21ο Φυλλάδιο Ασκήσεων 18/12/2018

Άσκηση 2: προφανώς $D_f=(0,\infty)$.

Εφόσον οι $f_1(x)=x$ και $f_2(x)=\ln x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και στο $(0,\infty)$, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

Έχουμε ότι

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x-\ln x)=1-\frac{1}{x}.$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,\infty)$.

Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Επομένως η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=1$.

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{x} \Leftrightarrow x>1.$$

(α) Η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $(0,1]$ και αύξουσα στο $[1,\infty)$.

(β) Η $f(x)$ έχει τ.ε. για $x=1$

ολικό ελ. γιατί μοναδ. ακρ. κ' f συνεχής

Άσκηση 4: Σημ: Έχουμε ότι

$$1-x>0 \Leftrightarrow x<1.$$

Άρα

$$D_h=(-\infty,1)$$

Έχουμε ότι

$$h'(x)=\frac{d}{dx}(\ln(1-x))$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{d}{dx}(1-x)=$$

$$=\frac{1}{1-x}(-1)$$

$$=\frac{1}{x-1}.$$

Άρα $h'(0)=\frac{1}{0-1}=-1.$

Επίσης έχουμε ότι $h(0)=\ln(1-0)=\ln 1=0.$

Άρα η εφαπτομένη έχει κλίση $m=-1$ και διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
Επομένως η εξίσωση της είναι $y-0=(-1)\cdot(x-0)$
ή $y=-x$

Άσκηση 5: Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\log_5 x}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } u=\log_5 x \\ u=\log_5 x \Rightarrow du=\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln 5\cdot du=\frac{1}{x}dx \end{array}\right]$$

$$=\ln 5\int\frac{du}{\sqrt[3]{u}}=\ln 5\cdot\int u^{-1/3}du$$

$$=\ln 5\cdot\frac{u^{2/3}}{2/3}+C=\frac{3}{2}\cdot\ln 5\cdot(\log_5 x)^{2/3}+C$$

$$=\ln(5^{3/2})\cdot(\log_5 x)^{2/3}+C=\ln(\sqrt[2]{125})\cdot(\log_5 x)^{2/3}+C$$

Άσκηση 6: Έχουμε ότι

$$\int\frac{\csc x\cdot\cot x}{3-\csc x}dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτουμε } u=3-\csc x \\ u=3-\csc x \Rightarrow du=-(-\csc x\cdot\cot x)\cdot dx \Rightarrow \\ du=\csc x\cdot\cot x\,dx \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|3-\csc x|+C$$

Άσκηση 7: Έχουμε ότι

$$\int\frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}+2(\sqrt{x})^2}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } u = 1+\sqrt{x} \\ u = 1+\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1+\sqrt{x}| + C = \ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

Άσκηση 8: Έχουμε δει

$$\int \frac{\sec x}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}\,dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } u = \sec x + \tan x \\ u = \sec x + \tan x \Rightarrow du = (\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x)\,dx \Rightarrow \\ \Rightarrow du = \sec x(\tan x + \sec x)\,dx \Rightarrow \frac{du}{\tan x + \sec x} = \sec x\,dx \\ \Rightarrow \frac{1}{u} \cdot du = \sec x\,dx \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{du}{u \cdot \sqrt{\ln u}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } w = \ln u \\ w = \ln u \Rightarrow dw = \frac{1}{u} \cdot du \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{w^{1/2}}{1/2} + C = 2 \cdot \sqrt{\ln u} + C$$

$$= 2\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)} + C.$$

Άσκηση 9: Οι $f(x) = \log_2 x$ και $g(x) = \log_2(3x)$ είναι συνεχείς στο $[2,4]$

$1^{ος}$ τρόπος: Βρίσκουμε τα x στο $(2,4)$ στα οποία οι $y = \log_2 x$ και $y = \log_2(3x)$ τέμνονται.

Έχουμε δει

$$\log_2 x = \log_2(3x) \Leftrightarrow x = 3x \qquad [\log_2 z \text{ είναι } 1-1]$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι $y=\log_2 x$ και $y=\log_2(3x)$ δεν τέμνονται στο $(2,4)$

Επομένως

$$A=\left|\int_2^4\left(\log_2 x-\log_2(3x)\right)dx\right| =$$

$$=\left|\int_2^4 \log_2\left(\frac{x}{3x}\right)dx\right| = \left|\int_2^4 \log_2\left(\frac{1}{3}\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_2^4 -\log_2 3\,dx\right| = \left|(-\log_2 3)\int_2^4 dx\right|$$

$$=\left|(-\log_2 3)\cdot[x]_2^4\right| = \left|(-\log_2 3)\,2\right| = \left|-2\log_2 3\right| =$$

$$=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9. \qquad [\log_2 3>0]$$

$2^{\text{ος}}$ τρόπος: Έχουμε ότι $\log_2 2$ είναι αύξουσα, γιατί $2>1$.

Άρα, για $x\in[2,4]$

$$x<3x \Rightarrow \log_2 x<\log_2(3x)$$

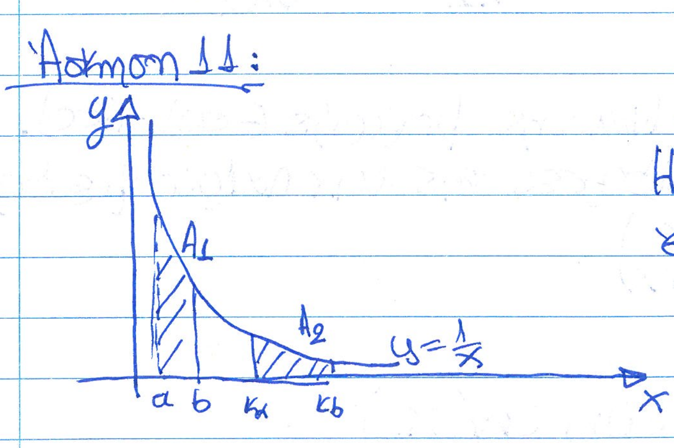
Εναλλακτικά, έχουμε ότι

$$\log_2(3x)=\log_2 3+\log_2 x \overset{\log_2 3>0}{>} \log_2 x$$

Άρα,

$$A=\int_2^4\left(\log_2(3x)-\log_2 x\right)dx$$ συνεχίζουμε όπως πριν.

Άσκηση 11:



Η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

Έχουμε ότι

$$\frac{1}{x}\geq 0 \text{ στο } [a,b]$$

Άρα

$$A_1=\int_a^b \frac{dx}{x}.$$

Έχουμε ότι

$\frac{1}{x}\geq 0$ στο $[κa,κb]$. Άρα

$$A_2=\int_{κa}^{κb}\frac{dx}{x}.$$

Επομένως

$$A_1 = \int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\right]_a^b = \ln|b| - \ln|a| = \ln b - \ln a$$

$[a, b > 0]$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Και

$$A_2 = \int_{ka}^{kb} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\right]_{ka}^{kb} = \ln|kb| - \ln|ka|$$

$[ka, kb > 0]$

$$= \ln(kb) - \ln(ka) = \ln\left(\frac{kb}{ka}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Άρα

$$A_1 = A_2$$

Άσκηση 12: Το όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hôpital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log_2 x)'}{(\log_3(x+3))'} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{x+3}{x} = \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x}$$

$$= \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to\infty} 1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot 1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Άσκηση 13: Το όριο είναι της μορφής $(-\infty) - (-\infty)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της $\ln x$ παίρνουμε ότι

$$\ln x - \ln(\sin x) = \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right).$$

Επομένως

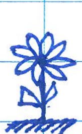
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \ln(\sin x)\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) =$$

Θέτω $u = \frac{x}{\sin x}$

$x \to 0^+ \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \to 1 \Rightarrow u \to 1$

~~Lost~~

$$= \lim_{v \to 1} \ln v = \ln 1 = 0 \qquad [\ln x \text{ συνεχής στο } 1]$$



22ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης και το Θ.Θ.Α.Λ.1 παίρνουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\ln x} \cos(e^t)\,dt\right)$$

$$= \frac{d}{dv}\left(\int_0^{v} \cos(e^t)\,dt\right)\Bigg|_{v=\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \qquad [\text{Κανόνας αλυσιδ. παραγ.}]$$

$$= \cos(e^{v})\Big|_{v=\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \qquad [\text{Θ.Θ.Α.Λ.1}]$$

$$= \cos e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x}$$

Άσκηση 2: Έχουμε ότι

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(2^{e^{\sin x}}\right)$$

$$= \ln 2 \cdot 2^{e^{\sin x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right)$$

$$= \ln 2 \cdot 2^{e^{\sin x}} \cdot e^{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \ln 2 \cdot 2^{e^{\sin x}} \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$$

Άσκηση 3: Η g(x) είναι συνεχής στο [0,2]

Άρα η g(x) έχει Ο.Α. στο [0,2].

Τα Ο.Α. της g(x) εμφανίζονται είτε στα κρίσιμα σημεία της g(x) είτε στα άκρα του Π.Ο. της g(x).

Έχουμε ότι

$g'(x) = \frac{d}{dx}(x - e^{2x}) = \frac{d(x)}{dx} - \frac{d}{dx}(e^{2x})$

$= 1 - e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}(2x) = 1 - 2e^{2x}$

Η $g'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,2)$.

Έχουμε ότι

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2x = \ln(\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow 2x = -\ln 2 \Leftrightarrow x = -\frac{\ln 2}{2}$

Εφόσον $-\frac{\ln 2}{2} < 0$, $g'(x) \neq 0$ για $x \in (0,2)$.

Άρα η $g(x)$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Επομένως τα ο.α. της $g(x)$ εμφανίζονται στα άκρα $x=0$ και $x=2$ του π.ο. της.

Έχουμε ότι

$g(0) = 0 - e^{2 \cdot 0} = -e^{0} = -1$

και

$g(2) = 2 - e^{2 \cdot 2} = 2 - e^{4}$

Έχουμε ότι

$-1 > 2 - e^4 \Leftrightarrow e^4 > 3$

Εφόσον $e^4 > 3$, το ο.μ. της $g(x)$ είναι -1 για $x=0$ και το ο.ε. της $g(x)$ είναι $2-e^4$ για $x=2$.

<u>Άσκηση 4:</u> Έχουμε ότι

$$\int_1^e \frac{2^{\ln x}}{x} dx$$

Θέτω $u = \ln x$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ u(1) = 0, \\ u(e) = 1 \end{array}\right]$$

$$= \int_0^1 2^u \, du = \left[\frac{2^u}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 2} (2^1 - 2^0)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (2-1) = \frac{1}{\ln 2}$$

2^{os} τρόπος: Υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα του

H/W $\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx$ θέτω $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$\int 2^u du = \frac{1}{\ln 2} 2^u + C = \frac{1}{\ln 2} 2^{\ln x} + C$

Άρα, $\int_1^e \frac{2^{\ln x}}{x} dx = \left[\frac{2^{\ln x}}{\ln 2} \right]_1^e = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$.

Άσκηση 5: Έχουμε ότι

$$\int (3 + e^{\sec x}) \sec x \tan x \, dx$$

$$= \int (3 \sec x \tan x + e^{\sec x} \sec x \tan x) dx$$

$$= 3 \int \sec x \tan x \, dx + \int e^{\sec x} \sec x \tan x \, dx$$

$$= 3 \sec x + \int e^{\sec x} \cdot \sec x \tan x \, dx$$

Υπολογίζουμε το

$$\int e^{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$$

Έχουμε ότι

$$\int e^{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$$

[θέτω $u = \sec x$

$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \cdot dx$]

$$= \int e^u du = e^u + C = e^{\sec x} + C$$

Άρα, $\int (3 + e^{\sec x}) \cdot \sec x \tan x \, dx = 3 \sec x + e^{\sec x} + C$.

H/W Σημ.: θα μπορούσα στην αρχή να θέσω $u = \sec x$ $\int (3 + e^u) du = 3u + e^u + C$.

Άσκηση 6: Θέλουμε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις $y=e^x$ και $y=e^{3x}$ από $x=0$ έως $x=\ln 4$.
Οι $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{3x}$ είναι συνεχείς στο $[0,\ln 4]$.
Εφόσον η e^z είναι αύξουσα στο ~~$(0,\infty)$~~ $\mathbb{R}$ και για $x\geq 0$,
$3x\geq x$,
έχουμε ότι, για $x\in[0,\ln 4]$,
$$e^{3x}\geq e^x$$
Άρα
$$A=\int_0^{\ln 4}(e^{3x}-e^x)dx$$
$$=\int_0^{\ln 4}e^{3x}dx-\int_0^{\ln 4}e^x dx$$
$$=\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^{\ln 4}-\left[e^x\right]_0^{\ln 4}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(e^{3\cdot\ln 4}-e^{3\cdot 0}\right)-\left(e^{\ln 4}-e^0\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(e^{\ln 4}\right)^3-1\right)-\left(e^{\ln 4}-1\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(4^3-1\right)-(4-1)=21-3=18$$
2ος τρόπος: Βρίσκουμε τα x στο $(0,\ln 4)$ στα οποία οι $y=e^x$ και $y=e^{3x}$ τέμνονται.

Έχουμε ότι
$$e^x=e^{3x}\Leftrightarrow x=3x \quad [e^z \text{ είναι } 1-1]$$
$$\Leftrightarrow x=0$$
Άρα οι $y=e^x$ και $y=e^{3x}$ δεν τέμνονται στο $(0,\ln 4)$
Επομένως,
$$A=\left|\int_0^{\ln 4}(e^x-e^{3x})dx\right|$$

Άσκηση 7: $1^{ος}$ τρόπος: Έχουμε ότι

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln(x^x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln y = x\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \cdot \ln x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \ln x + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \ln x + 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln x + 1$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\ln x + 1) \cdot y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\ln x + 1) \cdot x^x, \text{ για } x > 0$$

$2^{ος}$ τρόπος: Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}\left((e^{\ln x})^x\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}\right)$$
$$= e^{x\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \ln x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) \text{ [όπως στον } 1^{ο} \text{ τρόπο]}$$
$$= (e^{\ln x})^x \cdot (\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1), \text{ για } x > 0$$

Άσκηση 8: $1^{ος}$ τρόπος: Έχουμε ότι

$$y = (\ln x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln\left((\ln x)^{\ln x}\right)$$
$$\Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln(\ln x) \qquad [\text{για } x > 1]$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x \cdot \ln(\ln x))$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \cdot \ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(\ln x)) =$$

Δεν μπορούμε να απο μειώσω πιο απλά τη σχέση που παραγώγους.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{x}\ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{\ln(\ln x)}{\cancel{x}} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\ln x) + 1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{\ln(\ln x)+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{\ln(\ln x)+1}{x}, \text{ για } x>1.$$

2ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left((\ln x)^{\ln x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left[e^{\ln(\ln x)}\right]^{\ln x}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)}\right)$$

$$= e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\ln x \cdot \ln(\ln x)\right)$$

$$= e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \cdot \frac{\ln(\ln x)+1}{x} \quad \text{[όπως στον 1ο τρόπο]}$$

$$= \left(e^{\ln(\ln x)}\right)^{\ln x} \cdot \frac{\ln(\ln x)+1}{x}$$

$$= (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{\ln(\ln x)+1}{x}, \text{ για } x>1$$

<u>Άσκηση 9</u>: (α) Το όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hôpital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

• το e^x μεγαλώνει πολύ πιο γρήγορα από το x.

(β) Το όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον καν. L'Hôpital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{2}\cdot\infty \quad [\text{από το } (\alpha)]$$

$$= \infty$$

• Η e^x μεγαλώνει πολύ πιο γρήγορα από οποιαδήποτε πολυωνυμική.

Άσκηση 10: Έχουμε ότι

$$\pi^e < e^\pi \iff$$

$$\iff \ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$$

$$\iff e\cdot\ln\pi < \pi\cdot\ln e$$

$$\iff \frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$$

[($\Rightarrow$): γιατί: $\ln x$ αύξουσα
($\Leftarrow$): e^x αύξουσα]

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $D_f = (0,\infty)$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$
Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)\cdot x - \ln x\cdot\frac{d}{dx}(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,\infty)$.
Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \iff 1-\ln x = 0 \iff$$

$$\ln x = 1 \iff x = e.$$

Άρα η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x = e$.
Έχουμε ότι

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$$

$$\iff 1 - \ln x > 0 \quad [x^2 > 0]$$

$$\iff \ln x < 1 \iff x < e.$$

[Ερώτ.: Γιατί; $\ln x$ αύξ. $\ln e = 1$]

Άρα η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $(0,e]$ και φθίνουσα στο $[e,\infty)$

Έχουμε ότι $e, \pi \in [e,\infty)$

Άρα, $e<\pi \Rightarrow f(\pi) < f(e)$

$$\Rightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$$

Επομένως $\pi^e < e^\pi$.

οπίσω: Άσκηση 1 | 21° φυλλάδιο Ασκήσεων

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\log_2(x)\cdot\log_3(x)\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}(\log_2 x)\cdot\log_3 x + \log_2 x\cdot\frac{d}{dx}(\log_3 x)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\log_3 x + \log_2 x\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\log_3 x}{x\cdot\ln 2} + \frac{\log_2 x}{x\ln 3}$$

Άσκηση 3 | 21° Φ.Α.

Έχουμε ότι $y = \dfrac{\sqrt[5]{x(x+1)^2}}{(x-2)^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\frac{\sqrt[5]{x(x+1)^2}}{(x-2)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{(x+1)^2} - \ln(x-2)^3$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^{1/5} + \ln(x+1)^{2/5} - 3\ln(x-3)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\ln x^{1/5} + \ln(x+1)^{2/5} - 3\ln(x-3)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}\ln x\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}\ln(x+1)\right) - 3\frac{d}{dx}\left(\ln(x-3)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[5]{x(x+1)^2}}{(x-2)^3}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{x} + \frac{2}{5}\frac{1}{x+1} - 3\left(\frac{1}{x-3}\right)\right)$$