ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 30 ΩΡΕΣ

1. (α) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

(Ι) Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.
(ΙΙ) Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.
(β) Έστω

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Εξετάστε αν η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0. Αν είναι, ποια είναι η τιμή της $g'(0)$;
Υπόδειξη : Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 08.

2. (α) Έστω
$$f(x) = x^{\frac{3}{11}}\,.$$
(I) Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.
(II) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ποια είναι η τιμή της $f'(0)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.
(β) Έστω
$$g(x) = -x^{\frac{8}{15}}\,.$$
(I) Εξετάστε αν υπάρχουν οι $g'_-(0)$ και $g'_+(0)$.
(II) Εξετάστε αν η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.
(III) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ποια είναι η τιμή της $g'(0)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 08.

3. (α) Έστω
$$g(x) = |x^5|\,.$$
(I) Υπολογίστε τις $g'_-(0)$ και $g'_+(0)$.
(I) Εξετάστε αν η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.
(II) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ποια είναι η τιμή της $g'(0)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.
(β) Έστω
$$f(x) = |2x - 4|\,.$$
(I) Υπολογίστε τις $f'_-(2)$ και $f'_+(2)$.
(I) Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$.
(II) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$, ποια είναι η τιμή της $f'(2)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 08.

4. Έστω
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x < -1 \\ 6x, & x \geq -1 \end{cases}\,.$$
Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = -1$.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 08.

5. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + 2ax^2 - bx + 2c, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 7ax^5 + 7ax + 2c, & x > 0 \end{cases}.$$

(α) Για ποιες τιμές των a, b, c υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$;
(β) Για ποιες τιμές των a, b, c είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0;
(γ) Για ποιες τιμές των a, b, c είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0;
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 08.

6. (α) Έστω

$$f(x) = x^5$$

με πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου βρείτε την $f'(x)$ (δηλαδή βρείτε το $D_{f'}$ και την $f'(x)$ στα x στα οποία ορίζεται).
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07 και οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος.
(β) Έστω

$$g(x) = \frac{1}{x^4}$$

με πεδίο ορισμού $D_g = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου βρείτε την $g'(x)$ (δηλαδή βρείτε το $D_{g'}$ και την $g'(x)$ στα x στα οποία ορίζεται).
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07 και οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος.
(γ) Έστω

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$

με πεδίο ορισμού $D_h = \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου βρείτε την $h'(x)$ (δηλαδή βρείτε το $D_{h'}$ και την $h'(x)$ στα x στα οποία ορίζεται).
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06, 07 και 09 και οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06, 07 και 09 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος.

7. Έστω
$$f(x) = \cos x\,.$$
Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ότι
$$f'(x) = -\sin x\,.$$
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06, 07 και 08 και οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06, 07 και 08 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος.

8. Έστω $f(x)$ μία άρτια συνάρτηση με $D_{f'} = D_f$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι περιττή.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 08.

9. (α) Έστω
$$g(x) = (1 - \sec x)\,(\sqrt[6]{x^5} - \tan x)\,.$$
(I) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_g της $g(x)$.
(II) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $g'(x)$.
(III) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{g'}$ της $g'(x)$.
(β) Έστω
$$f(x) = \frac{\frac{4}{x^4} - \cos x}{5x^6 - 40}\,.$$
(I) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της $f(x)$.
(II) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $f'(x)$.
(III) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{f'}$ της $f'(x)$.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 08 και 09, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 08 και 09 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

10. (α) Έστω

$$f(x) = \sqrt[6]{2x^5 - 64} - \sqrt[5]{\frac{1}{(x^3 - 27)^3}}\,.$$

(I) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της $f(x)$.
(II) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $f'(x)$.
(III) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{f'}$ της $f'(x)$.
(β) Έστω

$$g(x) = \cos^{\frac{2}{5}}(4x)\,.$$

(I) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_g της $g(x)$.
(II) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $g'(x)$.
(III) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{g'}$ της $g'(x)$.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 08 και 09, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 08 και 09 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

11. Έστω

$$f(x) = \cos(3x)\,.$$

Υπολογίστε τις

$$f^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 08 και 09, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 08 και 09 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

12. (α) Βρείτε τα σημεία στα οποία η καμπύλη

$$y = \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{5}{2}\,x^2 + 6x - 32$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη.
(β) Βρείτε τα σημεία στα οποία η καμπύλη

$$y = \cos x - \sin x$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06, 07 και 08, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06, 07 και 08 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

13. (α) Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = 2x^5 - \frac{1}{3x^3} + \sqrt[3]{x^2}$$

στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x = -1$.
(β) Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = \csc(4x) - 2x$$

στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x = -\frac{\pi}{16}$.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06, 07, 08 και 09, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06, 07, 08 και 09 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

14. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = 3x^2 - 12x$$

στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x = 2$.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

15. (α) Αν

$$y = 2u^3 - 5u \text{ και } u = 3\cos x - x^2,$$

υπολογίστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης.
(β) Αν

$$s = \left(x^4 + 7\right)^{\frac{7}{4}} \text{ και } x = \csc\left(2t - 3\right),$$

υπολογίστε την παράγωγο $\frac{ds}{dt}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης.
Υπόδειξη: Δείτε τα Μαθήματα 06 και 07, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 06 και 07 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 09.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ