

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
4 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2008

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ.

1. (α) Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 + x^{\frac{1}{3}}}.$$

(β) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ 9x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των a και b για τις οποίες:

(I) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(II) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

2. (α) Υπολογίστε προσεγγιστικά το $\cos(\frac{\pi}{2} + 0,001)$ βρίσκοντας μία γραμμικοποίηση της $f(x) = \cos x$ με κατάλληλο κέντρο.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = (\sin x)^{\cos x}$ στο $x = \frac{\pi}{2}$.

3. (α) Έστω

$$f(x) = 2x^2 - \ln x.$$

(I) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

(II) Να εξεταστεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής η $f(x)$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$\sin y = \cos x$$

στο σημείο $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

4. (α) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$x = -t^{\frac{3}{2}}, \quad y = 2t,$$

από $t = 0$ έως $t = 1$.

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x \cos x$ και τον άξονα x από $x = 0$ έως $x = \pi$.

5. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\ln^2 x + \frac{e^x}{2e^{2x} + 2e^x + 1} \right) dx.$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 2x + 1} dx.$$