

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
1 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ.

1. (α) Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}.$$

- (β) Έστω

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ x^2 + b, & x > 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των a και b για τις οποίες:

- (I) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

(II) Η $h(x)$ είναι συνεχής στο 0.

2. (α) Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση ορισμένη στο $(-5, 3)$ για την οποία ισχύει

$$0 \leq f(x) \leq x^2, \text{ για όλα τα } x \text{ στο } (-5, 3).$$

Να βρεθεί η $f'(0)$.

- (β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = x^{(x+1)}$ στο $x = 1$.

3. (α) Έστω

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{2}}.$$

(I) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

(II) Να εξεταστεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής η $f(x)$.

- (β) Να βρεθούν οι $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν

$$x = \cos^{-1} t^2, y = \sin^{-1} t^2.$$

4. (α) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

από $x = 1$ έως $x = 2$.

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x - \cos x - \sin x$ και τον άξονα x από $x = \pi$ έως $x = 4\pi$.

5. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\frac{1}{x \log_5 x} - e^{\cos x} \sin x \right) dx.$$

- (β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(x^3 \cos x + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \right) dx.$$