ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010–2011

Θέμα 1: Να βρεθούν οι κατακόρυφες και οι οριζόντιες ασύμπτωτες της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

Λύση: Έστω

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

Εφόσον

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\,,$$

το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)\,.$$

Εφόσον η $f(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, είναι συνεχής στο D_f. Άρα οι πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}$$

είναι οι $x = -2$ και $x = 2$.

Για $x \neq -2$,

$$\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}\,. \tag{1}$$

Από την (1) και όσα είναι γνωστά για τα όρια ρητών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2} \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{(-2)-2} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

και άρα
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$$
και
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4}\,.$$
Εφόσον
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{x^2-4} \neq \pm\infty$$
και
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{x^2-4} \neq \pm\infty\,,$$
η $x=-2$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της
$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

Από την (1), παίρνουμε ότι
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}\,.$$
Θέτουμε $u = x-2$. Προφανώς
$$x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow u < 0\,.$$
Άρα, από όσα είναι γνωστά για τα όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι
$$x \to 2^- \Rightarrow x-2 \to 0^- \Rightarrow u \to 0^-\,.$$
Επομένως
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = \lim_{u\to 0^-} \frac{1}{u}\,.$$
Γνωρίζουμε όμως ότι
$$\lim_{u\to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty\,.$$
Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = -\infty\,.$$
Εφόσον
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = -\infty\,,$$

η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

Επομένως η

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

έχει μία κατακόρυφη ασύμπτωτη, την $x = 2$.

Χρησιμοποιώντας το παρακάτω γνωστό αποτέλεσμα, που αφορά όρια ρητών συναρτήσεων όταν $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_n x^n}{\beta_m x^m}\,,$$

για $n, m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m \in \mathbb{R}$ με $\alpha_n, \beta_m \neq 0$, και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0\,,$$

η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

Χρησιμοποιώντας το παρακάτω γνωστό αποτέλεσμα, που αφορά όρια ρητών συναρτήσεων όταν $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_n x^n}{\beta_m x^m}\,,$$

για $n, m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m \in \mathbb{R}$ με $\alpha_n, \beta_m \neq 0$, και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0\,,$$

η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

Επομένως η

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}\,.$$

έχει μία οριζόντια ασύμπτωτη, την $y = 0$.

Σημείωση: (α) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$$

και ως εξής: Από όσα είναι γνωστά για τα όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to-2} (x+2) = (-2) + 2 = 0$$

και ότι

$$\lim_{x\to-2} (x^2-4) = (-2)^2 - 4 = 0\,.$$

Επομένως το όριο

$$\lim_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2-4}$$

είναι της μορφής

$$\frac{0}{0}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hôpital, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$

και

$$\frac{d}{dx}\left(k\right) = 0$$

και όσα είναι γνωστά για τα όρια ρητών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)'}{(x^2-4)'} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x)'+(2)'}{(x^2)'-(4)'} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{1+0}{2x-0} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{1}{2x} \\
&= \frac{1}{2\cdot(-2)} \\
&= -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

(β) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4}$$

και ως εξής: Από την (1), παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}\,.$$

Θέτουμε $u = x - 2$. Προφανώς

$$x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow u > 0\,.$$

Άρα, από όσα είναι γνωστά για τα όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$x \to 2^+ \Rightarrow x - 2 \to 0^+ \Rightarrow u \to 0^+ \,.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \,.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = \infty \,.$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \infty \,.$$

Εφόσον

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \infty \,,$$

η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της

$$y = \frac{x+2}{x^2-4} \,.$$

(γ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0$$

και ως εξής: Διαιρώντας με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τα γνωστά όρια

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \,, \; n > 0$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} k = k \,,$$

παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 4\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}} \\
&= \frac{0+2\cdot 0}{1-4\cdot 0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

(δ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0$$

και κατά παρόμοιο τρόπο με το (γ).

(ε) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0$$

και ως εξής: Από τα γνωστά όρια

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty\,,\ n>0$$

και

$$\lim_{x\to\infty} k = k$$

και τις ιδιότητες των άπειρων ορίων, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} (x+2) = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} 2 = \infty + 2 = \infty$$

και ότι

$$\lim_{x\to -2}(x^2-4) = \lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 4 = \infty - 4 = \infty\,.$$

Επομένως το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-4}$$

είναι της μορφής

$$\frac{\infty}{\infty}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hôpital, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

και

$$\frac{d}{dx}(k) = 0\,,$$

τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)'}{(x^2-4)'} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'+(2)'}{(x^2)'-(4)'} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{2x-0} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

(στ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+2}{x^2-4} = 0$$

και κατά παρόμοιο τρόπο με το (ε).

(ζ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0$$

και ως εξής: Από την (1), παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2}\,.$$

Θέτουμε $u = x - 2$. Από τις ιδιότητες των άπειρων ορίων και τα γνωστά όρια

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} k = k,$$

παίρνουμε ότι

$$x \to -\infty \Rightarrow x - 2 \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty\,.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{u}\,.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\lim_{u \to -\infty} \frac{1}{u} = 0\,.$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0\,.$$

(η) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x^2-4} = 0$$

και κατά παρόμοιο τρόπο με το (ζ).

Θέμα 2: Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

Λύση: Εφόσον

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ για } x \neq 0,$$

και

$$f(0) = 0,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι, για όλα τα $y \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \sin y \leq 1\,.$$

Επομένως

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1\,, \text{ για } h \neq 0\,. \tag{2}$$

Από την (2), παίρνουμε ότι

$$h \leq h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq -h\,, \text{ για } h < 0\,. \tag{3}$$

Προφανώς

$$\lim_{h\to 0^-} h = \lim_{h\to 0^-} (-h) = 0\,. \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) και το Θεώρημα Σάντουιτς, παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

Όπως είδαμε παραπάνω

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$$

και επομένως

$$f'_-(0) = 0\,.$$

Από την (2), παίρνουμε ότι

$$-h \le h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) \le h\,, \text{ για } h > 0\,. \tag{5}$$

Προφανώς

$$\lim_{h\to 0^+}(-h) = \lim_{h\to 0^+} h = 0. \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) και το Θεώρημα Σάντουιτς, παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

Όπως είδαμε παραπάνω

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$$

και επομένως

$$f'_+(0) = 0\,.$$

Εφόσον

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 0\,,$$

η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=0$.

Σημείωση: (α) Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε ως εξής: Εφόσον $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) . \end{aligned}$$

Η συνέχεια είναι ακριβώς η ίδια με παραπάνω.

(β) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

και ως εξής: Θέτουμε $u = \frac{1}{h}$. Από το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

παίρνουμε ότι

$$h \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{h} \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty .$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0^-} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{u\to -\infty} \frac{\sin u}{u} .$$

Γνωρίζουμε ότι, για όλα τα $y \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \sin y \leq 1 .$$

Επομένως

$$\frac{1}{u} \leq \frac{\sin u}{u} \leq -\frac{1}{u}, \text{ για } u < 0 . \tag{7}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{u\to -\infty} \frac{1}{u} = \lim_{u\to -\infty} \left(-\frac{1}{u}\right) = 0 . \tag{8}$$

Από τις (7) και (8) και το Θεώρημα Σάντουιτς, παίρνουμε ότι

$$\lim_{u\to-\infty} \frac{\sin u}{u} = 0\,.$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

(γ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

και κατά παρόμοιο τρόπο με το (β).

(δ) Αντί να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

και

$$\lim_{h\to 0^+} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,,$$

όπως κάναμε παραπάνω, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε ως εξής: Γνωρίζουμε ότι, για όλα τα $y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |\sin y| \leq 1\,.$$

Επομένως

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq 1\,,\ \text{για } h \neq 0$$

και άρα

$$0 \leq \left|h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h|\,,\ \text{για } h \neq 0\,. \tag{9}$$

Προφανώς

$$\lim_{h\to 0} 0 = \lim_{h\to 0} |h| = 0. \tag{10}$$

Από τις (9) και (10) και το Θεώρημα Σάντουιτς, παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \left|h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| = 0\,.$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

Θέμα 3: Να εξεταστεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής η

$$g(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \, .$$

Λύση: Προφανώς $D_g = \mathbb{R}$ και η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1} \, , \text{ για } x \text{ στο πεδίο ορισμού της } x^{n-1} \, ,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{d}{dx}(x^{\frac{5}{3}}) - \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} \, , \end{aligned}$$

για $x \neq 0$.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1} \, , \text{ για } x \text{ στο πεδίο ορισμού της } x^{n-1} \, ,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{d}{dx}(g'(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{5}{3}\, \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) - \frac{2}{3}\, \frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{5}{3}\, \left(\frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}\right) - \frac{2}{3}\, \left(-\frac{1}{3}\, x^{-\frac{4}{3}}\right) \\ &= \frac{10}{9}\, x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\, x^{-\frac{4}{3}} \, , \end{aligned}$$

για $x \neq 0$.

Προφανώς η $g''(x)$ δεν ορίζεται για $x = 0$.
Εφόσον $x^{-\frac{4}{3}} \neq 0$, για $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{10}{9}\,x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}\,(5x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow 5x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}\,.
\end{aligned}
$$

Άρα η $g(x)$ έχει πιθανά σημεία καμπής για $x = 0$ και $x = -\dfrac{1}{5}$.
Εφόσον $x^{-\frac{4}{3}} > 0$, για $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
g''(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{10}{9}\,x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}\,(5x+1) > 0 \\
&\Leftrightarrow 5x + 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}\,.
\end{aligned}
$$

Από τον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	0	∞
Πρόσημο της $g''(x)$	-	+	+	
Κοιλότητα της $g(x)$	Κοίλα κάτω	Κοίλα πάνω	Κοίλα πάνω	

παίρνουμε ότι η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left(-\infty, -\dfrac{1}{5}\right]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $\left[-\dfrac{1}{5}, \infty\right)$ και έχει σημείο καμπής για $x = -\dfrac{1}{5}$.

Θέμα 4: Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης

$$x = -\frac{1}{t}\,,\ y = \ln t, \quad t > 0$$

είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 11$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Η κλίση της ευθείας

$$y = 2x - 11 \tag{11}$$

είναι $m = 2$.

Επομένως τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης

$$x = -\frac{1}{t}\,,\ y = \ln t, \quad t > 0 \tag{12}$$

είναι παράλληλη στην ευθεία (11) είναι αυτά όπου

$$\frac{dy}{dx} = 2\,.$$

Βρίσκουμε την κλίση $\frac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (12). Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dt}(t^n) = n\,t^{n-1}\,,\ \text{για } t \text{ στο πεδίο ορισμού της } t^{n-1}\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = -\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2}\,,$$

για $t \neq 0$. Επίσης έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln t) = \frac{1}{t}\,,$$

για $t > 0$. Άρα οι

$$x = -\frac{1}{t}$$

και

$$y = \ln t$$

είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t, για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (12). Επίσης έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2} \neq 0,$$

για $t \neq 0$, και άρα

$$\frac{dx}{dt} \neq 0,$$

για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (12). Άρα η κλίση σε ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (12) είναι

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}} \\ &= t. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Leftrightarrow t = 2.$$

Άρα η εφαπτομένη της καμπύλης (12) είναι παράλληλη στην ευθεία (11) για $t = 2$. Για $t = 2$,

$$x = -\frac{1}{2}$$

και

$$y = \ln 2.$$

Επομένως η εφαπτομένη της καμπύλης (12) είναι παράλληλη στην ευθεία (11) στο σημείο

$$\left(-\frac{1}{2}, \ln 2\right).$$

2ος τρόπος: Η κλίση της ευθείας

$$y = 2x - 11 \tag{13}$$

είναι $m = 2$.

Επομένως τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης

$$x = -\frac{1}{t}\,,\ y = \ln t, \quad t > 0 \tag{14}$$

είναι παράλληλη στην ευθεία (13) είναι αυτά όπου

$$\frac{dy}{dx} = 2\,.$$

Έχουμε ότι

$$x = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{x}\,.$$

Επίσης έχουμε ότι, αν

$$x = -\frac{1}{t}$$

τότε

$$t > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Άρα η παραμετρική καμπύλη (14) ταυτίζεται με την καμπύλη

$$y = \ln\left(-\frac{1}{x}\right), \quad x < 0. \tag{15}$$

Βρίσκουμε την κλίση $\dfrac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της καμπύλης (15). Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\,,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{-\frac{1}{x}}\,\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= (-x)\,\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= (-x)\,\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= (-x)\,\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{x}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\,.$$

Για $x = -\dfrac{1}{2}$, από την (15), παίρνουμε ότι

$$y = \ln\left(-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = \ln 2\,.$$

Άρα η εφαπτομένη της καμπύλης (14) είναι παράλληλη στην ευθεία (13) στο σημείο

$$\left(-\frac{1}{2}\,, \ln 2\right).$$

Θέμα 5: Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της

$$f(x) = e^{-\cos x}$$

στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Η συνάρτηση $f_1(x) = \cos x$ είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Επομένως η συνάρτηση $f_2(x) = -\cos x$ είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, εφόσον είναι γινόμενο της σταθεράς -1 με τη συνεχή συνάρτηση $f_1(x)$. Η συνάρτηση $f_3(x) = e^x$ είναι συνεχής στο $f_2\left(\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Άρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, εφόσον $f = f_3 \circ f_2$.

Εφόσον η $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, η $f(x)$ έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Τα ολικά ακρότατα της $f(x)$ βρίσκονται είτε στα κρίσιμα σημεία της $f(x)$ είτε στα άκρα του διαστήματος $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$ και $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x\,,$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{-\cos x}) \\
&= e^{-\cos x}\,\frac{d}{dx}(-\cos x) \\
&= e^{-\cos x}\left(-\frac{d}{dx}(\cos x)\right) \\
&= e^{-\cos x}\,(-(-\sin x)) \\
&= e^{-\cos x}\,\sin x\,.
\end{aligned}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον $e^x \neq 0$, για όλα τα x στο $\mathbb{R}$, και, για x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

έχουμε ότι, για x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-\cos x}\,\sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

Άρα η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x = 0$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{-\cos 0} = e^{-1}\,, \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= e^{-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-0} = 1\,, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-0} = 1\,. \end{aligned}$$

Εφόσον, $e > 1$,

$$e^{-1} < 1\,.$$

Άρα το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι 1 (στο $x = -\frac{\pi}{2}$ και στο $x = \frac{\pi}{2}$) και το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι e^{-1} (στο $x = 0$).

2ος τρόπος: Η συνάρτηση $f_1(x) = \cos x$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως η συνάρτηση $f_2(x) = -\cos x$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, εφόσον είναι γινόμενο της σταθεράς -1 με τη συνεχή συνάρτηση $f_1(x)$. Η συνάρτηση $f_3(x) = e^x$ είναι συνεχής στο $f_2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Άρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, εφόσον $f = f_3 \circ f_2$.

Εφόσον η $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, η $f(x)$ έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x\,,$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{-\cos x}) \\ &= e^{-\cos x}\,\frac{d}{dx}(-\cos x) \\ &= e^{-\cos x}\,\left(-\frac{d}{dx}(\cos x)\right) \\ &= e^{-\cos x}\,(-(-\sin x)) \\ &= e^{-\cos x}\,\sin x\,. \end{aligned}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον $e^x \neq 0$, για όλα τα x στο $\mathbb{R}$, και, για x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

έχουμε ότι, για x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-\cos x}\,\sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

Άρα η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x = 0$.

Για το πρόσημο της $f'(x)$, εφόσον $e^x > 0$, για όλα τα x στο $\mathbb{R}$, και, για x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

έχουμε ότι, για x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{-\cos x}\,\sin x > 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Από τον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Πρόσημο της $f'(x)$	-	+	
Μονοτονία της $f(x)$	Φθίνουσα	Αύξουσα	

παίρνουμε ότι η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ και αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ και τοπικό μέγιστο στο $x = -\dfrac{\pi}{2}$ και στο $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Εφόσον το μοναδικό τοπικό ελάχιστο της $f(x)$ είναι στο $x = 0$, η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$. Έχουμε ότι

$$f(0) = e^{-\cos 0} = e^{-1}\,.$$

Επομένως το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ είναι e^{-1} (στο $x = 0$).

Εφόσον η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x = -\dfrac{\pi}{2}$ και στο $x = \dfrac{\pi}{2}$ το ολικό μέγιστο της $f(x)$ βρίσκεται είτε στο $x = -\dfrac{\pi}{2}$ είτε στο $x = \dfrac{\pi}{2}$. Εφόσον

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-0} = 1\,,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-0} = 1\,,$$

το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ είναι 1 (στο $x = -\dfrac{\pi}{2}$ και στο $x = \dfrac{\pi}{2}$).

Θέμα 6: Να υπολογιστεί το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ από $x = -2$ έως $x = -1$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Οι $f_1(x) = e^{2x}$ και $f_2(x) = e^{5x}$ είναι συνεχείς στο $[-2, -1]$.

Για $x \leq 0$,
$$0 < e^x \leq 1\,.$$
Άρα, για $x \leq 0$,
$$(e^x)^5 \leq (e^x)^2$$
και επομένως
$$e^{5x} \leq e^{2x}.$$
Επομένως, για x στο $[-2, -1]$,
$$e^{5x} \leq e^{2x}.$$

Άρα το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ από $x = -2$ έως $x = -1$ είναι
$$A = \int_{-2}^{-1} \left(e^{2x} - e^{5x}\right)\, dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων, παίρνουμε ότι
$$\int_{-2}^{-1} \left(e^{2x} - e^{5x}\right)\, dx = \int_{-2}^{-1} e^{2x}\, dx - \int_{-2}^{-1} e^{5x}\, dx\,.$$
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση για ορισμένα ολοκληρώματα, τις ιδιότητες των παραγώγων, τη γνωστή παράγωγο
$$\frac{d}{dx}(x) = 1\,,$$
τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων, το γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα
$$\int e^x\, dx = e^x + C,$$

και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$\int_{-2}^{-1} e^{2x}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 2x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(2x)\,dx = 2\,\dfrac{d}{dx}(x)\,dx = 2\,dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{2}\,du = dx\,. \\ \text{Επίσης έχουμε ότι } u(-2) = -4, u(-1) = -2\,. \end{array}\right]$$

$$= \int_{-4}^{-2} \frac{1}{2}\,e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\left[e^u\right]_{-4}^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\left(e^{-2} - e^{-4}\right)$$

και ότι

$$\int_{-2}^{-1} e^{5x}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 5x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(5x)\,dx = 5\,\dfrac{d}{dx}(x)\,dx = 5\,dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{5}\,du = dx\,. \\ \text{Επίσης έχουμε ότι } u(-2) = -10, u(-1) = -5\,. \end{array}\right]$$

$$= \int_{-10}^{-5} \frac{1}{5}\,e^u\,du$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-10}^{-5} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{5}\,\left[e^u\right]_{-10}^{-5}$$

$$= \frac{1}{5}\,\left(e^{-5} - e^{-10}\right).$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$A = \frac{1}{2}\,\left(e^{-2} - e^{-4}\right) - \frac{1}{5}\,\left(e^{-5} - e^{-10}\right)\,.$$

Σημείωση: (α) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι, για $x \leq 0$,

$$e^{5x} \leq e^{2x}$$

και ως εξής: Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για $x \le 0$,

$$5x \le 2x\,.$$

Άρα, για $x \le 0$,

$$e^{5x} \le e^{2x}.$$

(β) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι, για $x \le 0$,

$$e^{5x} \le e^{2x}$$

και ως εξής: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^x > 0$$

και

$$e^x \le 1 \Leftrightarrow x \le 0\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{5x} \le e^{2x} &\Leftrightarrow e^{5x} - e^{2x} \le 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(e^{3x} - 1) \le 0 \\ &\Leftrightarrow e^{3x} - 1 \le 0 \\ &\Leftrightarrow e^{3x} \le 1 \\ &\Leftrightarrow 3x \le 0 \\ &\Leftrightarrow x \le 0. \end{aligned}$$

Ή: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^x > 0$$

και

$$1 \le e^x \Leftrightarrow 0 \le x\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{5x} \le e^{2x} &\Leftrightarrow e^{5x} - e^{2x} \le 0 \\ &\Leftrightarrow e^{5x}(1 - e^{-3x}) \le 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-3x} \le 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \le e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow 0 \le -3x \\ &\Leftrightarrow x \le 0. \end{aligned}$$

(γ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι, για $x \leq 0$,

$$e^{5x} \leq e^{2x}$$

και ως εξής: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^x > 0$$

και

$$e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{5x} \leq e^{2x} &\Leftrightarrow \frac{e^{5x}}{e^{2x}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{3x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 3x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

Ή: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^x > 0$$

και

$$e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{5x} \leq e^{2x} &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{e^{2x}}{e^{5x}} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -3x \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

(δ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι, για $x \leq 0$,

$$e^{5x} \leq e^{2x}$$

και ως εξής: Εφόσον η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$ και, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$\ln(e^x) = x,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{5x} \leq e^{2x} &\Leftrightarrow \ln(e^{5x}) \leq \ln(e^{2x}) \\ &\Leftrightarrow 5x \leq 2x \\ &\Leftrightarrow 3x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0\,. \end{aligned}$$

(ε) Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-2}^{-1} e^{2x}\, dx$$

και

$$\int_{-2}^{-1} e^{5x}\, dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση για αόριστα ολοκληρώματα, τις ιδιότητες των παραγώγων, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(x) = 1\,,$$

τις ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων και το γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int e^x\, dx = e^x + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\int e^{2x}\, dx = \\ &\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 2x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(2x)\, dx = 2\, \dfrac{d}{dx}(x)\, dx = 2\, dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{2}\, du = dx\,. \end{array} \right] \\ &= \int \frac{1}{2}\, e^u\, du \\ &= \frac{1}{2} \int e^u\, du \\ &= \frac{1}{2}\, (e^u + C) \\ &= \frac{1}{2}\, e^u + C \\ &= \frac{1}{2}\, e^{2x} + C \end{aligned}$$

και ότι

$$
\begin{aligned}
&\int e^{5x}\,dx = \\
&\left[\begin{array}{l}\text{Θέτουμε } u = 5x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(5x)\,dx = 5\,\dfrac{d}{dx}(x)\,dx = 5\,dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{5}\,du = dx\,.\end{array}\right] \\
&= \int \frac{1}{5}\,e^{u}\,du \\
&= \frac{1}{5}\int e^{u}\,du \\
&= \frac{1}{5}\,\left(e^{u} + C\right) \\
&= \frac{1}{5}\,e^{u} + C \\
&= \frac{1}{5}\,e^{5x} + C\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} e^{2x}\,dx &= \left[\frac{1}{2}\,e^{2x}\right]_{-2}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\,\left[e^{2x}\right]_{-2}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\,\left(e^{-2} - e^{-4}\right)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} e^{5x}\,dx &= \left[\frac{1}{5}\,e^{5x}\right]_{-2}^{-1} \\
&= \frac{1}{5}\,\left[e^{5x}\right]_{-2}^{-1} \\
&= \frac{1}{5}\,\left(e^{-5} - e^{-10}\right).
\end{aligned}
$$

(στ) Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-2}^{-1} e^{2x}\,dx$$

και

$$\int_{-2}^{-1} e^{5x}\, dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση για ορισμένα ολοκληρώματα, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x\,,$$

τις ιδιότητες των παραγώγων, τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων, το γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ για } n \neq -1$$

και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{-1} e^{2x}\, dx = \\
&= \int_{-2}^{-1} e^x e^x\, dx \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = e^x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(e^x)\, dx = e^x\, dx\,. \\ \text{Επίσης έχουμε ότι } u(-2) = e^{-2}, u(-1) = e^{-1}\,. \end{array}\right] \\
&= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} u\, du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\, \left[u^2\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\, \left((e^{-1})^2 - (e^{-2})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\, \left(e^{-2} - e^{-4}\right)
\end{aligned}$$

και ότι

$$
\begin{aligned}
&\int_{-2}^{-1} e^{5x}\,dx = \\
&= \int_{-2}^{-1} e^{4x}e^{x}\,dx \\
&= \int_{-2}^{-1} (e^{x})^{4}e^{x}\,dx \\
&\left[\begin{array}{l}
\text{Θέτουμε } u = e^{x}. \\
\text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(e^{x})\,dx = e^{x}\,dx\,. \\
\text{Επίσης έχουμε ότι } u(-2) = e^{-2}, u(-1) = e^{-1}\,.
\end{array}\right] \\
&= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} u^{4}\,du \\
&= \left[\frac{u^{5}}{5}\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} \\
&= \frac{1}{5}\,\left[u^{5}\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} \\
&= \frac{1}{5}\,\left((e^{-1})^{5} - (e^{-2})^{5}\right) \\
&= \frac{1}{5}\,\left(e^{-5} - e^{-10}\right)\,.
\end{aligned}
$$

(ζ) Κατά τρόπο παρόμοιο με το (στ) θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int e^{2x}\,dx$$

και

$$\int e^{5x}\,dx\,.$$

2ος τρόπος: Οι $f_1(x) = e^{5x}$ και $f_2(x) = e^{2x}$ είναι συνεχείς στο $[-2,-1]$.

Βρίσκουμε τα x στο $(-2,-1)$ στα οποία οι καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ τέμνονται. Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^{x} \neq 0$$

και

$$e^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{5x} &\Leftrightarrow e^{2x} - e^{5x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(1 - e^{3x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{3x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{3x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

Άρα οι καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ δεν τέμνονται για x στο $(-2, -1)$.

Επομένως το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ από $x = -2$ έως $x = -1$ είναι

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} \left(e^{5x} - e^{2x}\right)\, dx \right| .$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων παίρνουμε ότι

$$\int_{-2}^{-1} \left(e^{5x} - e^{2x}\right)\, dx = \int_{-2}^{-1} e^{5x}\, dx - \int_{-2}^{-1} e^{2x}\, dx\,.$$

Όπως στον 1ο τρόπο, παίρνουμε ότι

$$\int_{-2}^{-1} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\, \left(e^{-2} - e^{-4}\right)$$

και

$$\int_{-2}^{-1} e^{5x}\, dx = \frac{1}{2}\, \left(e^{-5} - e^{-10}\right).$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$A = \left| \frac{1}{5}\, \left(e^{-5} - e^{-10}\right) - \frac{1}{2}\, \left(e^{-2} - e^{-4}\right) \right| .$$

Σημείωση: (α) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$e^{2x} = e^{5x} \Leftrightarrow x = 0$$

και ως εξής: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^{x} \neq 0$$

και

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{5x} &\Leftrightarrow e^{5x} - e^{2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{5x}(1 - e^{-3x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-3x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-3x} = 1 \\ &\Leftrightarrow -3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

(β) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$e^{2x} = e^{5x} \Leftrightarrow x = 0$$

και ως εξής: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^x \neq 0$$

και

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{5x} &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{e^{5x}} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-3x} = 1 \\ &\Leftrightarrow -3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

Ή: Εφόσον, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$e^x \neq 0$$

και

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{5x} &\Leftrightarrow \frac{e^{5x}}{e^{2x}} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{3x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

(γ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$e^{2x} = e^{5x} \Leftrightarrow x = 0$$

και ως εξής: Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι 1-1. Επομένως

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{5x} &\Leftrightarrow 2x = 5x \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

(δ) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$e^{2x} = e^{5x} \Leftrightarrow x = 0$$

και ως εξής: Εφόσον η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι 1-1 και, για κάθε x στο $\mathbb{R}$,

$$\ln(e^x) = x,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{5x} &\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(e^{5x}) \\ &\Leftrightarrow 2x = 5x \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

(ε) Αντί να πάρουμε ότι το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ από $x = -2$ έως $x = -1$ είναι

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} \left(e^{5x} - e^{2x}\right)\, dx \right|\,,$$

θα μπορούσαμε να πάρουμε ότι το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^{2x}$ και $y = e^{5x}$ από $x = -2$ έως $x = -1$ είναι

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} \left(e^{2x} - e^{5x}\right)\, dx \right|.$$

Συνεχίζοντας όπως παραπάνω παίρνουμε ότι

$$A = \left| \frac{1}{2}\, \left(e^{-2} - e^{-4}\right) - \frac{1}{5}\, \left(e^{-5} - e^{-10}\right) \right|\,.$$

Θέμα 7: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2)}\,dx.$$

Λύση: Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων.

Αναλύουμε το

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$$

σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{x^2+2}\,.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x-1)(x^2+2)$ και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του x ίδιου βαθμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{x^2+2} &\Leftrightarrow x = \mathrm{A}(x^2+2) + (\mathrm{B}x+\Gamma)(x-1) \\
&\Leftrightarrow x = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{A} + \mathrm{B}x^2 + \Gamma x - \mathrm{B}x - \Gamma \\
&\Leftrightarrow x = (\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2 + (-\mathrm{B}+\Gamma)x + (2\mathrm{A}-\Gamma) \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ 2\mathrm{A} & & & - & \Gamma & = & 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ 2\mathrm{A} & & & - & \Gamma & = & 0 \end{array} .$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ 2\mathrm{A} & & & - & \Gamma & = & 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ & & & & \Gamma & = & 2\mathrm{A} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ 2\mathrm{A} & - & \mathrm{B} & & & = & 1 \\ & & & & \Gamma & = & 2\mathrm{A} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{B} = 2\mathrm{A} - 1 \\ \Gamma = 2\mathrm{A} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\mathrm{A} = 1 \\ \mathrm{B} = 2\mathrm{A} - 1 \\ \Gamma = 2\mathrm{A} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{1}{3} \\ \mathrm{B} = 2\mathrm{A} - 1 \\ \Gamma = 2\mathrm{A} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathrm{A} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{B} = -\frac{1}{3}, \quad \Gamma = \frac{2}{3} \ .$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)(x^2+2)} &= \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}}{x^2+2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^2+2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+2} \, . \end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^2+2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+2} \right) dx \, .$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^2+2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+2} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+2}\,dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+2}\,dx \, . \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx \, .$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση για αόριστα ολοκληρώματα, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1 \, ,$$

$$\frac{d}{dx}(k) = 0\,,$$

και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x-1}\,dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = x-1. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(x-1)\,dx = \left(\dfrac{d}{dx}(x) - \dfrac{d}{dx}(1)\right)\,dx = (1-0)dx = dx\,. \end{array}\right] \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|x-1| + C\,.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση για αόριστα ολοκληρώματα, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

$$\frac{d}{dx}(k) = 0,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = x^2+2\,. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(x^2+2)\,dx = \left(\dfrac{d}{dx}(x^2) + \dfrac{d}{dx}(2)\right)\,dx = (2x+0)\,dx = 2x\,dx \\ \text{ και άρα } \dfrac{1}{2}\,du = x\,dx. \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,(\ln|u| + C)$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln|x^2+2| + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln(x^2+2) + C\,.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \text{ για } a \neq 0\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\,.$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\int \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^2+2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2+2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| + C_1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C_2\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_3\right)$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\,.$$

Σημείωση: Οι σημειώσεις (α), (β) και (γ) αναφέρονται σε μεθόδους επίλυσης συστημάτων για τις οποίες θα μιλήσουμε στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας:

(α) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ 2\mathrm{A} & & & - & \Gamma & = & 0 \end{array} \tag{16}$$

χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss-Jordan: Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (16) είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan παίρνουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

προσθέτουμε -2 φορές την 1η γραμμή στην 3η

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με -1

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

προσθέτουμε 2 φορές τη 2η γραμμή στην 3η

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με $-\frac{1}{3}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\text{προσθέτουμε την 3η γραμμή στη 2η}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \qquad \boxed{\text{προσθέτουμε } -1 \text{ φορά τη 2η γραμμή στην 1η}}$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A} & = & \frac{1}{3} \\ \mathrm{B} & = & -\frac{1}{3} \\ \Gamma & = & \frac{2}{3} \end{array}.$$

Επομένως η λύση του συστήματος (16) είναι

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{B} = -\frac{1}{3}, \quad \Gamma = \frac{2}{3}.$$

(β) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ 2\mathrm{A} & & & - & \Gamma & = & 0 \end{array} \tag{17}$$

χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss και προς τα πίσω αντικατάσταση: Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (17) είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφή Gauss παίρνουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{προσθέτουμε } -2 \text{ φορές την 1η γραμμή στην 3η}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με } -1}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{προσθέτουμε 2 φορές τη 2η γραμμή στην 3η}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad \boxed{\text{πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με } -\frac{1}{3}}$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & & \mathrm{B} & - & \Gamma & = & -1 \\ & & & & \Gamma & = & \frac{2}{3} \end{array}.$$

Θα λύσουμε το σύστημα αυτό με προς τα πίσω αντικατάσταση. Λύνουμε ώς προς τις βασικές μεταβλητές $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ και παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & = & -\mathrm{B} \\ \mathrm{B} & = & \Gamma - 1 \\ \Gamma & = & \frac{2}{3} \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας την 3η εξίσωση στη 2η παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & = & -\mathrm{B} \\ \mathrm{B} & = & -\frac{1}{3} \\ \Gamma & = & \frac{2}{3} \end{array}.$$

Αντικαθιστώντας τη 2η εξίσωση στην 1η παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{3} \\ \mathrm{B} &= -\frac{1}{3} \\ \Gamma &= \frac{2}{3} \end{aligned} .$$

Επομένως η λύση του συστήματος (17) είναι

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\,, \quad \mathrm{B} = -\frac{1}{3}\,, \quad \Gamma = \frac{2}{3}\,.$$

(γ) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & & & = & 0 \\ & - & \mathrm{B} & + & \Gamma & = & 1 \\ 2\mathrm{A} & & & - & \Gamma & = & 0 \end{array} \tag{18}$$

χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer: Ο πίνακας συντελεστών του συστήματος (18) είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) \\ &= 1 + 2 + 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= 3\,. \end{aligned}$$

Εφόσον

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

από τον κανόνα του Cramer παίρνουμε ότι το σύστημα (18) έχει μία λύση, την

$$\mathrm{A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}, \quad \mathrm{B} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}, \quad \Gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot (-1) \\ &= (-1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι το σύστημα (18) έχει μία λύση, την

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{B} = -\frac{1}{3}, \quad \Gamma = \frac{2}{3}.$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων μπορούμε να πάρουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\,\ln|x-1| - \frac{1}{6}\,\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \\
&= \ln\left(|x-1|^{\frac{1}{3}}\right) - \ln\left((x^2+2)^{\frac{1}{6}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \ln\left(\frac{|x-1|^{\frac{1}{3}}}{(x^2+2)^{\frac{1}{6}}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\,.
\end{aligned}
$$

Θέμα 8: Εξετάστε αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx \,.$$

Αν συγκλίνει, να βρεθεί η τιμή του.

Λύση: Οι συναρτήσεις $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = e^x$ είναι συνεχείς στο $(-\infty, 0]$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = xe^x$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, εφόσον είναι γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$. Άρα

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} xe^x \, dx \,.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{a}^{0} xe^x \, dx \,,$$

για $a < 0$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για αόριστα ολοκληρώματα, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

και το γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int x \, e^x \, dx &= \int x \, (e^x)' \, dx \\
&= x \, e^x - \int (x)' \, e^x \, dx \\
&= x \, e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx \\
&= x \, e^x - \int e^x \, dx \\
&= x \, e^x - (e^x + C) \\
&= x \, e^x - e^x + C \,.
\end{aligned}$$

Άρα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_a^0 xe^x\,dx &= [x\,e^x - e^x]_a^0\\ &= \left(0\cdot e^0 - e^0\right) - (a\cdot e^a - e^a)\\ &= -1-(a-1)e^a\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-1-(a-1)e^a\right)\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to-\infty} k = k\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty}\left(-1-(a-1)e^a\right) &= \lim_{a\to-\infty}(-1) - \lim_{a\to-\infty}(a-1)e^a\\ &= -1-\lim_{a\to-\infty}(a-1)e^a\,.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{a\to-\infty}(a-1)e^a\,.$$

Από τα γνωστά όρια

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} k = k$$

και τις ιδιότητες των άπειρων ορίων, παίρνουμε ότι

$$\lim_{a\to-\infty}(a-1) = \lim_{a\to-\infty} a - \lim_{a\to-\infty} 1 = -\infty - 1 = -\infty\,.$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\lim_{a\to-\infty} e^a = 0\,.$$

Επομένως το όριο

$$\lim_{a\to-\infty}(a-1)e^a$$

είναι της μορφής $(-\infty) \cdot 0$. Προφανώς

$$\lim_{a \to -\infty} (a-1)e^a = \lim_{a \to -\infty} \frac{a-1}{e^{-a}} \,.$$

Εφόσον

$$\lim_{a \to -\infty} (a-1) = -\infty$$

και

$$\lim_{a \to -\infty} e^{-a} = \lim_{u \to \infty} e^u = \infty \,,$$

το όριο

$$\lim_{a \to -\infty} \frac{a-1}{e^{-a}}$$

είναι της μορφής

$$\frac{-\infty}{\infty} \,.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hôpital, τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1 \,,$$

$$\frac{d}{dx}(k) = 0 \,,$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \,,$$

τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to -\infty} \frac{a-1}{e^{-a}} &= \lim_{a \to -\infty} \frac{(a-1)'}{(e^{-a})'} \\
&= \lim_{a \to -\infty} \frac{(a)' - (1)'}{e^{-a}(-a)'} \\
&= \lim_{a \to -\infty} \frac{1-0}{e^{-a}(-1)} \\
&= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{-e^{-a}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a \to -\infty} (-e^a) \\
&= -\lim_{a \to -\infty} e^a \\
&= -0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\lim_{a \to -\infty} (-1 - (a-1)e^a) = -1 - 0 = -1\,.$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx$$

συγκλίνει και

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx = -1\,.$$

Σημείωση: (α) Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{a}^{0} xe^x \, dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για ορισμένα ολοκληρώματα, τις γνωστές παραγώγους

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x) &= 1, \\
\frac{d}{dx}(e^x) &= e^x,
\end{aligned}
$$

το γνωστό αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_a^0 x\, e^x\, dx &= \int_a^0 x\, (e^x)'\, dx \\ &= [x\, e^x]_a^0 - \int_a^0 (x)'\, e^x\, dx \\ &= [x\, e^x]_a^0 - \int_a^0 1 \cdot e^x\, dx \\ &= [x\, e^x]_a^0 - \int_a^0 e^x\, dx \\ &= [x\, e^x]_a^0 - [e^x]_a^0 \\ &= \big(0 \cdot e^0 - a \cdot e^a\big) - \big(e^0 - e^a\big) \\ &= -1 - (a-1)e^a\,.\end{aligned}$$

(β) Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{a \to -\infty} (-1 - (a-1)e^a)$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τα γνωστά όρια

$$\lim_{x \to -\infty} k = k\,,$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{a \to -\infty} (-1 - (a-1)e^a) &= \lim_{a \to -\infty} (-1) - \lim_{a \to -\infty} ae^a + \lim_{a \to -\infty} e^a \\ &= -1 - \lim_{a \to -\infty} ae^a + 0 \\ &= -1 - \lim_{a \to -\infty} ae^a\,.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{a \to -\infty} ae^a\,.$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{a \to -\infty} a = -\infty$$

και ότι

$$\lim_{a \to -\infty} e^a = 0\,.$$

Επομένως το όριο

$$\lim_{a\to-\infty} ae^a$$

είναι της μορφής $(-\infty)\cdot 0$. Προφανώς

$$\lim_{a\to-\infty} ae^a = \lim_{a\to-\infty} \frac{a}{e^{-a}}\,.$$

Εφόσον

$$\lim_{a\to-\infty} a = -\infty$$

και

$$\lim_{a\to-\infty} e^{-a} = \lim_{u\to\infty} e^u = \infty\,,$$

το όριο

$$\lim_{a\to-\infty} \frac{a}{e^{-a}}$$

είναι της μορφής

$$\frac{-\infty}{\infty}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hôpital, τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1\,,$$
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x\,,$$

και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty} \frac{a}{e^{-a}} &= \lim_{a\to-\infty} \frac{(a)'}{(e^{-a})'} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{(a)'}{e^{-a}(-a)'} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{e^{-a}(-1)} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{-e^{-a}} \\
&= \lim_{a\to-\infty} (-e^a)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{a\to-\infty} e^a \\
&= -0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\lim_{a\to-\infty}(-1-(a-1)e^a) = -1-0 = -1\,.$$