

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΤΕΤΑΡΤΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
19 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 30 ΩΡΕΣ

1. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(2x^5 + \frac{3}{x^4} - 5\sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{7\sqrt[9]{x^7}} \right) dx .$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(3 \sin \left(\frac{2y}{5} \right) - \frac{2}{7} \cos \left(\frac{\sqrt{5}y}{6} \right) \right) dy .$$

(γ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(5 \sec z \tan z - \frac{3 \csc^2 z}{\sqrt[5]{7}} + \pi^3 \sec^2 z + \frac{7 \csc z \cot z}{8} \right) dz .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 14, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 14 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 15.

2. Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης της οποίας η κλίση είναι

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - \frac{3}{x^4} - \frac{8\sqrt[5]{x^3}}{3}$$

και διέρχεται από το σημείο (1, 2).

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 14, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 14 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 15.

3. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sin^2 \theta \, d\theta .$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \cos^2 y \, dy .$$

(γ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx .$$

(δ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (\cos^2 z - \sin^2 z) \, dz .$$

(ε) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \tan^2 \phi \, d\phi .$$

(στ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \cot^2 x \, dx .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 14, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 14 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 15.

4. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (y^6 - 2y^2 + 8y - 11)^7 (3y^5 - 2y + 4) dy.$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sqrt[7]{z} - z}{\left(7\sqrt[7]{z^8} - 4z^2 + 4\right)^4} dz.$$

(γ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\left(2\sqrt[5]{x^4} - 9\right)^{10}}{\sqrt[5]{x}} dx.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 14, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 14 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 15.

5. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt[7]{\cos^3\left(\frac{3x-5}{11}\right)} \sin\left(\frac{3x-5}{11}\right) dx.$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \tan^3\left(\frac{4x}{5}\right) \csc^2\left(\frac{4x}{5}\right) dx.$$

(γ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sec^5(-2z-7) \tan(-2z-7) dz.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 14, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 14 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 15.

6. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt[6]{\sin^{11}(4x^5-7)} \cos(4x^5-7) x^4 dx.$$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \tan(\sin(\sec y)) \tan y \cos(\sec y) \sec^2(\sin(\sec y)) \sec y dy.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 14, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 14 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 15.

7. (α) Εκτιμήστε, χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα, το εμβαδόν A του χωρίου μεταξύ της καμπύλης

$$y = x^3 + 1$$

και του άξονα x από $x = 0$ ως $x = 8$.

(i) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[0, 8].$$

(ii) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 4], [4, 8].$$

(iii) Πάρτε 4 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 2], [2, 4], [4, 6], [6, 8].$$

(iv) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα

$$\left[0, \frac{8}{n}\right], \left[\frac{8}{n}, 2 \cdot \frac{8}{n}\right], \left[2 \cdot \frac{8}{n}, 3 \cdot \frac{8}{n}\right], \dots, \left[(n-2) \cdot \frac{8}{n}, (n-1) \cdot \frac{8}{n}\right], \left[(n-1) \cdot \frac{8}{n}, 8\right],$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$1^3 + 2^3 + \dots + (m-1)^3 + m^3 = \sum_{l=1}^m l^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

(v) Τι συμβαίνει στο (iv) όταν $n \rightarrow \infty$;

(β) Εκτιμήστε, χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα, το εμβαδόν A του χωρίου μεταξύ της καμπύλης

$$y = x^2 + 2$$

και του άξονα x από $x = 0$ ως $x = 16$.

(i) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[0, 16].$$

(ii) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 8], [8, 16].$$

(iii) Πάρτε 4 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 4], [4, 8], [8, 12], [12, 16].$$

(iv) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα

$$\left[0, \frac{16}{n}\right], \left[\frac{16}{n}, 2 \cdot \frac{16}{n}\right], \left[2 \cdot \frac{16}{n}, 3 \cdot \frac{16}{n}\right], \dots, \left[(n-2) \cdot \frac{16}{n}, (n-1) \cdot \frac{16}{n}\right], \left[(n-1) \cdot \frac{16}{n}, 16\right],$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$1^2 + 2^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 = \sum_{l=1}^m l^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

(v) Τι συμβαίνει στο (iv) όταν $n \rightarrow \infty$;

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 15, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 15 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 16.

8. (α) Εκτιμήστε χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα τη μέση τιμή $av(f)$ της

$$f(x) = x^2 - 4$$

στο διάστημα $[0, 4]$.

(i) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[0, 4].$$

(ii) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 2], [2, 8].$$

(iii) Πάρτε 4 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4].$$

(iv) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα

$$\left[0, \frac{4}{n}\right], \left[\frac{4}{n}, 2 \cdot \frac{4}{n}\right], \left[2 \cdot \frac{4}{n}, 3 \cdot \frac{4}{n}\right], \dots, \left[(n-2) \cdot \frac{4}{n}, (n-1) \cdot \frac{4}{n}\right], \left[(n-1) \cdot \frac{4}{n}, 4\right],$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$1^2 + 2^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 = \sum_{l=1}^m l^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

(v) Τι συμβαίνει στο (iv) όταν $n \rightarrow \infty$;

(β) Εκτιμήστε χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα τη μέση τιμή $av(f)$ της

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

στο διάστημα $[0, 12]$.

(i) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[0, 12].$$

(ii) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 6], [6, 12].$$

(iii) Πάρτε 3 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 4], [4, 8], [8, 12].$$

(iv) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα

$$\left[0, \frac{12}{n}\right], \left[\frac{12}{n}, 2 \cdot \frac{12}{n}\right], \left[2 \cdot \frac{12}{n}, 3 \cdot \frac{12}{n}\right], \dots, \left[(n-2) \cdot \frac{12}{n}, (n-1) \cdot \frac{12}{n}\right], \left[(n-1) \cdot \frac{12}{n}, 12\right],$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$1^3 + 2^3 + \dots + (m-1)^3 + m^3 = \sum_{l=1}^m l^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

(v) Τι συμβαίνει στο (iv) όταν $n \rightarrow \infty$;

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 15, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 15 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 16.

9. Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[-2, 11]$ με

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = 5, \quad \int_4^{11} f(x) dx = 4, \quad \int_2^4 f(x) dx = -6.$$

Υπολογίστε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα

(α) $\int_{-2}^{11} f(x) dx,$

(β) $\int_{-2}^2 f(x) dx,$

(γ) $\int_4^{-2} f(x) dx,$

(δ) $\int_{11}^2 f(x) dx.$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 15, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 15 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 17.

10. Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[-9, 7]$ με

$$\int_{-9}^7 f(x) dx = 2, \quad \int_{-9}^7 g(x) dx = -4.$$

Υπολογίστε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα

(α) $\int_{-9}^7 (-5f)(x) dx,$

(β) $\int_{-9}^7 (f + g)(x) dx,$

(γ) $\int_{-9}^7 (f - g)(x) dx,$

(δ) $\int_{-9}^7 \left(2f + \frac{2}{3}g\right)(x) dx.$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 15, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 15 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 17.

11. (α) Βρείτε ένα πάνω και ένα κάτω φράγμα για το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{5 - x^2}.$$

(β) Βρείτε ένα πάνω και ένα κάτω φράγμα για το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-7}^8 \cos(37x^8 - 56x^5 + 11) dx.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 15, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 15 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 17.

12. Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 15, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 15 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 17.

13. (α) Υπολογίστε την παράγωγο

$$\frac{d}{dx} \left(\int_2^x \cos(7t^2 - 19t + 11) dt \right).$$

(β) Υπολογίστε την παράγωγο

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^7 \frac{12t^3}{8 - t^2} dt \right).$$

(γ) Υπολογίστε την παράγωγο

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^{x^2} \sin(6\sqrt[3]{t} - 2t^3) dt \right).$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 16, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 16 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 18.

14. Βρείτε την συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει ότι

$$\int_0^x g(t) dt = 2x \sin(\pi - x)$$

για κάθε $x \geq 0$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 16, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 16 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 18.

15. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = \csc x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 16, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 16 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 18.

16. (α) Υπολογίστε τη μέση τιμή της

$$f(x) = 3x^3 - 5$$

στο $[-2, 5]$.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή της

$$f(x) = \sin(4x)$$

στο $[-3\pi, \pi]$.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της

$$f(x) = |x^3|$$

στο $[-3, 2]$.

(δ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της

$$f(x) = |\sin x|$$

στο $[-\pi, 2\pi]$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 16, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 16 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 18.

17. (α) Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x (\cos^2 x - 3 \cos x - 4) dx .$$

(β) Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_4^{25} \frac{(2\sqrt{x} - 9)^3}{\sqrt{x}} dx .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 19.

18. Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cot \theta}{\sqrt[3]{\csc \theta}} d\theta .$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 19.

19. (α) Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = x^4 - x^3 - x^2 + x$$

και τον άξονα x από $x = -2$ έως $x = 0$.

(β) Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = x^{\frac{5}{3}} - x$$

και τον άξονα x από $x = -\frac{1}{8}$ έως $x = 8$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

20. (α) Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = \sin x$$

και τον άξονα x από $x = -2\pi$ έως $x = 2\pi$.

(β) Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = 2 - \sin x$$

και τον άξονα x από $x = -\frac{\pi}{2}$ έως $x = 3\pi$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

21. (α) Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = 2x^2 + 5x + 3$$

και

$$y = x^2 + 4x + 9$$

και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

(β) Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = x^4 + 15x^2 + 45$$

και

$$y = 28x^2 + 9.$$

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

22. Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = \sin(2x)$$

και

$$y = -2 \cos x$$

από $x = \pi$ έως $x = 2\pi$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

23. Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = \sin x$$

και

$$y = \cos x$$

από $x = 0$ έως $x = \frac{\pi}{2}$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

24. Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = \cos x$$

και

$$y = x$$

από $x = 0$ έως $x = \frac{\pi}{6}$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

25. Υπολογίστε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = |\cos x|$$

και τον άξονα x από $x = -2\pi$ έως $x = \pi$.

Υπόδειξη: Δείτε το Μάθημα 17, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 17 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 20.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ