ΔΙΑΛΕΞΗ - 2 , 21/10/2020

Κίνηση σε δύο διαστάσεις

Πυροτεχνήματα εκτοξεύονται από τη Γέφυρα του Λιμανιού του Σίδνεϊ στη Νέα Νότια Ουαλία της Αυστραλίας. Παρατηρήστε τις παραβολικές τροχιές που ακολουθούν οι σπίθες στον αέρα. Όταν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, όλα τα βλήματα ακολουθούν παραβολική τροχιά. (*Graham Monro/Photolibrary/Jupiter Images*)

ΔΙΑΛΕΞΗ 2
21/10/2020

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Κίνηση σε 1-D

1. ΚΙΝΗΣΗ ΟΜΑΛΑ ΣΤΑΘΕΡΗ

$x = \upsilon_0 t$

2. ΚΙΝΗΣΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ

$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$

$x - x_0 = \upsilon_0 t + 1/2 \alpha t^2$

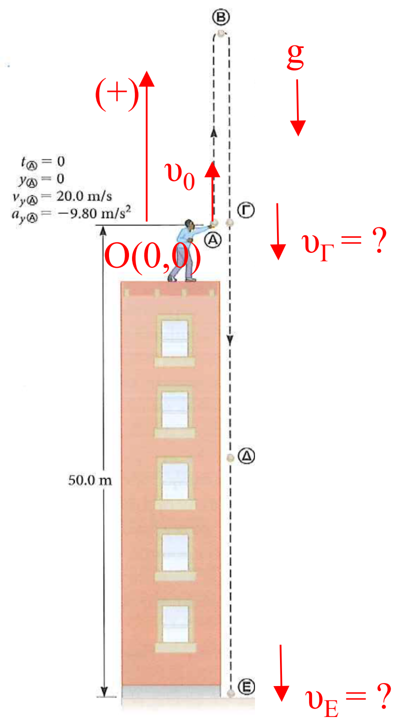
$x = \bar{\upsilon} t \quad ό\pi o\upsilon \quad \bar{\upsilon} = \dfrac{(\upsilon_0 + \upsilon)}{2}$

$\upsilon^2 = \upsilon_0{}^2 + 2\alpha(x - x_0)$

3. ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Όπως η επιταχυνόμενη κίνηση αλλά με $\alpha = -g$

1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



(α)

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \quad \Longrightarrow$$
$$\upsilon = \upsilon_0 - gt \quad \Longrightarrow$$
$$0 = 20 - 10\, t_{\alpha\nu} \quad \Longrightarrow$$
$$t_{\alpha\nu} = 2\ s$$

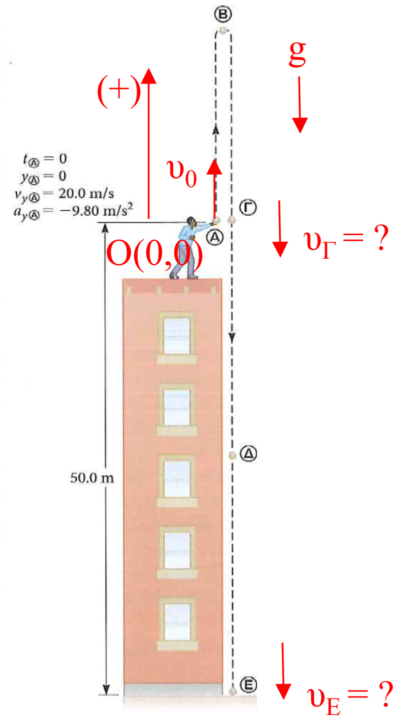
(β)

$$y - y_0 = \upsilon_0 t + 1/2\alpha t^2 \quad \Longrightarrow$$
$$y - y_0 = \upsilon_0 t - 1/2 g t^2 \quad \Longrightarrow$$
$$y - 0 = (20)(2) - 1/2(10)(2)^2 \quad \Longrightarrow$$
$$y_{max} = 20\ m$$

(γ)

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \quad \Longrightarrow \quad \upsilon_\Gamma = \upsilon_0 - g\,(2t_{\alpha\nu}) \quad \Longrightarrow$$
$$\upsilon_\Gamma = 20 - 10\,(2.2) \quad \Longrightarrow \quad \upsilon_\Gamma = -20\ m/s$$

1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



(δ) $y - y_0 = \upsilon_0 t + 1/2\alpha t^2 \Longrightarrow$

$-50 = 20\, t_1 - 1/2(10) t_1^2 \Longrightarrow$

$5t_1^2 - 20t_1 - 50 = 0 \Longrightarrow$

$t_1 = 5{,}74$ s και $t_1 < 0$

Επομένως:

$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \Longrightarrow$

$\upsilon_E = \upsilon_0 - g\, t_1 \Longrightarrow$

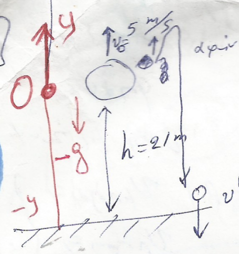
$\upsilon_E = 20 - 10.\, 5{,}74 \Longrightarrow$

$\upsilon_E = -37{,}4$ m/s

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦ 3

3.48



α) $t = ;$ που το δίσκος βρίσκεται στον αέρα

β) $v = ;$ του δίσκου πριν ακουμπήσει στο έδαφος;

α) $y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$-21 = 5t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$

$4{,}9t^2 - 5t - 21 = 0$

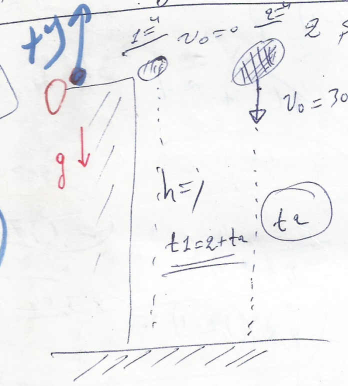
$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 21 \cdot 4{,}9}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{5 \pm 20{,}28}{9{,}8} = 2{,}58 \; / \; -1{,}56$

$t = 2{,}58\,s$

84
4,9
756
336
411,6
25
436,6

β) $v = v_0 - gt = 5 - 9{,}8 * 2{,}58 = -20{,}284 \, \frac{m}{s}$

3.54



Οι δύο πέτρες αν ακουμπήσουν στο έδαφος ταυτόχρονα $h = ;$

ΛΥΣΗ

Έστω t_2 ο χρόνος πτώσης της 2ης πέτρας.

$y = -\frac{1}{2} g t_1^2$

$y = -v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$

$t_1 = 2 + t_2$

Τότε:

$-\frac{1}{2} g t_1^2 = -v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$

$\frac{1}{2} g (2 + t_2)^2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$

$\frac{1}{2} g (4 + 4t_2 + t_2^2) = v_0 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$

$2g + 2g t_2 + \cancel{\frac{1}{2} g t_2^2} = v_0 t_2 + \cancel{\frac{1}{2} g t_2^2}$

$2g = 30 t_2 - 2 * 9{,}8\, t_2$

$2g = 30 t_2 - 19{,}6\, t_2$

$2 * 9{,}8 = 30 t_2 - 19{,}6\, t_2$

$t_2 = 1{,}88\,s$

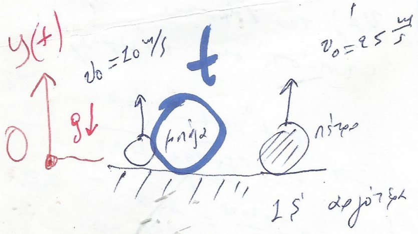
$t_1 = 3{,}88\,s$

$y = -\frac{1}{2} 9{,}8 (3{,}88)^2 = -73{,}9\,m$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\boxed{3.55}$

C



α) $t = ;$ που η πέτρα θα φτάσει στο ίδιο ύψος με την μπάλα

β) $\upsilon_{μπάλας} = ;$ $\upsilon_{πέτρας} = ;$ } όταν είναι στο ίδιο ύψος

γ) $t_{ολ} = ;$ για καθε μία

α) Έστω t (s) ο χρόνος πτήσης της μπάλας τότε της πέτρας θα είναι $(t-1)$ s

$$h_{μπάλας} = 10t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$h_{πέτρας} = 25(t-1) - \frac{1}{2} g (t-1)^2$$

$$10t - \cancel{\frac{1}{2} g t^2} = 25t - 25 - \cancel{\frac{1}{2} g t^2} + g t - \frac{1}{2} g$$

$$29{,}9 = 24{,}8\, t \Rightarrow \boxed{t = 1{,}2\ s}$$

β) $\upsilon_{μπάλας} = \upsilon_0 - g t = 10 - 9{,}8 * 1{,}2 = -1{,}76\ \frac{m}{s}$

$\upsilon_{πέτρας} = \upsilon_0 - g(t-1) = 25 - 9{,}8(1{,}2-1) = 23{,}04\ \frac{m}{s}$

$t_{ολ} = 2\, t_{αν}$

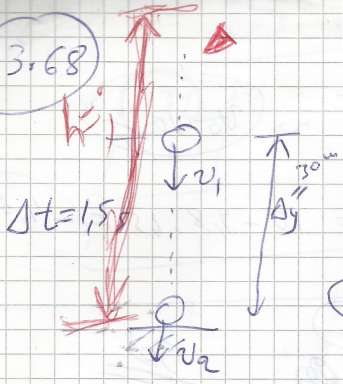
γ) $t_{μπάλας} = 2\frac{\upsilon_0}{g} = 2 \cdot \frac{10}{9{,}8} = 2{,}04\ s$

$t_{πέτρας} = \frac{2\upsilon_0'}{g} = 2 \cdot \frac{25}{9{,}8} = 5{,}10\ s$

$$y = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$\upsilon_0 \cancel{t} = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\upsilon_0}{g}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.68



$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + g\,\Delta t$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + 9{,}8 \cdot 1{,}5$$

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = 14{,}70 \quad (1)$$

Όμως $\Delta y = \bar{\upsilon}\,\Delta t \Rightarrow$

$$\Delta y = \frac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2)\,\Delta t$$

$$30 = \frac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2)\,1{,}5 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = 40 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \upsilon_2 = 27{,}35$$

$$h = \frac{\upsilon_2^2}{2g} = \frac{27{,}35^2}{2 \cdot 9{,}8} = 38{,}16\,m$$

κεφάλαιο **M4**

Κίνηση σε δύο διαστάσεις

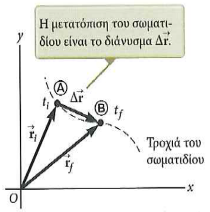
M4.1 Διανύσματα θέσης, ταχύτητας, και επιτάχυνσης
M4.2 Κίνηση σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση
M4.3 Κίνηση βλημάτων
M4.4 Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση
M4.5 Εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση
M4.6 Σχετική ταχύτητα και σχετική επιτάχυνση

Πυροτεχνήματα εκτοξεύονται από τη Γέφυρα του Λιμανιού του Σίδνεϊ στη Νέα Νότια Ουαλία της Αυστραλίας. Παρατηρήστε τις παραβολικές τροχιές που ακολουθούν οι σπίθες στον αέρα. Όταν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, όλα τα βλήματα ακολουθούν παραβολική τροχιά. *(Graham Monro/Photolibrary/ Jupiter Images)*

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου σε δύο διαστάσεις. Η γνώση των βασικών στοιχείων της κίνησης σε δύο διαστάσεις θα μας επιτρέψει –σε επόμενα κεφάλαια– να εξετάσουμε διάφορα προβλήματα, από την κίνηση των δορυφόρων σε τροχιά μέχρι την κίνηση των ηλεκτρονίων σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας αναλυτικότερα τη διανυσματική φύση της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσης. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την κίνηση των βλημάτων και την ομαλή κυκλική κίνηση ως ειδικές περιπτώσεις της κίνησης σε δύο διαστάσεις. Επίσης, θα περιγράψουμε την έννοια της σχετικής κίνησης, η οποία θα μας επιτρέψει να καταλάβουμε γιατί παρατηρητές οι οποίοι βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς είναι δυνατόν να καταγράψουν διαφορετικές θέσεις και ταχύτητες για το ίδιο σωματίδιο.

M4.1 Διανύσματα θέσης, ταχύτητας, και επιτάχυνσης

Στο Κεφάλαιο M2, είδαμε ότι η κίνηση ενός σωματιδίου κατά μήκος μιας ευθείας, όπως ο άξονας x, ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε τη θέση του ως συνάρτηση του χρόνου. Θα επεκτείνουμε τώρα την ιδέα αυτή στην κίνηση ενός σωματιδίου σε δύο διαστάσεις, στο επίπεδο xy. Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τη θέση του σωματιδίου με το **διάνυσμα θέσης** $\vec{\mathbf{r}}$, το οποίο ξεκινάει από την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και καταλήγει στη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy όπως φαίνεται στην



Εικόνα Μ4.1. Κατά τη χρονική στιγμή t_i, το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο Ⓐ, το οποίο περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$. Σε κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_f, βρίσκεται στο σημείο Ⓑ, το οποίο περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_f$. Η διαδρομή από το Ⓐ μέχρι το Ⓑ δεν είναι υποχρεωτικά ευθεία. Καθώς το σωματίδιο κινείται από το Ⓐ στο Ⓑ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$, το διάνυσμα της θέσης του μεταβάλλεται από $\vec{r}_i$ σε $\vec{r}_f$. Στο Κεφάλαιο Μ2 μάθαμε ότι η μετατόπιση είναι διάνυσμα, αλλά και ότι η μετατόπιση ενός σωματιδίου είναι η διαφορά μεταξύ της τελικής και της αρχικής θέσης του. Τώρα θα ορίσουμε ότι το **διάνυσμα μετατόπισης $\Delta\vec{r}$** για ένα σωματίδιο όπως αυτό της Εικόνας Μ4.1 είναι η διαφορά μεταξύ του τελικού και του αρχικού διανύσματος θέσης:

Διάνυσμα μετατόπισης ▶

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i \qquad \textbf{(M4.1)}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος $\Delta\vec{r}$ φαίνεται στην Εικόνα Μ4.1. Όπως βλέπουμε από την εικόνα, το μέτρο τού $\Delta\vec{r}$ είναι *μικρότερο* από την απόσταση που διήνυσε το σωματίδιο κατά μήκος της καμπύλης τροχιάς του.

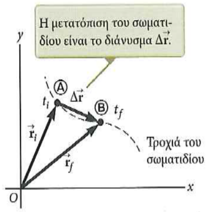
Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο Μ2, συχνά είναι χρήσιμο να περιγράφουμε ποσοτικά την κίνηση με τον λόγο της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει, ο οποίος αποτελεί τον ρυθμό μεταβολής της θέσης. Η κινηματική σε δύο (ή σε τρεις) διαστάσεις είναι παρόμοια με την κινηματική σε μία διάσταση, με τη διαφορά ότι στην πρώτη περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιούμε τον πλήρη συμβολισμό των διανυσμάτων και όχι απλώς θετικά και αρνητικά πρόσημα για να δείχνουμε την κατεύθυνσή τους.

Ορίζουμε τη **μέση ταχύτητα $\vec{v}_{μέση}$** ενός σωματιδίου στο χρονικό διάστημα Δt ως το πηλίκο της μετατόπισης του σωματιδίου προς το χρονικό διάστημα:

Μέση ταχύτητα ▶

$$\vec{v}_{μέση} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \textbf{(M4.2)}$$

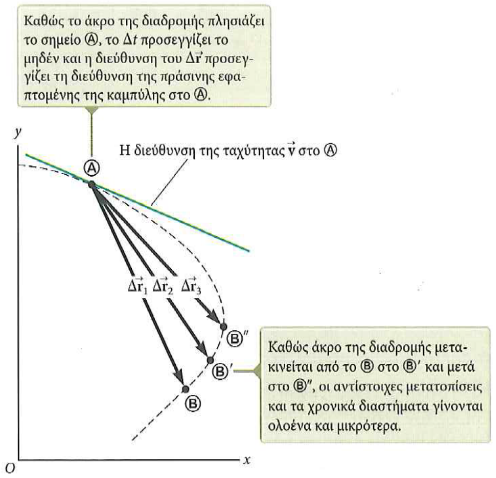
Ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση ενός διανυσματικού μεγέθους με έναν θετικό αριθμό όπως το Δt μεταβάλλει μόνο το μέτρο του διανύσματος, όχι την κατεύθυνσή του. Επειδή η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος και ο χρόνος θετικό βαθμωτό μέγεθος, συμπεραίνουμε ότι η μέση ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος με την κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}$. Συγκρίνετε την Εξίσωση Μ4.2 με την αντίστοιχη μονοδιάστατη, που είναι η Εξίσωση Μ2.2.



Εικόνα Μ4.1 Η θέση ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο *xy* ορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ το οποίο έχει κατεύθυνση από την αρχή των συντεταγμένων προς το σωματίδιο. Η μετατόπιση του σωματιδίου κατά την κίνησή του από το Ⓐ στο Ⓑ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$ ισούται με το διάνυσμα $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$.

Η μέση ταχύτητα μεταξύ σημείων είναι *ανεξάρτητη από τη διαδρομή* που ακολουθείται. Αυτό συμβαίνει επειδή η μέση ταχύτητα είναι ανάλογη προς τη μετατόπιση, η οποία εξαρτάται μόνο από τα διανύσματα της αρχικής και της τελικής θέσης και όχι από τη διαδρομή. Όπως στη μονοδιάστατη κίνηση, διαπιστώνουμε ότι αν ένα σωματίδιο ξεκινήσει την κίνησή του από κάποιο σημείο και επιστρέψει στο σημείο αυτό μέσω οποιασδήποτε διαδρομής, η μέση ταχύτητά του κατά τη διάρκεια της διαδρομής είναι ίση με μηδέν επειδή η μετατόπισή του είναι ίση με μηδέν. Θεωρήστε ξανά τους παίκτες του μπάσκετ στο γήπεδο της Εικόνας Μ2.2 (στο κεφάλαιο Μ2). Προηγουμένως εξετάσαμε την κίνησή τους σε μία διάσταση από το ένα καλάθι προς το άλλο και αντιστρόφως. Στην πραγματικότητα, όμως, κινούνται σε μια επιφάνεια δύο διαστάσεων, αφού τρέχουν τόσο μπρος-πίσω, μεταξύ των καλαθιών όσο και δεξιά-αριστερά, εγκάρσια του γηπέδου. Ένας παίκτης που ξεκινάει από το ένα καλάθι μπορεί να ακολουθήσει μια πολύ σύνθετη τροχιά σε δύο διαστάσεις. Ωστόσο, όταν επιστρέψει στο καλάθι από όπου ξεκίνησε, η μέση ταχύτητά του θα είναι μηδενική επειδή η μετατόπισή του για ολόκληρη τη διαδρομή θα είναι μηδενική.

Θεωρήστε και πάλι την κίνηση ενός σωματιδίου μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο *xy* (Εικόνα Μ4.2). Καθώς το χρονικό διάστημα στο οποίο παρατηρούμε την κίνηση γίνεται ολοένα μικρότερο – δηλαδή, καθώς το Ⓑ μετακινείται στο Ⓑ′ και μετά στο Ⓑ″ κ.ο.κ – η διεύθυνση της μετατόπισης προσεγγίζει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στο Ⓐ. Ορίζουμε τη **στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$** ως το όριο της μέσης ταχύτητας $\Delta\vec{r}/\Delta t$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν:



Εικόνα M4.2 Καθώς το σωματίδιο κινείται μεταξύ δύο σημείων, η μέση ταχύτητά του έχει την κατεύθυνση του διανύσματος μετατόπισης $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Εξ ορισμού, η στιγμιαία ταχύτητα στο σημείο Ⓐ έχει διεύθυνση ίδια με αυτή της εφαπτομένης της καμπύλης στο Ⓐ.

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \qquad \textbf{(M4.3)}$$

◀ **Στιγμιαία ταχύτητα**

Δηλαδή, η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την παράγωγο του διανύσματος της θέσης ως προς τον χρόνο. Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς ενός σωματιδίου έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο της τροχιάς και φορά ίδια με αυτή της κίνησης. Συγκρίνετε την Εξίσωση M4.3 με την αντίστοιχη εξίσωση της κίνησης σε μία διάσταση, που είναι η Εξίσωση M2.5.

Το *μέτρο του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας* (speed) του σωματιδίου, $v = |\vec{\mathbf{v}}|$, είναι βαθμωτό μέγεθος.

Καθώς ένα σωματίδιο κινείται από ένα σημείο προς κάποιο άλλο κατά μήκος μιας διαδρομής, το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητάς του μεταβάλλεται από $\vec{\mathbf{v}}_i$ τη χρονική στιγμή t_i σε $\vec{\mathbf{v}}_f$ τη χρονική στιγμή t_f. Η γνώση της ταχύτητας σε αυτά τα σημεία μάς επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη μέση επιτάχυνση του σωματιδίου. Η **μέση επιτάχυνση** $\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$ ενός σωματιδίου ορίζεται ως η μεταβολή του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ προς το χρονικό διάστημα Δt στο οποίο λαμβάνει χώρα η μεταβολή αυτή:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} \equiv \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} \qquad \textbf{(M4.4)}$$

◀ **Μέση επιτάχυνση**

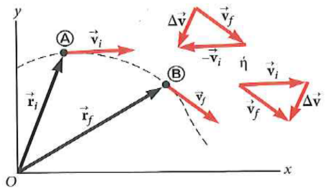
Επειδή η μέση ταχύτητα, $\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$, είναι ο λόγος ενός διανυσματικού μεγέθους $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ προς ένα θετικό βαθμωτό μέγεθος Δt, συμπεραίνουμε ότι η μέση επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος που έχει την κατεύθυνση του $\Delta\vec{\mathbf{v}}$. Όπως φαίνεται στην Εικόνα M4.3, βρίσκουμε την κατεύθυνση του $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ προσθέτοντας το διάνυσμα $-\vec{\mathbf{v}}_i$ (το αντίθετο του $\vec{\mathbf{v}}_i$) στο διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}_f$ επειδή εξ ορισμού ισχύει $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i$. Συγκρίνετε την Εξίσωση M4.4 με την Εξίσωση M2.9.

Όταν η μέση επιτάχυνση ενός σωματιδίου μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια διάφορων χρονικών διαστημάτων, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τη στιγμιαία επιτάχυνσή του. Η **στιγμιαία επιτάχυνση** $\vec{\mathbf{a}}$ ορίζεται ως το όριο του λόγου $\Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$, καθώς το Δt τείνει στο μηδέν:

Αποφυγή παγίδων Μ4.1

Πρόσθεση διανυσμάτων

Αν και στο Κεφάλαιο Μ3 περιγράψαμε την πρόσθεση διανυσμάτων χρησιμοποιώντας διανύσματα *μετατόπισης*, μπορούμε να προσθέσουμε *όλους* τους τύπους των διανυσματικών μεγεθών. Στην Εικόνα Μ4.3, για παράδειγμα, φαίνεται η πρόσθεση διανυσμάτων *ταχύτητας* με τη γραφική μέθοδο.



Εικόνα Μ4.3 Σωματίδιο μετακινείται από τη θέση Ⓐ στη θέση Ⓑ. Το διάνυσμα της ταχύτητάς του μεταβάλλεται από $\vec{v}_i$ σε $\vec{v}_f$. Στα διανυσματικά διαγράμματα πάνω δεξιά φαίνονται δύο τρόποι προσδιορισμού του διανύσματος $\Delta\vec{v}$ από την αρχική και την τελική ταχύτητα.

Στιγμιαία επιτάχυνση

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{(Μ4.5)}$$

Με άλλα λόγια, η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την παράγωγο του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο. Συγκρίνετε την Εξίσωση Μ4.5 με την Εξίσωση Μ2.10.

Διάφορες μεταβολές μπορούν να συμβούν όταν ένα σωματίδιο επιταχύνει. Πρώτον, το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως στην (μονοδιάστατη) ευθύγραμμη κίνηση. Δεύτερον, η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο ακόμα και αν το μέτρο του παραμένει σταθερό, όπως στην καμπυλόγραμμη κίνηση σε δύο διαστάσεις. Τέλος, ενδέχεται να μεταβάλλονται ταυτόχρονα τόσο το μέτρο όσο και η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας.

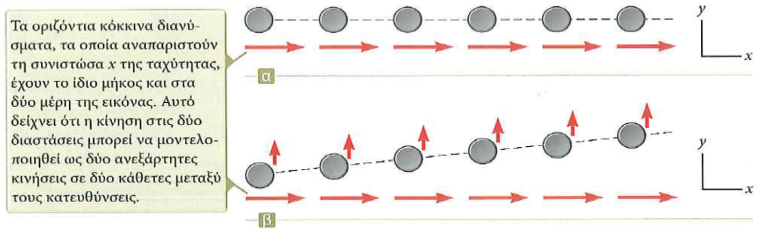
***Σύντομο ερώτημα* Μ4.1** Θεωρήστε τα παρακάτω χειριστήρια ενός αυτοκινήτου: το πεντάλ του γκαζιού, το πεντάλ του φρένου, και το τιμόνι. Ποια από αυτά προκαλούν επιτάχυνση του αυτοκινήτου; **(α)** Και τα τρία. **(β)** Το γκάζι και το φρένο. **(γ)** Μόνο το φρένο. **(δ)** Μόνο το γκάζι. **(ε)** Μόνο το τιμόνι.

Μ4.2 Κίνηση σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

Στην Ενότητα Μ2.5, μελετήσαμε τη κίνηση ενός σωματιδίου σε μία διάσταση με σταθερή επιτάχυνση. Ας εξετάσουμε τώρα την κίνηση ενός σωματιδίου σε δύο διαστάσεις κατά την οποία το μέτρο και η κατεύθυνση της επιτάχυνσής του παραμένουν σταθερά. Όπως θα δούμε, η μέθοδος αυτή διευκολύνει την ανάλυση μερικών συνηθισμένων τύπων κίνησης.

Πριν ξεκινήσουμε, πρέπει να τονίσουμε μια σημαντική λεπτομέρεια σχετικά με την κίνηση σε δύο διαστάσεις. Φανταστείτε έναν δίσκο επιτραπέζιου χόκεϊ[1] ο οποίος κινείται ευθύγραμμα και χωρίς τριβές πάνω στην απολύτως επίπεδη επιφάνεια ενός τραπεζιού. Στην Εικόνα Μ4.4α φαίνεται σε κάτοψη το διάγραμμα κίνησης του δίσκου. Θυμηθείτε ότι στην Ενότητα Μ2.4 συσχετίσαμε την επιτάχυνση ενός σώματος με τη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Εφόσον δεν ασκούνται δυνάμεις στον δίσκο στο οριζόντιο επίπεδο, ο δίσκος κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα x. Υποθέστε τώρα ότι φυσάτε τον δίσκο καθώς περνάει από μπροστά σας, έτσι ώστε η δύναμη του ρεύματος αέρα να ασκείται *ακριβώς* κατά μήκος του άξονα y. Επειδή η δύναμη του ρεύματος αέρα δεν έχει συνιστώσα στη διεύθυνση του άξονα x, δεν προκαλεί επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα x. Προκαλεί μόνο μια στιγμιαία επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα y, με αποτέλεσμα, μόλις σταματήσετε να φυσάτε και άρα να ασκείτε δύναμη,

[1]Σ.τ.Ε: Το επιτραπέζιο χόκεϊ είναι ένα παιχνίδι όπου ένας κυκλικός δίσκος κινείται στη λεία επιφάνεια ενός τραπεζιού, όπως αυτό του μπιλιάρδου, σχεδόν χωρίς τριβή, λόγω του ότι «επιπλέει» σε ένα στρώμα αέρα. Οι παίκτες «κτυπούν» τον δίσκο με παρόμοιους δίσκους που κρατούν στο χέρι τους.



Εικόνα Μ4.4 (α) Δίσκος κινείται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι του χόκεϊ με σταθερή ταχύτητα στην κατεύθυνση του άξονα x. (β) Μόλις ο δίσκος δεχτεί ένα φύσημα στην κατεύθυνση του άξονα y, η ταχύτητά του αποκτάει μια συνιστώσα y, αλλά η συνιστώσα x δεν επηρεάζεται από τη δύναμη που εφαρμόστηκε στην κάθετη διεύθυνση.

ο δίσκος να έχει αποκτήσει μια μη μηδενική και σταθερή συνιστώσα y της ταχύτητας. Μετά το φύσημα, η συνιστώσα της ταχύτητας του αέρα στη διεύθυνση του άξονα x είναι ίδια όπως και πριν (Εικόνα Μ4.4β). Γενικεύοντας αυτό το απλό πείραμα, μπορούμε να πούμε ότι **η κίνηση στις δύο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δύο *ανεξάρτητες* κινήσεις σε καθεμία από τις δύο κάθετες διευθύνσεις που συνδέονται με τους άξονες x και y. Δηλαδή, οποιαδήποτε επίδραση στη διεύθυνση του άξονα y δεν επηρεάζει την κίνηση στη διεύθυνση του άξονα x και το αντίστροφο.**

Το διάνυσμα θέσης για ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο xy μπορεί να γραφτεί ως

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{M4.6}$$

όπου τα x, y, και $\vec{\mathbf{r}}$ μεταβάλλονται με τον χρόνο καθώς το σωματίδιο κινείται, ενώ τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{i}}$ και $\hat{\mathbf{j}}$ παραμένουν σταθερά. Αν το διάνυσμα θέσης είναι γνωστό, η ταχύτητα του σωματιδίου μπορεί να βρεθεί από τις Εξισώσεις Μ4.3 και Μ4.6, οι οποίες δίνουν

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \tag{M4.7}$$

Επειδή στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ του σωματιδίου είναι σταθερή, οι συνιστώσες της επιτάχυνσης a_x και a_y είναι επίσης σταθερές. Επομένως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σωματίδιο ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση ανεξάρτητα σε καθεμία από τις δύο διευθύνσεις και να εφαρμόσουμε χωριστά τις εξισώσεις της κινηματικής στις συνιστώσες x και y του διανύσματος της ταχύτητας. Αντικαθιστώντας από την Εξίσωση Μ2.13 $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ και $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ στην Εξίσωση Μ4.7, για να βρούμε την τελική ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t, παίρνουμε

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}} = (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \tag{M4.8}$$

◀ **Το διάνυσμα ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου**

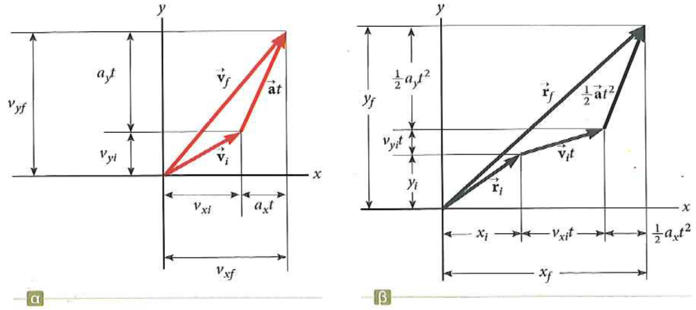
Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ταχύτητα ενός σωματιδίου τη χρονική στιγμή t ισούται με το διανυσματικό άθροισμα της αρχικής του ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}_i$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ και της πρόσθετης ταχύτητας $\vec{\mathbf{a}}t$ που είχε τη χρονική στιγμή t λόγω της σταθερής επιτάχυνσης. Η Εξίσωση Μ4.8 είναι η διανυσματική μορφή της Εξίσωσης Μ2.1.

Παρομοίως, από την Εξίσωση Μ2.16 ξέρουμε ότι οι συντεταγμένες x και y ενός σωματιδίου που κινείται με σταθερή επιτάχυνση είναι

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις αυτές στην Εξίσωση Μ4.6 (και συμβολίσουμε το τελικό διάνυσμα θέσης με $\vec{\mathbf{r}}_f$) έχουμε

$$\vec{\mathbf{r}}_f = (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ4.5

Τα διανύσματα και οι συνιστώσες (α) της ταχύτητας και (β) της θέσης ενός σωματιδίου που κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$.

$$= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \tfrac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2$$

Το διάνυσμα θέσης ως συνάρτηση του χρόνου

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \qquad \textbf{(M4.9)}$$

που είναι η διανυσματική μορφή της Εξίσωσης Μ2.16. Σύμφωνα με την Εξίσωση Μ4.9, το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_f$ ενός σωματιδίου είναι το διανυσματικό άθροισμα της αρχικής του θέσης $\vec{\mathbf{r}}_i$, μιας μετατόπισης $\vec{\mathbf{v}}_i t$ που προκαλείται από την αρχική ταχύτητα του σωματιδίου, και μιας μετατόπισης $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$ που προκαλείται από τη σταθερή επιτάχυνση του σωματιδίου.

Στη Δυναμική Εικόνα Μ4.5 φαίνονται οι γραφικές αναπαραστάσεις των Εξισώσεων Μ4.8 και Μ4.9. Στην εικόνα φαίνονται και οι συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας. Παρατηρήστε από τη Δυναμική Εικόνα Μ4.5α ότι η $\vec{\mathbf{v}}_f$ δεν έχει γενικά την κατεύθυνση ούτε της $\vec{\mathbf{v}}_i$ ούτε της $\vec{\mathbf{a}}$, επειδή η σχέση μεταξύ των μεγεθών είναι διανυσματική. Για τον ίδιο λόγο, στη Δυναμική Εικόνα Μ4.5β βλέπουμε ότι το $\vec{\mathbf{r}}_f$ δεν έχει γενικά την κατεύθυνση των $\vec{\mathbf{r}}_i$, $\vec{\mathbf{v}}_i$, ή $\vec{\mathbf{a}}$. Τέλος, παρατηρήστε ότι τα $\vec{\mathbf{v}}_f$ και $\vec{\mathbf{r}}_f$ δεν έχουν γενικά την ίδια κατεύθυνση.

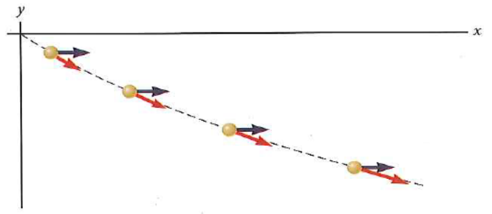
Παράδειγμα Μ4.1 Κίνηση σε ένα επίπεδο

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy, ξεκινώντας από την αρχή των συντεταγμένων τη χρονική στιγμή $t = 0$ με αρχική ταχύτητα που έχει συνιστώσα x ίση με 20 m/s και συνιστώσα y ίση με −15 m/s. Το σωματίδιο δέχεται επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα x, που δίνεται από τη σχέση $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$.

(Α) Προσδιορίστε το διάνυσμα της συνολικής ταχύτητας σε κάθε χρονική στιγμή.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Εξετάζοντας τις συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας διαπιστώνουμε ότι το σωματίδιο αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά και κάτω. Η συνιστώσα x της ταχύτητας έχει αρχική τιμή ίση με 20 m/s και αυξάνεται κατά 4.0 m/s σε κάθε δευτερόλεπτο. Η συνιστώσα y της ταχύτητας έχει αρχική τιμή ίση με −15 m/s και παραμένει αμετάβλητη. Στην Εικόνα Μ4.6 φαίνεται το διάγραμμα της παραπάνω κίνησης. Επειδή το σωματίδιο επιταχύνει στην κατεύθυνση του ημιάξονα $+x$, η αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητάς του αυξάνεται και η διαδρομή καμπυλώνει όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Παρατηρήστε ότι η απόσταση μεταξύ διαδοχικών εικόνων αυξάνεται με τον



Εικόνα Μ4.6 (Παράδειγμα Μ4.1) Διάγραμμα κίνησης για το σωματίδιο.

M4.1 συν.

χρόνο, επειδή αυξάνεται η ταχύτητα. Η τοποθέτηση των διανυσμάτων επιτάχυνσης και ταχύτητας στην Εικόνα M4.6 μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε περισσότερο το πρόβλημα.

Κατηγοριοποίηση Εφόσον η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου έχει συνιστώσες x και y, κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα κίνησης ενός σωματιδίου σε δύο διαστάσεις. Επειδή η επιτάχυνση του σωματιδίου έχει μόνο συνιστώσα x, μοντελοποιούμε το σωματίδιο ως σταθερά επιταχυνόμενο κατά μήκος του άξονα x και ως κινούμενο με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα y.

Ανάλυση Ξεκινάμε τη μαθηματική ανάλυση ορίζοντας ότι $v_{xi} = 20$ m/s, $v_{yi} = -15$ m/s, $a_x = 4.0$ m/s², και $a_y = 0$.

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M4.8 για το διάνυσμα της ταχύτητας:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές για την ταχύτητα και τον χρόνο σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο και σε δευτερόλεπτα αντίστοιχα:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [20 + (4.0)t]\hat{\mathbf{i}} + [-15 + (0)t]\hat{\mathbf{j}}$$

$$(1) \quad \vec{\mathbf{v}}_f = \boxed{[(20 + 4.0t)\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]}$$

Ολοκλήρωση Παρατηρήστε ότι η συνιστώσα x της ταχύτητας αυξάνεται με τον χρόνο ενώ η συνιστώσα y παραμένει σταθερή· αυτό συμφωνεί με την πρόβλεψή μας.

(Β) Υπολογίστε την ταχύτητα του σωματιδίου και το μέτρο της τη χρονική στιγμή $t = 5.0$ s καθώς και τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα x.

ΛΥΣΗ

Ανάλυση

Υπολογίστε το αποτέλεσμα από την Εξίσωση (1) τη χρονική στιγμή $t = 5.0$ s:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0(5.0))\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}] = \boxed{(40\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}})\text{ m/s}}$$

Βρείτε τη γωνία θ που σχηματίζει η $\vec{\mathbf{v}}_f$ με τον άξονα x τη χρονική στιγμή $t = 5.0$ s:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15\text{ m/s}}{40\text{ m/s}}\right) = \boxed{-21°}$$

Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου ως το μέτρο της $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$v_f = |\vec{\mathbf{v}}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2}\text{ m/s} = \boxed{43\text{ m/s}}$$

Ολοκλήρωση Το αρνητικό πρόσημο της γωνίας θ δείχνει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας έχει κατεύθυνση 21° κάτω από τον θετικό ημιάξονα x. Παρατηρήστε ότι αν υπολογίσετε τη v_i από τις συνιστώσες x και y της $\vec{\mathbf{v}}_i$, θα βρείτε ότι $v_f > v_i$. Συμφωνεί αυτό με την πρόβλεψή μας;

(Γ) Προσδιορίστε τις συντεταγμένες x και y του σωματιδίου και το διάνυσμα θέσης του σε κάθε χρονική στιγμή t.

ΛΥΣΗ

Ανάλυση

Χρησιμοποιήστε τις συνιστώσες της Εξίσωσης M4.9 με $x_i = y_i = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, όπου τα x και y μετριούνται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα:

$$x_f = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \boxed{20t + 2.0t^2}$$

$$y_f = v_{yi}t = \boxed{-15t}$$

Εκφράστε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε κάθε χρονική στιγμή t:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = x_f\hat{\mathbf{i}} + y_f\hat{\mathbf{j}} = \boxed{(20t + 2.0t^2)\hat{\mathbf{i}} - 15t\hat{\mathbf{j}}}$$

συνεχίζεται

Μ4.1 *συν.*

Ολοκλήρωση Ας θεωρήσουμε τώρα την οριακή περίπτωση για πολύ μεγάλες τιμές του t.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν αφήσουμε να περάσει πολύς χρόνος και μετά παρατηρήσουμε την κίνηση του σωματιδίου; Πώς θα περιγράφαμε την κίνηση του σωματιδίου για μεγάλες τιμές του χρόνου;

Απάντηση Εξετάζοντας την Εικόνα Μ4.6, διαπιστώνουμε ότι η τροχιά του σωματιδίου καμπυλώνει προς τον άξονα x. Δεν υπάρχει λόγος να υποθέσουμε ότι αυτή η τάση θα αλλάξει, κάτι που σημαίνει ότι με το πέρασμα του χρόνου η τροχιά θα τείνει να γίνει παράλληλη με τον άξονα x. Από μαθηματικής άποψης, η Εξίσωση (1) δείχνει ότι η συνιστώσα y της ταχύτητας παραμένει σταθερή ενώ η συνιστώσα x αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο t. Συνεπώς, για πολύ μεγάλες τιμές του t, η συνιστώσα x της ταχύτητας είναι πολύ μεγαλύτερη από τη συνιστώσα y, υποδηλώνοντας ότι το διάνυσμα της ταχύτητας τείνει να γίνει παράλληλο προς τον άξονα x. Τόσο το x_f όσο και το y_f συνεχίζουν να αυξάνονται με τον χρόνο, αλλά το x_f αυξάνεται με πολύ μεγαλύτερο ρυθμό.

Μ4.3 Κίνηση βλημάτων

Όταν βλέπουμε μια μπάλα ποδοσφαίρου να διαγράφει μια τροχιά στον αέρα, ουσιαστικά παρατηρούμε την κίνηση ενός βλήματος. Η μπάλα ακολουθεί καμπύλη διαδρομή και επιστρέφει στο έδαφος. Μπορούμε να αναλύσουμε εύκολα την **κίνηση βλήματος** αν κάνουμε δύο υποθέσεις: (1) η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης και έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω,[2] και (2) η επίδραση της αντίστασης του αέρα είναι αμελητέα.[3] Με βάση αυτές τις υποθέσεις, μπορούμε να βρούμε ότι η διαδρομή ενός βλήματος, την οποία ονομάζουμε *τροχιά*, είναι *πάντα* παραβολή, όπως φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ4.7. **Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω υποθέσεις σε όλο αυτό το κεφάλαιο.**

Η σχέση για το διάνυσμα θέσης ενός βλήματος ως συνάρτηση του χρόνου προκύπτει άμεσα από την Εξίσωση Μ4.9, στην οποία ως επιτάχυνση του σώματος χρησιμοποιούμε την επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2 \qquad \text{(Μ4.10)}$$

όπου οι αρχικές συνιστώσες x και y της ταχύτητας του βλήματος είναι

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i \sin\theta_i \qquad \text{(Μ4.11)}$$

Στην Εικόνα Μ4.8 φαίνεται μια γραφική αναπαράσταση της Εξίσωσης Μ4.10, για ένα βλήμα που εκτοξεύεται από την αρχή των συντεταγμένων, έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\mathbf{r}}_i = 0$. Η τελική θέση ενός σωματιδίου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η υπέρθεση της αρχικής του θέσης $\vec{\mathbf{r}}_i$, του όρου $\vec{\mathbf{v}}_i t$, ο οποίος αντιστοιχεί στη μετατόπισή του αν δεν υπήρχε επιτάχυνση, και του όρου $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$, ο οποίος αντιστοιχεί στη μετατόπισή του εξαιτίας της βαρυτικής επιτάχυνσης. Με άλλα λόγια, αν δεν υπήρχε βαρυτική επιτάχυνση, το σωματίδιο θα συνέχιζε να κινείται ευθύγραμμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{v}}_i$. Άρα, η κατακόρυφη απόσταση $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ κατά την οποία το σωματίδιο εκτρέπεται από την ευθεία τροχιά είναι η απόσταση που θα διήνυε στο ίδιο χρονικό διάστημα ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση ξεκινώντας από κατάσταση ηρεμίας.

Αποφυγή παγίδων Μ4.2

Η επιτάχυνση στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς

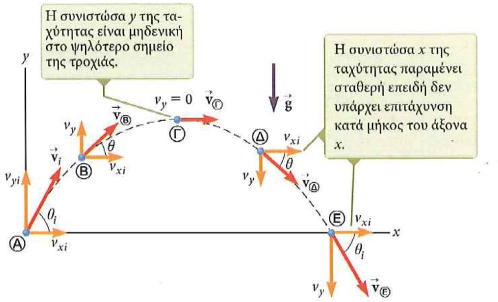
Όπως αναφέραμε στην Αποφυγή παγίδων Μ2.8, πολλοί ισχυρίζονται ότι η επιτάχυνση ενός βλήματος στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του είναι ίση με μηδέν. Κάνουν αυτό το σφάλμα επειδή συγχέουν τη μηδενική κατακόρυφη ταχύτητα με τη μηδενική επιτάχυνση. Αν το βλήμα είχε μηδενική επιτάχυνση στο ψηλότερο σημείο, τότε η ταχύτητά του σε αυτό σημείο δεν θα μεταβαλλόταν· αντίθετα, το βλήμα θα συνέχιζε να κινείται οριζόντια με σταθερό μέτρο ταχύτητας! Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, επειδή η επιτάχυνση *δεν* είναι μηδενική σε κανένα σημείο της τροχιάς.

Lester Lefkowitz/Taxi/Getty Images

Συγκολλητής κόβει μια βαριά μεταλλική δοκό με συσκευή οξυγόνου. Οι σπίθες που δημιουργούνται ακολουθούν παραβολικές τροχιές.

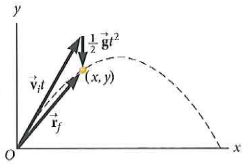
[2] Η υπόθεση αυτή είναι λογική εφόσον η εμβέλεια της κίνησης είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης (6.4×10^6 m). Ουσιαστικά, αυτό ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η Γη είναι επίπεδη για την κίνηση που εξετάζουμε.

[3] Η υπόθεση αυτή συχνά *δεν* δικαιολογείται, ειδικά σε μεγάλες ταχύτητες. Επιπλέον, κάθε περιστροφή η οποία προσδίδεται σε ένα βλήμα, όπως το φάλτσο που βάζει ο πίτσερ του μπέιζμπολ για να ρίξει μια κυρτή μπαλιά, μπορεί να προκαλέσει μερικά ενδιαφέροντα φαινόμενα που σχετίζονται με δυνάμεις της αεροδυναμικής τις οποίες θα περιγράψουμε στο Κεφάλαιο Μ14.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ4.7
Η παραβολική τροχιά ενός βλήματος που εκτοξεύεται από την αρχή των συντεταγμένων με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_i$. Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ μεταβάλλεται με τον χρόνο τόσο ως προς το μέτρο όσο και ως προς την κατεύθυνση. Η μεταβολή αυτή είναι αποτέλεσμα της επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ στην κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα *y*.

Στην Ενότητα Μ4.2, ορίσαμε ότι η κίνηση σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί σε δύο ανεξάρτητες κινήσεις στις κατευθύνσεις των αξόνων *x* και *y*, με επιταχύνσεις a_x και a_y. Μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση των βλημάτων με παρόμοιο τρόπο, λαμβάνοντας μηδενική επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα *x* και σταθερή επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα *y*, $a_y = -g$. Επομένως, αναλύουμε την κίνηση βλημάτων μοντελοποιώντας την ως υπέρθεση δύο κινήσεων: (1) την κίνηση ενός σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση και (2) την κίνηση ενός σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση (ελεύθερη πτώση) στην κατακόρυφη διεύθυνση. Η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης ενός βλήματος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και μπορούν να αντιμετωπιστούν χωριστά, με τον χρόνο *t* να είναι η κοινή ανεξάρτητη μεταβλητή και για τις δύο συνιστώσες.



Εικόνα Μ4.8 Το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_f$ ενός βλήματος που εκτοξεύεται από την αρχή των συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_i$. Το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}_i t$ θα ήταν η μετατόπιση του βλήματος αν δεν υπήρχε βαρύτητα, ενώ το διάνυσμα $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ είναι η κατακόρυφη μετατόπισή του από την ευθύγραμμη τροχιά λόγω της βαρυτικής επιτάχυνσής του προς τα κάτω.

***Σύντομο ερώτημα* Μ4.2** **(i)** Σε ποιο σημείο της παραβολικής τροχιάς ενός βλήματος που εκτοξεύεται προς τα επάνω (Εικόνα Μ4.8) είναι τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του κάθετα μεταξύ τους; (α) Πουθενά. (β) Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς. (γ) Στο σημείο εκτόξευσης. **(ii)** Σε ποιο από τα παραπάνω σημεία είναι τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης παράλληλα μεταξύ τους;

Βεληνεκές και μέγιστο ύψος βλήματος

Ας υποθέσουμε ότι ένα βλήμα εκτοξεύεται από την αρχή των συντεταγμένων τη χρονική στιγμή $t_i = 0$ με θετική συνιστώσα ταχύτητας v_{yi}, όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.9, και επιστρέφει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αυτό συμβαίνει συχνά στα σπορ, όπου οι μπάλες του μπέιζμπολ, του ποδοσφαίρου, και του γκολφ συχνά προσγειώνονται στο ίδιο επίπεδο από το οποίο εκτοξεύτηκαν.

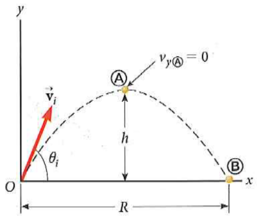
Είναι ενδιαφέρον να αναλύσουμε δύο σημεία της κίνησης αυτής: το σημείο Ⓐ με το μέγιστο ύψος, το οποίο έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (*R*/2, *h*), και το σημείο Ⓑ με συντεταγμένες (*R*, 0). Η απόσταση *R* ονομάζεται *βεληνεκές* του βλήματος, και η απόσταση *h* είναι το *μέγιστο ύψος* του. Ας βρούμε τους μαθηματικούς τύπους για τα *h* και *R* συναρτήσει των v_i, θ_i, και *g*.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε το ύψος *h* παρατηρώντας ότι στο ψηλότερο σημείο ισχύει $v_{yⒶ} = 0$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνιστώσα *y* της Εξίσωσης Μ4.8 για να προσδιορίσουμε τη χρονική στιγμή $t_Ⓐ$ στην οποία το βλήμα φτάνει στο ψηλότερο σημείο:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$0 = v_i \sin\theta_i - g t_Ⓐ$$

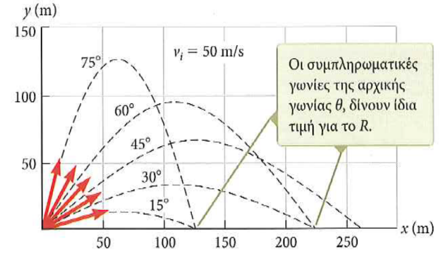
$$t_Ⓐ = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$



Εικόνα Μ4.9 Ένα βλήμα το οποίο εκτοξεύεται πάνω από επίπεδη επιφάνεια από την αρχή των συντεταγμένων τη χρονική στιγμή $t_i = 0$ με αρχική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_i$. Το μέγιστο ύψος του βλήματος είναι *h*, ενώ το βεληνεκές του είναι *R*. Στο ψηλότερο σημείο Ⓐ της τροχιάς, το σωματίδιο έχει συντεταγμένες (*R*/2, *h*).

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ4.10

Εκτόξευση βλήματος πάνω από επίπεδη επιφάνεια από την αρχή των συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα μέτρου 50 m/s. Απεικονίζονται διάφορες γωνίες εκτόξευσης.



Αντικαθιστώντας το $t_Ⓐ$ από την προηγούμενη παράσταση στη συνιστώσα y της Εξίσωσης Μ4.9 και το $y = y_Ⓐ$ με h, παίρνουμε μια σχέση για το h συναρτήσει του μέτρου και της κατεύθυνσης της αρχικής ταχύτητας:

$$h = (v_i \sin\theta_i)\frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} \qquad \textbf{(M4.12)}$$

Αποφυγή παγίδων Μ4.3

Οι εξισώσεις ύψους και βεληνεκούς

Η Εξίσωση Μ4.13 είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό του βεληνεκούς R μόνο για συμμετρικές τροχιές, όπως αυτές που φαίνονται στη Δυναμική Εικόνα Μ4.10. Αν η τροχιά δεν είναι συμμετρική, *μη χρησιμοποιείτε αυτή την εξίσωση*. Οι γενικές σχέσεις που δίνονται στις Εξισώσεις Μ4.8 και Μ4.9 είναι *πιο σημαντικές* επειδή παρέχουν τις συνιστώσες της θέσης και της ταχύτητας *οποιουδήποτε* σωματιδίου το οποίο κινείται σε δύο διαστάσεις σε *κάθε* χρονική στιγμή t.

Το βεληνεκές R είναι η οριζόντια θέση του βλήματος έπειτα από ένα χρονικό διάστημα που ισούται με το διπλάσιο του χρόνου που χρειάζεται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος του, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_Ⓑ = 2t_Ⓐ$. Χρησιμοποιώντας τη συνιστώσα x της Εξίσωσης Μ4.9, παρατηρώντας ότι $v_{xi} = v_{xⒷ} = v_i \cos\theta_i$, και θέτοντας $x_Ⓑ = R$ τη χρονική στιγμή $t = 2t_Ⓐ$, βρίσκουμε ότι

$$R = v_{xi}t_Ⓑ = (v_i \cos\theta_i)2t_Ⓐ$$

$$= (v_i \cos\theta_i)\frac{2v_i \sin\theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ (δείτε το Παράρτημα Β.4), μπορούμε να γράψουμε το βεληνεκές R σε πιο συνεπτυγμένη μορφή

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \qquad \textbf{(M4.13)}$$

Η μέγιστη τιμή του βεληνεκούς R από την Εξίσωση Μ4.13 είναι $R_{max} = v_i^2/g$. Αυτό είναι λογικό επειδή η μέγιστη τιμή του $\sin 2\theta_i$ είναι ίση με 1, κάτι που συμβαίνει όταν $2\theta_i = 90°$. Συνεπώς, το βεληνεκές R είναι μέγιστο όταν $\theta_i = 45°$.

Στη Δυναμική Εικόνα Μ4.10 φαίνονται διάφορες τροχιές για ένα βλήμα το οποίο έχει αρχική ταχύτητα συγκεκριμένου μέτρου αλλά εκτοξεύεται υπό διαφορετικές γωνίες. Όπως μπορείτε να δείτε, το βεληνεκές είναι μέγιστο για $\theta_i = 45°$. Επιπλέον, για κάθε γωνία θ_i διαφορετική από 45°, σε ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $(R, 0)$ αντιστοιχεί μία από δύο συμπληρωματικές τιμές της θ_i, για παράδειγμα, 75° και 15°. Φυσικά, το μέγιστο ύψος και ο χρόνος πτήσης για μία από αυτές τις τιμές της θ_i διαφέρουν από τα αντίστοιχα μεγέθη για τη συμπληρωματική τιμή της γωνίας.

***Σύντομο ερώτημα* Μ4.3** Κατατάξτε τις γωνίες εκτόξευσης των πέντε τροχιών που φαίνονται στη Δυναμική Εικόνα Μ4.10 ως προς τον χρόνο πτήσης, ξεκινώντας από τον μικρότερο.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

ΚΙΝΗΣΗ ΒΛΗΜΑΤΩΝ

Όταν λύνετε προβλήματα που αφορούν την κίνηση βλημάτων, σας προτείνουμε να χρησιμοποιείτε την ακόλουθη μέθοδο.

1. Μοντελοποίηση. Σκεφτείτε το πρόβλημα από φυσικής άποψης. Φανταστείτε το βλήμα να κινείται κατά μήκος της τροχιάς του.

2. Κατηγοριοποίηση. Βεβαιωθείτε ότι το πρόβλημα αφορά ένα σωματίδιο που εκτελεί ελεύθερη πτώση και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Επιλέξτε ένα σύστημα συντεταγμένων με το x στην οριζόντια διεύθυνση και το y στην κατακόρυφη.

3. Ανάλυση. Αν δίνεται το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας, αναλύστε το στις συνιστώσες x και y. Θεωρήστε ότι η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι ανεξάρτητες. Αναλύστε την οριζόντια κίνηση του βλήματος χρησιμοποιώντας το μοντέλο του σωματιδίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αναλύστε την κατακόρυφη κίνηση του βλήματος χρησιμοποιώντας το μοντέλο του σωματιδίου που κινείται με σταθερή επιτάχυνση.

4. Ολοκλήρωση. Μόλις βρείτε την απάντηση, ελέγξτε αν συμφωνεί με τη νοητική και την εικονογραφική αναπαράσταση και αν τα αποτελέσματά σας είναι ρεαλιστικά.

Παράδειγμα M4.2 Άλμα εις μήκος

Άλτης του μήκους (Εικόνα M4.11) απογειώνεται με ταχύτητα μέτρου 11.0 m/s σχηματίζοντας γωνία 20.0° με την οριζόντιο.

(A) Πόσο μακριά πηδάει;

AP Images

Εικόνα M4.11 (Παράδειγμα M4.2) Ο Γάλλος αθλητής Romain Barras αγωνίζεται στο άλμα εις μήκος του δεκάθλου ανδρών στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2008 που έγιναν στο Πεκίνο.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Τα χέρια και τα πόδια ενός άλτη του μήκους κινούνται με περίπλοκο τρόπο, αλλά θα αγνοήσουμε την κίνηση αυτή. Θα μοντελοποιήσουμε την κίνηση του άλτη ως απλή κίνηση βλήματος.

Κατηγοριοποίηση Κατηγοριοποιούμε το παράδειγμα ως πρόβλημα κίνησης βλήματος. Επειδή γνωρίζουμε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας και τη γωνία του άλματος, καθώς και ότι το τελικό ύψος είναι ίδιο με το αρχικό, κατηγοριοποιούμε περαιτέρω το πρόβλημα ως πρόβλημα που ικανοποιεί τις συνθήκες χρήσης των Εξισώσεων M4.12 και M4.13. Αυτή η προσέγγιση είναι ο πιο άμεσος τρόπος ανάλυσης του προβλήματος, αν και οι γενικές μέθοδοι που έχουμε περιγράψει δίνουν πάντα τη σωστή απάντηση.

Ανάλυση

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M4.13 για να βρείτε το βεληνεκές του άλτη:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0\ \mathrm{m/s})^2 \sin 2(20.0°)}{9.80\ \mathrm{m/s^2}} = \boxed{7.94\ \mathrm{m}}$$

(B) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του άλματος;

ΛΥΣΗ

Ανάλυση

Βρείτε το μέγιστο ύψος του άλματος από την Εξίσωση M4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} = \frac{(11.0\ \mathrm{m/s})^2 (\sin 20.0°)^2}{2(9.80\ \mathrm{m/s^2})} = \boxed{0.722\ \mathrm{m}}$$

συνεχίζεται

Μ4.2 συν.

Ολοκλήρωση Βρείτε τις απαντήσεις στα (Α) και (Β) χρησιμοποιώντας τη γενική μέθοδο. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να συμφωνούν. Το να θεωρήσουμε τον άλτη του μήκους ως σωματίδιο αποτελεί υπεραπλούστευση. Ωστόσο, οι τιμές που πήραμε συμφωνούν με τα πραγματικά αποτελέσματα στα σπορ. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ένα περίπλοκο σύστημα, όπως ο άλτης του μήκους, ως σωματίδιο και να πάρουμε λογικά αποτελέσματα.

Παράδειγμα Μ4.3 Διάνα

Μια δημοφιλής επίδειξη που γίνεται σε διαλέξεις είναι η εκτόξευση ενός βλήματος σε έναν στόχο έτσι ώστε τη στιγμή που το βλήμα εγκαταλείπει την κάννη ο στόχος να αρχίζει να πέφτει. Δείξτε ότι αν η κάννη στοχεύει αρχικά τον ακίνητο στόχο, το βλήμα θα πετύχει τον κινούμενο στόχο όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.12α.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα εξετάζοντας την Εικόνα Μ4.12α. Παρατηρήστε ότι στο πρόβλημα δεν ζητούνται αριθμητικές τιμές. Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι μια αλγεβρική παράσταση.

Κατηγοριοποίηση Επειδή στα δύο σώματα ασκείται μόνο η βαρύτητα, θα κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα με δύο σώματα σε ελεύθερη πτώση, όπου ο στόχος κινείται σε μία διάσταση και το βλήμα σε δύο.

Ανάλυση Μοντελοποιούμε τον στόχο Τ ως σταθερά επιταχυνόμενο σωματίδιο σε μία διάσταση. Από την Εικόνα Μ4.12β βλέπουμε ότι η αρχική συντεταγμένη $y_{i\mathrm{T}}$ του στόχου είναι $x_\mathrm{T}\tan\theta_i$ και η αρχική του ταχύτητα είναι μηδέν. Ο στόχος πέφτει με επιτάχυνση $a_y = -g$. Μοντελοποιούμε το βλήμα Ρ ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα y και ως σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα στη διεύθυνση του άξονα x.

Γράψτε τη σχέση για τη συντεταγμένη y του στόχου σε κάθε χρονική στιγμή μετά την απελευθέρωσή του, παρατηρώντας ότι η αρχική ταχύτητά του είναι μηδενική:

$$(1)\quad y_\mathrm{T} = y_{i\mathrm{T}} + (0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_\mathrm{T}\tan\theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Γράψτε τη σχέση για τη συντεταγμένη y του βλήματος σε κάθε χρονική στιγμή:

$$(2)\quad y_\mathrm{P} = y_{i\mathrm{P}} + v_{yi\mathrm{P}}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{i\mathrm{P}}\sin\theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_{i\mathrm{P}}\sin\theta_i)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Γράψτε τη σχέση για τη συντεταγμένη x του βλήματος σε κάθε χρονική στιγμή:

$$x_\mathrm{P} = x_{i\mathrm{P}} + v_{xi\mathrm{P}}t = 0 + (v_{i\mathrm{P}}\cos\theta_i)t = (v_{i\mathrm{P}}\cos\theta_i)t$$

Λύστε την παραπάνω σχέση και βρείτε τον χρόνο ως συνάρτηση της οριζόντιας θέσης του βλήματος:

$$t = \frac{x_\mathrm{P}}{v_{i\mathrm{P}}\cos\theta_i}$$

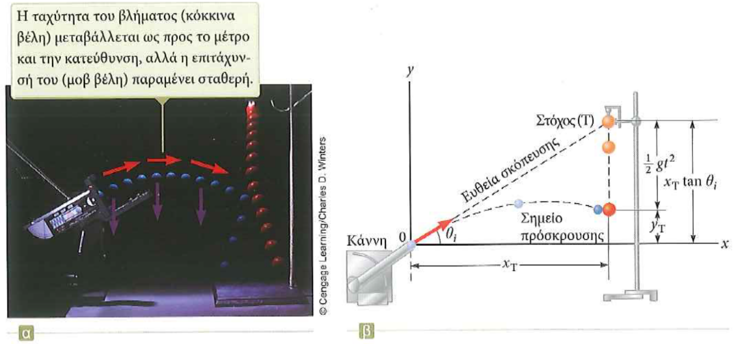
Αντικαταστήστε αυτή την παράσταση στην Εξίσωση (2):

$$(3)\quad y_\mathrm{P} = (v_{i\mathrm{P}}\sin\theta_i)\left(\frac{x_\mathrm{P}}{v_{i\mathrm{P}}\cos\theta_i}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_\mathrm{P}\tan\theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Συγκρίνετε τις Εξισώσεις (1) και (3). Βλέπουμε ότι όταν οι συντεταγμένες x του βλήματος και του στόχου είναι ίδιες –δηλαδή, όταν $x_\mathrm{T} = x_\mathrm{P}$– τότε και οι συντεταγμένες τους y, οι οποίες δίνονται από τις Εξισώσεις (1) και (3), είναι ίδιες και το βλήμα χτυπάει τον στόχο.

Ολοκλήρωση Παρατηρήστε ότι το βλήμα θα χτυπήσει τον στόχο μόνο όταν $v_{i\mathrm{P}}\sin\theta_i \geq \sqrt{gd/2}$, όπου d είναι το αρχικό ύψος του στόχου πάνω από το έδαφος. Αν το $v_{i\mathrm{P}}\sin\theta_i$ είναι μικρότερο από αυτή την τιμή, το βλήμα θα πέσει στο έδαφος πριν χτυπήσει τον στόχο.

M4.3 *συν.*

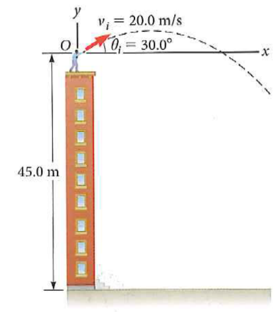


Εικόνα M4.12 (Παράδειγμα M4.3) (α) Φωτογραφία πολλαπλής έκθεσης για την επίδειξη βολής σε στόχο. Αν η κάννη στοχεύει κατευθείαν στον στόχο και το βλήμα εγκαταλείψει την κάννη τη στιγμή ακριβώς που αρχίζει να πέφτει ο στόχος, τότε το βλήμα θα χτυπήσει τον στόχο. (β) Σχηματικό διάγραμμα για την επίδειξη βολής σε στόχο.

Παράδειγμα M4.4 Εκπληκτική βολή!

Από την ταράτσα ενός κτιρίου κάποιος ρίχνει μια πέτρα προς τα πάνω υπό γωνία 30.0° με την οριζόντιο με αρχική ταχύτητα μέτρου 20.0 m/s όπως φαίνεται στην Εικόνα M4.13. Η πέτρα ρίχνεται από ύψος 45.0 m πάνω από το έδαφος.

(A) Πόσο χρόνο χρειάζεται η πέτρα για να φτάσει στο έδαφος;



Εικόνα M4.13 (Παράδειγμα M4.4) Ρίψη πέτρας από την ταράτσα ενός κτιρίου.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Μελετήστε την Εικόνα M4.13, όπου φαίνεται η τροχιά της πέτρας και διάφορες παράμετροι της κίνησής της.

Κατηγοριοποίηση Κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα κίνησης βλήματος. Μοντελοποιούμε την πέτρα ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα y και ως σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα στη διεύθυνση του άξονα x.

Ανάλυση Έχουμε τα δεδομένα $x_i = y_i = 0$, $y_f = -45.0$ m, $a_y = -g$, και $v_i = 20.0$ m/s (η αριθμητική τιμή του y_f είναι αρνητική επειδή επιλέξαμε το σημείο ρίψης ως αρχή των συντεταγμένων).

Βρείτε τις αρχικές συνιστώσες x και y της ταχύτητας της πέτρας:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = (20.0\ \text{m/s})\cos 30.0° = 17.3\ \text{m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin\theta_i = (20.0\ \text{m/s})\sin 30.0° = 10.0\ \text{m/s}$$

Βρείτε μια σχέση για την κατακόρυφη θέση της πέτρας από την κατακόρυφη συνιστώσα της Εξίσωσης M4.9:

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

συνεχίζεται

Μ4.4 συν.

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές: $-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$

Λύστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς t: $\boxed{t = 4.22 \text{ s}}$

(Β) Ποιό είναι το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας λίγο πριν προσκρούσει στο έδαφος;

ΛΥΣΗ

Ανάλυση Χρησιμοποιήστε τη συνιστώσα y της Εξίσωσης Μ4.8 για να βρείτε τη συνιστώσα y της ταχύτητας που έχει η πέτρα λίγο πριν προσκρούσει στο έδαφος: $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$

Αντικαταστήστε τις αριθμητικές τιμές, χρησιμοποιώντας $t = 4.22$ s: $v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.3 \text{ m/s}$

Χρησιμοποιήστε τη συνιστώσα αυτή και την οριζόντια συνιστώσα $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s για να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας τη χρονική στιγμή $t = 4.22$ s: $v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3 \text{ m/s})^2 + (-31.3 \text{ m/s})^2} = \boxed{35.8 \text{ m/s}}$

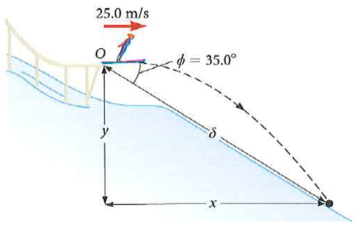
Ολοκλήρωση Είναι λογικό η συνιστώσα y της τελικής ταχύτητας να είναι αρνητική; Είναι λογικό το μέτρο της τελικής ταχύτητας να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της αρχικής ταχύτητας, δηλαδή από 20.0 m/s;

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν φυσάει οριζόντιος άνεμος με κατεύθυνση ίδια με αυτή της πέτρας, με αποτέλεσμα η τελευταία να έχει οριζόντια συνιστώσα επιτάχυνσης $a_x = 0.500$ m/s^2; Ποιο από τα ερωτήματα (Α) ή (Β) του παραδείγματος θα έχει διαφορετική απάντηση;

Απάντηση Θυμηθείτε ότι οι κινήσεις κατά μήκος των αξόνων x και y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, ο οριζόντιος άνεμος δεν μπορεί να επηρεάσει την κατακόρυφη κίνηση. Ο χρόνος πτήσης του βλήματος καθορίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, άρα η απάντηση στο ερώτημα (Α) δεν αλλάζει. Λόγω του ανέμου, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας αυξάνεται με τον χρόνο, άρα το μέτρο της τελικής ταχύτητας θα είναι μεγαλύτερο στο ερώτημα (Β). Για $a_x = 0.500$ m/s^2, βρίσκουμε ότι $v_{xf} = 19.4$ m/s και $v_f = 36.9$ m/s.

Παράδειγμα Μ4.5 Άλμα χιονοδρόμου

Άλτης του σκι απογειώνεται από τη ράμπα κινούμενος οριζόντια με ταχύτητα μέτρου 25.0 m/s, όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.14. Η πίστα προσγείωσης έχει κλίση 35.0° ως προς την οριζόντιο. Σε ποιο σημείο της πίστας θα προσγειωθεί;



Εικόνα Μ4.14 (Παράδειγμα Μ4.5) Άλτης του σκι ο οποίος απογειώνεται από τη ράμπα κινούμενος οριζόντια.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με βάση τους αγώνες σκι που έχουμε δει στους Χειμερινούς Ολυμπιακούς Αγώνες. Εκτιμούμε ότι ο σκιέρ βρίσκεται στον αέρα για 4 s και ότι διανύει οριζόντια απόσταση περίπου 100 m. Θα πρέπει να αναμένουμε ότι η τιμή του d, δηλαδή, η απόσταση που καλύπτει κατά μήκος της πίστας, θα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

M4.5 *συν.*

Κατηγοριοποίηση Κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σωματιδίου που πραγματοποιεί κίνηση βλήματος.

Ανάλυση Μας διευκολύνει να επιλέξουμε ως αρχή των συντεταγμένων το σημείο όπου ξεκινάει το άλμα. Οι συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας είναι $v_{xi} = 25.0$ m/s και $v_{yi} = 0$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο της Εικόνας Μ4.14, διαπιστώνουμε ότι οι συντεταγμένες x και y του άλτη στο σημείο προσγείωσης δίνονται από τις σχέσεις $x_f = d\cos\phi$ και $y_f = -d\sin\phi$.

Εκφράστε τις συντεταγμένες του άλτη συναρτήσει του χρόνου:

(1) $x_f = v_{xi}t$

(2) $y_f = v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}gt^2$

Αντικαταστήστε τις τιμές των x_f και y_f στο σημείο προσγείωσης:

(3) $d\cos\phi = v_{xi}t$

(4) $-d\sin\phi = -\frac{1}{2}gt^2$

Λύστε την Εξίσωση (3) ως προς t και αντικαταστήστε το αποτέλεσμα στην Εξίσωση (4):

$$-d\sin\phi = -\frac{1}{2}g\left(\frac{d\cos\phi}{v_{xi}}\right)^2$$

Λύστε ως προς d:

$$d = \frac{2v_{xi}^2\sin\phi}{g\cos^2\phi} = \frac{2(25.0\text{ m/s})^2\sin 35.0°}{(9.80\text{ m/s}^2)\cos^2 35.0°} = 109\text{ m}$$

Υπολογίστε τις συντεταγμένες x και y του σημείου όπου προσγειώνεται ο σκιέρ:

$$x_f = d\cos\phi = (109\text{ m})\cos 35.0° = \boxed{89.3\text{ m}}$$

$$y_f = -d\sin\phi = -(109\text{ m})\sin 35.0° = \boxed{-62.5\text{ m}}$$

Ολοκλήρωση Ας συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα με τις προβλέψεις μας. Περιμέναμε ότι η οριζόντια απόσταση θα είναι της τάξης των 100 m, και το αποτέλεσμα των 89.3 m έχει όντως αυτή την τάξη μεγέθους. Ίσως είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τον χρόνο πτήσης του άλτη και να τον συγκρίνουμε με την αντίστοιχη εκτίμησή μας, που ήταν 4 s.

ΚΙ ΑΝ...; Ας υποθέσουμε ότι όλα στο παραπάνω παράδειγμα παραμένουν ίδια εκτός από τη ράμπα, η οποία αυτή τη φορά καμπυλώνει προς τα επάνω έτσι ώστε ο άλτης να απογειώνεται σχηματίζοντας γωνία με την οριζόντιο. Θα βοηθήσει αυτή η αλλαγή της σχεδίασης της ράμπας στο να μεγιστοποιηθεί το μήκος του άλματος;

Απάντηση Αν η αρχική ταχύτητα έχει συνιστώσα με κατεύθυνση προς τα πάνω, ο σκιέρ θα μείνει στον αέρα περισσότερο και άρα θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση. Όμως, δίνοντας κλίση προς τα επάνω στο διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας μειώνουμε την οριζόντια συνιστώσα της. Έτσι, αν το άκρο της ράμπας έχει *μεγάλη* κλίση προς τα πάνω, η απόσταση ενδέχεται να *μειωθεί*. Θεωρήστε την εξής ακραία περίπτωση: Ο σκιέρ απογειώνεται σχηματίζοντας γωνία 90° με την οριζόντιο και απλώς ανεβαίνει κατακόρυφα προς τα πάνω και επιστρέφει στην άκρη της ράμπας! Σύμφωνα με τα παραπάνω, πρέπει να υπάρχει μια βέλτιστη γωνία μεταξύ 0° και 90°, η οποία να αντιπροσωπεύει τον καλύτερο δυνατό συμβιβασμό μεταξύ της μεγιστοποίησης του χρόνου πτήσης και της ελάττωσης της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας.

Ας υπολογίσουμε τη βέλτιστη γωνία με μαθηματικό τρόπο. Τροποποιούμε τις Εξισώσεις (1) έως (4), υποθέτοντας ότι ο σκιέρ απογειώνεται σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντιο πάνω από μια πίστα προσγείωσης η οποία έχει τυχαία κλίση ϕ:

$$(1)\text{ και }(3) \rightarrow x_f = (v_i\cos\theta)t = d\cos\phi \qquad (2)\text{ και }(4) \rightarrow y_f = (v_i\sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = -d\sin\phi$$

Απαλείφοντας τον χρόνο t από τις εξισώσεις και παραγωγίζοντας για να βρούμε τη μέγιστη απόσταση d συναρτήσει της γωνίας θ, καταλήγουμε (έπειτα από αρκετά βήματα· δείτε το Πρόβλημα 72) στην παρακάτω εξίσωση για τη γωνία θ η οποία δίνει τη μέγιστη τιμή της απόστασης d:

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

Για τη γωνία της πίστας προσγείωσης που φαίνεται στην Εικόνα Μ4.14, δηλαδή $\phi = 35.0°$, η παραπάνω εξίσωση δίνει ως βέλτιστη γωνία απογείωσης τη $\theta = 27.5°$. Για μια πίστας προσγείωσης με γωνία $\phi = 0°$, δηλαδή για ένα οριζόντιο επίπεδο, η εξίσωση δίνει ως βέλτιστη γωνία απογείωσης τη $\theta = 45°$, κάτι που ήταν αναμενόμενο (δείτε τη Δυναμική Εικόνα Μ4.10).

Μ4.4 Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

Αποφυγή παγίδων Μ4.4

Επιτάχυνση σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

Να θυμάστε ότι στη φυσική η επιτάχυνση ορίζεται ως η μεταβολή *του διανύσματος της ταχύτητας* και όχι του *μέτρου της ταχύτητας* (αντίθετα από την κοινή πεποίθηση). Στην κυκλική κίνηση, η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας μεταβάλλεται, επομένως υπάρχει επιτάχυνση.

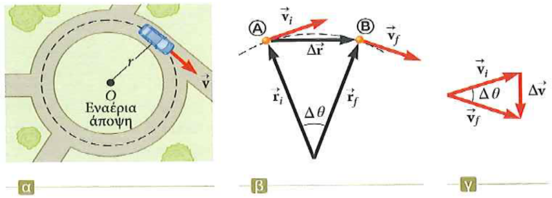
Στην Εικόνα Μ4.15α φαίνεται ένα αυτοκίνητο που κινείται σε κυκλική τροχιά· η κίνηση αυτή ονομάζεται **κυκλική κίνηση.** Αν το αυτοκίνητο κινείται κατά μήκος της τροχιάς του με *ταχύτητα σταθερού μέτρου* v, τότε η κίνηση αυτή ονομάζεται **ομαλή κυκλική κίνηση.** Επειδή αυτό το είδος κίνησης εμφανίζεται πολύ συχνά, συνιστά ένα μοντέλο ανάλυσης που ονομάζεται **σωματίδιο σε ομαλή κυκλική κίνηση.** Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε το συγκεκριμένο μοντέλο.

Πολλοί σπουδαστές εκπλήσσονται όταν διαπιστώνουν ότι παρόλο που το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, *έχει επιτάχυνση*. Για να καταλάβετε τον λόγο, θεωρήστε την εξίσωση ορισμού της επιτάχυνσης, $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ (Εξ. Μ4.5). Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση εξαρτάται από τη μεταβολή της *ταχύτητας*. Επειδή η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, η επιτάχυνση μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους, όπως αναφέραμε στην Ενότητα Μ4.1: είτε λόγω μεταβολής του *μέτρου* της ταχύτητας είτε λόγω μεταβολής της *κατεύθυνσης* της ταχύτητας. Η δεύτερη περίπτωση συμβαίνει όταν ένα σώμα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλική διαδρομή. Το διάνυσμα της ταχύτητας σταθερού μέτρου εφάπτεται πάντα στην τροχιά του σώματος και είναι κάθετο στην ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Θα δείξουμε τώρα ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι πάντα κάθετο στην ακτίνα της τροχιάς και έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου. Αν αυτό δεν ίσχυε, η επιτάχυνση θα είχε μια συνιστώσα παράλληλη προς την τροχιά και, άρα, παράλληλη προς το διάνυσμα της ταχύτητας. Μια τέτοια συνιστώσα της επιτάχυνσης θα προκαλούσε μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του σωματιδίου. Αυτό όμως δεν συμφωνεί με την περιγραφή της κατάστασης: το σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Συνεπώς, στην *ομαλή* κυκλική κίνηση, το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει συνιστώσα μόνο κάθετα στην τροχιά (δηλαδή σε ακτινική διεύθυνση) και με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου.

Θα υπολογίσουμε τώρα το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου. Θεωρήστε το διάγραμμα των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας στην Εικόνα Μ4.15β. Στην εικόνα φαίνεται επίσης το διάνυσμα που αναπαριστά τη μεταβολή $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ της θέσης για ένα τυχαίο χρονικό διάστημα. Το σωματίδιο ακολουθεί κυκλική τροχιά ακτίνας r, ένα τμήμα της οποίας υποδεικνύει η διακεκομμένη καμπύλη. Κατά τη χρονική στιγμή t_i, το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο Ⓐ και έχει ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_i$· σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_f, το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο Ⓑ και έχει ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_f$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι ταχύτητες $\vec{\mathbf{v}}_i$ και $\vec{\mathbf{v}}_f$ διαφέρουν μόνο ως προς την κατεύθυνση και ότι τα μέτρα τους είναι ίδια (δηλαδή ισχύει $v_i = v_f = v$ επειδή η κυκλική κίνηση είναι *ομαλή*).

Στην Εικόνα Μ4.15γ, έχουμε σχεδιάσει τα διανύσματα ταχύτητας της Εικόνας Μ4.15β με κοινή αρχή. Το διάνυσμα $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ συνδέει τις αιχμές των διανυσμάτων και αναπαριστά το διανυσματικό άθροισμα $\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$. Στις Εικόνες Μ4.15β και Μ4.15γ βλέπουμε δύο τρίγωνα τα οποία θα μας βοηθήσουν να αναλύσουμε την κίνηση. Η γωνία $\Delta\theta$ μεταξύ των δύο διανυσμάτων θέσης στην Εικόνα Μ4.15β είναι ίδια με τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας στην Εικόνα Μ4.15γ επειδή το διάνυσμα



Εικόνα Μ4.15 (α) Ένα αυτοκίνητο που κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. (β) Καθώς ένα σωματίδιο κινείται σε ένα τμήμα κυκλικής τροχιάς από το Ⓐ στο Ⓑ, το διάνυσμα της ταχύτητάς του μεταβάλλεται από $\vec{\mathbf{v}}_i$ σε $\vec{\mathbf{v}}_f$. (γ) Το διάγραμμα για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης της μεταβολής $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ της ταχύτητας, η οποία για μικρό $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ είναι προς το κέντρο του κύκλου.

ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$. Επομένως, τα δύο τρίγωνα είναι *όμοια*. (Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν η γωνία μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πλευρών είναι ίδια και για τα δύο τρίγωνα και αν ο λόγος των μηκών των συγκεκριμένων πλευρών είναι ίδιος.) Μπορούμε τώρα να γράψουμε μια σχέση που συνδέει τα μήκη των πλευρών για τα δύο τρίγωνα των Εικόνων Μ4.15β και Μ4.15γ:

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$

όπου $v = v_i = v_f$ και $r = r_i = r_f$. Μπορούμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση ως προς $|\Delta\vec{\mathbf{v}}|$ και να αντικαταστήσουμε τη σχέση που θα προκύψει στην Εξίσωση Μ4.4 $\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$ για να πάρουμε το μέτρο της μέσης επιτάχυνσης για το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σωματίδιο κινείται από το Ⓐ στο Ⓑ:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}$$

Φανταστείτε τώρα ότι τα σημεία Ⓐ και Ⓑ στην Εικόνα Μ4.15β έρχονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Καθώς τα Ⓐ και Ⓑ προσεγγίζουν το ένα το άλλο, το Δt τείνει στο μηδέν, το $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ τείνει στην απόσταση που διανύει το σωματίδιο κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς, και ο λόγος $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|/\Delta t$ τείνει στο μέτρο της ταχύτητας v. Επιπλέον, στο σημείο Ⓐ, η μέση επιτάχυνση γίνεται ίση με τη στιγμιαία. Άρα, στο όριο $\Delta t \to 0$, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(M4.14)}$$

◀ **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

Η επιτάχυνση αυτού του είδους ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση** (*κεντρομόλος* σημαίνει *αυτός που κατευθύνεται προς το κέντρο*). Ο δείκτης στο σύμβολο της επιτάχυνσης μας υπενθυμίζει ότι η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος.

Σε πολλές περιπτώσεις, είναι βολικό να περιγράφουμε την κίνηση ενός σωματιδίου που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κύκλο ακτίνας r συναρτήσει της **περιόδου** T, η οποία ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σωματίδιο για να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά. Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος T, το σωματίδιο διανύει απόσταση $2\pi r$, η οποία είναι ίση με την περιφέρεια της κυκλικής τροχιάς του. Συνεπώς, επειδή το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με το πηλίκο της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς προς την περίοδο, ή $v = 2\pi r/T$, συνεπάγεται ότι

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \text{(M4.15)}$$

◀ **Περίοδος κυκλικής κίνησης**

Οι Εξισώσεις Μ4.14 και Μ4.15 μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα πρόβλημα όταν αυτό είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

***Σύντομο ερώτημα* Μ4.4** Σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με ταχύτητα μέτρου v. Στη συνέχεια, αυξάνει το μέτρο της ταχύτητάς του σε $2v$ διατηρώντας ταυτόχρονα την ίδια τροχιά. **(i)** Κατά ποιον παράγοντα έχει μεταβληθεί η κεντρομόλος επιτάχυνση του σωματιδίου; Επιλέξτε ένα από τα παρακάτω: (α) 0.25 (β) 0.5 (γ) 2 (δ) 4 (ε) Είναι αδύνατο να προσδιοριστεί. **(ii)** Κατά ποιον παράγοντα έχει μεταβληθεί η περίοδος του σωματιδίου; Επιλέξτε από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Αποφυγή παγίδων Μ4.5

Η κεντρομόλος επιτάχυνση δεν είναι σταθερή

Βρήκαμε τη σχέση για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης και διαπιστώσαμε ότι είναι σταθερό στην περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης, αλλά *το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης δεν είναι σταθερό*. Η κατεύθυνσή του είναι πάντα προς το κέντρο του κύκλου, αλλά μεταβάλλεται συνεχώς καθώς το σώμα κινείται στην κυκλική διαδρομή.

Παράδειγμα Μ4.6 Η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης

Ποια είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης καθώς περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε τη Γη να περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Θα μοντελοποιήσουμε τη Γη ως σωματίδιο και θα προσεγγίσουμε την τροχιά της ως κυκλική (στην πραγματικότητα είναι λίγο ελλειπτική, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο Μ13).

Κατηγοριοποίηση Το βήμα της Μοντελοποίησης μας επιτρέπει να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Ανάλυση Δεν γνωρίζουμε την τροχιακή ταχύτητα της Γης για να την αντικαταστήσουμε στην Εξίσωση Μ4.14. Ωστόσο, με τη βοήθεια της Εξίσωσης Μ4.15 μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την Εξίσωση Μ4.14 συναρτήσει της τροχιακής περιόδου της Γης, που γνωρίζουμε ότι είναι ένα έτος, και την ακτίνα της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο, που είναι 1.496×10^{11} m.

Συνδυάστε τις Εξισώσεις Μ4.14 και Μ4.15: $$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές: $$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})}{(1\ \text{yr})^2}\left(\frac{1\ \text{yr}}{3.156 \times 10^7\ \text{s}}\right)^2 = \boxed{5.93 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2}$$

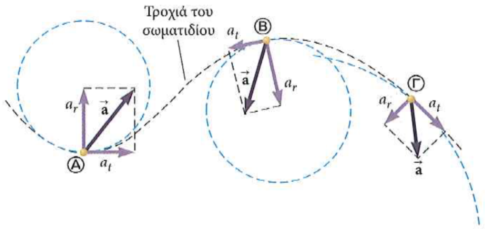
Ολοκλήρωση Η επιτάχυνση αυτή είναι πολύ μικρότερη από την επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης στην επιφάνεια της Γης. Μια σημαντική τεχνική που μάθαμε εδώ είναι η αντικατάσταση του μέτρου v της ταχύτητας στην Εξίσωση Μ4.14 συναρτήσει της περιόδου T της κίνησης. Σε πολλά προβλήματα, είναι πολύ πιθανό να είναι γνωστό το T αντί για το v.

Μ4.5 Εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση

Θα εξετάσουμε τώρα μια πιο γενική κίνηση από αυτή που παρουσιάσαμε στην Ενότητα Μ4.4. Ένα σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά ακολουθώντας καμπύλη τροχιά με το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητάς του να μεταβάλλονται όπως περιγράφεται στη Δυναμική Εικόνα Μ4.16. Σε αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται πάντα στην τροχιά· το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}}$, όμως, σχηματίζει μη μηδενική γωνία με την τροχιά. Σε καθένα από τα τρία σημεία Ⓐ, Ⓑ, και Ⓒ της Δυναμικής Εικόνας Μ4.16, οι διακεκομμένοι μπλε κύκλοι αναπαριστούν την καμπυλότητα της πραγματικής τροχιάς. Η ακτίνα κάθε κύκλου είναι ίση με την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς σε καθένα από αυτά τα σημεία.

Καθώς το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης τροχιάς της Δυναμικής Εικόνας Μ4.16, η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{a}}$ της συνολικής επιτάχυνσης μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Σε κάθε στιγμή, μπορούμε να αναλύσουμε αυτό το διάνυσμα σε δύο συνιστώσες, χρησιμοποιώντας ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο του διακεκομμένου κύκλου που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη στιγμή: μια ακτινική συνιστώσα a_r και μια εφαπτομενική συνιστώσα a_t η οποία είναι κάθετη στην ακτίνα. Το διάνυσμα της *συνολικής* επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}}$ μπορεί να γραφτεί ως το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών:

Ολική επιτάχυνση ▶ $$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t \qquad \text{(M4.16)}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ M4.16

Κίνηση ενός σωματιδίου κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης τροχιάς στο επίπεδο xy. Αν το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ της ταχύτητας (που εφάπτεται πάντα στην τροχιά) αλλάζει κατεύθυνση και μέτρο, τότε η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}$ έχει δύο συνιστώσες: μία εφαπτομενική a_t και μία ακτινική a_r.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης μεταβάλλει το μέτρο v της ταχύτητας του σωματιδίου. Η συνιστώσα αυτή είναι παράλληλη προς τη στιγμιαία ταχύτητα, και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad \textbf{(M4.17)}$$

◀ **Εφαπτομενική επιτάχυνση**

Η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης προκύπτει από τη μεταβολή της κατεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας και δίνεται από τη σχέση

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(M4.18)}$$

◀ **Ακτινική επιτάχυνση**

όπου r είναι η ακτίνα καμπυλότητας της διαδρομής στο σημείο που εξετάζουμε. Αναγνωρίζουμε ότι το μέτρο της ακτινικής συνιστώσας της επιτάχυνσης είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση που αναφέραμε στην Ενότητα M4.4. Το αρνητικό πρόσημο στην Εξίσωση M4.18 δείχνει ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου με ακτίνα την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Η κατεύθυνση είναι αντίθετη από αυτή του ακτινικού μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$, το οποίο δείχνει πάντα από την αρχή των συντεταγμένων, στο κέντρο του κύκλου, προς την περιφέρειά του.

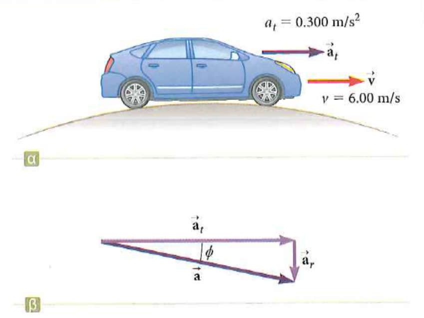
Επειδή τα $\vec{\mathbf{a}}_r$ και $\vec{\mathbf{a}}_t$ είναι κάθετες συνιστώσες του $\vec{\mathbf{a}}$, συνεπάγεται ότι το μέτρο τού $\vec{\mathbf{a}}$ είναι $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. Για ένα συγκεκριμένο μέτρο ταχύτητας, η ακτινική επιτάχυνση a_r έχει μεγάλη τιμή όταν η ακτίνα καμπυλότητας είναι μικρή (όπως στα σημεία Ⓐ και Ⓑ στη Δυναμική Εικ. M4.16) και μικρή τιμή όταν η ακτίνα r είναι μεγάλη (όπως στο σημείο Ⓒ). Η κατεύθυνση της εφαπτομενικής επιτάχυνσης $\vec{\mathbf{a}}_t$ είναι είτε ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ (αν το v αυξάνεται) είτε αντίθετη της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ (αν το v μειώνεται, όπως στο σημείο Ⓑ).

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, όπου το μέτρο της ταχύτητας v είναι σταθερό, ισχύει $a_t = 0$ και η επιτάχυνση είναι πάντα πλήρως ακτινική όπως περιγράψαμε στην Ενότητα M4.4. Με άλλα λόγια, η ομαλή κυκλική κίνηση είναι μια ειδική περίπτωση της κίνησης σε καμπύλη τροχιά. Επιπλέον, αν η κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ δεν αλλάζει, τότε δεν υπάρχει ακτινική επιτάχυνση και η κίνηση είναι μονοδιάστατη (σε αυτή την περίπτωση ισχύει $a_r = 0$, αλλά η εφαπτομενική επιτάχυνση a_t μπορεί να μην είναι μηδενική).

***Σύντομο ερώτημα* M4.5** Σωματίδιο κινείται κατά μήκος μιας τροχιάς και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. **(i)** Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι τα διανύσματα επιτάχυνσης και ταχύτητας παράλληλα μεταξύ τους; (α) Όταν η τροχιά είναι κυκλική. (β) Όταν η τροχιά είναι ευθύγραμμη. (γ) Όταν η τροχιά είναι παραβολή. (δ) Ποτέ. **(ii)** Σε ποια από τις παραπάνω περιπτώσεις είναι τα διανύσματα επιτάχυνσης και ταχύτητας κάθετα μεταξύ τους σε κάθε σημείο της τροχιάς;

Παράδειγμα Μ4.7 Κίνηση σε ύψωμα

Αυτοκίνητο που έχει σταματήσει σε πινακίδα STOP αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση 0.300 m/s^2 παράλληλα προς τον δρόμο. Το αυτοκίνητο περνάει πάνω από ένα ύψωμα του δρόμου. Η κορυφή του υψώματος έχει κυκλικό σχήμα ακτίνας 500 m. Όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται στην κορυφή του υψώματος, το διάνυσμα της ταχύτητάς του έχει οριζόντια διεύθυνση και μέτρο 6.00 m/s. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του διανύσματος της συνολικής επιτάχυνσης του αυτοκινήτου κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή;



Εικόνα Μ4.17 (Παράδειγμα Μ4.7) (α) Ένα αυτοκίνητο περνάει πάνω από ένα ύψωμα στον δρόμο, το οποίο έχει κυκλικό σχήμα. (β) Το διάνυσμα της συνολικής επιτάχυνσης $\vec{a}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα της εφαπτομενικής και της ακτινικής επιτάχυνσης $\vec{a}_t$ και $\vec{a}_r$ αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την Εικόνα Μ4.17α και τυχόν αντίστοιχες εμπειρίες οδήγησης που έχουμε.

Κατηγοριοποίηση Επειδή το επιταχυνόμενο αυτοκίνητο κινείται σε καμπύλη τροχιά, θα κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα ενός σωματιδίου με εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση. Αντιλαμβανόμαστε ότι πρόκειται για ένα σχετικά απλό πρόβλημα αντικατάστασης.

Η ακτινική επιτάχυνση προκύπτει αντικαθιστώντας στην Εξίσωση Μ4.18 $v = 6.00$ m/s και $r = 500$ m. Το διάνυσμα της ακτινικής επιτάχυνσης έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω, ενώ το διάνυσμα της εφαπτομενικής επιτάχυνσης έχει μέτρο 0.300 m/s^2 και οριζόντια διεύθυνση.

Υπολογίστε την ακτινική επιτάχυνση:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00\ \mathrm{m/s})^2}{500\ \mathrm{m}} = -0.072\,0\ \mathrm{m/s^2}$$

Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}$:

$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072\,0\ \mathrm{m/s^2})^2 + (0.300\ \mathrm{m/s^2})^2}$$

$$= \boxed{0.309\ \mathrm{m/s^2}}$$

Βρείτε τη γωνία ϕ (δείτε την Εικ. Μ4.17β) που σχηματίζει η επιτάχυνση $\vec{a}$ με την οριζόντιο:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072\,0\ \mathrm{m/s^2}}{0.300\ \mathrm{m/s^2}}\right) = \boxed{-13.5°}$$

Μ4.6 Σχετική ταχύτητα και σχετική επιτάχυνση

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται οι παρατηρήσεις που κάνουν διαφορετικοί παρατηρητές οι οποίοι βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Ένα σύστημα αναφοράς μπορεί να περιγραφεί από ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο παρατηρητής είναι ακίνητος σε σχέση με την αρχή των συντεταγμένων.

Ας μοντελοποιήσουμε μια περίπτωση όπου διαφορετικοί παρατηρητές κάνουν διαφορετικές παρατηρήσεις. Θεωρήστε τους δύο παρατηρητές A και B οι οποίοι βρίσκονται στην αριθμημένη ευθεία της Εικόνας Μ4.18α. Ο παρατηρητής A βρίσκεται στην αρχή ενός άξονα x_A, ενώ ο παρατηρητής B βρίσκεται στη θέση $x_A = -5$. Συμβολίζουμε τη μεταβλητή της θέσης με x_A επειδή ο παρατηρητής A βρίσκεται στην αρχή του άξονα. Και οι δύο παρατηρητές μετράνε τη θέση του σημείου P, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_A = +5$. Ας υποθέσουμε πως ο παρατηρητής B αποφασίζει ότι βρίσκεται στην αρχή ενός άξονα x_B όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.18β. Παρατηρήστε ότι οι δύο παρατηρητές διαφωνούν ως προς την τιμή της θέσης του σημείου P. Ο παρατηρητής Α ισχυρίζεται ότι το σημείο P βρίσκεται σε μια θέση με τιμή $+5$, ενώ ο παρατηρητής Β ισχυρίζεται ότι βρίσκεται σε μια θέση με τιμή $+10$. Αν και οι μετρήσεις των παρατηρητών διαφέρουν, και οι δύο έχουν δίκιο. Οι μετρήσεις τους διαφέρουν επειδή έχουν γίνει σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

Φανταστείτε τώρα ότι ο παρατηρητής Β στην Εικόνα Μ4.18β κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x_B. Οι νέες μετρήσεις διαφέρουν ακόμα περισσότερο. Ο παρατηρητής Α ισχυρίζεται ότι το σημείο P παραμένει σταθερό σε μια θέση με τιμή $+5$, ενώ ο Β θεωρεί ότι η θέση τού P μεταβάλλεται συνεχώς με το πέρασμα του χρόνου, με αποτέλεσμα κάποια στιγμή να τον προσπεράσει και να βρεθεί ακόμα και πίσω του! Πάλι, και οι δύο έχουν δίκιο, καθώς η διαφορά στις μετρήσεις τους οφείλεται στα διαφορετικά συστήματα αναφοράς τους.

Ας εξετάσουμε περισσότερο αυτό το φαινόμενο θεωρώντας δύο παρατηρητές οι οποίοι κοιτάνε έναν άνδρα που περπατάει πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο ενός αεροδρομίου (Εικόνα Μ4.19.) Η γυναίκα που στέκεται στον κυλιόμενο διάδρομο βλέπει τον άνδρα να βαδίζει με κανονικό ρυθμό βαδίσματος. Η γυναίκα που παρατηρεί από το ακίνητο δάπεδο βλέπει τον άνδρα να βαδίζει γρηγορότερα, επειδή το μέτρο της ταχύτητας του διαδρόμου προστίθεται στο μέτρο της ταχύτητας βαδίσματός του. Οι δύο παρατηρητές κοιτάνε τον ίδιο άνδρα και καταλήγουν σε διαφορετικές τιμές για το μέτρο της ταχύτητάς του. Και οι δύο παρατηρήσεις είναι σωστές· η διαφορά στις μετρήσεις τους οφείλεται στη σχετική ταχύτητα των συστημάτων αναφοράς τους.

Ας εξετάσουμε μια γενικότερη περίπτωση, θεωρώντας το σωματίδιο που βρίσκεται στο σημείο P στην Εικόνα Μ4.20. Φανταστείτε ότι η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από δύο παρατηρητές, τον παρατηρητή Α στο σύστημα αναφοράς S_A το οποίο είναι σταθερό σε σχέση με τη Γη και έναν δεύτερο παρατηρητή Β στο σύστημα αναφοράς S_B το οποίο κινείται προς τα δεξιά σε σχέση με το S_A (και άρα σε σχέση με τη Γη) με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Σε αυτή την περιγραφή της σχετικής ταχύτητας, θα χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό με διπλούς δείκτες· ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει αυτό που παρατηρείται και ο δεύτερος τον παρατηρητή. Επομένως, το $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ συμβολίζει την ταχύτητα του παρατηρητή Β (και του αντίστοιχου συστήματος αναφοράς S_B) όπως τη μετράει ο παρατηρητής Α. Σύμφωνα με αυτόν τον συμβολισμό, ο παρατηρητής Β μετράει ότι ο Α κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{AB} = -\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Για τον σκοπό αυτής της ανάλυσης, θα τοποθετήσουμε κάθε παρατηρητή στην αρχή του αντίστοιχου συστήματος συντεταγμένων.

Ορίζουμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη στιγμή κατά την οποία τα δύο συστήματα αναφοράς έχουν την ίδια αρχή. Άρα, τη χρονική στιγμή t, οι αρχές των συστημάτων αναφοράς θα βρίσκονται σε απόσταση $v_{BA}t$. Αντιστοιχίζουμε στη θέση P του σωματιδίου το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ σε σχέση με τον παρατηρητή Α και το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ σε σχέση με τον παρατηρητή Β, στην ίδια χρονική στιγμή t. Από την Εικόνα Μ4.20, διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ και $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}t \qquad \textbf{(M4.19)}$$

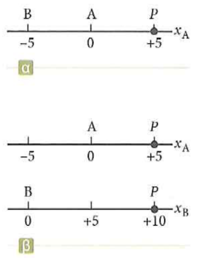
Παραγωγίζουμε την Εξίσωση Μ4.19 ως προς τον χρόνο, παρατηρώντας ότι η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ είναι σταθερή, και παίρνουμε

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PB}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \qquad \textbf{(M4.20)}$$

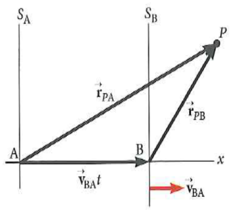
◄ **Ο μετασχηματισμός ταχύτητας του Γαλιλαίου**

όπου $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στο P όπως τη μετράει ο παρατηρητής Α και $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ είναι η ταχύτητά του όπως τη μετράει ο Β. (Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vec{\mathbf{u}}$ για την ταχύτητα του σωματιδίου αντί για το $\vec{\mathbf{v}}$, με το οποίο έχουμε ήδη συμβολίσει τη σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς.) Οι Εξισώσεις Μ4.19 και



Εικόνα Μ4.18 Διαφορετικοί παρατηρητές κάνουν διαφορετικές μετρήσεις. (α) Ο παρατηρητής Α βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, και ο παρατηρητής Β βρίσκεται στη θέση -5. Και οι δύο μετράνε τη θέση ενός σωματιδίου στο P. (β) Αν και οι δύο παρατηρητές θεωρούν ότι βρίσκονται στην αρχή του δικού τους συστήματος συντεταγμένων, τότε θα διαφωνούν ως προς την τιμή της θέσης του σωματιδίου στο P.

Εικόνα Μ4.19 Δύο παρατηρητές μετράνε το μέτρο της ταχύτητας ενός άνδρα που περπατάει σε κυλιόμενο διάδρομο.



Εικόνα Μ4.20 Το σωματίδιο που βρίσκεται στο P περιγράφεται από δύο παρατηρητές, έναν στο ακίνητο σύστημα αναφοράς S_A και έναν άλλο στο σύστημα S_B, το οποίο κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$. Το διάνυσμα $\vec{r}_{PA}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε σχέση με το σύστημα S_A, και το $\vec{r}_{PB}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σε σχέση με το σύστημα S_B.

Μ4.20 είναι γνωστές ως **εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου.** Συσχετίζουν τη θέση και την ταχύτητα ενός σωματιδίου όπως τις μετράνε παρατηρητές που εμφανίζουν σχετική κίνηση μεταξύ τους. Παρατηρήστε τη σειρά των δεικτών στην Εξίσωση Μ4.20. Όταν προσθέτουμε σχετικές ταχύτητες, οι εσωτερικοί δείκτες (Β) παραμένουν ίδιοι ενώ οι εξωτερικοί (P, Α) αντιστοιχούν στους δείκτες της ταχύτητας στο αριστερό μέλος της εξίσωσης.

Παρά το γεγονός ότι οι παρατηρητές στα δύο συστήματα αναφοράς μετράνε διαφορετικές ταχύτητες για το σωματίδιο, όταν η σχετική ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ είναι σταθερή, μετράνε την *ίδια επιτάχυνση* για το σωματίδιο. Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε παραγωγίζοντας την Εξίσωση Μ4.20 ως προς τον χρόνο:

$$\frac{d\vec{u}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{u}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

Επειδή η σχετική ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ είναι σταθερή, προκύπτει ότι $d\vec{v}_{BA}/dt = 0$. Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$ επειδή ισχύει $\vec{a}_{PA} = d\,\vec{u}_{PA}/dt$ και $\vec{a}_{PB} = d\,\vec{u}_{PB}/dt$. Δηλαδή, η επιτάχυνση του σωματιδίου που μετράει ένας παρατηρητής σε ένα σύστημα αναφοράς είναι ίδια με εκείνη που μετράει κάποιος άλλος παρατηρητής ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το πρώτο σύστημα αναφοράς.

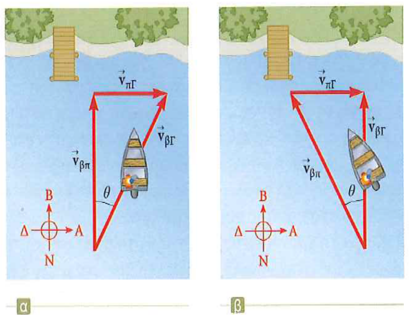
Παράδειγμα Μ4.8 Βάρκα που διασχίζει ένα ποτάμι

Βάρκα που διασχίζει ένα πλατύ ποτάμι κινείται με ταχύτητα μέτρου 10.0 km/h σε σχέση με το νερό. Το νερό του ποταμού κυλάει ανατολικά με ταχύτητα σταθερού μέτρου 5.00 km/h σε σχέση με τη Γη.

(Α) Αν η βάρκα κατευθύνεται βόρεια, προσδιορίστε την ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με έναν παρατηρητή ο οποίος στέκεται σε μία από τις δύο όχθες.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Φανταστείτε ότι επιχειρείτε να διασχίσετε με μια βάρκα κάθετα ένα ποτάμι με το ρεύμα να σας σπρώχνει κατάντη[4] του ποταμού. Δεν θα μπορέσετε να διασχίσετε τελείως κάθετα το ποτάμι, αλλά θα παρασυρθείτε κατάντη του ποταμού όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ4.21α.



Εικόνα Μ4.21 (Παράδειγμα Μ4.8) (α) Η βάρκα επιχειρεί να περάσει κάθετα το ποτάμι, αλλά παρασύρεται κατάντη του ποταμού. (β) Για να διασχίσει κάθετα το ποτάμι, η βάρκα πρέπει να κατευθυνθεί ανάντη του ποταμού.

Κατηγοριοποίηση Ο συνδυασμός της ταχύτητας της βάρκας σε σχέση με το ποτάμι και της ταχύτητας του ποταμού σε σχέση με τη Γη, μας επιτρέπει να κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα σχετικών ταχυτήτων.

Ανάλυση Γνωρίζουμε το $\vec{v}_{\beta\pi}$, την ταχύτητα της *βάρκας* ως προς το *ποτάμι*, και το $\vec{v}_{\pi\Gamma}$, την ταχύτητα του *ποταμού* ως προς τη *Γη*. Πρέπει να βρούμε την ταχύτητα $\vec{v}_{\beta\Gamma}$ της *βάρκας* ως προς τη *Γη*. Η σχέση μεταξύ των τριών ταχυτήτων είναι $\vec{v}_{\beta\Gamma} = \vec{v}_{\beta\pi} + \vec{v}_{\pi\Gamma}$. Θα μεταχειριστούμε τους όρους της εξίσωσης ως διανυσματικά μεγέθη· τα διανύσματα φαίνο-

[4] Σ.τ.Ε.: *Κατάντη* σημαίνει προς τη φορά ροής του ποταμού ενώ *ανάντη*, αντίθετα προς τη φορά ροής του ποταμού.

M4.8 συν.

νται στην Εικόνα M4.21α. Η ταχύτητα $\vec{v}_{\beta\pi}$ έχει βόρεια κατεύθυνση· η ταχύτητα $\vec{v}_{\pi\Gamma}$ έχει ανατολική κατεύθυνση· και το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{v}_{\beta\Gamma}$ σχηματίζει γωνία θ όπως φαίνεται στην Εικόνα M4.21α.

Χρησιμοποιήστε το πυθαγόρειο θεώρημα για να βρείτε το μέτρο $v_{\beta\Gamma}$ της ταχύτητας της βάρκας ως προς τη Γη:

$$v_{\beta\Gamma} = \sqrt{v_{\beta\pi}^2 + v_{\pi\Gamma}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 + (5.00 \text{ km/h})^2}$$

$$= \boxed{11.2 \text{ km/h}}$$

Βρείτε την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}_{\beta\Gamma}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\pi\Gamma}}{v_{\beta\pi}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = \boxed{26.6^\circ}$$

Ολοκλήρωση Η βάρκα κινείται με 11.2 km/h και κατεύθυνση 26.6° ανατολικά του βορρά ως προς τη Γη. Παρατηρήστε ότι η βάρκα σας κινείται γρηγορότερα σε σχέση με τη Γη (11.2 km/h) από ό,τι ως προς το ποτάμι (10.0 km/h). Η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού προστίθεται στην ταχύτητα της βάρκας σας κάνοντάς τη να πλεύσει ταχύτερα. Προσέξτε στην Εικόνα M4.21α ότι η συνισταμένη ταχύτητά σας σχηματίζει γωνία με την κάθετο στο ποτάμι, οπότε τελικά η βάρκα θα παρασυρθεί κατάντη του ποταμού, όπως προβλέψαμε.

(B) Αν η ταχύτητα της βάρκας ως προς το ποτάμι έχει πάλι μέτρο 10.0 km/h, ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνσή της ώστε η βάρκα να κινηθεί βόρεια όπως φαίνεται στην Εικόνα M4.21β;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση/Κατηγοριοποίηση Το ερώτημα αυτό είναι επέκταση του (Α), οπότε έχουμε ήδη μοντελοποιήσει και κατηγοριοποιήσει το πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, πρέπει να κατευθύνουμε τη βάρκα ανάντη του ποταμού ώστε να το διασχίσει κάθετα.

Ανάλυση Η ανάλυση περιλαμβάνει το νέο τρίγωνο της Εικόνας M4.21β. Όπως και στο ερώτημα (Α), γνωρίζουμε την ταχύτητα $\vec{v}_{\pi\Gamma}$ και το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_{\beta\pi}$, και θέλουμε η ταχύτητα ως προς τη Γη $\vec{v}_{\beta\Gamma}$ να έχει κατεύθυνση κάθετη στο ποτάμι. Παρατηρήστε τη διαφορά μεταξύ του τριγώνου της Εικόνας M4.21α και του τριγώνου της Εικόνας M4.21β: η υποτείνουσα στην Εικόνα M4.21β δεν είναι πλέον η $\vec{v}_{\beta\Gamma}$.

Χρησιμοποιήστε το πυθαγόρειο θεώρημα για να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας ως προς τη Γη $v_{\beta\Gamma}$:

$$v_{\beta\Gamma} = \sqrt{v_{\beta\pi}^2 - v_{\pi\Gamma}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 - (5.00 \text{ km/h})^2} = 8.66 \text{ km/h}$$

Βρείτε την κατεύθυνση της βάρκας:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\pi\Gamma}}{v_{\beta\Gamma}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = \boxed{30.0^\circ}$$

Ολοκλήρωση Για να μπορέσει η βάρκα να διασχίσει κάθετα το ποτάμι θα πρέπει να κατευθυνθεί αντίθετα στη ροή του ποταμού. Πιο συγκεκριμένα, η βάρκα πρέπει να έχει πορεία 30.0° δυτικά του βορρά. Στην περίπτωση που το ρεύμα είναι πιο γρήγορο, η βάρκα θα πρέπει να κινηθεί κόντρα στο ρεύμα του ποταμού σχηματίζοντας μεγαλύτερη γωνία ως προς τον βορρά.

ΚΙ ΑΝ...; Φανταστείτε ότι οι δύο βάρκες στα ερωτήματα (Α) και (Β) κάνουν αγώνα ποια θα διασχίσει πρώτη κάθετα το ποτάμι. Ποια βάρκα θα φτάσει πρώτη στην απέναντι όχθη;

Απάντηση Στο ερώτημα (Α), η ταχύτητα με μέτρο 10 km/h είναι τελείως κάθετη στο ποτάμι. Στο ερώτημα (Β), η ταχύτητα η οποία είναι κάθετη στο ποτάμι έχει μέτρο 8.66 km/h. Άρα, η βάρκα στο ερώτημα (Α) έχει μεγαλύτερη συνιστώσα ταχύτητας κάθετα στο ποτάμι και θα φτάσει πρώτη.