ΔΙΑΛΕΞΗ 1
14/10/2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Κίνηση σε 1-D
2. Κίνηση σε 2-D
3. Οι νόμοι τα κίνησης
4. Κυκλική κίνηση και νόμοι Newton
5. Έργο και Ενέργεια
6. Δυναμική ενέργεια και διατήρηση ενέργειας
7. Θεώρημα –έργου –ενέργειας
8. Γραμμική ορμή και κρούσεις
9. Περιστροφή στερεού σώματος
10. Κύλιση-Στροφορμή και ροπή
11. Οπτική - Η φύση του φωτός και οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής
12. Συμβολή των κυμάτων φωτός
13. Περίθλαση και πόλωση

ΒΙΒΛΙΑ

1. **R. Serway, Jewett, "**Φυσική για επιστήμονες και Μηχανικούς", τόμος I.

2. **Hugh D. Young, "**Πανεπιστημιακή Φυσική**"**, τόμος Α

- **Halliday** και **Resnick**, Φυσική, Μέρος I *κεφάλαιο* **M2**

Κίνηση σε μία διάσταση

Στους αγώνες dragster, ο οδηγός θέλει τη μεγαλύτερη δυνατή επιτάχυνση. Σε μια απόσταση τετρακοσίων μέτρων το αυτοκίνητο αναπτύσσει ταχύτητα πάνω από 500 km/h σε λιγότερο από 5 s. *(George Lepp/Stone/Getty Images)*

Ως ένα πρώτο βήμα στη μελέτη της κλασικής μηχανικής, θα περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος αγνοώντας τις αλληλεπιδράσεις με εξωτερικούς παράγοντες που ενδέχεται να προκαλούν ή να μεταβάλλουν την κίνηση. Αυτός ο κλάδος της κλασικής μηχανικής ονομάζεται *κινηματική*. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μόνο την κίνηση σε μία διάσταση, δηλαδή την ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος.

Από την καθημερινή εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι κίνηση ενός σώματος είναι η συνεχής αλλαγή της θέσης του. Στη φυσική, μπορούμε να ταξινομήσουμε την κίνηση σε τρία είδη: μεταφορική κίνηση, περιστροφική κίνηση, και ταλάντωση. Το αυτοκίνητο που κινείται στον δρόμο, η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της, και η παλινδρομική κίνηση ενός εκκρεμούς αποτελούν παραδείγματα μεταφορικής κίνησης, περιστροφικής κίνησης, και ταλάντωσης, αντίστοιχα. Σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά και στα επόμενα, θα μελετήσουμε μόνο τη μεταφορική κίνηση. (Αργότερα, θα αναφερθούμε στις περιστροφικές κινήσεις και στις ταλαντώσεις.)

Στη μελέτη της μεταφορικής κίνησης, θα χρησιμοποιήσουμε το αποκαλούμενο **μοντέλο σωματιδίου** και θα περιγράψουμε το κινούμενο σώμα ως *σωματίδιο* ανεξάρτητα από το μέγεθός του. Θυμηθείτε την αναφορά μας στην κατασκευή μοντέλων για φυσικά συστήματα στην Ενότητα M1.2. Γενικά, **το σωματίδιο είναι ένα αδιάστατο σώμα, δηλαδή ένα σώμα που έχει πεπερασμένη μάζα αλλά απειροστό μέγεθος.** Για παράδειγμα, αν θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη Γη σαν ένα αδιάστατο σώμα και να υπολογίσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τα στοιχεία της τροχιάς της. Αυτή η προσέγγιση δικαιολογείται επειδή η ακτίνα της τροχιάς της Γης είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις διαστάσεις της Γης και του Ήλιου. Ένα παράδειγμα σε πολύ μικρότερη κλίμακα είναι ότι μπορούμε να εξηγήσουμε την πίεση που ασκεί ένα αέριο στα τοιχώματα ενός δοχείου αν θεωρήσουμε τα μόρια του αερίου σαν σωματίδια, αδιαφορώντας για την εσωτερική δομή τους.

M2.1 Θέση και ταχύτητα – διανυσματικό και βαθμωτό μέγεθος

Θέση ▶

Η **θέση** x ενός σωματιδίου είναι το σημείο που βρίσκεται σε σχέση με κάποιο επιλεγμένο σημείο αναφοράς, το οποίο θεωρούμε ως αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων. Η κίνηση ενός σωματιδίου είναι πλήρως γνωστή αν γνωρίζουμε τη θέση του στον χώρο σε κάθε χρονική στιγμή.

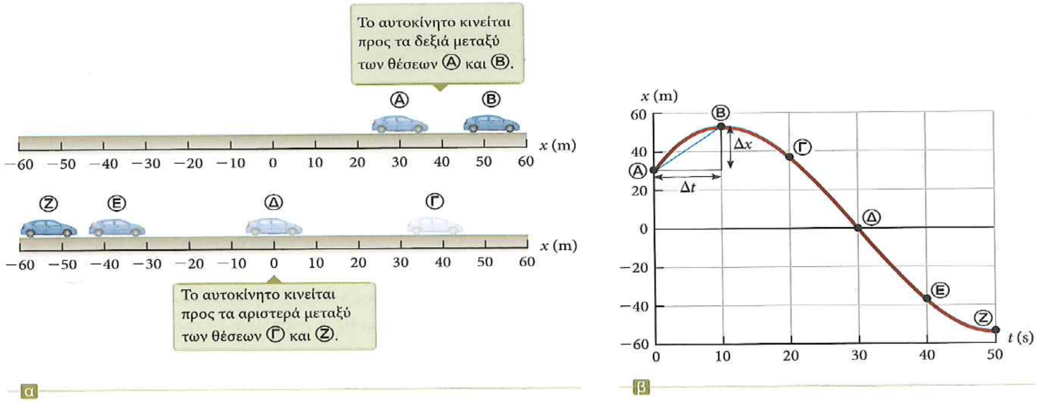
Θεωρήστε ένα αυτοκίνητο που κινείται εμπρός και πίσω κατά μήκος του άξονα x (Δυναμική Εικόνα Μ2.1α). Όταν αρχίζουμε να συγκεντρώνουμε δεδομένα για τη θέση, το αυτοκίνητο βρίσκεται 30 m δεξιά από τη θέση αναφοράς $x = 0$. Για να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο σωματιδίου, ορίζουμε ένα σημείο του αυτοκινήτου, ίσως το χερούλι της μπροστινής πόρτας, σαν ένα σωματίδιο που αντιπροσωπεύει ολόκληρο το αυτοκίνητο.

Ξεκινάμε το χρονόμετρο και σημειώνουμε τη θέση του αυτοκινήτου μία φορά κάθε 10 δευτερόλεπτα. Όπως μπορείτε να δείτε από τον Πίνακα Μ2.1, κατά τη διάρκεια των 10 πρώτων δευτερολέπτων το αυτοκίνητο κινείται προς τα δεξιά (προς την κατεύθυνση που έχουμε ορίσει ως θετική), από τη θέση Ⓐ στη θέση Ⓑ. Μετά από τη θέση Ⓑ, οι τιμές θέσης αρχίζουν να μειώνονται, κάτι που δείχνει ότι μεταξύ των Ⓑ και Ⓩ το αυτοκίνητο κινείται προς τα πίσω. Μάλιστα, στη θέση Ⓓ, 30 δευτερόλεπτα μετά την έναρξη των μετρήσεων, το αυτοκίνητο βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων (Δυναμική Εικ. Μ2.1α). Συνεχίζει να κινείται προς τα αριστερά και όταν πλέον σταματάμε να καταγράφουμε πληροφορίες –μετά από το έκτο σημείο– απέχει περισσότερο από 50 m αριστερά από τη θέση $x = 0$. Η γραφική αναπαράσταση αυτών των πληρο-

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ2.1

Η θέση του αυτοκινήτου σε διάφορες χρονικές στιγμές

Θέση	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓖ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓩ	50	−53



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ2.1

Αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα εμπρός και πίσω. Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο η μεταφορική κίνηση του αυτοκινήτου, μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε με διάφορους τρόπους τα δεδομένα για την κίνηση του αυτοκινήτου. Ο Πίνακας Μ2.1 είναι μια πινακογραφική αναπαράσταση των πληροφοριών. (α) Εικονογραφική αναπαράσταση της κίνησης του αυτοκινήτου. (β) Γραφική αναπαράσταση (γράφημα θέσης-χρόνου) της κίνησης του αυτοκινήτου.

φοριών φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ2.1β. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται *γράφημα θέσης-χρόνου*.

Παρατηρήστε τις *εναλλακτικές αναπαραστάσεις* των πληροφοριών που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε την κίνηση του αυτοκινήτου. Η Δυναμική Εικόνα Μ2.1α είναι μια *εικονογραφική αναπαράσταση*, ενώ η Δυναμική Εικόνα Μ2.1β είναι μια *γραφική αναπαράσταση*. Ο Πίνακας Μ2.1 είναι μια *πινακογραφική αναπαράσταση* των ίδιων πληροφοριών. Η χρήση εναλλακτικής αναπαράστασης συχνά αποτελεί μια εξαιρετική στρατηγική για να κατανοήσουμε ένα πρόβλημα. Ο τελικός στόχος σε πολλά προβλήματα είναι η *μαθηματική αναπαράσταση*, την οποία μπορούμε να αναλύσουμε για να υπολογίσουμε κάποια ζητούμενη πληροφορία.

Με τα δεδομένα του Πίνακα Μ2.1, μπορούμε εύκολα να βρούμε τη μεταβολή της θέσης του αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια διαφόρων χρονικών διαστημάτων. Η **μετατόπιση** Δx ενός σωματιδίου ορίζεται ως η μεταβολή της θέσης του κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος. Καθώς το σωματίδιο κινείται από μια αρχική θέση x_i σε κάποια τελική θέση x_f, η μετατόπισή του δίνεται από τη σχέση

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \qquad \text{(M2.1)}$$

◀ **Μετατόπιση**

Το κεφαλαίο δέλτα (Δ) συμβολίζει τη *μεταβολή* ενός μεγέθους. Από τον παραπάνω ορισμό, βλέπουμε ότι η μεταβολή Δx είναι θετική αν το x_f είναι μεγαλύτερο από το x_i και αρνητική αν το x_f είναι μικρότερο από το x_i.

Είναι πολύ σημαντικό να διακρίνετε τη διαφορά μεταξύ της μετατόπισης και της απόστασης που διανύθηκε. Η **απόσταση** είναι το μήκος της διαδρομής που ακολουθεί ένα σωματίδιο. Θεωρήστε, για παράδειγμα, τους παίκτες του μπάσκετ στην Εικόνα Μ2.2. Αν ένας παίκτης ξεκινήσει από το καλάθι της ομάδας του, διατρέξει όλο το γήπεδο μέχρι το αντίπαλο καλάθι και μετά επιστρέψει στο δικό του καλάθι, η *μετατόπιση* του παίκτη μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι ίση με μηδέν επειδή κατέληξε στο ίδιο σημείο από το οποίο ξεκίνησε: $x_f = x_i$, άρα $\Delta x = 0$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα, όμως, διέτρεξε *απόσταση* διπλάσια από το μήκος του γηπέδου. Η απόσταση αναπαρίσταται πάντα ως θετικός αριθμός, ενώ η μετατόπιση μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική.

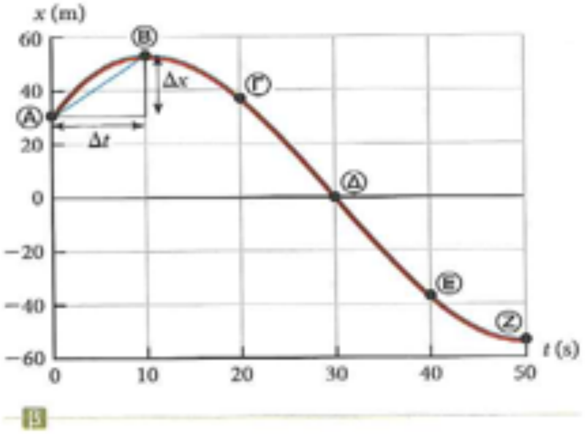
Brian Drake/Time Life Pictures/Getty Images

Εικόνα Μ2.2 Σε αυτό το γήπεδο του μπάσκετ, οι παίκτες τρέχουν πάνω κάτω καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού. Η απόσταση που διανύουν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού είναι μη μηδενική. Η μετατόπισή τους κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού είναι κατά προσέγγιση ίση με μηδέν, επειδή επιστρέφουν στο ίδιο σημείο ξανά και ξανά.

Η μετατόπιση είναι ένα παράδειγμα διανυσματικού μεγέθους. Πολλά άλλα φυσικά μεγέθη, συμπεριλαμβανομένης της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσης, είναι επίσης διανύσματα. Γενικά, για να ορίσουμε πλήρως ένα **διανυσματικό μέγεθος** πρέπει να ορίσουμε το μέτρο και την κατεύθυνσή του (δηλαδή, τη διεύθυνση και τη φορά του). Αντίθετα, ένα **βαθμωτό μέγεθος** έχει αριθμητική τιμή αλλά όχι κατεύθυνση. Στο κεφάλαιο αυτό, για να δηλώσουμε τη φορά ενός διανύσματος κατά μήκος της διεύθυνσής του θα χρησιμοποιούμε το θετικό (+) και το αρνητικό (−) πρόσημο. Για παράδειγμα, για την οριζόντια κίνηση ας ορίσουμε αυθαίρετα ότι η θετική φορά είναι προς τα δεξιά. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε σώμα που κινείται πάντα προς τα δεξιά έχει θετική μετατόπιση $\Delta x > 0$, και κάθε σώμα που κινείται προς τα αριστερά έχει αρνητική μετατόπιση $\Delta x < 0$. Θα περιγράψουμε τα διανυσματικά μεγέθη με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο Μ3.

Μέχρι στιγμής, ωστόσο, δεν έχουμε αναφερθεί σε ένα πολύ σημαντικό θέμα. Παρατηρήστε ότι τα δεδομένα στον Πίνακα Μ2.1 δίνουν μόνο έξι σημεία στο γράφημα της Δυναμικής Εικόνας Μ2.1β. Συνεπώς, η κίνηση του σωματιδίου δεν είναι πλήρως γνωστή επειδή δεν ξέρουμε τη θέση του σε *όλες* τις χρονικές στιγμές. Η ομαλή καμπύλη που περνάει από τα έξι σημεία στο γράφημα είναι μόνο μία *πιθανή εκδοχή* της πραγματικής κίνησης του αυτοκινήτου. Έχουμε πληροφορίες μόνο για έξι χρονικές στιγμές· δεν έχουμε ιδέα για το τι συνέβη στα διαστήματα μεταξύ των έξι σημείων. Να θυμάστε λοιπόν ότι η ομαλή καμπύλη είναι μια *εικασία* για το τι συνέβη και *μόνο* μια εικασία. Αν η ομαλή καμπύλη αναπαριστά όντως την πραγματική κίνηση του αυτοκινήτου, τότε το γράφημα περιέχει πλήρεις πληροφορίες για ολόκληρο το διάστημα των 50 δευτερολέπτων κατά τη διάρκεια του οποίου παρατηρούμε την κίνηση του αυτοκινήτου.

Μπορούμε πολύ πιο εύκολα να καταλάβουμε τις μεταβολές της θέσης από το γράφημα παρά από μια λεκτική περιγραφή ή έναν πίνακα με αριθμούς. Για παράδειγμα, είναι προφανές ότι το αυτοκίνητο καλύπτει περισσότερο έδαφος στο διάστημα μεταξύ 20 και 30 δευτερολέπτων από ό,τι στα τελευταία 10 δευτερόλεπτα. Μεταξύ των θέσεων Ⓖ και Ⓓ, το αυτοκίνητο διανύει σχεδόν 40 m, αλλά κατά τη διάρκεια των τελευταίων 10 δευτερολέπτων, μεταξύ των θέσεων Ⓔ και Ⓩ, διανύει λιγότερο από το μισό της παραπάνω απόστασης. Ένας συνήθης τρόπος για να συγκρίνουμε αυτές τις διαφορετικές κινήσεις είναι να διαιρέσουμε τη μετατόπιση Δx που λαμβάνει χώρα μεταξύ δύο διαδοχικών ενδείξεων του χρονομέτρου με την τιμή του συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος Δt. Το αποτέλεσμα είναι ένας πολύ χρήσιμος λόγος, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές. Στον λόγο αυτόν έχει δοθεί ένα ιδιαίτερο όνομα: *μέση ταχύτητα*. Η **μέση ταχύτητα** $v_{x,\mu έ\sigma\eta}$ ενός σωματιδίου ορίζεται ως το πηλίκο της μετατόπισης Δx του σωματιδίου προς το χρονικό διάστημα Δt στο οποίο συμβαίνει η μετατόπιση:



Μέση ταχύτητα ▶

$$v_{x,\mu έ\sigma\eta} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textbf{(M2.2)}$$

όπου ο δείκτης x συμβολίζει την κίνηση κατά μήκος του άξονα x. Από τον ορισμό αυτόν, βλέπουμε ότι η μέση ταχύτητα έχει διαστάσεις μήκος προς χρόνο (L/T), και μονάδες SI, μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

Η μέση ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, ανάλογα με το πρόσημο της μετατόπισης. (Το χρονικό διάστημα Δt είναι πάντα θετικό.) Αν η συντεταγμένη του σωματιδίου αυξάνεται με το πέρασμα του χρόνου (δηλαδή, αν ισχύει $x_f > x_i$), τότε η μετατόπιση Δx είναι θετική και η ταχύτητα $v_{x,\mu έ\sigma\eta} = \Delta x/\Delta t$ είναι θετική. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x, δηλαδή προς μεγαλύτερες τιμές του x. Αν η συντεταγμένη μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου (δηλαδή, αν ισχύει $x_f < x_i$), τότε η μετατόπιση Δx είναι αρνητική και άρα η $v_{x,\mu έ\sigma\eta}$ είναι αρνητική. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο που κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη μέση ταχύτητα γεωμετρικά σχεδιάζοντας μια ευθεία γραμμή μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων στο γράφημα θέσης-χρόνου της Δυναμικής Εικόνας Μ2.1β. Η γραμμή αυτή είναι η υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου με ύψος Δx και βάση Δt. Η κλίση της ευθείας είναι ο λόγος $\Delta x/\Delta t$, τον οποίο έχουμε ορίσει ως μέση ταχύτητα στην Εξίσωση Μ2.2. Για παράδειγμα, η ευθεία μεταξύ των θέσεων Ⓐ και Ⓑ στη Δυναμική Εικόνα Μ2.1β έχει κλίση ίση με τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου μεταξύ των δύο αυτών χρονικών στιγμών, $(52\text{ m} - 30\text{ m})/(10\text{ s} - 0\text{ s}) = 2.2\text{ m/s}$.

Στην καθομιλουμένη, ο όρος ταχύτητα συνήθως χρησιμοποιείται με τη σημασία του *βαθμωτού μεγέθους* της ταχύτητας και όχι του *διανυσματικού μεγέθους* της ταχύτητας. Ωστόσο, στη φυσική γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ του διανυσματικού μεγέθους της ταχύτητας (velocity) και του βαθμωτού μεγέθους της ταχύτητας (speed), το οποίο στην περίπτωση της μέσης ταχύτητας δεν είναι απαραίτητα ίσο με το μέτρο του διανυσματικού μεγέθους (velocity magnitude). Θεωρήστε μια μαραθωνοδρόμο που τρέχει απόσταση d μεγαλύτερη από 40 km και παρά ταύτα καταλήγει στην αφετηρία. Η συνολική μετατόπισή της είναι ίση με μηδέν, άρα η μέση ταχύτητά της (average velocity) είναι ίση με μηδέν! Παρ' όλα αυτά, χρειαζόμαστε έναν τρόπο για να προσδιορίσουμε πόσο γρήγορα έτρεχε. Αυτό το πετυχαίνουμε χρησιμοποιώντας έναν κάπως διαφορετικό λόγο. Ως **μέση αριθμητική ταχύτητα** $v_{\mu έ\sigma\eta}$ (average speed) ενός σωματιδίου ορίζεται το βαθμωτό μέγεθος της συνολικής απόστασης d που διανύει προς τον συνολικό χρόνο που χρειάζεται για να τη διανύσει:

ιθμητική ταχύτητα ▶

$$v_{\mu έ\sigma\eta} \equiv \frac{d}{\Delta t} \qquad \textbf{(M2.3)}$$

Οι μονάδες SI για το βαθμωτό μέγεθος της μέσης ταχύτητας είναι ίδιες με τις μονάδες του διανυσματικού μεγέθους της μέσης ταχύτητας: τα μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Σε αντίθεση με το διανυσματικό μέγεθος, όμως, το βαθμωτό μέγεθος της μέσης ταχύτητας δεν έχει κατεύθυνση και εκφράζεται πάντα ως θετικός αριθμός. Παρατηρήστε τη διαφορά μεταξύ του ορισμού του διανυσματικού μεγέθους της μέσης ταχύτητας και του βαθμωτού μεγέθους της μέσης ταχύτητας: η μέση ταχύτητα (Εξ. M2.2) ισούται με το πηλίκο της *μετατόπισης* προς τον χρόνο, ενώ η μέση αριθμητική ταχύτητα (Εξ. M2.3) ισούται με το πηλίκο της *απόστασης* προς τον χρόνο.

Η γνώση της μέσης ταχύτητας ή της μέσης αριθμητικής ταχύτητας ενός σώματος δεν μας παρέχει πληροφορίες για τις λεπτομέρειες της διαδρομής. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι βρίσκεστε σε ένα αεροδρόμιο και χρειάζεστε 45.0 s για να διασχίσετε έναν μεγάλο, ίσο διάδρομο μήκους 100 m και να φτάσετε στην πύλη αναχώρησης. Αφού έχετε διανύσει τα 100 m, συνειδητοποιείτε ότι προσπεράσατε την τουαλέτα, και διανύετε άλλα 25.0 m προς τα πίσω στον ίδιο διάδρομο σε χρόνο 10.0 s. Το μέτρο της μέσης *ταχύτητάς* σας είναι +75.0 m/55.0 s = +1.36 m/s. *Η μέση αριθμητική ταχύτητά* σας κατά τη διάρκεια της διαδρομής σας είναι 125 m/55.0 s = 2.27 m/s. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής αλλάξατε κατεύθυνση, ενώ μπορεί να άλλαξε και το μέτρο της ταχύτητάς σας. Ούτε η μέση ταχύτητα ούτε η μέση αριθμητική ταχύτητα παρέχουν τέτοιου είδους πληροφορίες.

Αποφυγή παγίδων M2.1

Μέση αριθμητική ταχύτητα και μέτρο μέσης ταχύτητας
Η μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed) *δεν* είναι το μέτρο του διανύσματος της μέσης ταχύτητας (average velocity magnitude). Για παράδειγμα, θεωρήστε τη μαραθωνοδρόμο που αναφέραμε πριν διατυπώσουμε την Εξίσωση M2.3. Το μέτρο του διανύσματος της μέσης ταχύτητάς της ισούται με μηδέν, ωστόσο είναι προφανές ότι η μέση αριθμητική ταχύτητά της δεν είναι μηδέν.

***Σύντομο ερώτημα* M2.1** Ένα σώμα κινείται σε μία διάσταση για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Σε ποιες από τις παρακάτω συνθήκες είναι το μέτρο της μέσης ταχύτητάς του μικρότερο από τη μέση αριθμητική ταχύτητά του; **(α)** Το σώμα κινείται συνεχώς προς την κατεύθυνση $+x$. **(β)** Το σώμα κινείται συνεχώς προς την κατεύθυνση $-x$. **(γ)** Το σώμα κινείται αρχικά προς την κατεύθυνση $+x$ και μετά προς την αντίθετη κατεύθυνση. **(δ)** Σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ M2.1

Η θέση του αυτοκινήτου σε διάφορες χρονικές στιγμές

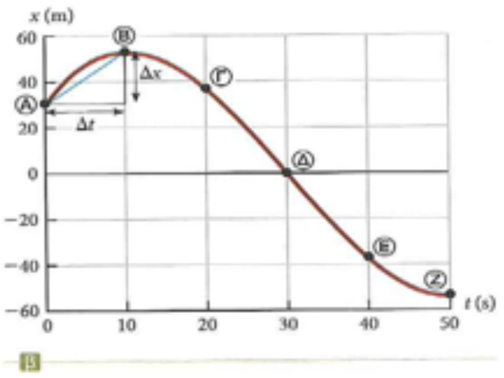
Θέση	t (s)	x (m)
Α	0	30
Β	10	52
Γ	20	38
Δ	30	0
Ε	40	−37
Ζ	50	−53

Παράδειγμα M2.1 Υπολογισμός μέσης ταχύτητας και μέσης αριθμητικής ταχύτητας

Βρείτε τη μετατόπιση, τη μέση ταχύτητα, και τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου της Δυναμικής Εικόνας M2.1α μεταξύ των θέσεων Α και Ζ.

ΛΥΣΗ

Συμβουλευτείτε τη Δυναμική Εικόνα M2.1 για να σχηματίσετε μια νοερή εικόνα του αυτοκινήτου και της κίνησής του. Μοντελοποιήστε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο. Από το γράφημα θέσης-χρόνου που δίνεται στη Δυναμική Εικόνα M2.1β, παρατηρήστε ότι $x_{Α} = 30$ m τη χρονική στιγμή $t_{Α} = 0$ s και ότι $x_{Ζ} = -53$ m τη χρονική στιγμή $t_{Ζ} = 50$ s.



Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.1 για να βρείτε τη μετατόπιση του αυτοκινήτου:

$$\Delta x = x_{Ζ} - x_{Α} = -53\text{ m} - 30\text{ m} = \boxed{-83\text{ m}}$$

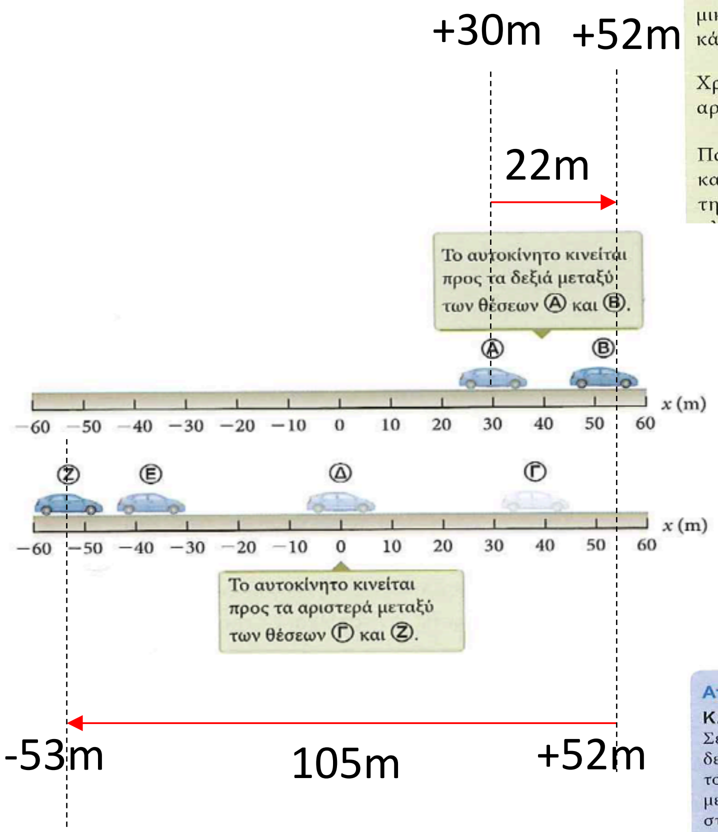
Το αποτέλεσμα δείχνει ότι το αυτοκίνητο σταματάει τελικά σε απόσταση 83 m προς την αρνητική κατεύθυνση (αριστερά, σε αυτή την περίπτωση) από το σημείο που ξεκίνησε. Ο αριθμός αυτός έχει τις σωστές μονάδες και την ίδια τάξη μεγέθους με τα δεδομένα που δίνονται. Μια γρήγορη ματιά στη Δυναμική Εικόνα M2.1α επιβεβαιώνει ότι η απάντηση είναι σωστή.

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.2 για να βρείτε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου:

$$v_{x,\text{μέση}} = \frac{x_{Ζ} - x_{Α}}{t_{Ζ} - t_{Α}}$$

$$= \frac{-53\text{ m} - 30\text{ m}}{50\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{-83\text{ m}}{50\text{ s}} = \boxed{-1.7\text{ m/s}}$$

συνεχίζεται



M2.1 *συν.*

Δεν μπορούμε να βρούμε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου από τα δεδομένα του Πίνακα M2.1 επειδή δεν έχουμε πληροφορίες για τις θέσεις του αυτοκινήτου μεταξύ των σημείων. Αν υποθέσουμε ότι η καμπύλη της Δυναμικής Εικόνας M2.1β περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες σχετικά με τη θέση του αυτοκινήτου, τότε η απόσταση που κάλυψε είναι 22 m (από τη θέση Α στη Β) συν 105 m (από τη Β στη Ζ), δηλαδή συνολικά 127 m.

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.3 για να βρείτε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου:

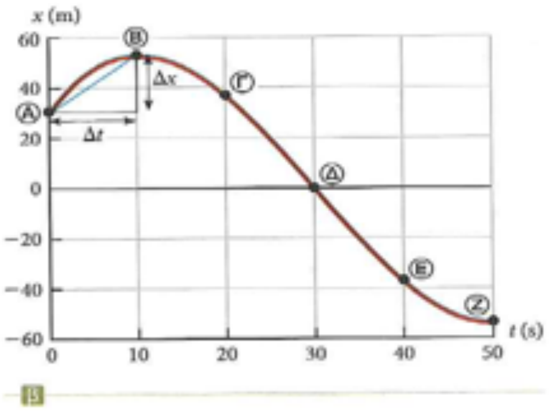
$$v_{\text{μέση}} = \frac{127\ \text{m}}{50\ \text{s}} = 2.5\ \text{m/s}$$

Παρατηρήστε ότι η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι θετικός αριθμός, όπως πρέπει να ισχύει. Έστω ότι η κόκκινη καμπύλη στη Δυναμική Εικόνα M2.1β είναι διαφορετική ώστε τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα το αυτοκίνητο να ξεκινά από τη θέση Α να προχωρά 100 m και μετά να επιστρέφει στη θέση Β. Η μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου θα …ξει επειδή η απόσταση είναι διαφορετική, αλλά η μέση ταχύτητά του θα παραμείνει ίδια.

ΠΙΝΑΚΑΣ M2.1

Η θέση του αυτοκινήτου σε διάφορες χρονικές στιγμές

Θέση	t (s)	x (m)
Α	0	30
Β	10	52
Γ	20	38
Δ	30	0
Ε	40	−37
Ζ	50	−53



M2.2 Στιγμιαία ταχύτητα – διανυσματικό και βαθμωτό μέγεθος

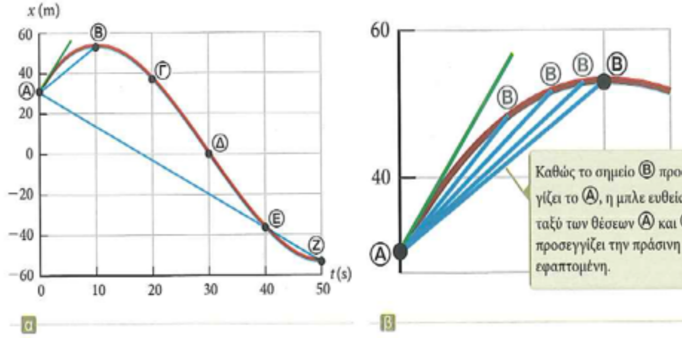
Συχνά χρειάζεται να ξέρουμε την ταχύτητα ενός σώματος σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή και όχι τη μέση ταχύτητά του σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Με άλλα λόγια, θέλουμε να μπορούμε να προσδιορίζουμε την ταχύτητά μας με την ίδια ακρίβεια που μπορούμε να προσδιορίζουμε τη θέση μας καταγράφοντας τι συμβαίνει σε μια συγκεκριμένη ένδειξη του χρονομέτρου, δηλαδή σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Τι έννοια έχει όμως να μιλάμε για το πόσο γρήγορα κινείται κάτι αν «παγώνουμε τον χρόνο» και αναφερόμαστε μόνο σε μία μεμονωμένη στιγμή; Στα τέλη της δεκαετίας του 1600, με την ανακάλυψη του μαθηματικού λογισμού, οι επιστήμονες άρχισαν να κατανοούν τον τρόπο με τον οποίο μπορούσαν να περιγράψουν την κίνηση ενός αντικειμένου σε κάθε χρονική στιγμή.

Για να δείτε πώς γίνεται αυτό, θεωρήστε το γράφημα της Δυναμικής Εικόνας M2.3α, το οποίο είναι ουσιαστικά αναπαραγωγή του γραφήματος της Δυναμικής Εικόνας M2.1β. Έχουμε ήδη εξετάσει τη μέση ταχύτητα για το διάστημα στο οποίο το αυτοκίνητο κινήθηκε από τη θέση Α στη θέση Β (που δίνεται από την κλίση της μπλε ευθείας) και για το διάστημα στο οποίο κινήθηκε από τη θέση Α στη θέση Ζ (που αναπαρίσταται από την κλίση της μεγαλύτερης μπλε ευθείας και υπολογίστηκε στο Παράδειγμα M2.1). Το αυτοκίνητο αρχικά κινείται με κατεύθυνση προς τα δεξιά, την οποία ορίσαμε ως θετική. Άρα, αφού η μέση ταχύτητα είναι θετική στο διάστημα από το σημείο Α στο Β, αυτό σημαίνει ότι είναι πιο αντιπροσωπευτική της αρχικής ταχύτητας από τη μέση ταχύτητα στο διάστημα από το σημείο Α στο Ζ, την οποία προσδιορίσαμε ως αρνητική στο Παράδειγμα M2.1. Τώρα ας εστιάσουμε την προσοχή μας στη μικρή μπλε ευθεία και ας μετακινήσουμε το σημείο Β προς τα αριστερά πάνω στην καμπύλη, προς το σημείο Α, όπως φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα M2.3β. Η ευθεία μεταξύ των σημείων γίνεται ολοένα και πιο απότομη, και καθώς τα δύο σημεία πλησιάζουν το ένα το άλλο, η ευθεία ταυτίζεται με την εφαπτομένη της καμπύλης, η οποία υποδεικνύεται από την πράσινη ευθεία στη Δυναμική Εικόνα M2.3β. Η κλίση αυτής της εφαπτομένης αναπαριστά την ταχύτητα του αυτοκινήτου στο σημείο Α. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε προσδιορίσει τη *στιγμιαία ταχύτητα* στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Δηλαδή, η **στιγμιαία ταχύτητα** v_x ισούται με το όριο του λόγου $\Delta x/\Delta t$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν:[1]

Αποφυγή παγίδων M2.2

Κλίσεις γραφημάτων

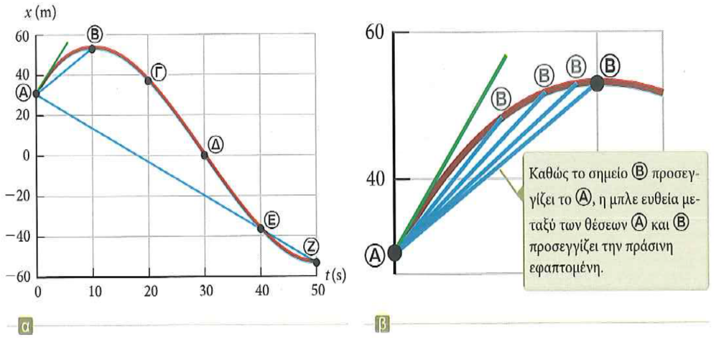
Σε κάθε γράφημα φυσικών δεδομένων, η *κλίση* αναπαριστά τον λόγο της μεταβολής του μεγέθους που αναπαρίσταται στον κατακόρυφο άξονα προς τη μεταβολή του μεγέθους που αναπαρίσταται στον οριζόντιο άξονα. Θυμηθείτε ότι *η κλίση έχει μονάδες* (εκτός αν και οι δύο άξονες έχουν τις ίδιες μονάδες). Οι μονάδες της κλίσης στις Δυναμικές Εικόνες M2.1β και M2.3 είναι μέτρα ανά δευτερόλεπτο, δηλαδή οι μονάδες της ταχύτητας.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ M2.3

(α) Γράφημα που αναπαριστά την κίνηση του αυτοκινήτου της Δυναμικής Εικόνας M2.1. (β) Μεγέθυνση της πάνω αριστερής γωνίας του γραφήματος.

[1] Παρατηρήστε ότι η μετατόπιση Δx τείνει επίσης στο μηδέν καθώς το Δt τείνει στο μηδέν, άρα ο λόγος φαίνεται να είναι 0/0. Καθώς τα Δx και Δt γίνονται ολοένα και μικρότερα, ο λόγος $\Delta x/\Delta t$ τείνει να πάρει τιμή ίση με την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη x-t.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ2.3

(α) Γράφημα που αναπαριστά την κίνηση του αυτοκινήτου της Δυναμικής Εικόνας Μ2.1.
(β) Μεγέθυνση της πάνω αριστερής γωνίας του γραφήματος.

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(M2.4)}$$

Στον μαθηματικό λογισμό, αυτό το όριο ονομάζεται *παράγωγος* του x ως προς t, και γράφεται dx/dt:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(M2.5)}$$

◀ **Στιγμιαία ταχύτητα**

Η στιγμιαία ταχύτητα μπορεί να είναι θετική, αρνητική, ή μηδενική. Όταν η κλίση του γραφήματος θέσης-χρόνου είναι θετική, όπως συμβαίνει σε κάθε χρονική στιγμή κατά τα πρώτα 10 s στη Δυναμική Εικόνα Μ2.3, η ταχύτητα v_x είναι θετική και το αυτοκίνητο κινείται προς μεγαλύτερες τιμές του x. Μετά το σημείο Ⓑ, η ταχύτητα v_x είναι αρνητική, καθώς η κλίση είναι αρνητική, και το αυτοκίνητο κινείται προς μικρότερες τιμές του x. Στο σημείο Ⓑ, η κλίση και η στιγμιαία ταχύτητα είναι μηδενικές και το αυτοκίνητο είναι προς στιγμήν ακίνητο.

Από τώρα και στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τον όρο *ταχύτητα* για να αναφερόμαστε στο διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας. Όταν μας ενδιαφέρει η *μέση ταχύτητα*, θα χρησιμοποιούμε πάντα το επίθετο *μέση*.

Ως στιγμιαία αριθμητική ταχύτητα (instantaneous speed) **ενός σωματιδίου ορίζουμε το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητάς του** (instantaneous velocity). Όπως και η μέση αριθμητική ταχύτητα, έτσι και το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας δεν έχει κατεύθυνση. Για παράδειγμα, αν ένα σωματίδιο έχει στιγμιαία ταχύτητα +25 m/s πάνω σε δεδομένη ευθεία και ένα άλλο σωματίδιο έχει στιγμιαία ταχύτητα −25 m/s πάνω στην ίδια ευθεία, και τα δύο έχουν μέτρο ταχύτητας[2] ίσο με 25 m/s.

***Σύντομο ερώτημα* Μ2.2** Οι αστυνομικοί της τροχαίας ενδιαφέρονται περισσότερο για **(α)** τη μέση αριθμητική ταχύτητά σας ή για **(β)** το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητάς σας την ώρα που οδηγείτε;

Αποφυγή παγίδων Μ2.3

Μέτρο στιγμιαίας ταχύτητας και στιγμιαία ταχύτητα
Στην Αποφυγή παγίδων Μ2.1, υποστηρίξαμε ότι η μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed) δεν είναι το ίδιο με το μέτρο του διανύσματος της μέσης ταχύτητας (average velocity magnitude). Ωστόσο, το μέτρο του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας (instantaneous velocity magnitude) *είναι* η στιγμιαία αριθμητική ταχύτητα (instantaneous speed), καθώς σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα, το μέτρο της μετατόπισης ισούται με την απόσταση που διανύει το σωματίδιο. Έτσι, μιλάμε μόνο για το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας.

[2] Από εδώ και στο εξής, με τον όρο *μέτρο ταχύτητας* θα εννοούμε το *μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας*.

Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ2.2 Η ταχύτητα διαφορετικών σωμάτων

Θεωρήστε τις ακόλουθες μονοδιάστατες κινήσεις: **(Α)** Μια μπάλα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω, φτάνει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της και πέφτει ξανά πίσω στο χέρι του ατόμου που την έριξε. **(Β)** Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας και επιταχύνει μέχρι τα 100 m/s. **(Γ)** Ένα διαστημόπλοιο κινείται στο διάστημα με σταθερή ταχύτητα. Υπάρχουν τυχόν σημεία στην κίνηση των παραπάνω σωμάτων στα οποία η στιγμιαία ταχύτητα έχει την ίδια τιμή με τη μέση ταχύτητα για ολόκληρη την κίνηση; Αν ναι, προσδιορίστε τα σημεία.

ΛΥΣΗ

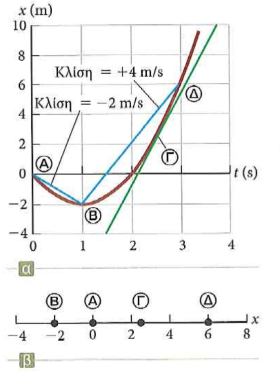
(Α) Η μέση ταχύτητα της μπάλας είναι ίση με μηδέν επειδή η μπάλα επιστρέφει στο αρχικό σημείο και, επομένως, η μετατόπισή της είναι ίση με μηδέν. Υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η στιγμιαία ταχύτητα είναι ίση με μηδέν: στο ψηλότερο σημείο της κίνησης.

(Β) Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου δεν μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς από τις πληροφορίες που δίνονται, αλλά πρέπει να έχει τιμή μεταξύ 0 και 100 m/s. Επειδή το αυτοκίνητο θα αποκτήσει κάθε στιγμιαία ταχύτητα από 0 μέχρι 100 m/s κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος, πρέπει να υπάρχει κάποια στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα για ολόκληρη την κίνηση.

(Γ) Επειδή η στιγμιαία ταχύτητα του διαστημοπλοίου είναι σταθερή, η στιγμιαία ταχύτητά του σε *οποιαδήποτε* χρονική στιγμή και η μέση ταχύτητά του για *οποιοδήποτε* χρονικό διάστημα είναι ίδιες.

Παράδειγμα Μ2.3 Μέση και στιγμιαία ταχύτητα

Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x. Η θέση του μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση $x = -4t + 2t^2$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα.[3] Το γράφημα θέσης-χρόνου για την κίνηση αυτή φαίνεται στην Εικόνα Μ2.4α. Επειδή η θέση του σωματιδίου δίνεται από μια μαθηματική συνάρτηση, η κίνηση του σωματιδίου είναι πλήρως γνωστή, σε αντίθεση με την κίνηση του αυτοκινήτου στη Δυναμική Εικόνα Μ2.1. Παρατηρήστε ότι το σωματίδιο κινείται στην αρνητική κατεύθυνση του άξονα x το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησης, είναι ακίνητο τη χρονική στιγμή $t = 1$ s, και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x όταν $t > 1$ s.



Εικόνα Μ2.4 (Παράδειγμα Μ2.3) (α) Γράφημα θέσης-χρόνου για σωματίδιο το οποίο έχει συντεταγμένη x που μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση $x = -4t + 2t^2$. (β) Το σωματίδιο κινείται σε μία διάσταση στον άξονα x.

(Α) Προσδιορίστε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$ s και από $t = 1$ s μέχρι $t = 3$ s.

ΛΥΣΗ

Εξετάστε το γράφημα της Εικόνας Μ2.4α, και φανταστείτε την κίνηση του σωματιδίου. Να θυμάστε ότι το σωματίδιο δεν διαγράφει καμπύλη τροχιά στον χώρο όπως αυτή που υποδηλώνει η κόκκινη καμπύλη στη γραφική αναπαράσταση. Το σωματίδιο κινείται μόνο κατά μήκος του άξονα x σε μία διάσταση (Εικόνα Μ2.4β). Τη χρονική στιγμή $t = 0$, κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά;

Κατά τη διάρκεια του πρώτου χρονικού διαστήματος, η κλίση είναι αρνητική και άρα η μέση ταχύτητα είναι αρνητική. Άρα, γνωρίζουμε ότι η μετατόπιση μεταξύ των Ⓐ και Ⓑ πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός με μονάδες τα μέτρα. Παρομοίως, αναμένουμε ότι η μετατόπιση μεταξύ των Ⓑ και Ⓓ θα είναι θετική.

[3] Για να κάνουμε πιο ευανάγνωστη την παράσταση γράφουμε $x = -4t + 2t^2$ αντί για $x = (-4.00 \text{ m/s})t + (2.00 \text{ m/s}^2)t^{2.00}$. Όταν μια εξίσωση συνοψίζει μετρήσεις, να θεωρείτε ότι οι συντελεστές και οι εκθέτες της εξίσωσης έχουν το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων με τα υπόλοιπα δεδομένα του προβλήματος. Να θεωρείτε ότι οι συντελεστές της έχουν τις μονάδες που απαιτούνται για να υπάρχει διαστατική συνέπεια. Θεωρήστε ότι όλες οι μηδενικές τιμές στο βιβλίο έχουν όσα σημαντικά ψηφία χρειάζεστε.

M2.3 *συν.*

Στο πρώτο χρονικό διάστημα, ορίστε $t_i = t_{Ⓐ} = 0$ και $t_f = t_{Ⓑ} = 1$ s και χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.1 για να βρείτε τη μετατόπιση:

$$\Delta x_{Ⓐ \to Ⓑ} = x_f - x_i = x_{Ⓑ} - x_{Ⓐ}$$
$$= [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = \boxed{-2 \text{ m}}$$

Για το δεύτερο χρονικό διάστημα (από $t = 1$ s μέχρι $t = 3$ s), ορίστε $t_i = t_{Ⓑ} = 1$ s και $t_f = t_{Ⓓ} = 3$ s:

$$\Delta x_{Ⓑ \to Ⓓ} = x_f - x_i = x_{Ⓓ} - x_{Ⓑ}$$
$$= [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = \boxed{+8 \text{ m}}$$

Μπορείτε να δείτε απευθείας αυτές τις μετατοπίσεις στο γράφημα θέσης-χρόνου.

(Β) Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα κατά τη διάρκεια αυτών των δύο χρονικών διαστημάτων.

ΛΥΣΗ

Στο πρώτο χρονικό διάστημα, χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.2 με $\Delta t = t_f - t_i = t_{Ⓑ} - t_{Ⓐ} = 1$ s:

$$v_{x,\text{μέση}\,(Ⓐ \to Ⓑ)} = \frac{\Delta x_{Ⓐ \to Ⓑ}}{\Delta t} = \frac{-2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \boxed{-2 \text{ m/s}}$$

Στο δεύτερο χρονικό διάστημα, $\Delta t = 2$ s:

$$v_{x,\text{μέση}\,(Ⓑ \to Ⓓ)} = \frac{\Delta x_{Ⓑ \to Ⓓ}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ m}}{2 \text{ s}} = \boxed{+4 \text{ m/s}}$$

Οι τιμές αυτές είναι ίδιες με τις κλίσεις των μπλε ευθειών που ενώνουν τα συγκεκριμένα σημεία στην Εικόνα M2.4α.

(Γ) Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

ΛΥΣΗ

Μετρήστε την κλίση της πράσινης ευθείας τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s (σημείο Ⓒ) στην Εικόνα M2.4α:

$$v_x = \frac{10 \text{ m} - (-4 \text{ m})}{3.8 \text{ s} - 1.5 \text{ s}} = \boxed{+6 \text{ m/s}}$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η στιγμιαία ταχύτητα έχει την ίδια τάξη μεγέθους με τα προηγούμενα αποτελέσματα, δηλαδή λίγα μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Είναι αυτό κάτι που περιμένατε;

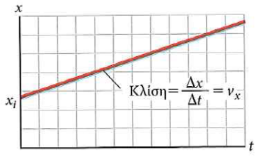
M2.3 Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα

Στην Ενότητα M1.2 αναφερθήκαμε στη σπουδαιότητα της δημιουργίας μοντέλων. Ένα ιδιαίτερα σημαντικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων φυσικής είναι το *μοντέλο ανάλυσης*. Τα μοντέλα ανάλυσης μάς βοηθάνε να αναλύουμε προβλήματα της φυσικής και μας καθοδηγούν προς τη λύση. Ένα **μοντέλο ανάλυσης** περιγράφει είτε (1) τη συμπεριφορά κάποιας φυσικής οντότητας είτε (2) την αλληλεπίδραση μεταξύ της οντότητας αυτής και του περιβάλλοντος. Όταν συναντάτε ένα καινούργιο πρόβλημα, πρέπει να προσδιορίζετε τις βασικές λεπτομέρειες του προβλήματος και να προσπαθείτε να αναγνωρίζετε αν κάποιο από τα είδη των προβλημάτων που έχετε ήδη λύσει μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για το νέο πρόβλημα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα αυτοκίνητο κινείται σε έναν ευθύ αυτοκινητόδρομο χωρίς διόδια με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Έχει σημασία το γεγονός ότι είναι αυτοκίνητο; Έχει σημασία το γεγονός ότι ο αυτοκινητόδρομος δεν έχει διόδια; Αν οι απαντήσεις και στις δύο ερωτήσεις είναι όχι, θα μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως *σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα*, κάτι το οποίο θα αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα.

Η μέθοδος αυτή μοιάζει κάπως με τη συνήθη πρακτική των δικηγόρων να βρίσκουν «νομικά δεδικασμένα». Αν κάποιο δικαστήριο έχει εκδώσει απόφαση για κάποια υπόθεση η οποία έχει μεγάλη νομική ομοιότητα με την υπόθεση που εκδικάζεται, η πρώτη υπόθεση χρησιμοποιείται ως μοντέλο και οι δικηγόροι ζητάνε από το δικαστήριο να συνδεθούν οι υποθέσεις από λογικής άποψης. Έτσι, η απόφαση στην προηγούμενη υπόθεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επηρεάσει την απόφαση στην τρέχουσα υπόθεση. Κάτι παρόμοιο κάνουμε και στη φυσική. Για ένα δεδομένο πρόβλημα, αναζητούμε το «φυσικό δεδικασμένο», δηλαδή ένα μοντέλο που γνωρίζουμε ήδη και μπορεί να εφαρμοστεί στο τρέχον πρόβλημα.

Δημιουργούμε μοντέλα ανάλυσης με βάση τέσσερα θεμελιώδη μοντέλα απλοποίησης. Το πρώτο από τα τέσσερα είναι το μοντέλο σωματιδίου που αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Θα μελετήσουμε το σωματίδιο ως προς διάφορες συμπεριφορές και αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον. Στα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα παρουσιάσουμε και άλλα μοντέλα ανάλυσης, τα οποία βασίζονται στα απλοποιημένα μοντέλα για το *σύστημα*, το *άκαμπτο σώμα*, και το *κύμα*. Αφού παρουσιάσουμε αυτά τα μοντέλα ανάλυσης, θα δούμε ότι εμφανίζονται ξανά και ξανά σε διαφορετικά προβλήματα.

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, πρέπει να αποφεύγετε να ψάχνετε όλο το κεφάλαιο για να βρείτε μία εξίσωση που περιέχει τη ζητούμενη άγνωστη μεταβλητή του προβλήματος. Σε πολλές περιπτώσεις, η εξίσωση που θα βρείτε ενδέχεται να μην έχει καμία σχέση με το πρόβλημα που προσπαθείτε να λύσετε. Είναι *πολύ* καλύτερο να κάνετε το εξής πρώτο βήμα: **Προσδιορίστε το κατάλληλο μοντέλο ανάλυσης για το πρόβλημα.** Για να το κάνετε αυτό, σκεφτείτε προσεκτικά τι συμβαίνει στο πρόβλημα και αναζητήστε μια ίδια περίπτωση που έχετε δει στο παρελθόν. Μόλις προσδιορίσετε το μοντέλο ανάλυσης, μπορείτε να επιλέξετε την κατάλληλη εξίσωση από έναν περιορισμένο αριθμό εξισώσεων που αντιστοιχούν σε αυτό το μοντέλο. Επομένως, **το μοντέλο σάς δείχνει ποιες εξισώσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για να αναπαραστήσετε με μαθηματικό τρόπο το πρόβλημα.**



Εικόνα Μ2.5 Γράφημα θέσης-χρόνου για σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα. Η τιμή της σταθερής ταχύτητας ισούται με την κλίση της ευθείας.

Ας χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση Μ2.2 για να κατασκευάσουμε το πρώτο μας μοντέλο ανάλυσης για την επίλυση προβλημάτων. Θα φανταστούμε ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Το μοντέλο ενός **σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα** μπορεί να εφαρμοστεί σε *οποιαδήποτε* περίπτωση όπου μια οντότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αυτή η περίπτωση εμφανίζεται συχνά, οπότε το συγκεκριμένο μοντέλο είναι σημαντικό.

Αν η ταχύτητα ενός σωματιδίου είναι σταθερή, τότε η στιγμιαία ταχύτητά του σε οποιαδήποτε στιγμή ενός χρονικού διαστήματος είναι ίδια με τη μέση ταχύτητα για το διάστημα αυτό. Δηλαδή, $v_x = v_{x,\text{μέση}}$. Άρα, η Εξίσωση Μ2.2 μας δίνει μια σχέση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη μαθηματική αναπαράσταση της περίπτωσης αυτής:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(M2.6)}$$

Αν θυμηθούμε ότι $\Delta x = x_f - x_i$, βλέπουμε ότι $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, ή

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η θέση του σωματιδίου δίνεται από το άθροισμα της αρχικής του θέσης x_i τη χρονική στιγμή $t = 0$ και της μετατόπισης $v_x\,\Delta t$ η οποία λαμβάνει χώρα στο χρονικό διάστημα Δt. Στην πράξη, συνήθως επιλέγουμε τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στην αρχή του διαστήματος ως $t_i = 0$ και τη χρονική στιγμή στο τέλος του διαστήματος ως $t_f = t$, άρα η εξίσωσή μας γίνεται

Η θέση ως συνάρτηση του χρόνου για το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα

$$x_f = x_i + v_x t \quad \text{(για σταθερή ταχύτητα } v_x\text{)} \qquad \text{(M2.7)}$$

Οι Εξισώσεις Μ2.6 και Μ2.7 είναι οι βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο ενός σωματιδίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Όποτε διαπιστώνετε ότι το μοντέλο ανάλυσης ενός προβλήματος είναι το σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα, μπορείτε να προστρέξετε αμέσως στις εξισώσεις αυτές.

Η Εικόνα Μ2.5 είναι μια γραφική αναπαράσταση του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα. Σε αυτό το γράφημα θέσης-χρόνου, η κλίση της ευθείας που αναπαριστά την κίνηση είναι σταθερή και ίση με το μέτρο της ταχύτητας. Η Εξίσωση Μ2.7, που είναι εξίσωση ευθείας, είναι η μαθηματική αναπαράσταση για το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα. Η κλίση της ευθείας είναι v_x και η τομή της με τον άξονα y (η τεταγμένη) είναι το x_i και στις δύο αναπαραστάσεις.

Οι μαθηματικοί υπολογισμοί για το σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα γίνονται με χρήση της Εξίσωσης Μ2.6 και της Εξίσωσης Μ2.7, η οποία είναι απόρροια της πρώτης. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις εξισώσεις αυτές για να λύνετε ως προς οποιαδήποτε άγνωστη μεταβλητή τους αν γνωρίζετε τις τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών. Για παράδειγμα, στο (Β) ερώτημα του Παραδείγματος Μ2.4, βρήκαμε τη θέση γνωρίζοντας την ταχύτητα και τον χρόνο. Παρομοίως, αν γνωρίζουμε την ταχύτητα και την τελική θέση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση Μ2.7 για να βρούμε τη χρονική στιγμή στην οποία ο δρομέας βρίσκεται στη συγκεκριμένη θέση.

Ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα, κινείται ευθύγραμμα με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Θεωρήστε τώρα ένα σωματίδιο που κινείται σε καμπύλη τροχιά με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Η περίπτωση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα **σωματίδιο που κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας**.[4] Η βασική εξίσωση για το παραπάνω μοντέλο είναι η Εξίσωση Μ2.3, όπου η μέση αριθμητική ταχύτητα $v_{μέση}$ έχει αντικατασταθεί από το σταθερό μέτρο ταχύτητας v:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \qquad \textbf{(M2.8)}$$

Παράδειγμα Μ2.4 Μοντελοποίηση ενός δρομέα ως σωματιδίου

Επιστήμονας μελετάει την εμβιομηχανική του ανθρώπινου σώματος. Πραγματοποιεί ένα πείραμα κατά το οποίο μετρά την ταχύτητα ενός δρομέα ο οποίος τρέχει ευθύγραμμα με σταθερό ρυθμό. Ο επιστήμονας ξεκινάει το χρονόμετρο τη στιγμή που ο δρομέας περνάει από ένα συγκεκριμένο σημείο και το σταματάει μόλις ο δρομέας περάσει από ένα άλλο σημείο που απέχει 20 m από το πρώτο. Το χρονόμετρο καταγράφει ένα χρονικό διάστημα 4.0 s.

(A) Ποια είναι η ταχύτητα του δρομέα;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποιούμε τον δρομέα ως σωματίδιο επειδή το μέγεθός του και οι κινήσεις των χεριών και των ποδιών του είναι περιττές λεπτομέρειες. Επίσης, επειδή στο πρόβλημα αναφέρεται ότι ο δρομέας τρέχει με σταθερό ρυθμό, μπορούμε να τον μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα.

Αφού προσδιορίσαμε το μοντέλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση Μ2.6 για να βρούμε τη σταθερή ταχύτητα του δρομέα:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20\text{ m} - 0}{4.0\text{ s}} = \boxed{5.0\text{ m/s}}$$

(B) Αν ο δρομέας συνεχίσει να κινείται μετά το σταμάτημα του χρονομέτρου, ποια θα είναι η θέση του μετά από 10 s;

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.7 και την ταχύτητα που βρήκατε στο (Α) για να βρείτε τη θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 10$ s:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0\text{ m/s})(10\text{ s}) = \boxed{50\text{ m}}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή αυτή είναι υπερδιπλάσια της τιμής στη θέση των 20 m στην οποία σταμάτησε το χρονόμετρο. Είναι η τιμή αυτή συνεπής με το γεγονός ότι ο χρόνος των 10 s είναι υπερδιπλάσιος του χρόνου των 4.0 s;

[4] Σ.τ.Ε.: Οι διατυπώσεις *σταθερό μέτρο ταχύτητας* και *ταχύτητα σταθερού μέτρου* είναι ταυτόσημες και υποδεικνύουν ότι το υπό εξέταση σώμα κινείται με ταχύτητα η οποία έχει σταθερό μέτρο.

Ως παράδειγμα, φανταστείτε ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας σε κυκλική τροχιά. Αν το μέτρο της ταχύτητας είναι 5.00 m/s και η ακτίνα της τροχιάς είναι 10.0 m, μπορούμε να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διαγράψει το σωματίδιο έναν πλήρη κύκλο:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(10.0\text{ m})}{5.00\text{ m/s}} = 12.6\text{ s}$$

Μ2.4 Επιτάχυνση

Στο Παράδειγμα Μ2.3, ασχοληθήκαμε με μια συνηθισμένη περίπτωση κατά την οποία η ταχύτητα ενός σωματιδίου μεταβάλλεται καθώς το σωματίδιο κινείται. Όταν η ταχύτητα ενός σωματιδίου μεταβάλλεται με τον χρόνο, λέμε ότι το σωματίδιο *επιταχύνει*. Για παράδειγμα, το μέτρο της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου αυξάνεται όταν πατάμε γκάζι και μειώνεται όταν πατάμε φρένο. Ας δούμε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση ποσοτικά.

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα, το οποίο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x, έχει αρχική ταχύτητα v_{xi} τη χρονική στιγμή t_i στη θέση Ⓐ και τελική ταχύτητα v_{xf} τη χρονική στιγμή t_f στη θέση Ⓑ (Εικόνα Μ2.6α). Η **μέση επιτάχυνση** $a_{x,\text{μέση}}$ του σωματιδίου ορίζεται ως η *μεταβολή* της ταχύτητας Δv_x προς το χρονικό διάστημα Δt κατά το οποίο συμβαίνει η μεταβολή:

Μέση επιτάχυνση ▶

$$a_{x,\text{μέση}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad \text{(Μ2.9)}$$

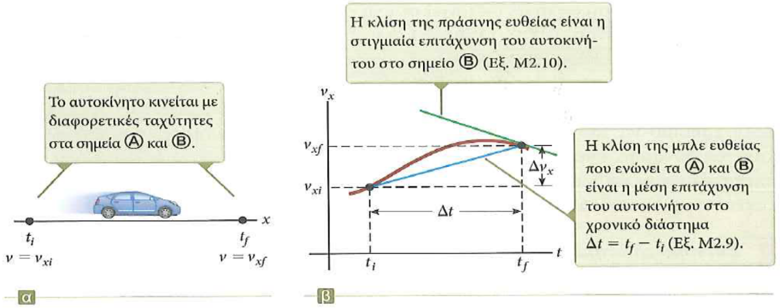
Όπως και με την ταχύτητα, όταν η κίνηση που αναλύουμε είναι μονοδιάστατη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θετικά και αρνητικά πρόσημα για να δείξουμε την κατεύθυνση της επιτάχυνσης. Επειδή οι διαστάσεις της ταχύτητας είναι L/T και η διάσταση του χρόνου είναι T, η επιτάχυνση έχει διαστάσεις μήκους προς χρόνο στο τετράγωνο, ή L/T^2. Η μονάδα SI της επιτάχυνσης είναι τα μέτρα ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο (m/s^2). Ίσως είναι πιο εύκολο να ερμηνεύσετε αυτές τις μονάδες αν τις θεωρήσετε ως μέτρα ανά δευτερόλεπτο ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ένα σώμα έχει επιτάχυνση $+2\text{ m/s}^2$. Φανταστείτε νοερά το σώμα να κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα που αυξάνεται κατά 2 m/s σε κάθε χρονικό διάστημα 1 s. Αν το σώμα ξεκινήσει από κατάσταση ηρεμίας, θα πρέπει να μπορείτε να το φανταστείτε να κινείται με ταχύτητα +2 m/s μετά από 1 s, με +4 m/s μετά από 2 s, κ.ο.κ.

Σε μερικές περιπτώσεις, η μέση επιτάχυνση ενδέχεται να είναι διαφορετική για διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Επομένως, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τη **στιγμιαία επιτάχυνση** ως το όριο της μέσης επιτάχυνσης καθώς το Δt τείνει στο μηδέν. Η έννοια της στιγμιαίας επιτάχυνσης είναι ανάλογη με την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας που ορίσαμε στην Ενότητα Μ2.2. Αν φανταστούμε ότι το σημείο Ⓐ πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το σημείο Ⓑ (Εικόνα Μ2.6α) και πάρουμε το όριο του $\Delta v_x/\Delta t$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν, παίρνουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση στο σημείο Ⓑ:

Στιγμιαία επιτάχυνση ▶

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad \text{(Μ2.10)}$$

Δηλαδή, η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την παράγωγο της ταχύτητας ως προς τον χρόνο, η οποία εξ ορισμού είναι η κλίση του γραφήματος ταχύτητας-χρόνου. Η κλίση της πράσινης ευθείας στην Εικόνα Μ2.6β ισούται με τη στιγμιαία επιτάχυνση στο σημείο Ⓑ. Παρατηρήστε ότι η Εικόνα Μ2.6β είναι γράφημα *ταχύτητας-χρόνου*, και όχι γράφημα *θέσης-χρόνου* όπως οι Δυναμικές Εικόνες Μ2.1β και Μ2.3, και οι Εικόνες Μ2.4 και Μ2.5. Βλέπουμε λοιπόν ότι, όπως η ταχύτητα ενός κινούμενου σωματιδίου είναι η κλίση σε ένα σημείο του γραφήματος x-t του σωματιδίου, έτσι και η επιτάχυνση



Εικόνα Μ2.6 (α) Αυτοκίνητο, το οποίο μοντελοποιείται ως σωματίδιο και κινείται κατά μήκος του άξονα x από το σημείο Ⓐ στο σημείο Ⓑ, έχει ταχύτητα v_{xi} τη χρονική στιγμή $t = t_i$ και ταχύτητα v_{xf} τη χρονική στιγμή $t = t_f$. (β) Γράφημα ταχύτητας-χρόνου (κόκκινο) για το σωματίδιο που κινείται ευθύγραμμα.

ενός σωματιδίου είναι η κλίση σε ένα σημείο του γραφήματος v_x-t του σωματιδίου. Θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την παράγωγο της ταχύτητας ως προς τον χρόνο ως τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας. Αν η επιτάχυνση a_x είναι θετική, τότε συμβαίνει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x· αν η επιτάχυνση a_x είναι αρνητική, τότε συμβαίνει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x.

Στην Εικόνα Μ2.7 φαίνεται η σχέση του γραφήματος επιτάχυνσης-χρόνου με το γράφημα ταχύτητας-χρόνου. Η επιτάχυνση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ισούται με την κλίση του γραφήματος ταχύτητας-χρόνου κατά τη συγκεκριμένη στιγμή. Οι θετικές τιμές της επιτάχυνσης αντιστοιχούν σε εκείνα τα σημεία της Εικόνας Μ2.7α όπου η ταχύτητα αυξάνεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Η επιτάχυνση παίρνει τη μέγιστη τιμή της τη χρονική στιγμή $t_Ⓐ$, όταν η κλίση του γραφήματος ταχύτητας-χρόνου είναι μέγιστη. Στη συνέχεια, η επιτάχυνση μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t_Ⓑ$, όταν η ταχύτητα είναι μέγιστη (δηλαδή, όταν η κλίση του γραφήματος v_x-t είναι ίση με μηδέν). Η επιτάχυνση είναι αρνητική όταν η ταχύτητα μειώνεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x, και παίρνει τη μεγαλύτερη αρνητική τιμή της τη χρονική στιγμή $t_Ⓒ$.

***Σύντομο ερώτημα* Μ2.3** Σχεδιάστε ένα γράφημα ταχύτητας-χρόνου για το αυτοκίνητο στη Δυναμική Εικόνα Μ2.1α. Υποθέστε ότι το όριο ταχύτητας στον δρόμο που κινείται το αυτοκίνητο είναι 30 km/h. Ισχύει ή δεν ισχύει; Το αυτοκίνητο υπερβαίνει το όριο ταχύτητας σε κάποια χρονική στιγμή του διαστήματος 0 έως 50 s.

Στην περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης, η κατεύθυνση της ταχύτητας ενός σώματος και η κατεύθυνση της επιτάχυνσής του συνδέονται ως εξής. Όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος έχουν την ίδια κατεύθυνση, το σώμα επιταχύνει. Από την άλλη πλευρά, όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος έχουν αντίθετη κατεύθυνση, το σώμα επιβραδύνει.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα πρόσημα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, μπορούμε να συσχετίσουμε την επιτάχυνση ενός σώματος με τη συνολική *δύναμη* που ασκείται στο σώμα. Στο Κεφάλαιο Μ5, θα δείξουμε ότι **η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ανάλογη προς την επιτάχυνση του σώματος:**

$$F_x \propto a_x \qquad \text{(M2.11)}$$

Η αναλογία αυτή δείχνει ότι η επιτάχυνση προκαλείται από τη δύναμη. Επιπλέον, η δύναμη και η επιτάχυνση είναι διανύσματα, και τα διανύσματα αυτά έχουν την ίδια κατεύθυνση. Επομένως, για να κατανοήσουμε τα πρόσημα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, ας φανταστούμε μια δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και το αναγκάζει να επιταχύνει. Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύ-

Αποφυγή παγίδων Μ2.4

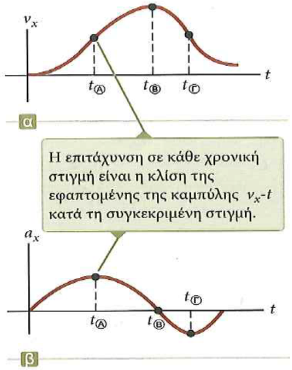
Αρνητική επιτάχυνση

Να θυμάστε ότι *η αρνητική επιτάχυνση δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το σώμα επιβραδύνει.* Αν η επιτάχυνση και η ταχύτητα είναι αρνητικές, το σώμα επιταχύνει!

Αποφυγή παγίδων Μ2.5

Επιβράδυνση

Η λέξη *επιβράδυνση* ισοδυναμεί συνειρμικά για πολλούς με *μείωση της ταχύτητας*. Θα αποφύγουμε τη συχνή χρήση της λέξης στο βιβλίο επειδή ενδέχεται να δημιουργηθεί σύγχυση με τον ορισμό που δώσαμε για την αρνητική επιτάχυνση.



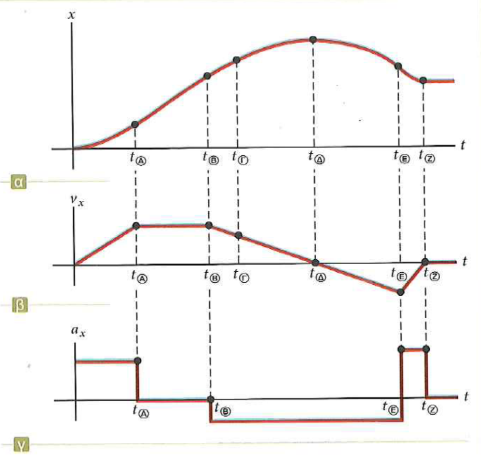
Εικόνα Μ2.7 (α) Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x. (β) Η στιγμιαία επιτάχυνση μπορεί να βρεθεί από το γράφημα ταχύτητας-χρόνου.

θυνση. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε ένα σώμα το οποίο δέχεται δύναμη που δρα στην ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητά του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το σώμα επιταχύνει! Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Τότε, το σώμα κινείται προς κάποια κατεύθυνση και δέχεται δύναμη που δρα στην αντίθετη κατεύθυνση. Επομένως, η ταχύτητα του σώματος μειώνεται! Είναι πολύ χρήσιμο να ταυτίσουμε την κατεύθυνση της επιτάχυνσης με την κατεύθυνση κάποιας δύναμης, επειδή είναι πιο εύκολο με βάση την καθημερινή μας εμπειρία να σκεφτούμε την επίδραση μιας δύναμης σε ένα σώμα από το να σκεφτούμε μόνο την κατεύθυνση της επιτάχυνσης.

***Σύντομο ερώτημα* Μ2.4** Αν η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου που κινείται ανατολικά μειώνεται, ποια είναι η κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο αυτοκίνητο; **(α)** Ανατολική. **(β)** Δυτική. **(γ)** Ούτε ανατολική ούτε δυτική.

Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ2.5 Γραφικές σχέσεις μεταξύ των x, v_x, και a_x

Η θέση ενός σώματος που κινείται κατά μήκος του άξονα x μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στην Εικόνα Μ2.8α. Σχεδιάστε τα γραφήματα ταχύτητας-χρόνου και επιτάχυνσης-χρόνου για το σώμα.



Εικόνα Μ2.8 (Εννοιολογικό Παράδειγμα Μ2.5) (α) Γράφημα θέσης-χρόνου για σώμα που κινείται κατά μήκος του άξονα x. (β) Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για το σώμα προκύπτει από τη μέτρηση της κλίσης του γραφήματος θέσης-χρόνου σε κάθε χρονική στιγμή. (γ) Το γράφημα επιτάχυνσης-χρόνου για το σώμα προκύπτει από τη μέτρηση της κλίσης του γραφήματος ταχύτητας-χρόνου σε κάθε χρονική στιγμή.

ΛΥΣΗ

Η ταχύτητα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ισούται με την κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα x-t κατά τη συγκεκριμένη στιγμή. Μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t = t_{\textcircled{Α}}$, η κλίση του γραφήματος x-t αυξάνεται ομαλά, άρα η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά (Εικόνα Μ2.8β). Μεταξύ των $t_{\textcircled{Α}}$ και $t_{\textcircled{Β}}$, η κλίση του γραφήματος x-t είναι σταθερή, οπότε η ταχύτητα παραμένει σταθερή. Μεταξύ των $t_{\textcircled{Β}}$ και $t_{\textcircled{Δ}}$, η κλίση του γραφήματος x-t μειώνεται, άρα η ταχύτητα στο γράφημα v_x-t μειώνεται. Τη χρονική στιγμή $t_{\textcircled{Δ}}$, η κλίση του γραφήματος x-t είναι ίση με μηδέν, οπότε τη συγκεκριμένη στιγμή, και η ταχύτητα είναι ίση με μηδέν. Μεταξύ των $t_{\textcircled{Δ}}$ και $t_{\textcircled{Ε}}$, η κλίση του γραφήματος x-t είναι αρνητική και μειώνεται ομαλά· επομένως, και η ταχύτητα είναι αρνητική και μειώνεται ομαλά σε αυτό το διάστημα. Μεταξύ των $t_{\textcircled{Ε}}$ και $t_{\textcircled{Ζ}}$, η κλίση του γραφήματος x-t εξακολουθεί να είναι αρνητική και τη χρονική στιγμή $t_{\textcircled{Ζ}}$ μηδενίζεται. Τέλος, μετά τη χρονική στιγμή $t_{\textcircled{Ζ}}$, η κλίση του γραφήματος x-t παραμένει μηδέν, κάτι που σημαίνει ότι το σώμα παραμένει ακίνητο για κάθε $t > t_{\textcircled{Ζ}}$.

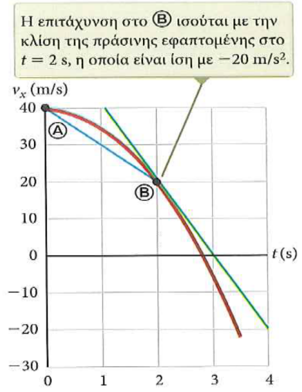
Η επιτάχυνση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ισούται με την κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα v_x-t κατά τη συγκεκριμένη στιγμή. Το γράφημα της επιτάχυνσης-χρόνου γι' αυτό το σώμα φαίνεται στην Εικόνα Μ2.8γ. Η επιτάχυνση είναι σταθερή και θετική μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και $t_{\textcircled{Α}}$, όπου η κλίση του γραφήματος v_x-t είναι θετική. Είναι ίση με μηδέν μεταξύ των $t_{\textcircled{Α}}$ και $t_{\textcircled{Β}}$ και για $t > t_{\textcircled{Ζ}}$ επειδή η κλίση του γραφήματος v_x-t είναι ίση με μηδέν σε αυτές τις χρονικές στιγμές. Είναι αρνητική μεταξύ των $t_{\textcircled{Β}}$ και $t_{\textcircled{Ε}}$ επειδή η κλίση του γραφήματος v_x-t είναι αρνητική σε αυτό το διάστημα. Μεταξύ των $t_{\textcircled{Ε}}$ και $t_{\textcircled{Ζ}}$, η επιτάχυνση είναι θετική όπως συμβαίνει μεταξύ των 0 και $t_{\textcircled{Α}}$, αλλά έχει μεγαλύτερη τιμή επειδή η κλίση του γραφήματος v_x-t είναι μεγαλύτερη.

Σημειώστε ότι οι απότομες μεταβολές της επιτάχυνσης που φαίνονται στην Εικόνα Μ2.8γ είναι αδύνατες από φυσικής άποψης. Τέτοιες ακαριαίες μεταβολές δεν μπορούν να συμβούν στην πραγματικότητα.

Παράδειγμα M2.6 Μέση και στιγμιαία επιτάχυνση

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του άξονα x μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $v_x = 40 - 5t^2$, όπου η ταχύτητα v_x μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο και ο χρόνος t σε δευτερόλεπτα.

(A) Βρείτε τη μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 2.0$ s.



Εικόνα M2.9 (Παράδειγμα M2.6) Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x σύμφωνα με τη σχέση $v_x = 40 - 5t^2$.

ΛΥΣΗ

Φανταστείτε την κίνηση του σωματιδίου χρησιμοποιώντας τη μαθηματική αναπαράσταση. Κινείται τη χρονική στιγμή $t = 0$; Προς ποια κατεύθυνση; Επιταχύνει ή επιβραδύνει; Στην Εικόνα M2.9 παρουσιάζεται ένα γράφημα v_x–t το οποίο δημιουργήθηκε από τη σχέση ταχύτητας-χρόνου που δίνεται στην εκφώνηση του προβλήματος. Επειδή η κλίση ολόκληρης της καμπύλης v_x-t είναι αρνητική, είναι αναμενόμενο ότι η επιτάχυνση θα είναι αρνητική.

Βρείτε την ταχύτητα κατά τις χρονικές στιγμές $t_i = t_Ⓐ = 0$ και $t_f = t_Ⓑ = 2.0$ s αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές του t στη σχέση της ταχύτητας:

$$v_{xⒶ} = 40 - 5t_Ⓐ^2 = 40 - 5(0)^2 = +40 \text{ m/s}$$

$$v_{xⒷ} = 40 - 5t_Ⓑ^2 = 40 - 5(2.0)^2 = +20 \text{ m/s}$$

Βρείτε τη μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_Ⓑ - t_Ⓐ = 2.0$ s:

$$a_{x,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xⒷ} - v_{xⒶ}}{t_Ⓑ - t_Ⓐ} = \frac{20 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s} - 0 \text{ s}}$$

$$= \boxed{-10 \text{ m/s}^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο επιβεβαιώνει τις προβλέψεις μας: η μέση επιτάχυνση, η οποία αναπαρίσταται από την κλίση της μπλε ευθείας που ενώνει το αρχικό και το τελικό σημείο στο γράφημα ταχύτητας-χρόνου, είναι αρνητική.

(B) Προσδιορίστε την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2.0$ s.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζοντας ότι η αρχική ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t είναι $v_{xi} = 40 - 5t^2$, βρείτε την ταχύτητα σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Βρείτε τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα Δt:

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = -10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Για να βρείτε την επιτάχυνση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, διαιρέστε τη σχέση αυτή με Δt και βρείτε το όριο του αποτελέσματος καθώς το Δt τείνει στο μηδέν:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\,\Delta t) = -10t$$

Αντικαταστήστε $t = 2.0$ s:

$$a_x = (-10)(2.0) \text{ m/s}^2 = \boxed{-20 \text{ m/s}^2}$$

Εφόσον, κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η ταχύτητα του σωματιδίου είναι θετική και η επιτάχυνσή του είναι αρνητική, το σωματίδιο επιβραδύνει.

Παρατηρήστε ότι οι απαντήσεις στα ερωτήματα (A) και (B) διαφέρουν. Η μέση επιτάχυνση στο (A) είναι η κλίση της μπλε ευθείας στην Εικόνα M2.9 η οποία συνδέει τα σημεία Ⓐ και Ⓑ. Η στιγμιαία επιτάχυνση στο (B) είναι η κλίση της πράσινης εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Ⓑ. Παρατηρήστε επίσης ότι η επιτάχυνση *δεν* είναι σταθερή στο παράδειγμα αυτό. Θα αναλύσουμε τις περιπτώσεις με σταθερή επιτάχυνση στην Ενότητα M2.6.

Από εδώ και στο εξής, με τον όρο *επιτάχυνση* θα εννοούμε στιγμιαία επιτάχυνση. Όταν αναφερόμαστε στη μέση επιτάχυνση, θα χρησιμοποιούμε πάντοτε το επίθετο *μέση*.
Επειδή ισχύει $v_x = dx/dt$, η επιτάχυνση μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{(M2.12)}$$

Δηλαδή, στη μονοδιάστατη κίνηση, η επιτάχυνση ισούται με τη *δεύτερη παράγωγο* του x ως προς τον χρόνο.

Μέχρι τώρα, υπολογίζαμε τις παραγώγους μιας συνάρτησης, ξεκινώντας με τον ορισμό της συνάρτησης και υπολογίζοντας το όριο ενός συγκεκριμένου λόγου. Αν είστε εξοικειωμένοι με τον λογισμό, θα πρέπει να γνωρίζετε ότι υπάρχουν συγκεκριμένοι κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων. Οι κανόνες αυτοί, οι οποίοι αναφέρονται στο Παράρτημα Β.6, μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε παραγώγους γρήγορα. Για παράδειγμα, σύμφωνα με έναν κανόνα, η παράγωγος οποιασδήποτε σταθεράς είναι ίση με μηδέν. Για να δείτε ένα άλλο παράδειγμα, υποθέστε ότι το x είναι ανάλογο προς κάποια δύναμη του t όπως στη σχέση

$$x = At^n$$

όπου τα A και n είναι σταθερές. (Η παραπάνω σχέση είναι μια πολύ συνηθισμένη μορφή συνάρτησης.) Η παράγωγος του x ως προς t είναι

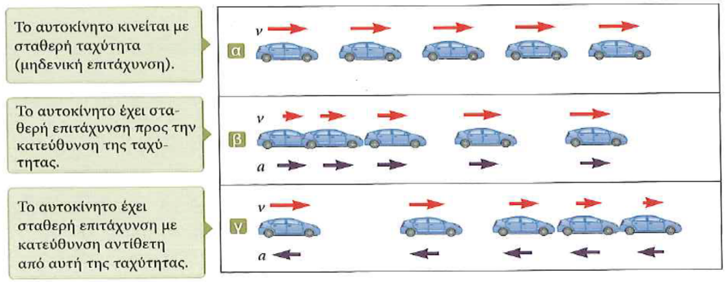
$$\frac{dx}{dt} = nAt^{n-1}$$

Εφαρμόζοντας αυτόν τον κανόνα στο Παράδειγμα Μ2.6, όπου $v_x = 40 - 5t^2$, βρίσκουμε άμεσα ότι η επιτάχυνση είναι $a_x = dv_x/dt = -10t$.

Μ2.5 Διαγράμματα κίνησης

Πολλοί θεωρούν ότι οι έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι παρόμοιες, αλλά στην πραγματικότητα είναι τελείως διαφορετικά μεγέθη. Για να σχηματίσουμε μια νοερή εικόνα ενός κινούμενου σώματος, μερικές φορές είναι χρήσιμο να περιγράψουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος με μια εικονογραφική αναπαράσταση που ονομάζεται *διάγραμμα κίνησης*.

Μπορείτε να φανταστείτε το διάγραμμα κίνησης ενός σώματος σαν μια *στροβοσκοπική* φωτογραφία του, η οποία δείχνει πολλά στιγμιότυπα του σώματος που έχουν ληφθεί καθώς ένα στροβοσκοπικό φως αναβοσβήνει με σταθερό ρυθμό. Στη Δυναμική Εικόνα Μ2.1α φαίνεται το διάγραμμα κίνησης του αυτοκινήτου που μελετήσαμε στην Ενότητα Μ2.1. Στη Δυναμική Εικόνα Μ2.10 φαίνονται τρεις στροβοσκοπικές απεικονίσεις αυτοκινήτων που κινούνται ευθύγραμμα προς μία κατεύθυνση, από τα



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ2.10

Τα διαγράμματα κίνησης ενός αυτοκινήτου που κινείται σε ίσιο δρόμο προς μία μόνο κατεύθυνση. Η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή υποδεικνύεται από ένα κόκκινο βέλος, ενώ η σταθερή επιτάχυνση από ένα μοβ βέλος.

αριστερά προς τα δεξιά. Τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των αναλαμπών του στροβοσκοπίου είναι ίσα σε κάθε διάγραμμα. Για να μην μπερδέψετε τα δύο διανυσματικά μεγέθη, στη Δυναμική Εικόνα Μ2.10, χρησιμοποιούμε κόκκινα βέλη για την ταχύτητα και μοβ βέλη για την επιτάχυνση. Τα βέλη έχουν σχεδιασθεί για μερικές χρονικές στιγμές κατά την κίνηση του σώματος. Ας περιγράψουμε την κίνηση του αυτοκινήτου σε κάθε διάγραμμα.

Στη Δυναμική Εικόνα Μ2.10α, οι εικόνες του αυτοκινήτου ισαπέχουν μεταξύ τους, κάτι που δείχνει ότι η μετατόπιση του αυτοκινήτου είναι ίδια σε κάθε χρονικό διάστημα. Οι ίσες αποστάσεις υποδηλώνουν ότι το αυτοκίνητο κινείται με *σταθερή θετική ταχύτητα* και *μηδενική επιτάχυνση*. Θα μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο και να περιγράψουμε την κίνησή του χρησιμοποιώντας το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα.

Στη Δυναμική Εικόνα Μ2.10β, οι εικόνες του αυτοκινήτου απομακρύνονται μεταξύ τους με το πέρασμα του χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση, το μήκος του βέλους της ταχύτητας αυξάνεται με τον χρόνο επειδή η μετατόπιση του αυτοκινήτου μεταξύ διαδοχικών θέσεων αυξάνεται με τον χρόνο. Αυτές οι πληροφορίες υποδηλώνουν ότι το αυτοκίνητο κινείται με *θετική ταχύτητα* και *θετική επιτάχυνση*. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση. Σε όρους δυνάμεων (στις οποίες αναφερθήκαμε νωρίτερα), φανταστείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου ως συνέπεια μιας δύναμης η οποία ασκείται σε αυτό προς την κατεύθυνση της κίνησής του.

Στη Δυναμική Εικόνα Μ2.10γ, διαπιστώνουμε ότι η ταχύτητα του αυτοκινήτου μειώνεται καθώς κινείται προς τα δεξιά επειδή η μετατόπισή του μεταξύ διαδοχικών εικόνων μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου. Αυτό υποδηλώνει ότι το αυτοκίνητο κινείται προς τα δεξιά με αρνητική επιτάχυνση. Το μήκος του βέλους της ταχύτητας μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου και τελικά γίνεται ίσο με μηδέν. Σε αυτό το διάγραμμα κίνησης, βλέπουμε ότι τα βέλη της επιτάχυνσης και της ταχύτητας *δεν* έχουν την ίδια κατεύθυνση. Το αυτοκίνητο κινείται με *θετική ταχύτητα*, αλλά έχει *αρνητική επιτάχυνση*. (Αυτόν τον τύπο κίνησης παρουσιάζει και ένα αυτοκίνητο που ολισθαίνει μέχρι να σταματήσει μόλις ο οδηγός πατήσει απότομα το φρένο.) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Σε όρους δυνάμεων (στις οποίες αναφερθήκαμε νωρίτερα) φανταστείτε ότι η επιβράδυνση του αυτοκινήτου είναι συνέπεια μιας δύναμης η οποία ασκείται σε αυτό με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της κίνησής του.

Κάθε μοβ βέλος επιτάχυνσης στα διαγράμματα (β) και (γ) της Δυναμικής Εικόνας Μ2.10 έχει το ίδιο μήκος. Κατά συνέπεια, τα διαγράμματα αυτά αναπαριστούν την κίνηση ενός *σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση*. Θα περιγράψουμε το παραπάνω σημαντικό μοντέλο ανάλυσης στην επόμενη ενότητα.

***Σύντομο ερώτημα* Μ2.5** Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής; **(α)** Αν ένα αυτοκίνητο κινείται ανατολικά, η επιτάχυνσή του πρέπει να έχει ανατολική κατεύθυνση. **(β)** Αν η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου μειώνεται, πρέπει να έχει αρνητική επιτάχυνση. **(γ)** Ένα σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση δεν μπορεί ποτέ να σταματήσει και να παραμείνει ακίνητο.

Μ2.6 Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση

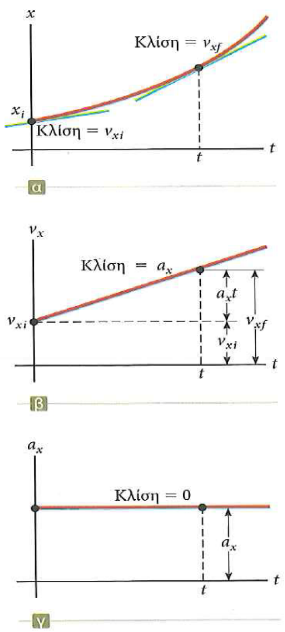
Αν η επιτάχυνση ενός σωματιδίου μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο, η κίνησή του μπορεί να είναι περίπλοκη και, επομένως, δύσκολο να αναλυθεί. Ένας πολύ συνηθισμένος και απλός τύπος μονοδιάστατης κίνησης, όμως, είναι η κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Σε μια τέτοια περίπτωση, η μέση επιτάχυνση $a_{x,\mu έ\sigma\eta}$ σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι αριθμητικά ίση με τη στιγμιαία επιτάχυνση a_x σε κάθε χρονική στιγμή του διαστήματος, και η ταχύτητα μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης. Επειδή αυτή η περίπτωση εμφανίζεται αρκετά συχνά, μπορούμε να την ορίσουμε ως μοντέλο ανάλυσης, και πιο συγκεκριμένα ως **σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.** Στην περιγραφή που ακολουθεί, θα ορίσουμε αρκετές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός σωματιδίου βάσει αυτού του μοντέλου.

Αν αντικαταστήσουμε την $a_{x,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$ με την a_x στην Εξίσωση Μ2.9, θέσουμε $t_i = 0$, και ορίσουμε ως t_f οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή t, βρίσκουμε ότι

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}$$

ή

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad (\text{για σταθερή } a_x) \tag{M2.13}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Μ2.11

Σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση a_x κινείται κατά μήκος του άξονα x: (α) το γράφημα θέσης-χρόνου, (β) το γράφημα ταχύτητας-χρόνου, και (γ) το γράφημα επιτάχυνσης-χρόνου.

Αυτή η πανίσχυρη σχέση μάς επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ταχύτητα ενός σώματος σε *οποιαδήποτε* χρονική στιγμή t αν γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητά του v_{xi} και τη (σταθερή) επιτάχυνσή του a_x. Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για την κίνηση με σταθερή επιτάχυνση φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ2.11β. Το γράφημα είναι μια ευθεία με κλίση ίση με την επιτάχυνση a_x· η (σταθερή) κλίση συμφωνεί με το γεγονός ότι η $a_x = dv_x/dt$ είναι μια σταθερά. Παρατηρήστε ότι η κλίση είναι θετική, κάτι που υποδηλώνει ότι η επιτάχυνση είναι θετική. Αν η επιτάχυνση είναι αρνητική, η κλίση της ευθείας στη Δυναμική Εικόνα Μ2.11β είναι αρνητική. Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή, το γράφημα της επιτάχυνσης-χρόνου (Δυναμική Εικ. Μ2.11γ) είναι μια ευθεία με μηδενική κλίση.

Επειδή στη σταθερά επιταχυνόμενη κίνηση, σύμφωνα με την Εξίσωση Μ2.13, η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο, μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση ταχύτητα σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα ως τον αριθμητικό μέσο της αρχικής ταχύτητας v_{xi} και της τελικής ταχύτητας v_{xf}:

$$v_{x,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad (\text{για σταθερή } a_x) \tag{M2.14}$$

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω σχέση για τη μέση ταχύτητα ισχύει *μόνο* σε περιπτώσεις όπου η επιτάχυνση είναι σταθερή.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τις Εξισώσεις Μ2.1, Μ2.2, και Μ2.14 για να βρούμε τη θέση ενός σώματος ως συνάρτηση του χρόνου. Ενθυμούμενοι ότι το Δx στην Εξίσωση Μ2.2 αναπαριστά το $x_f - x_i$ και αναγνωρίζοντας ότι $\Delta t = t_f - t_i = t - 0 = t$, βρίσκουμε ότι

$$x_f - x_i = v_{x,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}\, t = \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$$

Η θέση ως συνάρτηση της ταχύτητας και του χρόνου για το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad (\text{για σταθερή } a_x) \tag{M2.15}$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την τελική θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t ως συνάρτηση της αρχικής και της τελικής ταχύτητάς του.

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση Μ2.13 στην Εξίσωση Μ2.15, παίρνουμε άλλη μία χρήσιμη σχέση για τη θέση ενός σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση :

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]t$$

Η θέση ως συνάρτηση του χρόνου για το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \quad (\text{για σταθερή } a_x) \tag{M2.16}$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την τελική θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t ως συνάρτηση της αρχικής θέσης, της αρχικής ταχύτητας, και της σταθερής επιτάχυνσης του.

Το γράφημα θέσης-χρόνου για κίνηση με σταθερή (θετική) επιτάχυνση που φαίνεται στη Δυναμική Εικόνα Μ2.11α προκύπτει από την Εξίσωση Μ2.16. Παρατηρήστε ότι η καμπύλη είναι παραβολή. Η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισούται με την αρχική ταχύτητα v_{xi}, ενώ η κλίση της εφαπτομένης σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή t ισούται με την ταχύτητα v_{xf} κατά τη συγκεκριμένη στιγμή.

Τέλος, αντικαθιστώντας την τιμή του t από την Εξ. M2.13 στην Εξ. M2.15, παίρνουμε μια σχέση για την τελική ταχύτητα η οποία δεν περιλαμβάνει τη μεταβλητή του χρόνου:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = x_i + \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad \text{(για σταθερή } a_x\text{)} \qquad \textbf{(M2.17)}$$

Η ταχύτητα ως συνάρτηση της θέσης για το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την τελική ταχύτητα ως συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας, της σταθερής επιτάχυνσης και της θέσης.

Για κίνηση με *μηδενική* επιτάχυνση, βλέπουμε από τις Εξισώσεις M2.13 και M2.16 ότι

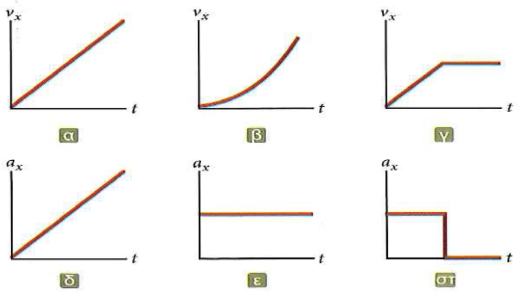
$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned}\right\} \quad \text{όταν } a_x = 0$$

Δηλαδή, όταν η επιτάχυνση ενός σωματιδίου είναι μηδενική, η ταχύτητά του είναι σταθερή και η θέση του μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Όσον αφορά τα μοντέλα, όταν η επιτάχυνση ενός σωματιδίου είναι μηδενική, το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση ανάγεται στο μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα (Ενότητα M2.3).

***Σύντομο ερώτημα* M2.6** Στη Δυναμική Εικόνα M2.12, αντιστοιχίστε κάθε γράφημα v_x-t (επάνω) με το γράφημα a_x-t (κάτω) που περιγράφει καλύτερα την κίνηση.

Οι Εξισώσεις M2.13 έως M2.17 είναι οι **εξισώσεις της κινηματικής** με τις οποίες μπορούν να επιλυθούν όλα τα προβλήματα που περιλαμβάνουν ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή επιτάχυνση σε μία διάσταση. Οι τέσσερις εξισώσεις της κινηματικής που χρησιμοποιούνται πιο συχνά συνοψίζονται στον Πίνακα M2.2. Η επιλογή της εξίσωσης που θα χρησιμοποιήσετε σε μια δεδομένη περίπτωση θα εξαρτηθεί από τις πληροφορίες που γνωρίζετε. Μερικές φορές θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε δύο από τις εξισώσεις για να λύσετε ως προς δύο άγνωστες μεταβλητές. Θα πρέπει να αντιληφθείτε ότι τα μεγέθη που μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της κίνησης είναι η θέση x_f, η ταχύτητα v_{xf}, και ο χρόνος t.

Θα αποκτήσετε αρκετή πείρα στη χρήση αυτών των εξισώσεων λύνοντας ασκήσεις και προβλήματα. Πολλές φορές θα ανακαλύψετε ότι μπορείτε να βρείτε τη λύση ενός προβλήματος χρησιμοποιώντας περισσότερες από μία μεθόδους. Να θυμάστε ότι



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ M2.12

(Σύντομο ερώτημα M2.6) Τα (α), (β), και (γ) είναι γραφήματα v_x-t για σώματα που εκτελούν μονοδιάστατη κίνηση. Οι πιθανές επιταχύνσεις κάθε σώματος συναρτήσει του χρόνου απεικονίζονται (όχι κατ' αντιστοιχία) στα γραφήματα (δ), (ε), και (στ).

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ2.2 *Οι εξισώσεις κινηματικής οι οποίες περιγράφουν την κίνηση ενός σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση*

Αριθμός εξίσωσης	Εξίσωση	Πληροφορίες που παρέχει η εξίσωση
M2.13	$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου
M2.15	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Θέση συναρτήσει της ταχύτητας και του χρόνου
M2.16	$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Θέση συναρτήσει του χρόνου
M2.17	$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Ταχύτητα συναρτήσει της θέσης

Σημείωση: Η κίνηση γίνεται κατά μήκος του άξονα x.

αυτές οι εξισώσεις την κινηματικής *δεν μπορούν* να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις όπου η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή. Χρησιμοποιούνται μόνο όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή.

Παράδειγμα Μ2.7 Προσνήωση σε αεροπλανοφόρο

Μαχητικό προσνηώνεται σε αεροπλανοφόρο με ταχύτητα μέτρου 140 mi/h ($\approx$ 63 m/s).

(Α) Ποια είναι η (υποθετικά σταθερή) επιτάχυνση του αεροσκάφους αν το συρματόσκοινο προσνήωσης στο οποίο γαντζώνεται το ακινητοποιεί μέσα σε 2.0 s;

ΛΥΣΗ

Ίσως έχετε δει σε ταινίες ή τηλεοπτικές σειρές μαχητικά να προσνηώνονται σε ένα αεροπλανοφόρο και να ακινητοποιούνται εκπληκτικά γρήγορα από ένα συρματόσκοινο. Μια προσεκτική ανάγνωση του προβλήματος αποκαλύπτει ότι δίνεται το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του αεροσκάφους (63 m/s)· επίσης, γνωρίζουμε ότι το μέτρο της τελικής του ταχύτητας είναι μηδέν. Επειδή η επιτάχυνση του μαχητικού θεωρείται σταθερή, θα το μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση. Ως κατεύθυνση της κίνησης του μαχητικού ορίζουμε τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Παρατηρήστε ότι δεν δίνονται πληροφορίες για τη μεταβολή της θέσης του μαχητικού καθώς αυτό επιβραδύνει.

Η Εξίσωση Μ2.13 είναι η μοναδική εξίσωση στον Πίνακα Μ2.2 που δεν περιλαμβάνει τη θέση, οπότε μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την επιτάχυνση του μαχητικού, το οποίο μοντελοποιούμε ως σωματίδιο:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} \approx \frac{0 - 63\text{ m/s}}{2.0\text{ s}}$$
$$= \boxed{-32\text{ m/s}^2}$$

(Β) Αν το μαχητικό έρχεται σε επαφή με το κατάστρωμα στη θέση $x_i = 0$, ποια θα είναι η τελική θέση του;

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.15 για βρείτε την τελική θέση:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \tfrac{1}{2}(63\text{ m/s} + 0)(2.0\text{ s}) = \boxed{63\text{ m}}$$

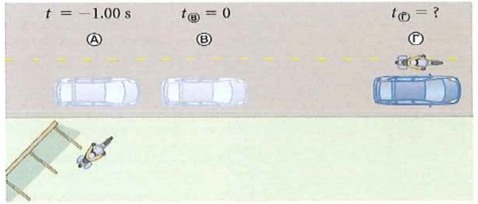
Με δεδομένο το μέγεθος των αεροπλανοφόρων, το μήκος των 63 m φαίνεται λογικό για την ακινητοποίηση του μαχητικού. Η ιδέα της χρήσης συρματόσκοινων για να επιβραδύνονται τα μαχητικά και να προσνηώνονται με ασφάλεια πάνω σε πλοία ξεκίνησε στον Α΄ Παγκόσμιο Πόλεμο. Τα συρματόσκοινα εξακολουθούν να παίζουν ζωτικό ρόλο στη λειτουργία των σύγχρονων αεροπλανοφόρων.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι το μαχητικό «πιάνει» στο κατάστρωμα του αεροπλανοφόρου με ταχύτητα η οποία έχει μέτρο μεγαλύτερο από 63 m/s αλλά ότι το συρματόσκοινο του προσδίδει επιτάχυνση ίδια με αυτή που υπολογίσαμε στο ερώτημα (Α). Πώς θα αλλάξει αυτό την απάντηση στο (Β);

Απάντηση Αν το μαχητικό κινείται γρηγορότερα, θα σταματήσει πιο μακριά από το σημείο αγκίστρωσης, άρα η απάντηση στο (Β) θα είναι μεγαλύτερη. Εξετάζοντας την Εξίσωση Μ2.15 διαπιστώνουμε ότι αν η v_{xi} είναι μεγαλύτερη, τότε και η απόσταση x_f θα είναι μεγαλύτερη.

Παράδειγμα M2.8 Προσοχή στο όριο ταχύτητας!

Αυτοκίνητο που κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας 45.0 m/s προσπερνάει έναν αστυνομικό με μοτοσικλέτα, που είναι κρυμμένος πίσω από μια διαφημιστική πινακίδα. Ένα δευτερόλεπτο αφότου το αυτοκίνητο που τρέχει προσπεράσει την πινακίδα, ο αστυνομικός ξεκινάει από την πινακίδα για να φτάσει το αυτοκίνητο, με σταθερή επιτάχυνση 3.00 m/s^2. Σε πόσο χρόνο θα προσπεράσει το αυτοκίνητο;



Εικόνα M2.13 (Παράδειγμα M2.8) Ένα αυτοκίνητο που κινείται με μεγάλη ταχύτητα προσπερνάει έναν κρυμμένο αστυνομικό της τροχαίας.

ΛΥΣΗ

Η Εικόνα M2.13 θα σας βοηθήσει να ξεκαθαρίσετε την ακολουθία των γεγονότων. Μοντελοποιούμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα, και τον αστυνομικό ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Πρώτα, γράφουμε τις σχέσεις για τη θέση κάθε οχήματος συναρτήσει του χρόνου. Μας διευκολύνει να επιλέξουμε τη θέση της πινακίδας ως αρχή των συντεταγμένων και να ορίσουμε τη χρονική στιγμή $t_{Ⓑ} = 0$ ως τον χρόνο που αρχίζει να κινείται ο αστυνομικός. Τη συγκεκριμένη στιγμή, το αυτοκίνητο έχει ήδη διανύσει απόσταση 45.0 m από την πινακίδα επειδή έχει κινηθεί με σταθερό μέτρο ταχύτητας $v_x = 45.0$ m/s για 1 s. Επομένως, η αρχική θέση του αυτοκινήτου είναι $x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

Χρησιμοποιήστε το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα και εφαρμόστε την Εξίσωση M2.7 για να βρείτε τη θέση του αυτοκινήτου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t:

$$x_{\text{αυτ.}} = x_{Ⓑ} + v_{x\,\text{αυτ.}}t$$

Ένας γρήγορος έλεγχος δείχνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, η σχέση δίνει τη σωστή αρχική θέση του αυτοκινήτου όταν ο αστυνομικός αρχίζει να κινείται: $x_{\text{αυτ.}} = x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

Ο αστυνομικός ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t_{Ⓑ} = 0$ και επιταχύνει με $a_x =$ 3.00 m/s^2 απομακρυνόμενος από την αρχή των συντεταγμένων. Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.16 για να βρείτε τη θέση του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_xt^2$$

$$x_{\text{αστ.}} = 0 + (0)t + \tfrac{1}{2}a_xt^2 = \tfrac{1}{2}a_xt^2$$

Εξισώστε τη θέση του αυτοκινήτου με αυτή του αστυνομικού για να αναπαραστήσετε την προσπέραση του αυτοκινήτου από τον αστυνομικό στη θέση (Γ):

$$x_{\text{αστ.}} = x_{\text{αυτ.}}$$

$$\tfrac{1}{2}a_xt^2 = x_{Ⓑ} + v_{x\,\text{αυτ.}}t$$

Αναδιατάξτε για να πάρετε μια δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\tfrac{1}{2}a_xt^2 - v_{x\,\text{αυτ.}}t - x_{Ⓑ} = 0$$

Λύστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση για να βρείτε τον χρόνο στον οποίο ο αστυνομικός φτάνει το αυτοκίνητο (για βοήθεια σχετικά με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, δείτε το Παράρτημα B.2.):

$$t = \frac{v_{x\,\text{αυτ.}} \pm \sqrt{v_{x\,\text{αυτ.}}^2 + 2a_xx_{Ⓑ}}}{a_x}$$

$$(1)\ t = \frac{v_{x\,\text{αυτ.}}}{a_x} \pm \sqrt{\frac{v_{x\,\text{αυτ.}}^2}{a_x^2} + \frac{2x_{Ⓑ}}{a_x}}$$

Υπολογίστε τη θετική ρίζα επειδή είναι η μοναδική επιλογή για την περίπτωση $t > 0$:

$$t = \frac{45.0\ \text{m/s}}{3.00\ \text{m/s}^2} + \sqrt{\frac{(45.0\ \text{m/s})^2}{(3.00\ \text{m/s}^2)^2} + \frac{2(45.0\ \text{m})}{3.00\ \text{m/s}^2}} = \boxed{31.0\ \text{s}}$$

συνεχίζεται

Μ2.8 *συν.*

Γιατί δεν επιλέξαμε ως χρονική στιγμή στην οποία το αυτοκίνητο προσπερνάει τον αστυνομικό την $t = 0$; Αν κάναμε κάτι τέτοιο, δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση για τον αστυνομικό. Η επιτάχυνσή του θα ήταν μηδέν το πρώτο δευτερόλεπτο και 3.00 m/s^2 για τον υπόλοιπο χρόνο. Ορίζοντας ως $t = 0$ τη στιγμή που ο αστυνομικός αρχίζει να κινείται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του σταθερά επιταχυνόμενου σωματιδίου για να περιγράψουμε την κίνησή του για κάθε θετική τιμή του χρόνου.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν ο αστυνομικός έχει πιο γρήγορη μοτοσικλέτα με μεγαλύτερη επιτάχυνση; Πώς θα αλλάξει αυτό τον χρόνο στον οποίο ο αστυνομικός φτάνει το αυτοκίνητο;

Απάντηση Αν η μοτοσικλέτα έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, λογικά ο αστυνομικός θα φτάσει το αυτοκίνητο γρηγορότερα, δηλαδή σε λιγότερο από 31 s. Αλλά και εξετάζοντας την Εξίσωση (1), διαπιστώνουμε ότι επειδή όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της έχουν την επιτάχυνση a_x στον παρονομαστή, η αύξηση της επιτάχυνσης θα μειώσει τον χρόνο που χρειάζεται ο αστυνομικός για να φτάσει το αυτοκίνητο.

Μ2.7 Ελεύθερη πτώση σωμάτων

Είναι γνωστό ότι, όταν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, όλα τα σώματα που απελευθερώνονται από κάποιο ύψος κοντά στην επιφάνεια της Γης πέφτουν προς αυτή με την ίδια σταθερή επιτάχυνση υπό την επίδραση της γήινης βαρύτητας. Το συμπέρασμα αυτό έγινε αποδεκτό περίπου το 1600. Πριν από τότε, επικρατούσαν οι διδασκαλίες του Αριστοτέλη (384–322 π.Χ.) οι οποίες έλεγαν ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν πιο γρήγορα από τα ελαφρότερα.

Ο εμπνευστής των σύγχρονων ιδεών σχετικά με την πτώση των σωμάτων ήταν ο Γαλιλαίος (1564–1642). Σύμφωνα με την παράδοση, περιέγραψε την ελεύθερη πτώση των σωμάτων ρίχνοντας δύο διαφορετικά βάρη από τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας και παρατηρώντας ότι έφτασαν στο έδαφος περίπου την ίδια στιγμή. Αν και υπάρχουν κάποιες αμφιβολίες ότι πραγματοποίησε το συγκεκριμένο πείραμα, γνωρίζουμε καλά ότι ο Γαλιλαίος πειραματίστηκε πολύ με την κίνηση των σωμάτων σε κεκλιμένα επίπεδα. Στα πειράματά του, κυλούσε σφαίρες σε ελαφρώς κεκλιμένα επίπεδα και μετρούσε τις αποστάσεις που κάλυπταν σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Ο σκοπός για τον οποίο χρησιμοποιούσε κεκλιμένα επίπεδα ήταν για να μειώσει την επιτάχυνση, ώστε να μπορέσει να μετρήσει με ακρίβεια τα χρονικά διαστήματα. Αυξάνοντας σταδιακά την κλίση του επιπέδου, κατάφερε τελικά να καταλήξει σε συμπεράσματα για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, καθώς η ελεύθερη πτώση μιας σφαίρας ισοδυναμεί με την καθοδική κίνηση της σφαίρας σε ένα κατακόρυφο κεκλιμένο επίπεδο.

Ίσως θελήσετε να δοκιμάσετε το παρακάτω πείραμα: Ρίξτε ταυτόχρονα ένα νόμισμα και ένα τσαλακωμένο κομμάτι χαρτί από το ίδιο ύψος. Αν η επίδραση της αντίστασης του αέρα είναι αμελητέα, και τα δύο θα πραγματοποιήσουν την ίδια κίνηση και θα φτάσουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Η εξιδανικευμένη περίπτωση αυτής της κίνησης, στην οποία ο αέρας δεν έχει αντίσταση, ονομάζεται *ελεύθερη πτώση*. Αν το ίδιο πείραμα μπορούσε να διεξαχθεί στο κενό, όπου η αντίσταση του αέρα είναι πραγματικά αμελητέα, το χαρτί και το νόμισμα θα έπεφταν με την ίδια επιτάχυνση ακόμα και αν το χαρτί δεν ήταν τσαλακωμένο. Στις 2 Αυγούστου 1971, ο αστροναύτης David Scott πραγματοποίησε ένα τέτοιο πείραμα στη Σελήνη. Έριξε ταυτόχρονα ένα σφυρί και ένα πούπουλο, και τα δύο σώματα έπεσαν μαζί στη σεληνιακή επιφάνεια. Αυτό το απλό πείραμα θα προκαλούσε σίγουρα ικανοποίηση στον Γαλιλαίο!

Αποφυγή παγίδων Μ2.6

***g* και g**

Προσπαθήστε να μην μπερδεύετε το πλάγιο σύμβολο *g* για την επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης με το απλό σύμβολο g που χρησιμοποιείται για τη μονάδα του γραμμαρίου.

Αποφυγή παγίδων Μ2.7

Το πρόσημο του *g*

Να θυμάστε ότι το g είναι *θετικός αριθμός*. Μη βιαστείτε να θέσετε στο g τιμή -9.80 m/s^2. Η βαρυτική επιτάχυνση, η οποία έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω, υποδεικνύεται ρητά ορίζοντας την επιτάχυνση ως $a_y = -g$.

Αποφυγή παγίδων Μ2.8

Επιτάχυνση στο ψηλότερο σημείο της κίνησης

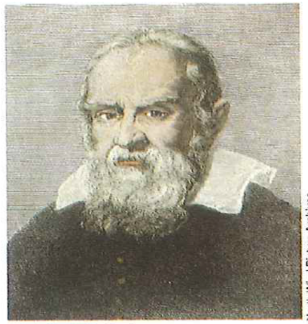
Μια συνηθισμένη παρανόηση είναι ότι η επιτάχυνση ενός βλήματος στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του είναι ίση με μηδέν. Παρότι η ταχύτητα στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς ενός σώματος που εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω μηδενίζεται στιγμιαία, *η βαρύτητα εξακολουθεί να επιταχύνει το σώμα* στο συγκεκριμένο σημείο. Αν η ταχύτητα και η επιτάχυνση ήταν και οι δύο ίσες με μηδέν στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του, τότε το βλήμα θα παρέμενε εκεί ακίνητο.

Όταν χρησιμοποιούμε τη φράση *ελεύθερη πτώση σώματος*, δεν αναφερόμαστε απαραίτητα σε κάποιο σώμα που ξεκινάει την πτώση του από κατάσταση ηρεμίας. Ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση είναι οποιοδήποτε σώμα το οποίο κινείται ελεύθερα μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας, ανεξάρτητα από την αρχική κίνησή του. Τα σώματα που ρίχνουμε προς τα πάνω ή προς τα κάτω, καθώς και εκείνα που ξεκινάνε από κατάσταση ηρεμίας, από τη στιγμή που αφεθούν, εκτελούν όλα ελεύθερη πτώση. Κάθε τέτοιο σώμα υφίσταται μια επιτάχυνση με κατεύθυνση *κατακόρυφα προς τα κάτω*, ανεξάρτητα από την αρχική κίνησή του.

Θα συμβολίζουμε το μέτρο της *επιτάχυνσης ελεύθερης πτώσης* (δηλαδή, την επιτάχυνση της βαρύτητας) με το γράμμα g. Η τιμή του g μειώνεται όσο αυξάνεται το ύψος από την επιφάνεια της Γης. Επιπλέον, το g παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις με τη μεταβολή του γεωγραφικού πλάτους. Στην επιφάνεια της Γης, η τιμή του g είναι περίπου ίση με 9.80 m/s^2. Στους υπολογισμούς μας, θα χρησιμοποιούμε αυτή την τιμή για το g, εκτός αν ορίζεται διαφορετικά. Για γρήγορες εκτιμήσεις, μπορείτε να χρησιμοποιείτε την τιμή $g = 10$ m/s^2.

Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα και υποθέσουμε ότι η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης δεν μεταβάλλεται με το ύψος για μικρές κατακόρυφες αποστάσεις, τότε η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα είναι ισοδύναμη με την κίνηση ενός σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση σε μία διάσταση. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της Ενότητας M2.6 για το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση. Η μόνη τροποποίηση που πρέπει να κάνουμε στις εξισώσεις για τα σώματα σε ελεύθερη πτώση είναι να τις προσαρμόσουμε κατάλληλα αφού παρατηρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται στην κατακόρυφη διεύθυνση (στον άξονα y) και όχι στην οριζόντια διεύθυνση (στον άξονα x), και ότι η επιτάχυνση έχει μέτρο 9.80 m/s^2 με κατεύθυνση προς τα κάτω. Έτσι, επιλέγουμε $a_y = -g = -9.80$ m/s^2, όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω. Στο Κεφάλαιο M13, θα δούμε πώς αντιμετωπίζονται οι μεταβολές του g με το ύψος.

Σύντομο ερώτημα M2.7 Θεωρήστε τις ακόλουθες επιλογές: (α) αυξάνεται, (β) μειώνεται, (γ) αυξάνεται και μετά μειώνεται, (δ) μειώνεται και μετά αυξάνεται, (ε) παραμένει ίδια. Επιλέξτε μία από τις παραπάνω απαντήσεις για να περιγράψετε τι συμβαίνει **(i)** στην επιτάχυνση και **(ii)** στην ταχύτητα μιας μπάλας αφού τη ρίξετε κατακόρυφα προς τα πάνω.



North Wind Picture Archives

Γαλιλαίος
Ιταλός φυσικός και αστρονόμος (1564–1642)
Ο Γαλιλαίος διατύπωσε τους νόμους που διέπουν την κίνηση σωμάτων σε ελεύθερη πτώση και έκανε πλήθος άλλες σημαντικές ανακαλύψεις στη φυσική και στην αστρονομία. Υπερασπίστηκε δημόσια τον ισχυρισμό του Νικόλαου Κοπέρνικου ότι ο Ήλιος βρίσκεται στο κέντρο του ηλιακού συστήματος (το ηλιοκεντρικό σύστημα). Δημοσίευσε το βιβλίο με τίτλο *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (Διάλογος για δύο νέα παγκόσμια συστήματα) για να υποστηρίξει το μοντέλο του Κοπέρνικου, μια άποψη που η Καθολική Εκκλησία καταδίκασε ως αιρετική.

Εννοιολογικό Παράδειγμα M2.9 Οι τολμηροί αλεξιπτωτιστές

Αλεξιπτωτιστής πηδάει από ένα ελικόπτερο. Λίγα δευτερόλεπτα αργότερα, πηδάει ένας ακόμα αλεξιπτωτιστής· και οι δύο πέφτουν ακολουθώντας την ίδια κατακόρυφη διαδρομή. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα και θεωρήστε ότι και οι δύο πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση. Παραμένει η διαφορά των μέτρων των ταχυτήτων τους ίδια καθ' όλη τη διάρκεια της πτώσης; Παραμένει η κατακόρυφη απόστασή τους ίδια καθ' όλη τη διάρκεια της πτώσης;

ΛΥΣΗ

Σε κάθε στιγμή, τα μέτρα των ταχυτήτων τους διαφέρουν επειδή ο ένας από αυτούς πήδηξε νωρίτερα. Σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt μετά τη στιγμή αυτή, όμως, τα μέτρα των ταχυτήτων των αλεξιπτωτιστών αυξάνονται ισόποσα επειδή έχουν την ίδια επιτάχυνση. Άρα, η διαφορά στα μέτρα των ταχυτήτων τους τους παραμένει ίδια καθ' όλη τη διάρκεια της πτώσης.

Ο πρώτος αλεξιπτωτιστής έχει σε κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μεγαλύτερου μέτρου από τον δεύτερο. Άρα, σε δεδομένο χρονικό διάστημα, ο πρώτος καλύπτει μεγαλύτερη απόσταση από τον δεύτερο. Κατά συνέπεια, η απόστασή τους αυξάνεται.

Παράδειγμα **Μ2.10** Καθόλου άσχημη βολή για πρωτάρη!

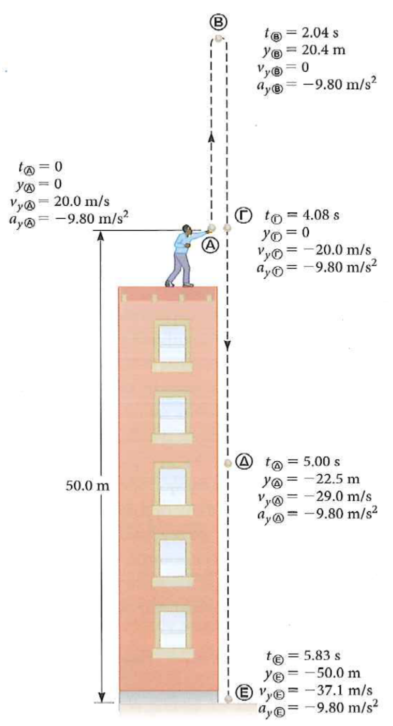
Κάποιος ρίχνει μια πέτρα από την ταράτσα ενός κτιρίου με αρχική ταχύτητα 20.0 m/s κατακόρυφα προς τα πάνω. Η πέτρα φτάνει σε ύψος 50.0 m πάνω από το έδαφος και πέφτοντας περνάει ξυστά από το άκρο της ταράτσας (Εικόνα Μ2.14).

(Α) Ορίστε ως $t_{Ⓐ} = 0$ τη χρονική στιγμή που η πέτρα φεύγει από το χέρι του ανθρώπου στη θέση Ⓐ, και προσδιορίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος της.

ΛΥΣΗ

Πιθανώς έχετε ρίξει αντικείμενα προς τα κάτω ή τα προς τα πάνω για να τα δείτε να πέφτουν, οπότε το πρόβλημα αυτό πρέπει να σας είναι οικείο. Για να προσομοιώσετε μια τέτοια περίπτωση, ρίξτε ένα μικρό αντικείμενο προς τα πάνω και προσέξτε πόσο χρόνο χρειάζεται για να πέσει στο έδαφος. Τώρα φανταστείτε ότι ρίχνετε το αντικείμενο κατακόρυφα προς τα πάνω από την ταράτσα ενός κτιρίου. Επειδή η πέτρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, μοντελοποιείται ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας.

Σημειώστε ότι η αρχική ταχύτητα είναι θετική επειδή η πέτρα εκτοξεύεται προς τα πάνω. Η ταχύτητα της πέτρας θα αλλάξει πρόσημο μόλις φτάσει στο ψηλότερο σημείο της, αλλά η επιτάχυνσή της θα έχει *πάντα* κατεύθυνση προς τα κάτω.



Εικόνα Μ2.14 (Παράδειγμα Μ2.10) Η μεταβολή της θέσης και της ταχύτητας με τον χρόνο για μια πέτρα η οποία αρχικά εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v_{yi} = 20.0$ m/s και εκτελεί ελεύθερη πτώση. Πολλά από τα μεγέθη που αναγράφονται σε κάποια σημεία της τροχιάς της πέτρας υπολογίζονται στο παράδειγμα. Μπορείτε να επαληθεύσετε τις τιμές που δεν υπολογίζονται;

Επιλέξτε ως αρχικό σημείο τη θέση που έχει η πέτρα αμέσως μετά την εκτόξευσή της και ως τελικό σημείο το ψηλότερο σημείο της τροχιάς της.

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.13 για να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος της:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \rightarrow t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$t = t_{Ⓑ} = \frac{0 - 20.0\ \mathrm{m/s}}{-9.80\ \mathrm{m/s^2}} = \boxed{2.04\ \mathrm{s}}$$

(Β) Βρείτε το μέγιστο ύψος της πέτρας.

ΛΥΣΗ

Όπως στο (Α), επιλέξτε ως αρχικό και τελικό σημείο την αρχή και το τέλος της κατακόρυφης τροχιάς, αντίστοιχα.

Θέστε $y_{Ⓐ} = 0$ και αντικαταστήστε τον χρόνο από το (Α) στην Εξίσωση Μ2.16 για να βρείτε το μέγιστο ύψος:

$$y_{\max} = y_{Ⓑ} = y_{Ⓐ} + v_{xⒶ} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_{Ⓑ} = 0 + (20.0\ \mathrm{m/s})(2.04\ \mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.04\ \mathrm{s})^2 = \boxed{20.4\ \mathrm{m}}$$

M2.10 συν.

(Γ) Βρείτε την ταχύτητα που έχει η πέτρα τη στιγμή που επιστρέφει στο ύψος από το οποίο εκτοξεύτηκε.

ΛΥΣΗ

Επιλέξτε ως αρχικό σημείο τη θέση εκτόξευσης της σφαίρας και ως τελικό σημείο την ίδια θέση από την οποία περνάει κατά την κάθοδό της.

Αντικαταστήστε με τις γνωστές τιμές στην Εξίσωση M2.17:

$$v_{y\textcircled{Γ}}{}^2 = v_{y\textcircled{A}}{}^2 + 2a_y(y_{\textcircled{Γ}} - y_{\textcircled{A}})$$

$$v_{y\textcircled{Γ}}{}^2 = (20.0\text{ m/s})^2 + 2(-9.80\text{ m/s}^2)(0 - 0) = 400\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{y\textcircled{Γ}} = \boxed{-20.0\text{ m/s}}$$

Κατά τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας, μπορούμε να επιλέξουμε είτε τη θετική είτε την αρνητική ρίζα. Επιλέγουμε την αρνητική επειδή ξέρουμε ότι στο σημείο Ⓖ η πέτρα κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω. Η ταχύτητα της πέτρας όταν επιστρέφει στο αρχικό της ύψος έχει το ίδιο μέτρο με την αρχική ταχύτητα αλλά αντίθετη κατεύθυνση.

(Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση που έχει η πέτρα τη χρονική στιγμή $t = 5.00$ s.

ΛΥΣΗ

Επιλέξτε ως αρχικό σημείο τη θέση εκτόξευσης της σφαίρας και ως τελικό σημείο τη θέση που βρίσκεται 5.00 s αργότερα.

Υπολογίστε την ταχύτητα στη θέση $\textcircled{Δ}$ από την Εξίσωση M2.13:

$$v_{y\textcircled{Δ}} = v_{y\textcircled{A}} + a_y t = 20.0\text{ m/s} + (-9.80\text{ m/s}^2)(5.00\text{ s}) = \boxed{-29.0\text{ m/s}}$$

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.16 για να βρείτε τη θέση της πέτρας τη χρονική στιγμή $t_{\textcircled{Δ}} = 5.00$ s:

$$y_{\textcircled{Δ}} = y_{\textcircled{A}} + v_{y\textcircled{A}}\, t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$= 0 + (20.0\text{ m/s})(5.00\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\text{ m/s}^2)(5.00\text{ s})^2$$

$$= \boxed{-22.5\text{ m}}$$

Η επιλογή της χρονικής στιγμής $t = 0$ είναι αυθαίρετη. Για παράδειγμα, επιλέξτε ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή στην οποία η πέτρα βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της κίνησής της. Στη συνέχεια, λύστε πάλι τα μέρη (Γ) και (Δ) του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη νέα αρχική χρονική στιγμή και παρατηρήστε ότι οι απαντήσεις σας είναι ίδιες με προηγουμένως.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν η ρίψη γίνει από ύψος 30.0 m πάνω από το έδαφος αντί για 50.0 m; Ποιες απαντήσεις στα ερωτήματα (Α) έως (Δ) θα αλλάξουν;

Απάντηση Καμία από τις απαντήσεις δεν θα αλλάξει. Όλη η κίνηση πραγματοποιείται στον αέρα μέσα στα πρώτα 5.00 s. (Σημειώστε ότι ακόμα και για μια ρίψη από τα 30.0 m, η πέτρα βρίσκεται πάνω από το έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 5.00$ s.) Επομένως, το ύψος της ρίψης δεν έχει καμία σημασία. Από μαθηματικής άποψης, αν εξετάσετε ξανά τους υπολογισμούς, θα δείτε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε το ύψος της ρίψης σε καμία εξίσωση.

M2.8 Απόδειξη των εξισώσεων κίνησης μέσω του μαθηματικού λογισμού

Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι οι αναγνώστες είναι εξοικειωμένοι με τις τεχνικές του ολοκληρωτικού λογισμού. Αν δεν έχετε γνώσεις ολοκληρωμάτων, παραλείψτε την ενότητα ή μελετήστε την αφού εξοικειωθείτε με τα ολοκληρώματα.

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα μπορεί να υπολογιστεί αν είναι γνωστή η θέση του ως συνάρτηση του χρόνου. Με μαθηματικούς όρους, η ταχύτητα ισούται με την παράγωγο της θέσης ως προς τον χρόνο. Επίσης, μπορεί να υπολογιστεί η θέση ενός σωματιδίου αν είναι γνωστή η ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Στον λογισμό, η διαδικασία που χρησιμοποιείται για την εκτέλεση αυτής της εργασίας αναφέρεται είτε ως *ολοκλήρωση* είτε ως εύρεση της *αντιπαραγώνου*. Από γραφικής άποψης, αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση του εμβαδού κάτω από μια καμπύλη.

Ας υποθέσουμε ότι το γράφημα v_x-t για ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x είναι αυτό που φαίνεται στην Εικόνα Μ2.15. Θα χωρίσουμε το χρονικό διάστημα $t_f - t_i$ σε πολλά μικρά διαστήματα, καθένα με διάρκεια Δt_n. Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας, βλέπουμε ότι η μετατόπιση του σωματιδίου σε οποιοδήποτε μικρό διάστημα, όπως το σκιασμένο διάστημα στην Εικόνα Μ2.15, δίνεται από τη σχέση $\Delta x_n = v_{xn,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}\, \Delta t_n$, όπου η $v_{xn,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$ είναι η μέση ταχύτητα στο συγκεκριμένο διάστημα. Άρα, η μετατόπιση σε αυτό το μικρό διάστημα είναι απλώς το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου στην Εικόνα Μ2.15. Η συνολική μετατόπιση για το διάστημα $t_f - t_i$ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων μεταξύ t_i και t_f:

$$\Delta x = \sum_n v_{xn,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}\, \Delta t_n$$

όπου το σύμβολο Σ συμβολίζει το άθροισμα όλων των όρων, δηλαδή για όλες τις τιμές του n. Τώρα, καθώς τα διαστήματα γίνονται ολοένα και πιο μικρά, το πλήθος των όρων του αθροίσματος αυξάνεται και το άθροισμα προσεγγίζει μια τιμή ίση με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη στο γράφημα ταχύτητας-χρόνου. Επομένως, στο όριο $n \to \infty$, ή $\Delta t_n \to 0$, η μετατόπιση είναι

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn}\, \Delta t_n \qquad \textbf{(M2.18)}$$

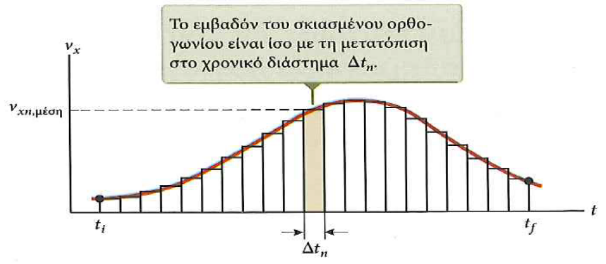
Παρατηρήστε ότι, στο άθροισμα έχουμε αντικαταστήσει τη μέση ταχύτητα $v_{xn,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$ με τη στιγμιαία ταχύτητα v_{xn} επειδή η βηματική ταχύτητα $v_{xn,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$ προσεγγίζει μια συνεχή συνάρτηση v_{xn} καθώς τα χρονικά διαστήματα μειώνονται στο μηδέν. Όπως μπορείτε να δείτε από την Εικόνα Μ2.15, η προσέγγιση αυτή είναι έγκυρη στο όριο πολύ μικρών διαστημάτων. Άρα, αν ξέρουμε το γράφημα v_x-t για μια ευθύγραμμη κίνηση, μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μετρώντας το εμβαδόν κάτω από το τμήμα της καμπύλης που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Το όριο του αθροίσματος που φαίνεται στην Εξίσωση Μ2.18 ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** και γράφεται

Ορισμένο ολοκλήρωμα ▶

$$\lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn}\, \Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\, dt \qquad \textbf{(M2.19)}$$

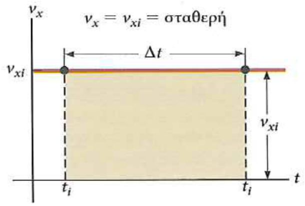
όπου το $v_x(t)$ συμβολίζει την ταχύτητα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Αν η ρητή συναρτησιακή μορφή της $v_x(t)$ είναι γνωστή και δίνονται τα όρια, το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί. Μερικές φορές το γράφημα v_x-t για ένα κινούμενο σωματίδιο έχει σχήμα πολύ πιο απλό από αυτό που φαίνεται στην Εικόνα Μ2.15. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα v_{xi}. Σε αυτή την περί-



Εικόνα Μ2.15 Γράφημα ταχύτητας-χρόνου για σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x. Το συνολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι ίσο με τη συνολική μετατόπιση του σωματιδίου.

πτωση, το γράφημα v_x-t είναι μια οριζόντια ευθεία όπως αυτή της Εικόνας M2.16 και η μετατόπιση του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα Δt είναι ίση με το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου:

$$\Delta x = v_{xi}\,\Delta t \text{ (όταν } v_x = v_{xi} = \text{σταθερά)}$$



Εικόνα M2.16 Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα v_{xi}. Η μετατόπιση του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα $t_f - t_i$ ισούται με το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου.

Εξισώσεις κινηματικής

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις εξισώσεις ορισμού για την επιτάχυνση και την ταχύτητα για να βρούμε δύο από τις εξισώσεις κινηματικής, τις Εξισώσεις M2.13 και M2.16.

Η εξίσωση ορισμού για την επιτάχυνση (Εξ. M2.10),

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

μπορεί να γραφτεί ως $dv_x = a_x\,dt$ ή, αν χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα (ή αντιπαραγώγους), ως

$$v_{xf} - v_{xi} = \int_0^t a_x\,dt$$

Για την ειδική περίπτωση όπου η επιτάχυνση είναι σταθερή, μπορούμε να βγάλουμε την επιτάχυνση a_x έξω από το ολοκλήρωμα και να πάρουμε

$$v_{xf} - v_{xi} = a_x \int_0^t dt = a_x(t - 0) = a_x t \qquad \text{(M2.20)}$$

δηλαδή την Εξίσωση M2.13.

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, την εξίσωση ορισμού της ταχύτητας (Εξ. M2.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Μπορούμε να τη γράψουμε ως $dx = v_x\,dt$ ή με τη μορφή ολοκληρώματος ως

$$x_f - x_i = \int_0^t v_x\,dt$$

Επειδή ισχύει $v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x t$, η σχέση αυτή γίνεται

$$x_f - x_i = \int_0^t (v_{xi} + a_x t)\,dt = \int_0^t v_{xi}\,dt + a_x\int_0^t t\,dt = v_{xi}(t-0) + a_x\left(\frac{t^2}{2} - 0\right)$$

$$x_f - x_i = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

που είναι η Εξίσωση M2.16.

Εκτός από αυτά που ενδεχομένως περιμένετε να μάθετε για τις έννοιες της φυσικής, μια πολύτιμη δεξιότητα που μπορείτε να αποκτήσετε κατά τη μελέτη της φυσικής είναι η ικανότητα να λύνετε περίπλοκα προβλήματα. Ο τρόπος με τον οποίο οι φυσικοί προσεγγίζουν περίπλοκα προβλήματα και τα χωρίζουν σε μικρότερα και διαχειρίσιμα είναι εξαιρετικά χρήσιμος. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε βήμα-βήμα μια γενική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων. Για να σας βοηθήσουμε να θυμάστε τα βήματα, θα τα ονομάσουμε: *Μοντελοποίηση, Κατηγοριοποίηση, Ανάλυση,* και *Ολοκλήρωση.*