

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ.

1. (α) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}.$$

(β) Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[-1, 1]$. Αν για όλα τα x στο $[-1, 1]$ ισχύει

$$-x^4 \leq f(x) \leq x^2,$$

αποδείξτε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$.

2. (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση

$$f(x) = |x^3|$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Αν ναι, βρείτε την $f'(0)$.

(β) Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \cos(x^3 + 2x) \sin(x^5 - 7) dx.$$

3. (α) Έστω

$$g(x) = x - \cos x$$

με πεδίο ορισμού το $[-\pi, \pi]$.

(I) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $g(x)$.

(II) Να εξεταστεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής η $g(x)$.

(β) Έχει η συνάρτηση $h(x) = x^2 - x$ ολικό ελάχιστο στο πεδίο ορισμού της; Αν ναι, πού;

4. (α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$x^2 y^4 = 1$$

στο σημείο $(-1, -1)$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^6$$

στο σημείο για το οποίο $t = 1$.

5. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int (x \sqrt[3]{x^2 - 2} - 2) dx.$$

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = x^3 - x$ και τον άξονα x από $x = -2$ έως $x = 3$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΗΜΟΣ ΔΡΙΒΑΛΙΑΡΗΣ