

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι**  
**ΠΡΩΤΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ**  
**07 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

**ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ**  
**ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ**  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 30 ΩΡΕΣ**

**1.** (α) Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του ορίου, ότι

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x - 5) = -11.$$

(β) Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του ορίου, ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (-2x + 4) = 3.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 01, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 01 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 01.

**2.** (α) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & x \neq 3 \\ -34, & x = 3 \end{cases}.$$

Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του ορίου ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 11.$$

(β) Έστω

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 2, & x \neq 6 \\ -7, & x = 6 \end{cases}.$$

Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του ορίου ότι

$$\lim_{x \rightarrow 6} g(x) = 4.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 01, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 01 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 01.

**3.** (α) Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του ορίου ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^6 = 0.$$

(β) Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του ορίου ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 01, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 01 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 01.

**4.** (α) Έστω  $g(x)$  μία συνάρτηση με  $D_g = (-3, 52) \cup (52, 511)$ . Αν

$$\lim_{x \rightarrow 52} \frac{7 - g(x)}{x - 52} = 2,$$

υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 52} g(x).$$

(β) Έστω  $h(x)$  μία συνάρτηση με  $D_h = (-13, -4) \cup (-4, 17)$ . Αν

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{h(x)}{x + 4} = -7,$$

υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -4} h(x).$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 02, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 02 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 02.

**5.** (α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}.$$

(γ) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^4 - 16}.$$

(δ) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 10\sqrt{x} + 25}{x - 25}.$$

(ε) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^3 + 27}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 02, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 02 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 02.

**6.** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{7}}{x}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 02, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 02 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 02.

**7.** (α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} (x + \pi)^4 \cos\left(\frac{1}{x + \pi}\right).$$

(β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 11} (x - 11)^5 \sin\left(\frac{1}{x - 11}\right).$$

*Υπόδειξη:* Δείτε τα Μαθήματα 02 και 03, οτιδήποτε σχετικό με τα Μαθήματα 02 και 03 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και τα Φυλλάδια Ασκήσεων 02 και 03.

**8.** Έστω  $f(x)$  μία άρτια συνάρτηση (δηλαδή  $f(-x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in D_f$ ) με  $D_f = (-a, 0) \cup (0, a)$  και  $x_0 \in (-a, a)$ . Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad & \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -x_0^-} f(x) = L, \\ \text{(β)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = L. \end{aligned}$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 03, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 03 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 03.

**9.** (α) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 3x - 10}{|x + 2|}, \\ \text{(II)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{|x + 2|}, \\ \text{(III)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{|x + 2|}. \end{aligned}$$

(β) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{|x^2 - 1|}, \\ \text{(II)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{|x^2 - 1|}, \\ \text{(III)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{|x^2 - 1|}. \end{aligned}$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 03, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 03 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 03.

**10.** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x^2 - 25} - \sqrt{x - 5}}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}.$$

**11.** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{-x} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 03, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 03 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 03.

**12.** (α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan^2(x^2 + 5x + 6)}{(x + 2)^2}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\cos x - 1|}{|x|}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 03, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 03 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 04.

**13.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 3\sqrt[7]{x^3} \right),$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^3 - \sqrt[15]{x^2} - \frac{3}{x^5} \right).$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 04, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 04 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 05.

**14.** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-4(x - 3)^3 + 7(x - 3)^{\frac{7}{2}}}{9(x - 3)^2 + 5(x - 3)}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 04, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 04 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 05.

**15.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x - 34)}{16 - 4x^2},$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(6x^3 - 9x^2 + 11)}{x + 5}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 04, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 04 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 05.

**16.** (α) Βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της

$$y = \frac{2x^2 + 8}{x^2 - 5x + 6}.$$

(β) Βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της

$$y = \frac{2x - 8}{x^2 - 16}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 04, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 04 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 06.

**17.** Βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της

$$y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 04, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 04 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 06.

**18.** Έστω  $a, b \in \mathbb{R}$  και

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 7x + b, & x < 0 \\ -3, & x = 0 \\ 3x^3 - a, & x > 0 \end{cases}.$$

(α) Για ποιες τιμές των  $a, b$  υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;

(β) Για ποιες τιμές των  $a, b$  είναι η  $f(x)$  συνεχής στο 0;

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 05, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 05 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 07.

**19.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$x = \cos(2x)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα  $[0, \frac{\pi}{4}]$ .

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 05, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 05 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 07.

**20.** Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

(α)  $f(x) = \cos x$ ,

(β)  $f(x) = \sec x$ .

*Υπόδειξη:* Δείτε το Μάθημα 05, οτιδήποτε σχετικό με το Μάθημα 05 αναφέρω στο Ημερολόγιο Μαθήματος και το Φυλλάδιο Ασκήσεων 07.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**