Αν $0<\alpha<b<3$, τότε
$f(x)>0$, για $x\in[\alpha,b]$,
και επομένως $\int_\alpha^b f(x)dx>0$.

Έστω $0<\alpha'<\alpha<b<b'<3$
τότε
$$\int_{\alpha'}^{b'} f(x)dx=\underbrace{\int_{\alpha'}^{\alpha} f(x)dx}_{\substack{\vee\\0}}+\int_\alpha^b f(x)dx+\underbrace{\int_b^{b'} f(x)dx}_{\substack{\vee\\0}}>\int_\alpha^b f(x)dx$$

Άρα, η τιμή του $\int_\alpha^b f(x)dx$
αυξάνει αν $\alpha\to0^+$ και $b\to3^-$.
Δεν γνωρίζω αν έχει μέγιστη τιμή.

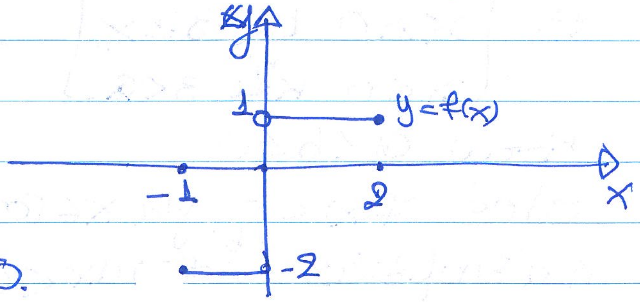
Παρατ.: το $\int_0^3 \frac{dx}{3x-x^2}$ δεν ορίζεται.

Ολοκληρώματα αυτής της μορφής ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα.

18ο Φυλλάδιο Ασκήσεων.

1) Εφόσον η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$, από το Θ.Μ.Τ. για ορισμένα ολοκληρώματα, υπάρχει $c\in[\alpha,b]$ τ.ω.
$$f(c)=av(f)=\frac{1}{b-\alpha}\cdot\int_\alpha^b f(x)dx=\frac{1}{b-\alpha}\cdot0=0$$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει αν η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$.
Για παράδειγμα, έστω
$$f(x)=\begin{cases}-2, & -1\le x\le 0\\ 1, & 0<x\le 2\end{cases}$$



Η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο 0.
Έχουμε ότι
$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=\int_{-1}^0 -2dx+\int_0^2 dx=$$

$(-2)+2=0$

Προφανώς $f(x)\neq 0$ για $x\in[-1,2]$.

2) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων, τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης και το Θ.Θ.Α.Λ.Ι.

Παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\int_{0}^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}\right)=-\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$=-\frac{d}{du}\left(\int_{0}^{u}\frac{dt}{1+t^2}\right)\Bigg|_{u=\tan x}\cdot\frac{d}{dx}(\tan x)\quad\left[\text{κανόνα αλυσιδ. παραγ.}\right]$$

$$=-\frac{d}{du}\left(\int_{0}^{u}\frac{dt}{1+t^2}\right)\Bigg|_{u=\tan x}\cdot\sec^2 x$$

$$=-\frac{1}{1+u^2}\Bigg|_{u=\tan x}\cdot\sec^2 x=-\frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot\sec^2 x$$

$$=-\frac{1}{\sec^2 x}\cdot\sec^2 x=-1.\quad[\text{Θ.Θ.Α.Λ.Ι}]$$

<u>Παρατήρηση</u>: Εφόσον

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}\right)=-1$$

θα ισχύει ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}\right)=\frac{d}{dx}(-x)$$

Άρα, υπάρχει $C\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}=-x+C.$$

3) Έχουμε ότι

$$\int_0^x f(t)dt = x\cdot\cos(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}(x\cdot\cos(\pi x))$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{d}{dx}(x\cdot\cos(\pi x)) \quad [\Theta.\Theta.A.\Lambda.\ 1].$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos(x\pi) + x(-\sin(x\pi)\cdot\pi)$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos(x\pi) - \pi x\sin(x\cdot\pi)$$

4) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης και το Θ.Θ.Α.Λ.1 παίρνουμε ότι

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(3 + \int_1^{x^2}\sec(1-t)dt\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(3) + \frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2}\sec(1-t)dt\right)$$

$$= 0 + \frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2}\sec(1-t)dt\right)$$

$$= \frac{d}{dv}\left(\int_1^{v}\sec(1-t)dt\right)\Bigg|_{v=x^2}\frac{d}{dx}(x^2) \quad [\text{κανόνα αλυσ. παραγ.}]$$

$$= \frac{d}{dv}\left(\int_1^{v}\sec(1-t)dt\right)\Bigg|_{v=x^2}\cdot 2x$$

$$= \sec(1-x^2)\cdot 2x = 2\sec(1-x^2)x$$

Άρα, $g'(1) = 2\cdot\sec(1-1^2)\cdot 1$

$$= 2\cdot 1 = 2$$

Επίσης έχουμε ότι

$$g(1) = 3 + \int_1^{1^2} \sec(1-t)\,dt =$$

$$= 3 + \int_1^1 \sec(1-t)\,dt = 3 + 0 = 3$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = g(x)$ στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x = 1$, είναι

$$y - 3 = 2(x-1)$$

ή $y = 2x + 1$.

5) Παρατήρηση: Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int \frac{dx}{x}.$$

Από όσα έχουμε πεί μέχρι τώρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int \frac{dx}{x}$.

Πρέπει να βρούμε μιά αντιπαράγωγο της $\frac{1}{x}$.

Έστω

$$F(x) = \int_4^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$$

Τότε, από το Θ.Θ.Α.Λ.1, παίρνω ότι

$$\frac{dF}{dt} = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_4^x \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{x}.$$

Επομένως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx}, \quad \text{για } x > 0.$$

Άρα, υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$y = F(x) + C, \quad x > 0$$

Εφόσον $y(4) = 1$,

$$F(4) + C = 1$$

Έχουμε ότι

$$F(4) + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_4^4 \frac{dt}{t} + C = 1 \Rightarrow 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Επομένως,

$$y = \int_4^x \frac{dt}{t} + 1.$$

6) Έχουμε ότι

$$av(f) = \frac{1}{\pi - 0} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx \right)$$

Αν $x \in [0, \pi/2] \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x \geq 0$
$\Rightarrow |\cos x| = \cos x$
Αν $x \in [\pi/2, \pi] \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x \leq 0$
$\Rightarrow |\cos x| = -\cos x$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx \right)$$

[Θ.Θ.Α.Λ. 2]

$$= \frac{1}{\pi} \left([\sin x]_0^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin \pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left((1-0) - (0-1) \right) = \frac{2}{\pi}$$

11/12/2018

<u>19ο Φυλλάδιο Ασκήσεων</u>

1) Έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (1 - \sin x)^{3/2}\,dx$$

[Θέτω $u = 1 - \sin x$
$u = 1 - \sin x \Rightarrow du = -\cos x \cdot dx \Rightarrow -du = \cos x\,dx$
$u(0) = 1 - \sin 0 = 1$, $u(\pi/2) = 1 - \sin\frac{\pi}{2} = 0$]

$$= -\int_1^0 u^{3/2}\,du = \int_0^1 u^{3/2}\,du = \left[\frac{u^{5/2}}{5/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\left(1^{5/2} - 0^{5/2}\right) = \frac{2}{5}$$

2ος τρόπος: Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \cos x\cdot(1-\sin x)^{3/2}\,dx.$$

Έχουμε ότι

$$\int \cos(1-\sin x)^{3/2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } u = 1-\sin x \\ u = 1-\sin x \Rightarrow du = -\cos x\,dx \Rightarrow -du = \cos x\,dx \end{array}\right]$$

$$= -\int u^{3/2}\,du = -\frac{u^{5/2}}{5/2} + C = -\frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

$$= -\frac{2}{5}(1-\sin x)^{5/2} + C$$

Άρα, από Θ.Θ.Α.Λ.2, $\int_0^{\pi/2} \cos x(1-\sin x)^{3/2}\,dx = \left[-\frac{2}{5}(1-\sin x)^{5/2}\right]_0^{\pi/2}$

$$-\frac{2}{5}\cdot\Big((1-\sin(\pi/2)) - (1-\sin 0)\Big) = \frac{2}{5}$$

2) 1ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\cdot\sec^2 x\,dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } \underline{u = \tan x} \\ u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx \\ u(0) = \tan 0 = 0 \\ u(\pi/4) = \tan \pi/4 = 1 \end{array}\right] = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

H/W 2ος τρόπος: Υπολογίζω αρχικά το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την ίδια αντικατάσταση με τον 1ο τρόπο.

Λύση: Έχουμε ότι

$$\int \tan x \sec^2 x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+C = \frac{\tan^2 x}{2}+C$$

$u=\tan x \Rightarrow du=\sec^2 x\,dx$

Επομένως από ΘΘΑΛ.2

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx = \left[\frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\tan^2(\pi/4)}{2}-\frac{\tan 0}{2}=\frac{1}{2}.$$

3ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec x \cdot \sec x\,dx$$

Θέτω $W=\sec x$

$W=\sec x \Rightarrow dW=\tan x \cdot \sec x\,dx$

$W(0)=\sec(0)=1$

$W(\pi/4)=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

$$=\int_1^{\sqrt{2}} W\,dW = \left[\frac{W^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}$$

H/W 4ος τρόπος: Υπολογίζω το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την ίδια αντικατάσταση με τον 3ο τρόπο.

Έχουμε ότι

$$\int \tan x \sec^2 x\,dx = \int \tan x \sec x \sec x\,dx = \int W\,dW = \frac{W^2}{2}+C = \frac{\sec^2 x}{2}+C$$

Θέτω $W=\sec x$

$W=\sec x \Rightarrow dW=\tan x \sec x\,dx$

Επομένως

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx = \left[\frac{\sec^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}{2}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

5ος τρόπος: Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα.

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx$$

Έχουμε ότι

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } z = \cos x \\ z = \cos x \Rightarrow dz = -\sin x \, dx \Rightarrow -dz = \sin x \, dx \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dz}{z^3} = -\int z^{-3} dz = -\frac{z^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \frac{1}{2z^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Άρα από Θ.Θ.Α.Λ.2,

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x \, dx = \left[\frac{1}{2\cos^2 x}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2\cdot\cos^2(\pi/4)} - \frac{1}{2\cos^2 0} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2\cdot 1^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

H/W

6ος τρόπος: Υπολογίζω το ορισμένο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που χρησιμοποίησα στον 5ο τρόπο.

Έχουμε ότι $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } z = \cos x \\ z = \cos x \Rightarrow dz = -\sin x \, dx \Rightarrow -dz = \sin x \, dx \\ z(0) = \cos 0 = 1 \quad , \quad z(\pi/4) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{z^3} = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} z^{-3} dz =$$

$$= \left[\frac{z^{-2}}{-2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot\frac{2}{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3) 1ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{\sec\theta}}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{\sin\theta \cdot \sqrt{\cos\theta}}{\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\, d\theta$$

Θέτω $y = \cos\theta$

$y = \cos\theta \Rightarrow dy = -\sin\theta\, d\theta \Rightarrow -dy = \sin\theta\, d\theta$

$y(0) = \cos 0 = 1$

$y(\pi/3) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(- \int_1^{1/2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} y^{-1/2}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{y^{1/2}}{1/2} \right]_{1/2}^{1} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} \cdot \left[y^{1/2} \right]_{1/2}^{1} = \sqrt{2} \left(1^{1/2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} - 1$$

2ος τρόπος: Υπολογίζω το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την ίδια αντικατάσταση με τον 1ο τρόπο.

3ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}} \cdot d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{\sec\theta}}\, d\theta$$

Θέτω $W = \sec\theta$

$W = \sec\theta \Rightarrow dW = \tan\theta \cdot \sec\theta \cdot d\theta \Rightarrow \frac{1}{\sec\theta} \cdot dW = \tan\theta \cdot d\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{W}\, dW = \tan\theta\, d\theta$

$$\left[\begin{array}{l} W(0)=\sec 0=1 \\ W(\pi/3)=\sec(\pi/3)=2 \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{w}}\cdot\frac{1}{w}\cdot dw = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2 w^{-3/2}\,dw$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{w^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^2 = -\sqrt{2}\left(2^{-1/2}-1^{-1/2}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) = \sqrt{2}-1$$

Σημείωση: Θα μπορούσα να γράψω

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}}\cdot d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta\cdot\sec\theta}{\sqrt{\sec\theta}\cdot\sec\theta}\,d\theta =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta\cdot\sec\theta}{(\sec\theta)^{3/2}}\,d\theta$$

και να θέσω $u=\sec\theta$.

1^{os} τρόπος: Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που χρησιμοποιήσαμε στον 3^o τρόπο.

20° Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Η $f(x)=x^3+x^2-x-1$ είναι συνεχής στο $[0,2]$.
Βρίσκω τα x στο $(0,2)$ στα οποία η $y=f(x)$ τέμνει τον άξονα x, δηλ. $f(x)=0$.
Επομένως
$x^3+x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)-(x+1)=0 \Leftrightarrow$
$(x^2-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$ ή $x+1=0$
$\Leftrightarrow x^2=1$ ή $x=-1$
$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.
Άρα, η $y=x^3+x^2-x-1$ τέμνει τον άξονα x στο $(0,2)$ μια $x=1$.
Επομένως,

$$A=\left|\int_0^1 (x^3+x^2-x-1)\,dx\right|+\left|\int_1^2 (x^3+x^2-x-1)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(\frac{0^4}{4}\ldots\right)\right|+\left|\left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-1\right)\right|$$

$$=\left|-\frac{11}{12}\right|+\left|\frac{55}{12}\right|=\frac{11}{12}+\frac{55}{12}=\frac{66}{12}=\frac{11}{2}.$$

2) Η $f(x)=x^{1/3}-x$ είναι συνεχής στο $[1/8,8]$.

Βρίσκω τα x στο $(1/8,8)$ στα οποία η $y=x^{1/3}-x$ τέμνει τον άξονα x.

Έχουμε ότι

$$x^{1/3}-x=0 \Leftrightarrow x^{1/3}(1-x^{2/3})=0$$
$$\Leftrightarrow x^{1/3}=0 \text{ ή } 1-x^{2/3}=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^{2/3}=1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2=1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1$$

Άρα η $y=x^{1/3}-x$ τέμνει τον άξονα x στο $(1/8,8)$ για $x=1$.

Επομένως

$$A=\left|\int_{1/8}^1 (x^{1/3}-x)\,dx\right|+\left|\int_1^8 (x^{1/3}-x)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^{4/3}}{4/3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1/8}^1\right|+\left|\left[\frac{x^{4/3}}{4/3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^8\right|$$

$$=\left|\frac{3}{4}\left[x^{4/3}\right]_{1/8}^1-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{1/8}^1\right|+\left|\frac{3}{4}\left[x^{4/3}\right]_1^8-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^8\right|$$

$$=\left|\frac{3}{4}\left(1^{4/3}-\left(\frac{1}{8}\right)^{4/3}\right)-\frac{1}{2}\left(1^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)\right|+\left|\frac{3}{4}\left(8^{4/3}-1^{4/3}\right)-\frac{1}{2}\left(8^2-1^2\right)\right|=$$

$$= \left|\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{64}\right)\right| + \left|\frac{3}{4}(16-1)-\frac{1}{2}(64-1)\right|$$

$$\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{4/3} = \frac{1}{8^{4/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\right]$$

$$= \left|\frac{27}{128}\right| + \left|-\frac{81}{4}\right| = \frac{27}{128} + \frac{81}{4} = \frac{2619}{128}$$

3) Οι $f(x)=x^4-4x^2+4$ και $g(x)=x^2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
Βρίσκουμε τα x στα οποία οι $y=x^4-4x^2+4$ και $y=x^2$ τέμνονται.
Έχουμε ότι

$$x^4-4x^2+4=x^2 \Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$$
$$(x^2)^2-5x^2+4=0$$
$$\Leftrightarrow x^2=1 \text{ ή } x^2=4$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2$$

Άρα οι καμπύλες τέμνονται για $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$.
Επομένως,

$$A = \left|\int_{-2}^{-1}((x^4-4x^2+4)-x^2)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}((x^4-4x^2+4)-x^2)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2}((x^4-4x^2+4)-x^2)\,dx\right|$$

Σημείωση: Αντί για $(x^4-4x^2+4)-x^2$ θα μπορούσα να γράψω $x^2-(x^4-4x^2+4)$.

H/W → Άσκ: ολοκληρώστε τον υπολογισμό του εμβαδού

4) Οι $f(x)=\sin(2x)$ και $g(x)=2\sin x$ είναι συνεχείς στο $[0,\pi]$.
Βρίσκουμε τα x στο $(0,\pi)$ στα οποία οι $y=\sin(2x)$ και $y=2\sin x$ τέμνονται.
Έχουμε ότι

$$\sin(2x)=2\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x=2\sin x$$
$$\Leftrightarrow \sin x\cdot\cos x=\sin x \Leftrightarrow \cos x=1 \qquad [\sin x\neq 0,\ \text{για } x\in(0,\pi)]$$
$$\Leftrightarrow x=2k\pi$$

Άρα οι $y=\sin(2x)$ και $y=2\sin x$ δεν τέμνονται στο $(0,\pi)$.
Επομένως

$$A=\left|\int_0^{\pi}(\sin(2x)-2\sin x)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_0^{\pi}\sin(2x)dx-2\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right|$$

$$=\left|\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi}-2\left[-\cos x\right]_0^{\pi}\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{2}(\cos(2\pi)-\cos(0\cdot 2))+2(\cos\pi-\cos 0)\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{2}(1-1)+2((-1)-1)\right|=|-4|=4$$

Σημείωση: Αντί για $\sin(2x)-2\sin x$ στο ολοκλήρωμα θα μπορούσα να πάρω $2\sin x-\sin(2x)$.

5) Θέλω το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες
$y=-x+2$ και $y=4-x^2$ από $x=-2$ έως $x=3$.

Οι $f(x)=-x+2$ και $g(x)=4-x^2$ είναι συνεχείς στο $[-2,3]$
Βρίσκουμε τα x στο $(-2,3)$ ~~στα~~ για τα οποία οι $y=-x+2$ και $y=4-x^2$ τέμνονται.
Έχουμε ότι
$-x+2=4-x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$
$\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$.
Άρα η $y=-x+2$ και $y=4-x^2$ τέμνονται στο $(-2,3)$ για $x=2$ και $x=-1$.

Επομένως

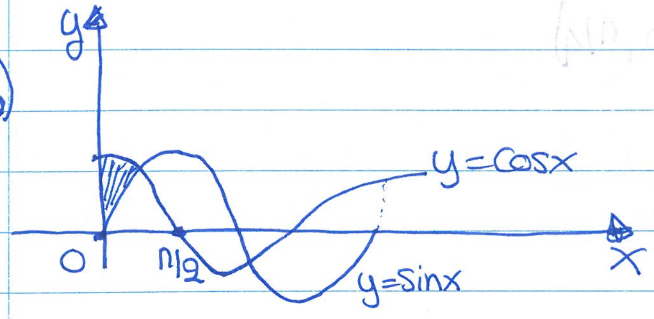
$$A=\left|\int_{-2}^{-1}((-x+2)-(4-x^2))\,dx\right|+\left|\int_{-1}^{2}((-x+2)-(4-x^2))\,dx\right|+$$

$$\left|\int_{2}^{3}((-x+2)-(4-x^2))\,dx\right|.$$

Σημείωση: Αντί για $(-x+2)-(4-x^2)$ θα μπορούσα να πάρω $(4-x^2)-(-x+2)$.

H/W → Ασκ: Ολοκληρώστε τον υπολογισμό του εμβαδού.

6)



Οι $f(x)=\sin x$ και $g(x)=\cos x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$

Βρίσκουμε τα x στο $(0, \pi/2)$ στα οποία η $y=\sin x$ και $y=\cos x$ τέμνονται.

Έχουμε ότι

$\sin x = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$ $\quad [x \in (0, \pi/2) \Rightarrow \cos x \neq 0]$

$\Leftrightarrow \tan x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

Άρα,

$$A = \left| \int_0^{\pi/4} (\sin x - \cos x)dx \right| = \left| \int_0^{\pi/4} \sin x dx - \int_0^{\pi/4} \cos x dx \right|$$

$$= \left| [-\cos x]_0^{\pi/4} - [\sin x]_0^{\pi/4} \right| =$$

$$= \left| -(\cos \pi/4 - \cos 0) - (\sin(\tfrac{\pi}{4}) - \sin(0)) \right|$$

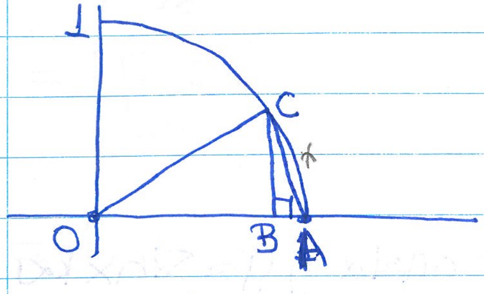
$$= \left| -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) \right| = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

Σημείωση: Αντί για $\sin x - \cos x$ στο ολοκλήρωμα θα μπορούσα να πάρω $\cos x - \sin x$

7) Οι $f(x)=x$ και $g(x)=\sin x$ είναι συνεχείς στο $[0,\pi/4]$.
Δεν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $x=\sin x$.
θ.δ.ο.

$$x \geq \sin x, \text{ για } x \in (0,\pi/4)$$

<u>1^{ος} τρόπος</u>:



Έχουμε ότι

$$BC \leq AC \leq \overset{\frown}{AC}$$

Άρα

$$\sin x \leq x$$

<u>2^{ος} τρόπος</u>: Προχωρημένος

$$x \geq \sin x \Leftrightarrow x-\sin x \geq 0$$

Έστω $h(x)=x-\sin x$, $x \in [0,\pi/4]$.
θ.δ.ο.

$$h(x) \geq 0, \text{ για } x \in [0,\pi/4]$$

Έχουμε ότι
$h(0)=0-\sin 0=0$.
Άρα για ν.δ.ο. $h(x) \geq 0$, για $x \in [0,\pi/4]$
αρκεί ν.δ.ο. η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $[0,\pi/4]$.
Έχουμε ότι

$$h'(x)=\frac{d}{dx}(x-\sin x) = 1-\cos x \geq 0, \text{ για } x \in (0,\pi/4).$$

Άρα η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $[0,\pi/4]$.
Επομένως

$$x \geq \sin x, \; x \in [0,\pi/4].$$

Εφόσον

$$x \geq \sin x, \text{ για } x \in [0,\pi/4],$$

έχουμε ότι

$$A=\int_0^{\pi/4}(x-\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/4}x\,dx-\int_0^{\pi/4}\sin x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/4}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-0^2\right)+\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{32}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{\pi^2+16\sqrt{2}-32}{32}$$

The end.

Σημειώσεις 13/12/18 σε φύλλα 14/12/2018

② Ειδικές Συναρτήσεις

• Παράγωγος Αντίστροφης συνάρτησης

Θεώρημα 1: Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1 στο διάστημα I.

Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και $f'(x)\neq 0$ για $x\in I$, τότε η $f^{-1}(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(I)$.

Ισχύει ότι

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(x_0)}=\frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}} \quad ή \quad \left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=z_0}=\frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(z_0)}}$$

$f'^{-1}(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$ $\qquad$ $f'^{-1}(z_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))}$

• Η αντίστροφη της $\ln x$

Η $\ln x$ είναι αύξουσα και άρα είναι 1-1.

Το π.ο. της $\ln x$ είναι το $(0,\infty)$ και η εικόνα της είναι το $\mathbb{R}$.

Επομένως υπάρχει η αντίστροφη της $\ln x$, $\ln^{-1}x$, με π.ο. το $\mathbb{R}$ και εικόνα το $(0,\infty)$.