ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009–2010

Θέμα 1: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\,\cos(x^3-2)}{x^2-4}\,.$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι, για όλα τα $y \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos y \leq 1.$$

Επομένως, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos(x^3-2) \leq 1.$$

Εφόσον, για $x < -2$,

$$x^2 - 4 > 0,$$

έχουμε ότι

$$\frac{x}{x^2-4} < 0,$$

για $x < -2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-4} \leq \frac{x\,\cos(x^3-2)}{x^2-4} \leq -\frac{x}{x^2-4}\,,\ \text{για } x < -2. \tag{1}$$

Από το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0,\ \text{για } n > 0,$$

και τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2-4}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1-4\,\dfrac{1}{x^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 4 \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}} \\
&= \frac{0}{1-4\cdot 0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Εφόσον, όπως μόλις δείξαμε,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4}\right) &= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} \\
&= -0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4}\right) = 0. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) και το Θεώρημα Σάντουιτς παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\,\cos(x^3-2)}{x^2-4} = 0.$$

Σημείωση: (α) Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4}\right) = 0$$

και ως εξής: Από το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \text{ για } n > 0,$$

και τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4}\right) &= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2-4}{x^2}} \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1-4\,\dfrac{1}{x^2}} \\
&= -\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 4\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}} \\
&= -\frac{0}{1-4\cdot 0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(β) Θα μπορούσαμε πρώτα να δείξουμε, όπως στο (α), ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4}\right) = 0$$

και μετά, χρησιμοποιώντας αυτό, την

$$\frac{x}{x^2-4} = -\left(-\frac{x}{x^2-4}\right)$$

και τις ιδιότητες των ορίων να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0.$$

Θέμα 2: Έστω a πραγματικός αριθμός και

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες:
(I) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$.
(II) Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Λύση: (I) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Εφόσον, για $x < 0$, $f(x) = ax^2$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τη συνέχεια της συνάρτησης $g(x) = x^2$ στο $x = 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} ax^2 \\ &= a \lim_{x\to 0^-} x^2 \\ &= a \cdot 0^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Εφόσον, για $x > 0$, $f(x) = -x^2$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τη συνέχεια της συνάρτησης $g(x) = x^2$ στο $x = 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (-x^2) \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x^2 \\ &= -0^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Επομένως υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$. Εφόσον

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Εφόσον, για $x \geq 0$, $f(x) = -x^2$,

$$f(0) = -0^2 = 0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$.

(II) *1ος τρόπος:* Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Εφόσον $f(x) = ax^2$, για $x < 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τη συνέχεια της συνάρτησης $k(x) = x$ στο $x = 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{ah^2 - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} ah \\
&= a \lim_{h\to 0^-} h \\
&= a \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Εφόσον $f(x) = -x^2$, για $x > 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τη συνέχεια της συνάρτησης $k(x) = x$ στο $x = 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2-0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} (-h)\\ &= -\lim_{h\to 0^+} h\\ &= -0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Άρα τα

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

υπάρχουν και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για όλα τα a στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Έστω a στο $\mathbb{R}$. Εφόσον $f(x) = ax^2$, για $x < 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τη συνέχεια της συνάρτησης $k(x) = x$ στο $x = 0$

παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{ax^2 - 0}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} ax \\
&= a \lim_{x \to 0^-} x \\
&= a \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Εφόσον $f(x) = -x^2$, για $x > 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τη συνέχεια της συνάρτησης $k(x) = x$ στο $x = 0$ παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 - 0}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} (-x) \\
&= -\lim_{x \to 0^+} x \\
&= -0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Άρα τα

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

υπάρχουν και

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για όλα τα a στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Εφόσον

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$$

(ή

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0),$$

έχουμε ότι $f'(0) = 0$.

Θέμα 3: Να βρεθεί μία εξίσωση της κάθετης στην

$$x\,\sin y = y\,\cos x$$

στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Εφόσον

$$\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ανήκει στην καμπύλη

$$x\,\sin y = y\,\cos x. \tag{3}$$

Βρίσκουμε την κλίση $\frac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της καμπύλης (3). Θεωρούμε το y παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της (3) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
x\,\sin y = y\,\cos x &\Rightarrow \frac{d}{dx}(x\,\sin y) = \frac{d}{dx}(y\,\cos x)\\
&\Rightarrow x\,\frac{d}{dx}(\sin y) + \frac{d}{dx}(x)\,\sin y = y\,\frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{d}{dx}(y)\,\cos x\\
&\Rightarrow x\,\cos y\,\frac{dy}{dx} + 1\cdot\sin y = y\,(-\sin x) + \frac{dy}{dx}\,\cos x\\
&\Rightarrow (x\,\cos y - \cos x)\,\frac{dy}{dx} = -\sin y - y\,\sin x.
\end{aligned}$$

Επομένως αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (3) με

$$x\,\cos y - \cos x \neq 0,$$

τότε η κλίση της καμπύλης (3) στο σημείο (x, y) είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin y - y\ \sin x}{x\ \cos y - \cos x} = \frac{\sin y + y\ \sin x}{\cos x - x\ \cos y}\,.$$

Άρα, εφόσον

$$\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0,$$

η κλίση της καμπύλης (3) στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{4+\pi}{4-\pi}\,.
\end{aligned}$$

Αν m είναι η κλίση της κάθετης στην καμπύλη (3) στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, τότε

$$m \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = -1$$

και άρα

$$m = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}} = -\frac{1}{\frac{4+\pi}{4-\pi}} = \frac{\pi - 4}{\pi + 4}\,.$$

Επομένως μία εξίσωση της κάθετης στην καμπύλη (3) στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι η

$$y = \frac{\pi - 4}{\pi + 4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\,.$$

2ος τρόπος: Εφόσον

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ανήκει στην καμπύλη

$$x \sin y = y \cos x. \tag{4}$$

Βρίσκουμε την κλίση $\frac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της καμπύλης (4). Θεωρούμε το y παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της (4) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= 1, \\ \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x, \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x, \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} x \sin y = y \cos x &\Rightarrow \frac{d}{dx}(x \sin y) = \frac{d}{dx}(y \cos x) \\ &\Rightarrow x \frac{d}{dx}(\sin y) + \frac{d}{dx}(x) \sin y = y \frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{d}{dx}(y) \cos x \\ &\Rightarrow x \cos y \frac{dy}{dx} + 1 \cdot \sin y = y\,(-\sin x) + \frac{dy}{dx} \cos x \\ &\Rightarrow (x \cos y - \cos x) \frac{dy}{dx} = -\sin y - y \sin x. \end{aligned}$$

Επομένως αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (4), τότε

$$(x \cos y - \cos x) \frac{dy}{dx} = -\sin y - y \sin x.$$

Άρα, εφόσον

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0,$$

για την κλίση της καμπύλης (4) στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ έχουμε ότι

$$\left(\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4 + \pi}{4 - \pi}\,.$$

Αν m είναι η κλίση της κάθετης στην καμπύλη (4) στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, τότε

$$m \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} = -1$$

και άρα

$$m = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}} = -\frac{1}{\frac{4 + \pi}{4 - \pi}} = \frac{\pi - 4}{\pi + 4}\,.$$

Επομένως μία εξίσωση της κάθετης στην καμπύλη (4) στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι η

$$y = \frac{\pi - 4}{\pi + 4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\,.$$

Θέμα 4: Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η καμπύλη

$$x = \sec t,\ y = \tan t, \quad t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Λύση: *1ος τρόπος:* Τα σημεία στα οποία η παραμετρική καμπύλη

$$x = \sec t,\ y = \tan t, \quad t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη είναι αυτά όπου $\frac{dy}{dx} = 0$. Βρίσκουμε την κλίση $\frac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (5). Έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sec t) = \sec t\ \tan t$$

και

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan t) = \sec^2 t,$$

για $t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (5). Εφόσον $\sec t \neq 0$, για όλα τα t για τα οποία η $\sec t$ ορίζεται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = 0 &\Leftrightarrow \sec t\ \tan t = 0 \\
&\Leftrightarrow \tan t = 0 \\
&\Leftrightarrow \tan t = \tan 0 \\
&\Leftrightarrow t = k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Επομένως, για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (5), με $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Άρα η κλίση σε ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (5), με $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\sec^2 t}{\sec t\, \tan t} \\
&= \frac{\sec t}{\tan t} \\
&= \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} \\
&= \frac{1}{\sin t} \\
&= \csc t.
\end{aligned}
$$

Εφόσον $\csc t \neq 0$, για όλα τα t για τα οποία η $\csc t$ ορίζεται, δηλαδή για $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0,$$

για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (5), με $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (5), με $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, από όσα είπαμε παραπάνω,

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

και

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2(k\pi) = 1.$$

Επομένως, εφόσον

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dy}{dx} \neq 0,$$

για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (5), με $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

σε όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (5). Επομένως η παραμετρική καμπύλη (5) δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο της.

2ος τρόπος: Τα σημεία στα οποία η παραμετρική καμπύλη

$$x = \sec t,\ y = \tan t, \quad t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη είναι αυτά όπου $\dfrac{dy}{dx} = 0$. Έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sec t) = \sec t\ \tan t$$

και

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan t) = \sec^2 t,$$

για $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (6). Εφόσον

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt},$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \\ &\Rightarrow \sec^2 t = 0. \end{aligned}$$

Εφόσον $\sec t \neq 0$, για όλα τα t για τα οποία η $\sec t$ ορίζεται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, και άρα $\sec^2 t \neq 0$, για όλα τα t για τα οποία η $\sec t$ ορίζεται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0,$$

σε όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (6). Επομένως η παραμετρική καμπύλη (6) δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο της.

3ος τρόπος: Τα σημεία στα οποία η παραμετρική καμπύλη

$$x = \sec t,\ y = \tan t, \quad t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη είναι αυτά όπου $\dfrac{dy}{dx} = 0$. Εφόσον

$$\tan^2 t + 1 = \sec t,$$

για όλα τα t για τα οποία οι $\tan t$ και $\sec t$ ορίζονται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, για όλα τα σημεία (x, y) της παραμετρικής καμπύλης (7) ισχύει ότι

$$y^2 + 1 = x^2. \tag{8}$$

Βρίσκουμε την κλίση $\dfrac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της καμπύλης (8). Θεωρούμε το y παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της (8) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) &= x, \\ \frac{d}{dx}(1) &= 0, \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} y^2 + 1 = x^2 &\Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2 + 1) = \frac{d}{dx}(x^2) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(x^2) \\ &\Rightarrow 2y\,\frac{dy}{dx} + 0 = 2x \\ &\Rightarrow y\,\frac{dy}{dx} = x. \end{aligned}$$

Επομένως αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8) με $y \neq 0$, τότε η κλίση της καμπύλης (8) στο σημείο (x, y) είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\,.$$

Άρα αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8) με $y \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{y} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8), τότε

$$x^2 = y^2 + 1 > 0$$

και άρα $x \neq 0$. Επομένως αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8) με $y \neq 0$, τότε

$$\frac{dy}{dx} \neq 0.$$

Αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8) με $y = 0$, τότε, από την (8), παίρνουμε ότι $x = \pm 1$. Εφόσον $y = 0$, $x = \pm 1$ και

$$y\,\frac{dy}{dx} = x$$

έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0.$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

σε όλα τα σημεία της καμπύλης (8). Άρα

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

σε όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (7). Επομένως η παραμετρική καμπύλη (7) δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο της.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8) με $y \neq 0$, τότε

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

και ως εξής: Όπως είπαμε, αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (8) με $y \neq 0$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Έχουμε όμως ότι για όλα τα σημεία της καμπύλης (8) ισχύει ότι $x = \sec t$, για κάποιο $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Εφόσον $\sec t \neq 0$, για όλα τα t για τα οποία η $\sec t$ ορίζεται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0.$$

4ος τρόπος: Τα σημεία στα οποία η παραμετρική καμπύλη

$$x = \sec t,\ y = \tan t, \quad t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη είναι αυτά όπου $\dfrac{dy}{dx} = 0$. Εφόσον

$$\tan^2 t + 1 = \sec t,$$

για όλα τα t για τα οποία οι $\tan t$ και $\sec t$ ορίζονται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, για όλα τα σημεία (x, y) της παραμετρικής καμπύλης (9) ισχύει ότι

$$y^2 + 1 = x^2. \tag{10}$$

Θεωρούμε το y παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της (10) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x^2) = x,$$

$$\frac{d}{dx}(1) = 0,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
y^2 + 1 = x^2 &\Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2 + 1) = \frac{d}{dx}(x^2) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(x^2) \\
&\Rightarrow 2y\,\frac{dy}{dx} + 0 = 2x \\
&\Rightarrow y\,\frac{dy}{dx} = x.
\end{aligned}$$

Εφόσον

$$y\,\frac{dy}{dx} = x$$

έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (10), τότε

$$x^2 = y^2 + 1 > 0.$$

και άρα $x \neq 0$. Επομένως αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (10), τότε

$$\frac{dy}{dx} \neq 0.$$

Άρα

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

σε όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (9). Επομένως η παραμετρική καμπύλη (9) δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο της.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (10), τότε

$$\frac{dy}{dx} \neq 0$$

και ως εξής: Όπως είπαμε, αν (x, y) είναι ένα σημείο της καμπύλης (10), τότε

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Έχουμε όμως ότι για όλα τα σημεία της καμπύλης (10) ισχύει ότι $x = \sec t$, για κάποιο $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Εφόσον $\sec t \neq 0$, για όλα τα t για τα οποία η $\sec t$ ορίζεται, δηλαδή για $t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} \neq 0.$$

Θέμα 5: Να βρεθεί το ολικό ελάχιστο της

$$f(x) = x^2 \, \ln x.$$

Λύση: *1ος τρόπος:* Προφανώς $D_f = (0, \infty)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \, \ln x) \\ &= x^2 \, \frac{d}{dx}(\ln x) + \frac{d}{dx}(x^2) \, \ln x \\ &= x^2 \, \frac{1}{x} + 2x \, \ln x \\ &= x + 2x \, \ln x. \end{aligned}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο D_f. Εφόσον $D_{f'} = (0, \infty)$, η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι $1-1$, $e^{\ln x} = x$, για $x > 0$, και $e^{-\frac{1}{2}} > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x + 2x \, \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 + 2\ln x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \text{ ή } 1 + 2\ln x = 0 \\ \text{και} \\ x > 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \text{ ή } \ln x = -\dfrac{1}{2} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \text{ ή } e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{2}} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = e^{-\frac{1}{2}} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Άρα η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Για το πρόσημο της $f'(x)$, εφόσον $D_{f'} = (0, \infty)$, η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι αύξουσα και $e^{\ln x} = x$, για $x > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x + 2x\,\ln x > 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 + 2\ln x) > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2\ln x > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{-\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Από τον πίνακα που ακολουθεί

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	∞
Πρόσημο της $f'(x)$	-		+
Μονοτονία της $f(x)$	Φθίνουσα		Αύξουσα

παίρνουμε ότι η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ και αύξουσα στο $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Εφόσον το μοναδικό τοπικό ακρότατο της $f(x)$ είναι το τοπικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$, η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Άρα, από τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων και την $\ln(e^x) = x$, το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ είναι

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2\,\ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}\,.$$

2ος τρόπος: Προφανώς $D_f = (0, \infty)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2\,\ln x) \\ &= x^2\,\frac{d}{dx}(\ln x) + \frac{d}{dx}(x^2)\,\ln x \\ &= x^2\,\frac{1}{x} + 2x\,\ln x \\ &= x + 2x\,\ln x. \end{aligned}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο D_f. Εφόσον $D_{f'} = (0,\infty)$, η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι $1-1$, $e^{\ln x} = x$, για $x > 0$, και $e^{-\frac{1}{2}} > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x + 2x\,\ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 + 2\ln x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } 1 + 2\ln x = 0 \\ \text{και} \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \ln x = -\dfrac{1}{2} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{2}} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = e^{-\frac{1}{2}} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Άρα η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(x + 2x\ \ln x) \\
&= \frac{d}{dx}(x) + 2\,\frac{d}{dx}(x\ \ln x) \\
&= \frac{d}{dx}(x) + 2\left(x\,\frac{d}{dx}(\ln x) + \frac{d}{dx}(x)\ \ln x\right) \\
&= 1 + 2\left(x\,\frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right) \\
&= 3 + 2\ln x.
\end{aligned}$$

Άρα, εφόσον $\ln(e^x) = x$,

$$f''(e^{-\frac{1}{2}}) = 3 + 2\ln(e^{-\frac{1}{2}}) = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2.$$

Εφόσον $f'(e^{-\frac{1}{2}}) = 0$ και $f''(e^{-\frac{1}{2}}) > 0$, η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Εφόσον το μοναδικό τοπικό ακρότατο της $f(x)$ είναι το τοπικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$, η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Άρα, από τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων και την $\ln(e^x) = x$, το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ είναι

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2\ \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}\,.$$

Θέμα 6: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x$ και $y = \frac{1}{x^2}$ από $x = \frac{1}{2}$ έως $x = 2$.

Λύση: Βρίσκουμε τα x μεταξύ $\frac{1}{2}$ και 2 στα οποία οι καμπύλες $y = x$ και $y = \frac{1}{x^2}$ τέμνονται. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{x^2} &\Leftrightarrow x^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Άρα μεταξύ $\frac{1}{2}$ και 2 οι καμπύλες $y = x$ και $y = \frac{1}{x^2}$ τέμνονται για $x = 1$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x$ και $y = \frac{1}{x^2}$ από $x = \frac{1}{2}$ έως $x = 2$ είναι

$$A = \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| + \left| \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx \right|.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int x \, dx - \int \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \int x \, dx - \int x^{-2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) \, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) \, dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right]_{1}^{2} \right| \\
&= \left| \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{1} \right) - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \right| + \left| \left(\frac{2^2}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{1} \right) \right| \\
&= \left| -\frac{5}{8} \right| + |1| \\
&= \frac{5}{8} + 1 \\
&= \frac{13}{8} \, .
\end{aligned}
$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το A και ως εξής: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων, το γνωστό ολοκλήρωμα

$$
\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,
$$

και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) \, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} \, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} x \, dx - \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{-2} \, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} x \, dx - \int_{1}^{2} x^{-2} \, dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1}^{2} - \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{1}^{2} \right| \\
&= \left| \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1}^{2} - \left[-\frac{1}{x} \right]_{1}^{2} \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + \left[\frac{1}{x}\right]_{1}^{2} \right| \\
&= \left| \left(\frac{1^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} \right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \right| + \left| \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) \right| \\
&= \left| -\frac{5}{8} \right| + |1| \\
&= \frac{5}{8} + 1 \\
&= \frac{13}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Θέμα 7: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\frac{3^{\log_2 x}}{x} + \sin 2x \right) \, dx.$$

Λύση: Από τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων παίρνουμε ότι

$$\int \left(\frac{3^{\log_2 x}}{x} + \sin 2x \right) \, dx = \int \frac{3^{\log_2 x}}{x} \, dx + \int \sin 2x \, dx.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3^{\log_2 x}}{x} \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \, \frac{1}{x} \, ,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + C$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3^{\log_2 x}}{x} \, dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = \log_2 x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(\log_2 x) \, dx = \dfrac{1}{\ln 2} \, \dfrac{1}{x} \, dx \text{ και άρα } \ln 2 \, du = \dfrac{1}{x} \, dx. \end{array} \right] \\
&= \int 3^u \, \ln 2 \, du \\
&= \ln 2 \int 3^u \, du \\
&= \ln 2 \, \left(\frac{1}{\ln 3} \, 3^u + C \right) \\
&= \ln 2 \, \left(\frac{1}{\ln 3} \, 3^{\log_2 x} + C \right) \\
&= \frac{\ln 2}{\ln 3} \, 3^{\log_2 x} + C.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \sin 2x \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τις ιδιότητες των παραγώγων, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \sin 2x \, dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 2x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(2x)\, dx = 2\, dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{2}\, du = dx. \end{array}\right] \\
&= \int \sin u \, \frac{1}{2} \, du \\
&= \frac{1}{2} \int \sin u \, du \\
&= \frac{1}{2} \left(-\cos u + C\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\cos 2x + C\right) \\
&= -\frac{\cos 2x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{3^{\log_2 x}}{x} + \sin 2x \right) dx &= \left(\frac{\ln 2}{\ln 3} \, 3^{\log_2 x} + C \right) + \left(-\frac{\cos 2x}{2} + C \right) \\
&= \frac{\ln 2}{\ln 3} \, 3^{\log_2 x} - \frac{\cos 2x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3^{\log_2 x}}{x} \, dx$$

και ως εξής: Εφόσον $a^x = e^{(\ln a)\,x}$ και $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} 3^{\log_2 x} &= e^{\ln 3 \, \log_2 x} \\ &= e^{\ln 3 \, \frac{\ln x}{\ln 2}} \\ &= e^{\frac{\ln 3}{\ln 2} \, \ln x}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα, ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τις ιδιότητες των παραγώγων, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\,,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\int \frac{3^{\log_2 x}}{x} \, dx = \\ &= \int \frac{e^{\frac{\ln 3}{\ln 2} \, \ln x}}{x} \, dx \\ &\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \, \ln x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \, \ln x\right) dx = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \, \dfrac{1}{x} \, dx \text{ και άρα } \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \, du = \dfrac{1}{x} \, dx. \end{array} \right] \\ &= \int e^u \, \frac{\ln 2}{\ln 3} \, du \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \int e^u \, du \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \, (e^u + C) \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \, \left(e^{\frac{\ln 3}{\ln 2} \, \ln x} + C\right) \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \, \left(3^{\log_2 x} + C\right) \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \, 3^{\log_2 x} + C. \end{aligned}$$

Θέμα 8: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\frac{1}{2x^2 - 4x + 4} + e^x x^2 \right) dx.$$

Λύση: Από τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων παίρνουμε ότι

$$\int \left(\frac{1}{2x^2 - 4x + 4} + e^x\, x^2 \right) dx = \int \frac{1}{2x^2 - 4x + 4}\, dx + \int e^x\, x^2\, dx.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{2x^2 - 4x + 4}\, dx.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 4 &= 2(x^2 - 2x) + 4 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4 \\ &= 2((x-1)^2 - 1) + 4 \\ &= 2(x-1)^2 + 2 \\ &= (\sqrt{2}(x-1))^2 + 2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα, ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(1) = 0,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a}\, \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{2x^2-4x+4}\,dx = \\
&= \int \frac{1}{(\sqrt{2}(x-1))^2+2}\,dx \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u=\sqrt{2}(x-1). \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(\sqrt{2}(x-1))\,dx = \sqrt{2}\,dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,du = dx. \end{array}\right] \\
&= \int \frac{1}{u^2+2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2+2}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2}}\right) + C \right) \\
&= \frac{1}{2}\,\tan^{-1}(x-1) + C.
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int e^x\,x^2\,dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int e^x\, x^2\, dx &= \int (e^x)'\, x^2\, dx \\ &= e^x\, x^2 - \int e^x\, (x^2)'\, dx \\ &= e^x\, x^2 - \int e^x\, (2x)\, dx \\ &= e^x\, x^2 - 2\int e^x\, x\, dx \\ &= e^x\, x^2 - 2\int (e^x)'\, x\, dx \\ &= e^x\, x^2 - 2\left(e^x\, x - \int e^x\, (x)'\, dx\right) \\ &= e^x\, x^2 - 2\left(e^x\, x - \int e^x \cdot 1\, dx\right) \\ &= e^x\, x^2 - 2\left(e^x\, x - \int e^x\, dx\right) \\ &= e^x\, x^2 - 2\, e^x\, x + 2\int e^x\, dx \\ &= e^x\, x^2 - 2\, e^x\, x + 2(e^x + C) \\ &= e^x\, x^2 - 2e^x\, x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{2x^2 - 4x + 4} + e^x\, x^2\right) dx &= \left(\frac{1}{2}\, \tan^{-1}(x-1) + C\right) + \left(e^x\, x^2 - 2e^x\, x + 2e^x + C\right) \\ &= \frac{1}{2}\, \tan^{-1}(x-1) + e^x\, x^2 - 2e^x\, x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{2x^2 - 4x + 4}\, dx$$

και ως εξής: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x + 4 &= 2(x^2 - 2x + 2) \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1 + 2) \\ &= 2((x-1)^2 + 1).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα, ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(1) = 0,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{2x^2-4x+4}\,dx = \\
&= \int \frac{1}{2((x-1)^2+1)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = (x-1). \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(x-1)\,dx = dx. \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} u + C\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(x-1) + C\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\tan^{-1}(x-1) + C.
\end{aligned}$$