19/12/2018

23ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Το όριο είναι της μορφής 0^0.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^{\sin x}) = \lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\csc x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cdot \cot x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \tan x\right) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \tan x$$

$$= -1 \cdot 0 = 0$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^{\sin x}) = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

Άσκηση 2: Το όριο είναι της μορφής 1^∞.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left((e^x+x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x+x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x+x)}{x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+1)}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \frac{e^0+1}{e^0+0} = 2$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^+} \ln((e^x+x)^{1/x}) = 2$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+} (e^x+x)^{1/x} = e^2$$

$$\left[\lim_{x\to 0^+} (e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln((e^x+x)^{1/x})} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln((e^x+x)^{1/x})} = e^2\right]$$

Άσκηση 3: Το όριο είναι της μορφής 0^0.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \ln((\cos x)^{\cos x}) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x\cdot \ln(\cos x)$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\sec x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα de l'Hopital, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\sec x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\ln(\cos x))'}{(\sec x)'} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\sec x\cdot \tan x} = -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\sec x\cdot \tan x} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = -0 = 0$$

Άρα

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \ln((\cos x)^{\cos x}) = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

Άσκηση 4: Το όριο είναι της μορφής ∞^0.
Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left((1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\ln x} \cdot \ln(1+2x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\ln x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{(\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Άρα

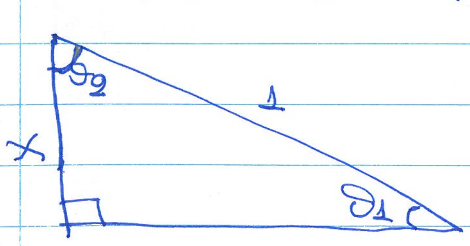
$$\lim_{x\to\infty} \left(\ln (1+2x)^{1/2\ln x}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}} = e^{1/2}.$$

24ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 2: Έστω $0<x<1$
Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η υποτείνουσα έχει μήκος 1 και η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος x.



Έχουμε ότι
$\sin\theta_1 = x$
και ότι $\cos\theta_2 = x$

Εφόσον $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ και $\sin\theta_1 = x$, έχω ότι
$\sin^{-1}x = \theta_1$

Εφόσον $0<\theta_2<\frac{\pi}{2}$ και $\cos\theta_2 = x$ έχω ότι
$\cos^{-1}x = \theta_2$

Γιατί από τριγ. $90° + \theta_1 + \theta_2 = 180° \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 90°$

Άρα
$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$
Επομένως
$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \text{ για } 0 < x < 1 \quad (*)$$

- Έστω $-1 < x < 0$

Εφόσον $-1 < x < 0$, έχουμε ότι
$$0 < -x < 1.$$
Άρα, από την $(*)$,
$$\sin^{-1}(-x) + \cos^{-1}(-x) = \frac{\pi}{2} \quad (+)$$
Γνωρίζουμε ότι
$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x \quad (++)$$
και ότι
$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x \quad (+++)$$
Από τις $(+)$, $(++)$, $(+++)$ παίρνουμε ότι
$$(-\sin^{-1}x) + (\pi - \cos^{-1}x) = \frac{\pi}{2}$$

Άρα
$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$
Επομένως
$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \text{ για } -1 < x < 0. \quad (*****)$$

Επίσης έχουμε ότι
$$\sin^{-1}(-1) + \cos^{-1}(-1) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi = \frac{\pi}{2}, \quad (**)$$

$$\sin^{-1}(0) + \cos^{-1}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (***)$$

$$\sin^{-1}(1) + \cos^{-1}1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \quad (****)$$

Από τις $(*)$, $(**)$, $(***)$, $(****)$, $(*****)$ παίρνουμε ότι
$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \text{ για } x \in [-1, 1]$$

Άσκηση 3: Έχουμε ότι

$$\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{-x}\right) \qquad \left[\sec^{-1}2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \left[\cos^{-1}(-2) = \pi - \cos^{-1}2\right]$$

$$= \pi - \sec^{-1}x$$

Άσκηση 4: Γνωρίζουμε ότι

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta.$$

Άρα,

$$\sec^2(\tan^{-1}(2x)) = 1 + \left(\tan(\tan^{-1}(2x))\right)^2$$

$$= 1 + (2x)^2 \qquad [\tan(\tan^{-1}2) = 2]$$

$$= 1 + 4x^2$$

Επομένως

$$\sqrt{\sec^2(\tan^{-1}(2x))} = \sqrt{1+4x^2}$$

και άρα

$$|\sec(\tan^{-1}(2x))| = \sqrt{1+4x^2}$$

Για $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan^{-1}(2x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Για $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} > 0.$

Άρα, για $x \in \mathbb{R}$,

$$\sec(\tan^{-1}(2x)) > 0$$

Επομένως, για $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sec(\tan^{-1}(2x))| = \sec(\tan^{-1}(2x)).$$

Άρα

$$\sec(\tan^{-1}(2x)) = \sqrt{1+4x^2}.$$

Άσκηση 5: Έστω $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.

Έχουμε ότι

$$\cot(\sin^{-1}x)=\frac{\cos(\sin^{-1}x)}{\sin(\sin^{-1}x)}=\frac{\cos(\sin^{-1}x)}{x}$$

Θα απλοποιήσουμε το $\cos(\sin^{-1}x)$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

και άρα

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta.$$

Άρα,

$$\cos^2(\sin^{-1}x)=1-(\sin(\sin^{-1}x))^2$$
$$=1-x^2$$

Επομένως

$$\sqrt{\cos^2(\sin^{-1}x)}=\sqrt{1-x^2}$$

Και άρα

$$|\cos(\sin^{-1}x)|=\sqrt{1-x^2}.$$

Για ~~όλα τα~~ $x\in[-1,1]$

$$\sin^{-1}x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Για $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta\geq 0$.

Επομένως

$$\cos(\sin^{-1}x)\geq 0,\ \text{για } x\in[-1,1].$$

Άρα,

$$|\cos(\sin^{-1}x)|=\cos(\sin^{-1}x).$$

Επομένως

$$\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Άρα

$$\cot(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$