

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι**  
**ΤΡΙΤΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ**  
**05 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

**ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ**  
**ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ**  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 30 ΩΡΕΣ**

**1.** (α) Έστω

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$$

με  $D_f = [-1, 3]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

(β) Έστω

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6$$

με  $D_g = [0, 4]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $g(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 10, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 10 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 10.

**2.** (α) Έστω

$$f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{7}{3}}$$

με  $D_f = [-1, 1]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

(β) Έστω

$$g(x) = 5x^{\frac{1}{5}} - 5x^{\frac{6}{5}}$$

με  $D_g = [1, 2]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $g(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 10, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 10 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 10.

**3.** (α) Έστω

$$g(y) = \cos(2y)$$

με  $D_g = \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $g(y)$  και τα  $y$  στα οποία εμφανίζονται.

(β) Έστω

$$h(x) = \sin x - \frac{x}{2}$$

με  $D_h = [-\pi, 2\pi]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $h(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

(γ) Έστω

$$f(\theta) = \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) + 6$$

με  $D_f = [0, 2\pi]$ .

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f(\theta)$  και τα  $\theta$  στα οποία εμφανίζονται.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 10, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 10 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 10.

**4.** (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$3x = \cos(2x)$$

έχει ακριβώς μία λύση στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

(β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$2x^5 + 12x - 10 = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση στο  $[-1, 1]$ .

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 11, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 11 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 11.

**5.** Έστω  $a, b \in (-\pi, 0)$  με  $a < b$ .

Αποδείξτε ότι

$$\cot b - \cot a \leq a - b.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 11, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 11 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 11.

**6.** (α) Βρείτε τη συνάρτηση  $f(x)$  για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = 2x^4 - \frac{3x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και ότι

$$f(2) = 3.$$

(β) Βρείτε τη συνάρτηση  $g(x)$  για την οποία ισχύει ότι

$$g'(x) = -\sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

και ότι

$$g(\pi) = 3.$$

(γ) Βρείτε τη συνάρτηση  $h(x)$  για την οποία ισχύει ότι

$$h'(x) = 3 \sec^2 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και ότι

$$h(0) = 2.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 11, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 11 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 11.

**7.** Έστω

$$g(x) = \frac{-2x}{3x^2 + 4}.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $g(x)$  είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα  $x$  στα οποία η  $g(x)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $g(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 12, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 12 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 12.

**8.** Έστω

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f(x)$  είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα  $x$  στα οποία η  $f(x)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f(x)$  και τα  $x$  στα οποία εμφανίζονται.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 12, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 12 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 12.

**9.** Έστω

$$h(t) = \cos(t - \pi)$$

με  $D_h = [-\pi, 2\pi]$ .

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $h(t)$  είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα  $t$  στα οποία η  $h(t)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 12, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 12 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 12.

**10.** Έστω

$$g(\theta) = \sin^2 \theta$$

με  $D_g = [-\pi, \pi]$ .

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $g(\theta)$  είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα  $\theta$  στα οποία η  $g(\theta)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 12, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 12 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 12.

**11.** Έστω

$$h(x) = \frac{5x - 7}{2x + 3}.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $h(x)$  είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα  $x$  στα οποία η  $h(x)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $h(x)$  στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(δ) Βρείτε τα  $x$  στα οποία η  $h(x)$  εμφανίζει σημείο καμπής.

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 12, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 12 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 12.

**12.** (α) Βρείτε την απόσταση του σημείου  $(1, 1)$  από την καμπύλη

$$y = x^2 - 1.$$

(β) Βρείτε την απόσταση του σημείου  $(1, 2)$  από το ημικύκλιο

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε τα Μαθήματα 10 και 12, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 10 και 12 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 13.

**13.** (α) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hopital το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(3x)}{3x^2}.$$

(β) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hopital το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot(-3x)}{\cos(7x)}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 13, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 13 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 14.

**14.** (α) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα Ι' Hopital το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} (\pi - x) \cot x$$

(β) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα Ι' Hopital το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi^-} (3\pi - x) \csc x$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 13, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 13 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 14.

**15.** Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα Ι' Hopital το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (\csc x - \cot x) .$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 13, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 13 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 14.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**