

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΠΕΜΠΤΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
16 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 30 ΩΡΕΣ

1. (α) Έστω

$$f(x) = 2x - \log_3 x.$$

(i) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(ii) Βρείτε τα x στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(β) Έστω

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4x.$$

(i) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(ii) Βρείτε τα x στα οποία η $g(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 19, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 19 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 21.

2. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της

$$g(x) = \log_5(1 - x^2)$$

στο $x = 0$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 19, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 19 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 21.

3. Έστω

$$y = \frac{\sqrt[7]{(x+3)^6(x-4)^{12}}}{\sqrt[9]{(x-7)^8}}.$$

Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ χρησιμοποιώντας λογαριθμική παραγωγή.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 19, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 19 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 21.

4. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sqrt[7]{\log_6^3 x}}{x} dx .$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^5}{(x^6 + 4) \ln^3(x^6 + 4)} dx .$$

(γ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\csc x}{\ln^2(\csc x + \cot x)} dx .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 19, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 19 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 21.

5. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sin x \cos x}{8 - \sin^2 x} dx .$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - x} .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 19, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 19 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 21.

6. (α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_4 x}{x^2 - 5} .$$

(β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x^2) \right) .$$

(γ) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 19, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 19 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 21.

7. (α) Έστω

$$f(x) = 3x - 4^x.$$

(i) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(ii) Βρείτε τα x στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(β) Έστω

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - x^2.$$

(i) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(ii) Βρείτε τα x στα οποία η $g(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 20, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 22.

8. (α) Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ αν

$$y = (x^2 + 1)^{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(β) Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ αν

$$y = (\ln x)^{\tan x}, \quad x > 1.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 20, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 22.

9. (α) Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_2^{e^2} \frac{4^{\ln x}}{x} dx.$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (7^{\sin x}) \cos x dx.$$

(γ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 4} dx.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 20, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 22.

10. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x,$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x}{\ln x}.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 20, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 22.

11. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int 2^x \cot(2^x) dx.$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της συνεφαπτομένης πρέπει να γίνει αναλυτικά.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 20, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 22.

12. Ποιος από τους αριθμούς

$$\left(\sqrt{2}\right)^e \text{ και } e^{\sqrt{2}}$$

είναι μεγαλύτερος;

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 20, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 22.

13. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\cos x},$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (5^x + 2x)^{\frac{1}{7x}},$$

$$(γ) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 5x)^{\frac{2}{5 \ln x}}.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 21, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 21 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 23.

14. (α) Απλοποιήστε την έκφραση

$$\csc(\cot^{-1}(3x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(β) Απλοποιήστε την έκφραση

$$\tan(\cos^{-1}x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 21, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 24.

15. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sin^{-1}(2x) \sqrt{1-4x^2}}.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 22, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 25.

16. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(\tan^{-1}(5x))^3}{1+25x^2} dx.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 22, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 25.

17. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6}{(x-2) \sqrt{1-\ln^2(x-2)}} dx.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 22, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 25.

18. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 18}.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 22, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 25.

19. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 10x - 9}} .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 22, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 25.

20. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{(x + 3)\sqrt{x^2 + 6x + 5}} .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 22, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 20 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 25.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ