

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
05 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 4 ΩΡΕΣ

1. Έστω

$$f(x) = x^{\frac{36}{41}}.$$

(α) Εξετάστε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

(β) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ποια είναι η τιμή της $f'(0)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.

2. Έστω

$$h(x) = |x + 3|.$$

(α) Εξετάστε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, αν η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = -3$.

(β) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = -3$, ποια είναι η τιμή της $h'(-3)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = -3$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.

3. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + \sin(bx), & x < 0 \\ 3x^3 + 2bx + c, & x \geq 0 \end{cases}.$$

(α) Για ποιες τιμές των a, b, c είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0;

(β) Για ποιες τιμές των a, b, c είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0;

Υπόδειξη: Στο ερώτημα (β) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{R}.$$

4. Έστω

$$g(x) = x^4.$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ότι

$$g'(x) = 4x^3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

5. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = 3x - \cot(2x)$$

στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x = \frac{\pi}{8}$.

6. Έστω

$$h(t) = \frac{\sqrt[3]{(t^2 - 1)^2}}{2t^2 - 18}.$$

(α) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_h της $h(t)$.

(β) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $h'(t)$.

(γ) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{h'}$ της $h'(t)$.

7. Έστω

$$f(x) = \sin\left(\tan^4\left(\frac{2}{x-2}\right)\right).$$

Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $f'(x)$.

8. Έστω

$$g(x) = \cos x - \sin x.$$

Υπολογίστε τις

$$g^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ