τέλος της κατηφόρας, καθώς και το μέτρο της τελικής ταχύτητας v_{xf} δεν εξαρτώνται από τη μάζα του αυτοκινήτου. Παρατηρήστε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα συνδυάσαμε τεχνικές από το Κεφάλαιο Μ2 με νέες τεχνικές από το τρέχον κεφάλαιο. Καθώς θα μαθαίνουμε περισσότερες τεχνικές στα επόμενα κεφάλαια, θα συνδυάζουμε μοντέλα ανάλυσης και πληροφορίες από διάφορα μέρη του βιβλίου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, να χρησιμοποιείτε τη «Γενική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων» για να προσδιορίζετε τα μοντέλα ανάλυσης που θα χρειαστείτε.

ΚΙ ΑΝ...; Σε ποιο πρόβλημα που έχετε ήδη λύσει ανάγεται η παρούσα κατάσταση αν $\theta = 90°$;

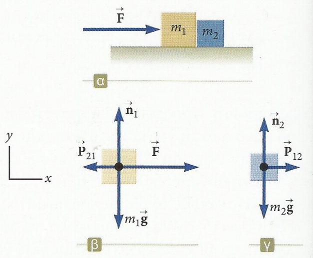
Απάντηση Φανταστείτε τη γωνία θ στην Εικόνα Μ5.11 να γίνεται 90°. Το κεκλιμένο επίπεδο γίνεται κατακόρυφο, και το αυτοκίνητο μετατρέπεται σε σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση! Η Εξίσωση (3) γίνεται

$$a_x = g\sin\theta = g\sin 90° = g$$

που είναι πράγματι η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης. (Βρίσκουμε $a_x = g$ αντί για $a_x = -g$ επειδή στην Εικ. Μ5.11 ο θετικός άξονας x έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.) Παρατηρήστε ακόμα ότι η συνθήκη $n = mg\cos\theta$ δίνει $n = mg\cos 90° = 0$. Αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι το αυτοκίνητο πέφτει *παράλληλα με* το κατακόρυφο επίπεδο, καθώς σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει δύναμη επαφής μεταξύ αυτοκινήτου και επιπέδου.

Παράδειγμα Μ5.7 Ο ένας κύβος σπρώχνει τον άλλο

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2, όπου $m_1 > m_2$, βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές (Δυναμική Εικόνα Μ5.12α). Στον κύβο μάζας m_1 ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ όπως φαίνεται στην εικόνα.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ5.12

(Παράδειγμα Μ5.7) (α) Μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ ασκείται στον κύβο μάζας m_1, ο οποίος ωθεί ένα δεύτερο κύβο μάζας m_2. (β) Οι δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_1. (γ) Οι δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_2.

(Α) Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του συστήματος.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Από τη Δυναμική Εικόνα Μ5.12α συνειδητοποιούμε ότι, εφόσον οι δύο κύβοι βρίσκονται σε επαφή καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, θα πρέπει να έχουν την *ίδια* επιτάχυνση.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον στο σύστημα των κύβων ασκείται μια συνισταμένη δύναμη και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση του συστήματος, κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Καταρχήν μοντελοποιούμε το σύμπλεγμα των δύο κύβων ως ένα σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Εφαρμόζουμε στο σύστημα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη διεύθυνση του άξονα x για να βρούμε την επιτάχυνση:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$(1)\quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση που δίνει η Εξίσωση (1) είναι η επιτάχυνση ενός σώματος με μάζα $m_1 + m_2$ το οποίο δέχεται την ίδια δύναμη F.

(Β) Προσδιορίστε το μέτρο της δύναμης επαφής μεταξύ των δύο κύβων.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η δύναμη επαφής είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος των δύο κύβων. Επομένως, δεν μπορούμε να βρούμε τη δύναμη αυτή μοντελοποιώντας ολόκληρο το σύστημα (τα δύο σώματα) ως ένα σωματίδιο.

Κατηγοριοποίηση Ας θεωρήσουμε τους δύο κύβους χωριστά κατηγοριοποιώντας τον καθένα από αυτούς ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Κατασκευάζουμε το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται σε καθέναν από τους δύο κύβους όπως φαίνεται στις Δυναμικές Εικόνες Μ5.12β και Μ5.12γ, όπου η δύναμη επαφής συμβολίζεται με $\vec{\mathbf{P}}$. Από τη Δυναμική Εικόνα Μ5.12γ, βλέπουμε ότι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στη μάζα m_2 είναι η δύναμη επαφής $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ (η δύναμη που ασκεί η μάζα m_1 στην m_2), η οποία έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη μάζα m_2:

$$(2)\quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Αντικαταστήστε την τιμή της επιτάχυνσης a_x που δίνεται από την Εξίσωση (1) στην Εξίσωση (2):

$$(3)\quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Ολοκλήρωση Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η δύναμη επαφής P_{12} είναι *μικρότερη* από την ασκούμενη δύναμη F. Η δύναμη που απαιτείται για να επιταχυνθεί μόνο ο κύβος 2 πρέπει να είναι μικρότερη από τη δύναμη που χρειάζεται για να επιτευχθεί η ίδια επιτάχυνση στο σύστημα των δύο κύβων.

Μ5.7 *συν.*

Για να ολοκληρώσουμε, ας ελέγξουμε την παραπάνω σχέση ως προς P_{12}, εξετάζοντας τις δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_1, οι οποίες φαίνονται στη Δυναμική Εικόνα Μ5.12β. Οι οριζόντιες δυνάμεις που δρουν στη μάζα m_1 είναι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά και η δύναμη από επαφή $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά (η δύναμη που ασκεί η μάζα m_2 στην m_1). Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ είναι η αντίδραση της $\vec{\mathbf{P}}_{12}$, άρα $P_{21} = P_{12}$.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην m_1:

$$(4) \quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Λύστε ως προς P_{12} και αντικαταστήστε την τιμή της a_x από την Εξίσωση (1):

$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Το αποτέλεσμα, όπως ήταν αναμενόμενο, συμφωνεί με την Εξίσωση (3).

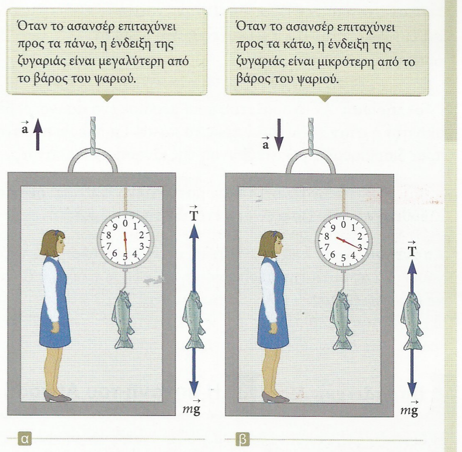
ΚΙ ΑΝ...; Φανταστείτε ότι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στην Δυναμική Εικόνα Μ5.12 ασκείται προς τα αριστερά στον δεξιό κύβο με μάζα m_2. Είναι το μέτρο της δύναμης $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ ίδιο όπως στην περίπτωση που η δύναμη ασκείται προς τα δεξιά στη μάζα m_1;

Απάντηση Όταν η δύναμη ασκείται προς τα αριστερά στη μάζα m_2, η δύναμη επαφής πρέπει να επιταχύνει τη μάζα m_1. Στο αρχικό πρόβλημα, η δύναμη επαφής επιταχύνει τη μάζα m_2. Επειδή ισχύει $m_1 > m_2$, απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη, άρα το μέτρο της $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ είναι μεγαλύτερο από ό,τι στο αρχικό πρόβλημα.

Παράδειγμα Μ5.8 Ζυγίζοντας ψάρια στο ασανσέρ

Κάποιος ζυγίζει ένα ψάρι μάζας m χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά ελατηρίου που είναι στερεωμένη στην οροφή ενός ασανσέρ (Εικόνα Μ5.13).

(Α) Δείξτε ότι αν το ασανσέρ επιταχύνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω, η ένδειξη της ζυγαριάς ελατηρίου θα είναι διαφορετική από το βάρος του ψαριού.



Εικόνα Μ5.13 (Παράδειγμα Μ5.8) Ζύγισμα ενός ψαριού με ζυγαριά ελατηρίου μέσα σε ένα επιταχυνόμενο ασανσέρ.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η ένδειξη της ζυγαριάς συνδέεται με την επιμήκυνση του ελατηρίου της, η οποία σχετίζεται με τη δύναμη που ασκείται στο άκρο του ελατηρίου (Εικόνα Μ5.2). Φανταστείτε ότι το ψάρι κρέμεται από έναν σπάγκο ο οποίος είναι δεμένος στο άκρο του ελατηρίου. Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο ελατήριο είναι ίσο με την τάση T στον σπάγκο. Άρα, πρέπει να βρούμε την τάση T. Η τάση $\vec{\mathbf{T}}$, η οποία αναπτύσσεται στο ελατήριο, έλκει το ψάρι προς τα επάνω.

Κατηγοριοποίηση Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρώντας το ψάρι ως σωματίδιο υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Εξετάστε τα διαγράμματα των δυνάμεων που ασκούνται στο ψάρι στην Εικόνα Μ5.13 και παρατηρήστε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο ψάρι είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ και η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ που ασκεί ο σπάγκος. Αν το ασανσέρ είναι ακίνητο ή αν κινείται με σταθερή ταχύτητα, θεωρούμε ότι το ψάρι είναι σωματίδιο σε ισορροπία, οπότε $\sum F_y = T - F_g = 0$ ή $T = F_g = mg$. (Θυμηθείτε ότι η βαθμωτή ποσότητα mg είναι το βάρος του ψαριού.)

συνεχίζεται

Μ5.8 *συν.*

Υποθέστε τώρα ότι το ασανσέρ κινείται με επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται έξω από αυτό σε ένα αδρανειακό σύστημα. Τώρα θεωρούμε το ψάρι ως σωματίδιο υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο ψάρι: $\sum F_y = T - mg = ma_y$

Λύστε ως προς T: $$(1)\quad T = ma_y + mg = mg\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right)$$

όπου ο άξονας y έχει θετική κατεύθυνση προς τα πάνω. Από την Εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι, αν η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω, τότε η συνιστώσα της a_y είναι θετική (Εικ. Μ5.13α) και η ένδειξη που δίνει η ζυγαριά για την τάση T είναι μεγαλύτερη από το βάρος mg του ψαριού· επίσης, αν η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, τότε η συνιστώσα της a_y είναι αρνητική (Εικ. Μ5.13β), και η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μικρότερη από το βάρος mg.

(Β) Υπολογίστε τις ενδείξεις της ζυγαριάς για ένα ψάρι βάρους 40.0 N όταν το ασανσέρ κινείται με επιτάχυνση $a_y = \pm 2.00\ \text{m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

Υπολογίστε από την Εξίσωση (1) την ένδειξη της ζυγαριάς όταν η $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω: $$T = (40.0\ \text{N})\left(\frac{2.00\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} + 1\right) = \boxed{48.2\ \text{N}}$$

Υπολογίστε από την Εξίσωση (1) την ένδειξη της ζυγαριάς όταν η $\vec{\mathbf{a}}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω: $$T = (40.0\ \text{N})\left(\frac{-2.00\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} + 1\right) = \boxed{31.8\ \text{N}}$$

Ολοκλήρωση Αν αγοράζετε ψάρια μέσα σε ένα ασανσέρ, βεβαιωθείτε ότι τα ψάρια ζυγίζονται όταν το ασανσέρ είναι ακίνητο ή όταν επιταχύνει προς τα κάτω! Επιπλέον, παρατηρήστε ότι με τα δεδομένα που έχουμε, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της κίνησης του ασανσέρ.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι το συρματόσκοινο του ασανσέρ σπάει και το ασανσέρ μαζί με το περιεχόμενό του εκτελούν ελεύθερη πτώση. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;

Απάντηση Αν το ασανσέρ εκτελεί ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνσή του είναι $a_y = -g$. Από την Εξίσωση (1) διαπιστώνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η ένδειξη που δίνει η ζυγαριά για την τάση T είναι μηδέν· δηλαδή, το ψάρι *φαίνεται* να μην έχει βάρος.

Παράδειγμα Μ5.9 Η μηχανή του Atwood

Η διάταξη στην οποία δύο σώματα με άνισες μάζες κρέμονται κατακόρυφα από μια τροχαλία αμελητέας μάζας χωρίς τριβές (Δυναμική Εικόνα Μ5.14α) ονομάζεται *μηχανή του Atwood*. Η συσκευή αυτή χρησιμοποιείται μερικές φορές στο εργαστήριο για τον προσδιορισμό της τιμής του g. Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο σωμάτων και την τάση στο αβαρές νήμα.

ΛΥΣΗ

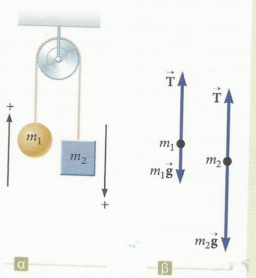
Μοντελοποίηση Φανταστείτε στην πράξη την κατάσταση που παρουσιάζεται στη Δυναμική Εικόνα Μ5.14α: καθώς το ένα σώμα κινείται προς τα πάνω, το άλλο σώμα κινείται προς τα κάτω. Εφόσον τα σώματα συνδέονται με ένα μη εκτατό νήμα, οι επιταχύνσεις τους πρέπει να έχουν ίσα μέτρα.

M5.9 συν.

Κατηγοριοποίηση Τα σώματα στη μηχανή του Atwood δέχονται τη βαρυτική δύναμη, καθώς και τις δυνάμεις που ασκούν τα νήματα που συνδέονται με αυτά. Άρα, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα δύο σωματιδίων υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα φαίνονται στη Δυναμική Εικόνα M5.14β. Σε κάθε σώμα δρουν δύο δυνάμεις: η δύναμη $\vec{T}$ που ασκεί το νήμα με κατεύθυνση προς τα πάνω και η δύναμη που ασκεί η βαρύτητα με κατεύθυνση προς τα κάτω. Σε προβλήματα όπως αυτά, όπου η τροχαλία δεν έχει μάζα και τριβές, η τάση του νήματος και στις δύο πλευρές της τροχαλίας είναι ίδια. Αν η τροχαλία έχει μάζα ή υφίσταται τριβές, οι τάσεις στις δύο πλευρές δεν θα είναι ίδιες και για την επίλυση του προβλήματος θα απαιτηθούν τεχνικές που θα μάθουμε στο Κεφάλαιο M10.

Σε προβλήματα όπως αυτό θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με τα πρόσημα. Στη Δυναμική Εικόνα M5.14α, παρατηρήστε ότι αν το σώμα 1 επιταχύνει προς τα πάνω, το σώμα 2 θα επιταχύνει προς τα κάτω. Συνεπώς, για να έχουμε συνέπεια στα πρόσημα, αν ορίσουμε την κατεύθυνση προς τα πάνω ως θετική για το σώμα 1, πρέπει να ορίσουμε την κατεύθυνση προς τα κάτω ως θετική για το σώμα 2. Με βάση αυτή τη σύμβαση για το πρόσημο, και τα δύο σώματα επιταχύνουν προς την ίδια κατεύθυνση. Επιπλέον, η συνιστώσα y της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα 1 είναι $T - m_1 g$, ενώ η συνιστώσα y της συνισταμένης δύναμη που ασκείται στο σώμα 2 είναι $m_2 g - T$.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ M5.14

(Παράδειγμα M5.9) Η μηχανή του Atwood. (α) Δύο σώματα τα οποία συνδέονται με ένα μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας που διέρχεται από μια τροχαλία χωρίς τριβές. (β) Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα.

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο σώμα 1:

$$(1)\ \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y$$

Εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο σώμα 2:

$$(2)\ \sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_y$$

Προσθέστε την Εξίσωση (2) στην Εξίσωση (1), παρατηρώντας ότι η τάση T απαλείφεται:

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a_y + m_2 a_y$$

Λύστε ως προς την επιτάχυνση:

$$(3)\ a_y = \boxed{\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g}$$

Αντικαταστήστε την Εξίσωση (3) στην Εξίσωση (1) για να βρείτε το T:

$$(4)\ T = m_1(g + a_y) = \boxed{\left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g}$$

Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση που δίνει η Εξίσωση (3) μπορεί να ερμηνευτεί ως ο λόγος του μέτρου της μη μηδενικής δύναμης που δέχεται το σύστημα $(m_2 - m_1)g$ προς τη συνολική μάζα του συστήματος $(m_1 + m_2)$, όπως προβλέπει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Παρατηρήστε ότι το πρόσημο της επιτάχυνσης εξαρτάται από τη διαφορά των μαζών των δύο σωμάτων.

ΚΙ ΑΝ...; Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος αν τα σώματα έχουν ίσες μάζες, δηλαδή αν ισχύει $m_1 = m_2$.

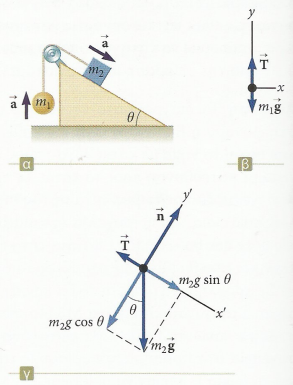
Απάντηση Αν έχουμε ίδια μάζα και στις δύο πλευρές της τροχαλίας, το σύστημα ισορροπεί και δεν πρέπει να επιταχύνει. Από μαθηματικής άποψης, βλέπουμε ότι αν ισχύει $m_1 = m_2$, τότε η Εξίσωση (3) δίνει $a_y = 0$.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν μία από τις μάζες είναι πολύ μεγαλύτερη από την άλλη: $m_1 >> m_2$;

Απάντηση Στην περίπτωση που η μια μάζα είναι απείρως μεγαλύτερη από την άλλη, μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της μικρότερης μάζας. Συνεπώς, η μεγαλύτερη μάζα θα εκτελέσει ελεύθερη πτώση σαν μην υπήρχε η μικρότερη μάζα. Βλέπουμε ότι αν ισχύει $m_1 >> m_2$, τότε η Εξίσωση (3) δίνει $a_y = -g$.

Παράδειγμα Μ5.10 Επιτάχυνση δύο σωμάτων που συνδέονται με νήμα

Μια σφαίρα μάζας m_1 και ένας κύβος μάζας m_2 συνδέονται με αβαρές νήμα που διέρχεται γύρω από τροχαλία αμελητέας μάζας χωρίς τριβές (Εικόνα Μ5.15α). Ο κύβος βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ το οποίο δεν έχει τριβές. Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο σωμάτων και την τάση του νήματος.



Εικόνα Μ5.15 (Παράδειγμα Μ5.10) (α) Δύο σώματα τα οποία συνδέονται με ένα αβαρές νήμα που διέρχεται από μια τροχαλία χωρίς τριβές. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη σφαίρα. (γ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τον κύβο. (Το κεκλιμένο επίπεδο δεν έχει τριβές.)

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε τα σώματα στην Εικόνα Μ5.15 να κινούνται. Αν η μάζα m_2 κινείται προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε η m_1 κινείται προς τα πάνω. Επειδή τα σώματα συνδέονται με νήμα (το οποίο θεωρούμε ότι είναι μη εκτατό), οι επιταχύνσεις τους έχουν το ίδιο μέτρο.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε καθένα από τα δύο σώματα και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση, κατηγοριοποιούμε τα σώματα ως σωματίδια υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Θεωρήστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος που φαίνονται στις Εικόνες Μ5.15β και Μ5.15γ.

Εφαρμόστε στη σφαίρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών, επιλέγοντας ως θετική κατεύθυνση την κατακόρυφη κατεύθυνση προς τα πάνω:

$$(1)\quad \sum F_x = 0$$

$$(2)\quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Για να επιταχυνθεί η σφαίρα προς τα πάνω, πρέπει να ισχύει $T > m_1 g$. Στην Εξίσωση (2), αντικαταστήσαμε το a_y με το a επειδή η επιτάχυνση έχει μόνο συνιστώσα y.

Για τον κύβο, μας διευκολύνει να επιλέξουμε ως θετική κατεύθυνση του άξονα x' την κατεύθυνση παράλληλα και προς τα δεξιά του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ5.15γ. Επίσης, για να είμαστε συνεπείς με την επιλογή μας για την κατεύθυνση της σφαίρας, επιλέγουμε ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση παράλληλα και προς τα δεξιά του κεκλιμένου επιπέδου.

Εφαρμόστε στον κύβο τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών:

$$(3)\quad \sum F_{x'} = m_2 g \sin\theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$(4)\quad \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos\theta = 0$$

Στην Εξίσωση (3), αντικαταστήσαμε το $a_{x'}$ με το a επειδή τα δύο σώματα έχουν επιταχύνσεις ίδιου μέτρου a.

Λύστε την Εξίσωση (2) ως προς T:

$$(5)\quad T = m_1(g + a)$$

Αντικαταστήστε αυτή τη σχέση για το T στην Εξίσωση (3):

$$m_2 g \sin\theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

Λύστε ως προς a:

$$(6)\quad \boxed{a = \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2}\right) g}$$

Αντικαταστήστε αυτή τη σχέση για το a στην Εξίσωση (5) για να βρείτε το T:

$$(7)\quad \boxed{T = \left(\frac{m_1 m_2(\sin\theta + 1)}{m_1 + m_2}\right) g}$$

M5.10 συν.

Ολοκλήρωση Ο κύβος επιταχύνει προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο μόνο αν $m_2 \sin\theta > m_1$. Αν $m_1 > m_2 \sin\theta$, ο κύβος επιταχύνει προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και η σφαίρα επιταχύνει προς τα κάτω. Επίσης, παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα για την επιτάχυνση, δηλαδή η Εξίσωση (6), μπορεί να ερμηνευτεί ως το πηλίκο του μέτρου της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης, που δρα στο σύστημα σφαίρας-κύβου, προς τη συνολική μάζα του συστήματος· αυτό συμφωνεί με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν ισχύει $\theta = 90°$;

Απάντηση Αν $\theta = 90°$, το κεκλιμένο επίπεδο γίνεται κατακόρυφο και δεν υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στην επιφάνειά του και τη μάζα m_2. Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα της μηχανής του Atwood που είδαμε στο Παράδειγμα M5.9. Για $\theta \to 90°$, οι Εξισώσεις (6) και (7) ανάγονται στις Εξισώσεις (3) και (4) του Παραδείγματος M5.9!

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν ισχύει $m_1 = 0$;

Απάντηση Αν $m_1 = 0$, τότε η μάζα m_2 θα ολισθήσει προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να αλληλεπιδράσει με την m_1 μέσω του νήματος. Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα του αυτοκινήτου που ολισθαίνει, το οποίο είδαμε στο Παράδειγμα M5.6. Για $m_1 \to 0$, η Εξίσωση (6) ανάγεται στην Εξίσωση (3) του Παραδείγματος M5.6!

M5.8 Δυνάμεις τριβής

Όταν ένα σώμα κινείται πάνω σε μια επιφάνεια ή μέσα σε ένα ιξώδες μέσο, όπως είναι ο αέρας ή το νερό, συναντά αντίσταση στην κίνησή του επειδή αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του. Η αντίσταση αυτή ονομάζεται **δύναμη τριβής.** Οι δυνάμεις τριβής παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην καθημερινή μας ζωή. Μας επιτρέπουν να περπατάμε ή να τρέχουμε και είναι απαραίτητες για την κίνηση των τροχοφόρων οχημάτων.

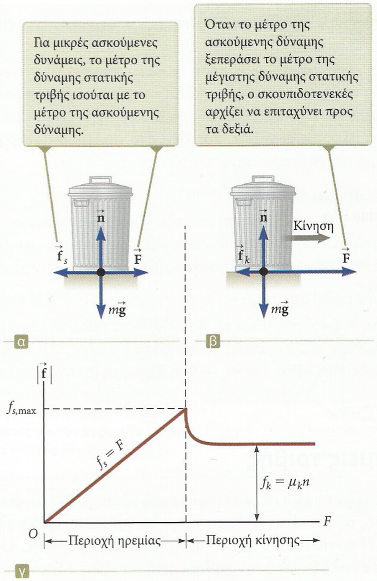
Φανταστείτε ότι δουλεύετε στον κήπο σας και έχετε γεμίσει τον σκουπιδοτενεκέ με κομμένο γρασίδι. Στη συνέχεια προσπαθείτε να σύρετε τον σκουπιδοτενεκέ πάνω στη στρωμένη με τσιμέντο αυλή σας (Δυναμική Εικόνα M5.16α). Αυτή η επιφάνεια είναι *πραγματική*, και όχι μια ιδανική επιφάνεια χωρίς τριβές. Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζετε μια εξωτερική οριζόντια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στον σκουπιδοτενεκέ με κατεύθυνση προς τα δεξιά· αν η τιμή της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$ είναι μικρή, ο σκουπιδοτενεκές θα παραμείνει ακίνητος. Η δύναμη στον σκουπιδοτενεκέ, η οποία εξουδετερώνει την $\vec{\mathbf{F}}$ και δεν του επιτρέπει να κινηθεί, δρα προς τα αριστερά και ονομάζεται **δύναμη στατικής τριβής** $\vec{\mathbf{f}}_s$. Όταν ο σκουπιδοτενεκές δεν κινείται, ισχύει $f_s = F$. Συνεπώς, αν αυξηθεί η $\vec{\mathbf{F}}$ θα αυξηθεί και η $\vec{\mathbf{f}}_s$. Παρομοίως, αν μειωθεί η $\vec{\mathbf{F}}$ θα μειωθεί και η $\vec{\mathbf{f}}_s$.

◀ **Δύναμη στατικής τριβής**

Πειράματα δείχνουν ότι η δύναμη τριβής προκύπτει από τη φύση των δύο επιφανειών: λόγω της τραχύτητάς τους, οι επιφάνειες έρχονται σε επαφή μόνο σε ορισμένα σημεία, εκεί δηλαδή όπου συναντώνται οι προεξοχές των δύο υλικών. Σε αυτά τα σημεία, η δύναμη τριβής προκύπτει εν μέρει επειδή οι προεξοχές της μίας επιφάνειας εμποδίζουν την κίνηση των προεξοχών της άλλης επιφάνειας και εν μέρει εξαιτίας των χημικών δεσμών («σημειακών συγκολλήσεων») που δημιουργούνται στα σημεία επαφής των προεξοχών των δύο επιφανειών. Παρότι ο μηχανισμός ανάπτυξης των δυνάμεων τριβής σε ατομικό επίπεδο είναι αρκετά περίπλοκος, ουσιαστικά μπορούμε να πούμε ότι οφείλονται στην ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων ή μορίων.

Αν συνεχίσετε να αυξάνετε το μέτρο της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$, όπως φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα M5.16β, κάποια στιγμή ο σκουπιδοτενεκές θα αρχίσει να ολισθαίνει. Λίγο πριν αρχίσει να ολισθαίνει ο σκουπιδοτενεκές, η f_s παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f_{s,\max}$ (Δυναμική Εικόνα M5.16γ). Μόλις η F γίνει μεγαλύτερη από την $f_{s,\max}$, ο σκουπιδοτενεκές αρχίζει να κινείται και επιταχύνει προς τα δεξιά. Όταν ένα σώμα κινείται, η δύναμη τριβής που ασκείται σε αυτό ονομάζεται **δύναμη τριβής ολίσθησης** $\vec{\mathbf{f}}_k$. Όταν ο σκουπιδοτενεκές κινείται, η δύναμη τριβής ολίσθησης που ασκείται σε αυτόν είναι μικρότερη από τη μέγιστη δύναμη στατικής τριβής $f_{s,\max}$ (Δυναμική Εικ. M5.16γ). Η συνισταμένη δύναμη $F - f_k$ στη διεύθυνση του άξονα x προκαλεί επιτάχυνση προς τα δεξιά, σύμ-

◀ **Δύναμη τριβής ολίσθησης**



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ5.16

(α) και (β) Όταν τραβάτε έναν σκουπιδοτενεκέ, η κατεύθυνση της δύναμης τριβής $\vec{\mathbf{f}}$ η οποία αναπτύσσεται μεταξύ του σκουπιδοτενεκέ και μιας τραχιάς επιφάνειας έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ασκούμενη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$. (γ) Το γράφημα της δύναμης τριβής προς την ασκούμενη δύναμη. Παρατηρήστε ότι ισχύει $f_{s,\max} > f_k$.

φωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Αν ισχύει $F = f_k$, τότε η επιτάχυνση είναι μηδενική και ο σκουπιδοτενεκές κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Αν η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ σταματήσει να ασκείται στον κινούμενο τενεκέ, τότε η δύναμη τριβής $\vec{\mathbf{f}}_k$ που δρα προς τα αριστερά προκαλεί επιτάχυνση του σκουπιδοτενεκέ στην κατεύθυνση του άξονα $-x$ και τελικά τον ακινητοποιεί, πάντα σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Πειραματικά, βρίσκουμε κατά προσέγγιση ότι οι $f_{s,\max}$ και f_k είναι ανάλογες προς το μέτρο της κάθετης δύναμης που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα. Οι παρακάτω περιγραφές βασίζονται σε πειραματικές παρατηρήσεις και αποτελούν το μοντέλο των δυνάμεων τριβής που θα χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση προβλημάτων:

- Το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής μεταξύ δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή μπορεί να πάρει τις τιμές

$$f_s \le \mu_s n \qquad \textbf{(M5.9)}$$

  όπου η αδιάστατη σταθερά μ_s ονομάζεται **συντελεστής στατικής τριβής** και το n είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης που ασκεί η μία επιφάνεια στην άλλη. Η ισότητα στην Εξίσωση Μ5.9 ισχύει λίγο πριν επιφάνειες αρχίσουν να ολισθαίνουν, δηλαδή όταν $f_s = f_{s,\max} = \mu_s n$. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται *κατάσταση επικείμενης κίνησης*. Σε κάθε άλλη περίπτωση, ισχύει η ανισότητα.

- Το μέτρο της δύναμης της τριβής ολίσθησης μεταξύ δύο επιφανειών είναι

$$f_k = \mu_k n \qquad \textbf{(M5.10)}$$

Αποφυγή παγίδων Μ5.9

Η ισότητα ισχύει σε λίγες περιπτώσεις

Στην Εξίσωση Μ5.9, η ισότητα ισχύει *μόνο* στην περίπτωση που οι επιφάνειες έτοιμες να ολισθήσουν. Μην πέσετε στη συνηθισμένη παγίδα να θεωρήσετε ότι η σχέση $f_s = \mu_s n$ ισχύει σε *κάθε* στατική περίπτωση.

Αποφυγή παγίδων Μ5.10

Εξισώσεις τριβής

Οι Εξισώσεις Μ5.9 και Μ5.10 *δεν* είναι διανυσματικές εξισώσεις. Είναι σχέσεις οι οποίες συνδέουν τα *μέτρα* των διανυσμάτων της δύναμης τριβής και της κάθετης δύναμης. Επειδή η δύναμη τριβής και η κάθετη δύναμη είναι κάθετες μεταξύ τους, τα διανύσματα δεν μπορούν να σχετίζονται μέσω κάποιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς.

ΠΙΝΑΚΑΣ M5.1 *Συντελεστές τριβής*

	μ_s	μ_k
Λάστιχο με μπετόν	1.0	0.8
Χάλυβας με χάλυβα	0.74	0.57
Αλουμίνιο με χάλυβα	0.61	0.47
Γυαλί με γυαλί	0.94	0.4
Χαλκός με χάλυβα	0.53	0.36
Ξύλο με ξύλο	0.25–0.5	0.2
Κερωμένο ξύλο με υγρό χιόνι	0.14	0.1
Κερωμένο ξύλο με ξηρό χιόνι	—	0.04
Μέταλλο με μέταλλο (που έχει λιπαντικό)	0.15	0.06
Τεφλόν με τεφλόν	0.04	0.04
Πάγος με πάγο	0.1	0.03
Ανθρώπινες αρθρώσεις	0.01	0.003

Σημείωση: Όλες οι τιμές είναι προσεγγιστικές. Σε μερικές περιπτώσεις, ο συντελεστής τριβής είναι μεγαλύτερος από 1.0.

όπου το μ_k ονομάζεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**. Αν και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μπορεί να μεταβάλλεται με το μέτρο της ταχύτητας, στο παρόν βιβλίο συνήθως θα αγνοούμε αυτές τις μεταβολές.

- Οι τιμές των συντελεστών μ_k και μ_s εξαρτώνται από τη φύση των επιφανειών, αλλά ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ_k γενικά είναι μικρότερος από τον συντελεστή στατικής τριβής μ_s. Οι τυπικές τιμές τους κυμαίνονται από 0.03 μέχρι 1.0. Στον Πίνακα M5.1 φαίνονται μερικές χαρακτηριστικές τιμές τους.
- Η κατεύθυνση της δύναμης τριβής που ασκείται σε ένα σώμα έχει διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια με την οποία έρχεται το σώμα σε επαφή και φορά αντίθετη από αυτή της πραγματικής κίνησης (τριβή ολίσθησης) ή της επικείμενης κίνησης (στατική τριβή) του σώματος ως προς την επιφάνεια.
- Οι συντελεστές τριβής είναι σχεδόν ανεξάρτητοι από το εμβαδόν επαφής των επιφανειών. Ίσως φαίνεται λογικό ότι τοποθετώντας ένα σώμα στην πλευρά με το μεγαλύτερο εμβαδόν, μπορούμε να αυξήσουμε τη δύναμη τριβής. Αν και αυτή η μέθοδος παρέχει περισσότερα σημεία επαφής, το βάρος του σώματος κατανέμεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια με αποτέλεσμα οι προεξοχές να μην έρχονται σε τόσο στενή επαφή μεταξύ τους. Επειδή αυτές οι επιδράσεις (της επιφάνειας επαφής και του βάρους) σχεδόν αντισταθμίζονται, η δύναμη τριβής είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής.

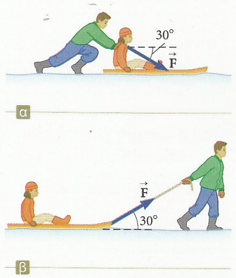
***Σύντομο ερώτημα* M5.6** Πιέζετε το βιβλίο της φυσικής σας πάνω σε έναν κατακόρυφο τοίχο με το χέρι σας. Ποια είναι η κατεύθυνση της δύναμης τριβής που ασκεί ο τοίχος στο βιβλίο; **(α)** Κατακόρυφα προς τα κάτω. **(β)** Κατακόρυφα προς τα πάνω. **(γ)** Από τον τοίχο προς τα έξω. **(δ)** Από έξω προς τον τοίχο.

***Σύντομο ερώτημα* M5.7** Παίζετε με την κόρη σας στο χιόνι. Κάθεται σε ένα έλκηθρο και σας ζητάει να τη σπρώξετε πάνω σε μια επίπεδη, οριζόντια έκταση. Έχετε την επιλογή **(α)** να τη σπρώξετε από πίσω ασκώντας στους ώμους της μια δύναμη υπό γωνία 30° κάτω από την οριζόντιο (Εικ. M5.17α) ή **(β)** να δέσετε ένα σκοινί στο μπροστινό τμήμα του ελκήθρου και να το τραβήξετε ασκώντας μια δύναμη υπό γωνία 30° πάνω από την οριζόντιο (Εικ. M5.17β). Ποια επιλογή θα ήταν πιο εύκολη για σας και γιατί;

Αποφυγή παγίδων M5.11

Η κατεύθυνση της δύναμης τριβής

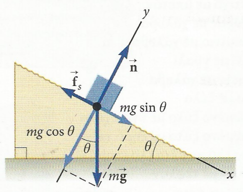
Μερικές φορές, χρησιμοποιείται η εσφαλμένη διατύπωση για τη δύναμη τριβής μεταξύ ενός σώματος και μιας επιφάνειας, «η δύναμη τριβής που ασκείται σε ένα σώμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κίνηση ή την επικείμενη κίνησή του», αντί για τη σωστή διατύπωση, «η δύναμη τριβής που ασκείται σε ένα σώμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κίνηση ή την επικείμενη κίνησή του *ως προς την επιφάνεια*».



Εικόνα M5.17 (Σύντομο ερώτημα M5.7) Ένας πατέρας τσουλάει την κόρη του πάνω σε έλκηθρο είτε (α) σπρώχνοντάς την στους ώμους είτε (β) τραβώντας ένα σκοινί.

Παράδειγμα Μ5.11 Πειραματικός προσδιορισμός των μ_s και μ_k

Σε αυτό το παράδειγμα θα περιγράψουμε μια απλή μέθοδο μέτρησης των συντελεστών τριβής. Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε έναν κύβο πάνω στην τραχιά επιφάνεια ενός κεκλιμένου επιπέδου (Δυναμική Εικόνα Μ5.18). Αυξάνουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι ο κύβος να αρχίσει να κινείται. Δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε τον συντελεστή στατικής τριβής μ_s μετρώντας την κρίσιμη γωνία μ_c στην οποία αρχίζει η ολίσθηση.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ5.18

(Παράδειγμα Μ5.11) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε έναν κύβο ο οποίος βρίσκεται πάνω σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο είναι η βαρυτική δύναμη $m\vec{\mathbf{g}}$, η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$, και η δύναμη τριβής $\vec{\mathbf{f}}_s$. Για λόγους ευκολίας, η βαρυτική δύναμη αναλύεται σε μία συνιστώσα $mg\sin\theta$ που έχει την κατεύθυνση του επιπέδου και σε μία συνιστώσα $mg\cos\theta$ κάθετη στο επίπεδο.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Μελετήστε τη Δυναμική Εικόνα Μ5.18 και φανταστείτε ότι ο κύβος τείνει να ολισθήσει στο κεκλιμένο επίπεδο κάτω από την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας. Για να προσομοιώσετε το πρόβλημα, τοποθετήστε ένα κέρμα στο εξώφυλλο του βιβλίου και αυξήστε την κλίση του βιβλίου μέχρι το κέρμα να αρχίσει να ολισθαίνει. Παρατηρήστε τη διαφορά αυτού του παραδείγματος από το Παράδειγμα Μ5.6. Ένα ακίνητο σώμα πάνω σε ένα επίπεδο χωρίς τριβές θα αρχίσει να κινείται *οποιαδήποτε* γωνία και αν δώσουμε στο επίπεδο. Όταν όμως το επίπεδο έχει τριβές, το σώμα θα παραμείνει στάσιμο για γωνίες μικρότερες από την κρίσιμη.

Κατηγοριοποίηση Ο κύβος δέχεται διάφορες δυνάμεις. Επειδή αυξάνουμε τη γωνία του επιπέδου μέχρι την τιμή κατά την οποία ο κύβος είναι έτοιμος να αρχίσει να κινείται, αλλά ακόμα παραμένει στάσιμος, κατηγοριοποιούμε τον κύβο ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Ανάλυση Στο διάγραμμα της Δυναμικής Εικόνας Μ5.18 φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο: η βαρυτική δύναμη $m\vec{\mathbf{g}}$, η κάθετη δύναμη $\vec{\mathbf{n}}$, και η δύναμη στατικής τριβής $\vec{\mathbf{f}}_s$. Ορίζουμε τον άξονα x παράλληλο προς το επίπεδο και τον άξονα y κάθετο προς αυτό.

Εφαρμόστε την Εξίσωση Μ5.8 στον κύβο και στις δύο διευθύνσεις των αξόνων x και y:

$$(1)\quad \sum F_x = mg\sin\theta - f_s = 0$$

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

Αντικαταστήστε το $mg = n/\cos\theta$ από την Εξίσωση (2) στην Εξίσωση (1):

$$(3)\quad f_s = mg\sin\theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\sin\theta = n\tan\theta$$

Όταν αυξήσουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου τόσο ώστε ο κύβος να βρίσκεται στο όριο της ολίσθησης, τότε η δύναμη της στατικής τριβής έχει τη μέγιστη τιμή της $\mu_s n$. Σε αυτή την περίπτωση, η γωνία θ είναι η κρίσιμη γωνία θ_c. Κάντε τις εξής αντικαταστάσεις στην Εξίσωση (3):

$$\mu_s n = n\tan\theta_c$$

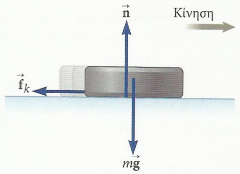
$$\mu_s = \tan\theta_c$$

Για παράδειγμα, αν ο κύβος αρχίζει να ολισθαίνει για $\theta_c = 20.0°$, τότε βρίσκουμε ότι $\mu_s = \tan 20.0° = 0.364$.

Ολοκλήρωση Από τη στιγμή που ο κύβος αρχίσει να κινείται για $\theta \geq \theta_c$, επιταχύνει στο κεκλιμένο επίπεδο και η δύναμη τριβής είναι $f_k = \mu_k n$. Αν όμως μειώσουμε τη γωνία θ σε μια τιμή μικρότερη από τη θ_c, μπορούμε να βρούμε μια γωνία θ'_c τέτοια ώστε ο κύβος να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα σταθερού μέτρου, ως σωματίδιο σε ισορροπία ($a_x = 0$). Σε αυτή την περίπτωση, αντικαταστήστε το f_s με f_k στις Εξισώσεις (1) και (2) για να βρείτε το μ_k: $\mu_k = \tan\theta'_c$, όπου $\theta'_c < \theta_c$.

Παράδειγμα M5.12 Δίσκος του χόκεϊ που ολισθαίνει

Κάποιος χτυπάει έναν δίσκο του χόκεϊ στην παγωμένη επιφάνεια μιας λίμνης και του δίνει μια αρχική ταχύτητα με μέτρο 20.0 m/s. Αν ο δίσκος βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με τον πάγο και σταματήσει να ολισθαίνει αφού διανύσει 115 m, προσδιορίστε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του δίσκου και του πάγου.



Εικόνα M5.19 (Παράδειγμα M5.12) Αφού δοθεί στον δίσκο αρχική ταχύτητα προς τα δεξιά, οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρουν σε αυτόν είναι η βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$, η κάθετη δύναμη $\vec{n}$, και η δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{f}_k$.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι ο δίσκος στην Εικόνα M5.19 ολισθαίνει προς τα δεξιά και τελικά η δύναμης της τριβής ολίσθησης τον αναγκάζει να σταματήσει.

Κατηγοριοποίηση Οι δυνάμεις που δρουν στον δίσκο φαίνονται στην Εικόνα M5.19, αλλά η διατύπωση του προβλήματος μάς δίνει μεταβλητές κινηματικής. Συνεπώς, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους. Πρώτον, εφόσον η τριβή ολίσθησης επιταχύνει τον δίσκο, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Δεύτερον, επειδή μοντελοποιούμε τη δύναμη της τριβής ολίσθησης ως ανεξάρτητη της ταχύτητας, η επιτάχυνση του δίσκου είναι σταθερή. Άρα, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα και ως πρόβλημα σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση.

Ανάλυση Καταρχήν, ας βρούμε την επιτάχυνση αλγεβρικά ως συνάρτηση του συντελεστή τριβής ολίσθησης, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Μόλις υπολογίσουμε την επιτάχυνση του δίσκου και την απόσταση που διανύει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της κινηματικής για να βρούμε την τιμή του συντελεστή της τριβής ολίσθησης. Στο διάγραμμα της Εικόνας M5.19 φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο.

Εφαρμόστε στον δίσκο το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στη διεύθυνση του άξονα x:

$$(1)\quad \sum F_x = -f_k = ma_x$$

Εφαρμόστε στον δίσκο το μοντέλο του σωματιδίου υπό ισορροπία στη διεύθυνση του άξονα y:

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg = 0$$

Αντικαταστήστε το $n = mg$ από την Εξίσωση (2) και το $f_k = \mu_k n$ στην Εξίσωση (1):

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$
$$a_x = -\mu_k g$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι, στην Εικόνα M5.19, η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Εφόσον η ταχύτητα του δίσκου έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, ο δίσκος επιβραδύνει. Η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τη μάζα του δίσκου και είναι σταθερή επειδή υποθέσαμε ότι ο συντελεστής μ_k είναι σταθερός.

Εφαρμόστε στον δίσκο το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση M2.17, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, με $x_i = 0$ και $v_f = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

Λύστε ως προς τον συντελεστή τριβής ολίσθησης:

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2gx_f}$$

Αντικαταστήστε τις αριθμητικές τιμές:

$$\mu_k = \frac{(20.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)(115\ \text{m})} = \boxed{0.177}$$

Ολοκλήρωση Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής μ_k, όπως ήταν αναμενόμενο, δεν έχει διαστάσεις. Επίσης, έχει μικρή τιμή, όπως συμβαίνει για σώματα που ολισθαίνουν πάνω σε πάγο.

Μοντελοποίηση Φανταστείτε τι συμβαίνει όταν ασκείται η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ στον κύβο. Υπό την προϋπόθεση ότι η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ δεν είναι αρκετά μεγάλη για να ανυψώσει τον κύβο, ο κύβος ολισθαίνει προς τα δεξιά και η σφαίρα ανυψώνεται.

τα τα οποία παρουσιάζουν τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα, όταν ο κύβος επιταχύνει προς τα δεξιά και η σφαίρα επιταχύνει προς τα πάνω.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις και θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση, κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα δύο σωματιδίων (της σφαίρας και του κύβου) υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.

Ανάλυση Καταρχήν σχεδιάστε τα διαγράμματα δυνάμεων για τα δύο σώματα όπως φαίνεται στις Εικόνες Μ5.20β και Μ5.20γ. Παρατηρήστε ότι το νήμα ασκεί δύναμη μέτρου T και στα δύο σώματα. Η ασκούμενη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ έχει συνιστώσες x και y ίσες με $F\cos\theta$ και $F\sin\theta$, αντίστοιχα. Εφόσον τα δύο σώματα είναι συνδεδεμένα, μπορούμε να εξισώσουμε τα μέτρα της συνιστώσας x της επιτάχυνσης του κύβου και της συνιστώσας y της επιτάχυνσης της σφαίρας και να τα συμβολίσουμε με a. Ας υποθέσουμε ότι ο κύβος κινείται προς τα δεξιά.

Εφαρμόστε στον κύβο το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση:

$$(1)\ \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_2 a_x = m_2 a$$

Επειδή ο κύβος κινείται μόνο οριζόντια, εφαρμόστε σε αυτόν το μοντέλο του σωματιδίου σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$(2)\ \sum F_y = n + F\sin\theta - m_2 g = 0$$

Εφαρμόστε στη σφαίρα το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$(3)\ \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Λύστε την Εξίσωση (2) ως προς n:

$$n = m_2 g - F\sin\theta$$

Αντικαταστήστε το n στη σχέση $f_k = \mu_k n$ από την Εξίσωση Μ5.10:

$$(4)\ f_k = \mu_k(m_2 g - F\sin\theta)$$

Αντικαταστήστε την Εξίσωση (4) και την τιμή της τάσης T από την Εξίσωση (3) στην Εξίσωση (1):

$$F\cos\theta - \mu_k(m_2 g - F\sin\theta) - m_1(a + g) = m_2 a$$

Λύστε ως προς a:

$$(5)\ a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k\sin\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$

Μ5.13 *συν.*

Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση του κύβου έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, ανάλογα με το πρόσημο του αριθμητή στην Εξίσωση (5). Αν η κίνηση είναι προς τα αριστερά, πρέπει να αντιστρέψουμε το πρόσημο του συντελεστή f_k στην Εξίσωση (1), επειδή η δύναμη τριβής ολίσθησης πρέπει να αντιτίθεται στην κίνηση του κύβου ως προς την επιφάνεια. Και σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της επιτάχυνσης a δίνεται από την Εξίσωση (5), με τη διαφορά ότι τα δύο θετικά πρόσημα στον αριθμητή αλλάζουν σε αρνητικά.

Σε τι ανάγεται η Εξίσωση (5), αν η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ σταματήσει να ασκείται και η επιφάνεια δεν έχει τριβές; Ονομάστε τη σχέση αυτή Εξίσωση (6). Συμφωνείτε διαισθητικά με την παραπάνω αλγεβρική σχέση ως προς τη φυσική περιγραφή της συγκεκριμένης περίπτωσης; Επιστρέψτε στο Παράδειγμα Μ5.10 και μηδενίστε τη γωνία θ στην Εξίσωση (6) του παραδείγματος. Πώς συγκρίνεται η εξίσωση που προκύπτει με τη δική σας Εξίσωση (6) στο Παράδειγμα Μ5.13; Θα πρέπει να συμφωνούν, με βάση τη φυσική κατάσταση των δύο περιπτώσεων;

Σύνοψη

Ορισμοί

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ένα σύστημα στο οποίο ένα σώμα που δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα έχει μηδενική επιτάχυνση. Κάθε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα είναι επίσης αδρανειακό.

Ορίζουμε τη **δύναμη** ως **αυτό που προκαλεί μεταβολή στην κίνηση ενός σώματος.**

Έννοιες και αρχές

Ο **πρώτος νόμος του Νεύτωνα** ορίζει ότι υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα σώμα που δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα έχει μηδενική επιτάχυνση. Ισοδύναμα, αν σε ένα σώμα το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία ή κινείται ομαλά και ευθύγραμμα δεν ασκείται εξωτερική δύναμη, το σώμα θα παραμείνει σε ηρεμία ή θα συνεχίσει την ίδια κίνηση αντίστοιχα.

Ο **δεύτερος νόμος του Νεύτωνα** ορίζει ότι η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογη προς τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό και αντιστρόφως ανάλογη προς τη μάζα του.

Ο **τρίτος νόμος του Νεύτωνα** ορίζει ότι αν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.

Η **βαρυτική δύναμη** που ασκείται σε ένα σώμα ισούται με το γινόμενο της μάζας του (βαθμωτό μέγεθος) και της επιτάχυνσης της βαρύτητας:

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}.$$

Το **βάρος** ενός σώματος είναι το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκείται στο σώμα.

Η μέγιστη **δύναμη στατικής τριβής** $\vec{\mathbf{f}}_{s,\max}$ μεταξύ ενός σώματος και μιας επιφάνειας είναι ανάλογη προς την κάθετη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Γενικά, ισχύει $f_s \leq \mu_s n$, όπου μ_s είναι ο **συντελεστής στατικής τριβής** και n είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης.

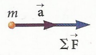
Όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε μια επιφάνεια, το μέτρο της **δύναμης τριβής ολίσθησης** $\vec{\mathbf{f}}_k$ δίνεται από τη σχέση $f_k = \mu_k n$, όπου μ_k είναι ο **συντελεστής τριβής ολίσθησης.**

συνεχίζεται

Μοντέλα ανάλυσης για επίλυση προβλημάτων

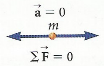
Σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης Αν σε ένα σωματίδιο μάζας m ασκείται μια μη μηδενική συνισταμένη δύναμη, τότε η επιτάχυνσή του συνδέεται με τη συνισταμένη δύναμη μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{M5.2}$$



Σωματίδιο σε ισορροπία Αν ένα σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (έτσι ώστε $\vec{a} = 0$), ή η ταχύτητά του είναι μηδέν, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο εξισορροπούνται και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ανάγεται σε

$$\sum \vec{F} = 0 \tag{M5.8}$$



Θεματικές ερωτήσεις

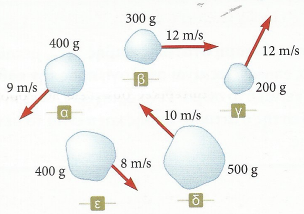
☐ Το σύμβολο αυτό υποδηλώνει ότι η απάντηση υπάρχει στο βιβλίο Student Solutions Manual/Study Guide

1. Πείραμα εκτελείται σε δίσκο του χόκεϊ πάνω σε επίπεδο τραπέζι χόκεϊ με αέρα. Οι τριβές είναι αμελητέες. Στον δίσκο ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη, και μετριέται η επιτάχυνσή του. Στη συνέχεια ο ίδιος δίσκος μεταφέρεται στο διάστημα μακριά από τη Γη, όπου οι δυνάμεις τριβής και βαρύτητας είναι αμελητέες. Στον δίσκο ασκείται η ίδια σταθερή δύναμη (μέσω ζυγαριάς ελατηρίου που υφίσταται αντίστοιχη επιμήκυνση), και μετριέται η επιτάχυνση του δίσκου (ως προς τους μακρινούς απλανείς αστέρες). Ποια είναι η επιτάχυνση του δίσκου στο απώτερο διάστημα; (α) Είναι λίγο μεγαλύτερη από την επιτάχυνσή του στη Γη. (β) Είναι ίδια με την επιτάχυνσή του στη Γη. (γ) Είναι μικρότερη από την επιτάχυνσή του στη Γη. (δ) Είναι άπειρη επειδή δεν υπάρχει τριβή ή βαρύτητα για να την περιορίσει. (ε) Είναι πολύ μεγάλη επειδή η επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το βάρος, και το βάρος του δίσκου είναι πολύ μικρό αλλά όχι μηδενικό.

2. Στην Εικόνα ΘΕ Μ5.2, μια ατμομηχανή έχει περάσει μέσα από τον τοίχο ενός σιδηροδρομικού σταθμού. Τι μπορείτε να πείτε για τη δύναμη που άσκησε η ατμομηχανή στον τοίχο κατά τη στιγμή της σύγκρουσης; (α) Η δύναμη που άσκησε η ατμομηχανή στον τοίχο είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη που άσκησε ο τοίχος στην ατμομηχανή. (β) Η δύναμη που άσκησε η ατμομηχανή στον τοίχο έχει το ίδιο μέτρο με τη δύναμη που άσκησε ο τοίχος στην ατμομηχανή. (γ) Η δύναμη που άσκησε η ατμομηχανή στον τοίχο είναι μικρότερη από τη δύναμη που άσκησε ο τοίχος στην ατμομηχανή. (δ) Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο τοίχος «άσκησε» δύναμη· άλλωστε, γκρεμίστηκε.

Εικόνα ΘΕ Μ5.2

3. Οι μαθητές της τρίτης τάξης του δημοτικού βρίσκονται στη μία πλευρά της αυλής και οι μαθητές της τετάρτης στην άλλη. Παίζουν χιονοπόλεμο μεταξύ τους. Πετάνε χιονόμπαλες διαφόρων μαζών οι οποίες κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες (Εικόνα ΘΕ Μ5.3). Κατατάξτε τις



Εικόνα ΘΕ Μ5.3