

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
10 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ

1. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sin \left(\frac{3}{x^3} \right) - \frac{\cos x}{x^2} \right).$$

2. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) + 7}{x - 2} = 2,$$

να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

3. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} ax^3, & x \leq 0 \\ bx - c, & x > 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των a , b και c για τις οποίες:

(I) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(II) Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης

$$x = \tan t, y = \sec^2 t, \quad t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

είναι κάθετη στην ευθεία

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

5. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η καμπύλη

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη.

6. Έστω

$$g(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - x.$$

(I) Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $g(x)$.

(II) Να εξεταστεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμψής η $g(x)$.

7. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $(0, 1)$ από την υπερβολή

$$x^2 - y^2 = 2.$$

8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x \cos(x^2)$ και τον άξονα x από $x = 0$ έως $x = \sqrt{\pi}$.

9. Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 e^{x^2} \cos x \, dx.$$

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sec^2(2 \sin x - 4) \cos x \, dx.$$