4/12/2018

15ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Έχουμε ότι

$$\int \left(12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y) - \cot^5(y/3)\cdot \sec^2(y/3) \right) dy =$$

$$= 12\int (y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy - \int \cot^5(y/3)\cdot\sec^2(y/3)\,dy$$

Υπολογίζουμε το

$$\int (y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy$$

Έχουμε ότι

$$\int (y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy$$

Θέτουμε $v = y^4+4y^2+1$

$v = y^4+4y^2+1 \Rightarrow dv = (4y^3+8y)\,dy \Leftrightarrow$

$dv = 4(y^3+2y)\,dy \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot dv = (y^3+2y)\,dy$

$$= \frac{1}{4}\int v^2 \cdot dv = \frac{1}{4}\cdot\frac{v^3}{3} + c = \frac{v^3}{12} + c$$

$$= \frac{(y^4+4y^2+1)^3}{12} + c$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \cot^5(y/3)\cdot \sec^2(y/3)\,dy$$

Έχουμε ότι

$$\int \cot^5(y/3)\cdot \sec^2(y/3)\,dy =$$

Θέτω $z = \frac{y}{3}$

$z = \frac{y}{3} \Rightarrow dz = \frac{1}{3}dy \Rightarrow 3\,dz = dy$

$$= 3\int \cot^5(z)\cdot \sec^2 z\, dz = 3\int \left(\frac{1}{\tan z}\right)^5 \cdot \sec^2 z\, dz$$

[θέτω $u = \tan z$
$u = \tan z \Rightarrow du = \sec^2 z\, dz$]

$$= 3\int \left(\frac{1}{u}\right)^5 du = 3\int u^{-5} du = 3\cdot\left(\frac{u^{-4}}{-4}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{4u^4} + C = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\tan^4 z} + C = -\frac{3}{4\tan^4(y/3)} + C$$

Σημ/ε.: θα μπορούσα να θέσω $u = \tan(y/3)$.

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\int \left(12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y) - \cot^5(y/3)\cdot\sec^2(y/3)\right) dy$$

$$= 12\cdot\frac{(y^4+4y^2+1)^3}{12} - \left(-\frac{3}{4\tan^4(y/3)}\right) + C$$

$$= (y^4+4y^2+1)^3 + \frac{3}{4}\cot^4(y/3) + C$$

2) Έχουμε ότι

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} + \frac{4}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)dx$$

$$= 3\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} + 4\int\frac{1}{x^3}\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$$

Υπολογίζω το

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } z = 1+\sqrt{x} \\ z = 1+\sqrt{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx \Leftrightarrow 2dz = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array}\right]$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2} = 2\int z^{-2} dz = 2 \cdot \frac{z^{-1}}{-1} + c = \frac{-2}{z} + c$$

$$= \frac{-2}{1+\sqrt{x}} + c$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Έχουμε ότι

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = \frac{1}{x^2} \\ y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow dy = -2x^{-3} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dy = \frac{1}{x^3} dx \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sin y \cdot \cos y \, dy$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{θέτω } z=\sin y \\ z=\sin y \Rightarrow dz=\cos y\, dy\end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\int z\, dz = -\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2}+C = -\frac{z^2}{4}+C$$

$$= -\frac{\sin^2 y}{4}+C = -\frac{1}{4}\cdot\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)+C$$

Σημ: (α) Θα μπορούσα από την αρχή να θέσω $y=\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(β) Για το

$\int \sin y\cdot\cos y\, dy$ δείτε την Άσκ.5

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}+\frac{4}{x^3}\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)dx=$$

$$=3\left(\frac{-2}{1+\sqrt{x}}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{6}{1+\sqrt{x}}-\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)+C$$

3) Έχουμε ότι

$$\int\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\cdot\sin^3(\sqrt{x})}dx = \int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sin^3(\sqrt{x})}}dx$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{θέτω } u=\sqrt{x} \\ u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{array}\right]$$

$$2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 2 \int \frac{\cos v}{\sqrt{\sin^3 v}} \, dv$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } w = \sin v \\ w = \sin v \Rightarrow dw = \cos v \cdot dv \end{array} \right]$$

$$= 2 \cdot \int \frac{dw}{\sqrt{w^3}} = 2 \cdot \int w^{-3/2} \, dw$$

$$= 2 \cdot \frac{w^{-1/2}}{-1/2} + C = -\frac{4}{\sqrt{w}} + C = -\frac{4}{\sqrt{\sin v}} + C$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{\sin(\sqrt{x})}} + C.$$

Σημ: Θα μπορούσα να θέσω από την αρχή $y = \sin(\sqrt{x})$.

4) Εφαπτομένη

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\int \tan^2(7 - 2x^3) \cdot 3x^2 dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } v = 7 - 2x^3 \\ v = 7 - 2x^3 \Rightarrow dv = -6x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot dv = 3x^2 dx \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \int \tan^2 v \, dv = -\frac{1}{2} \int (\sec^2 v - 1) \, dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\int \sec^2 v \, dv - \int dv \right) = -\frac{1}{2} \left(\tan v - v \right) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \tan v + \frac{v}{2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \tan(7 - 2x^3) + \frac{7 - 2x^3}{2} + C$$

5) <u>1ος τρόπος</u> : Έχουμε ότι

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx =$$

Θέτουμε $u = \sin x$

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$

$$= \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

<u>2ος τρόπος</u>: Έχουμε ότι

Θέτουμε $u = \cos x$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\, dx \Rightarrow -du = \sin x\, dx$

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = -\int u\, du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$$

<u>3ος τρόπος</u>: Έχουμε ότι

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int 2 \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) + C = -\frac{\cos(2x)}{4} + C$$

<u>Παρατήρηση</u>: Πήραμε ότι

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C_1,$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2,$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + C_3.$$

Γιατί είναι ίδια τα τρία αποτελέσματα;

Έχουμε ότι

$$\frac{\sin^2 x}{2} + C_1 = \frac{1-\cos^2 x}{2} + C_1 =$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + \left(C_1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2$$

Επίσης έχουμε ότι

$$-\frac{\cos(2x)}{4} + C_3 = -\frac{2\sin^2 x - 1}{4} + C_3$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + \left(C_3 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2$$

6) Έχουμε ότι

$$\int \csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

[Θέτω $u = \frac{\pi}{2} - x$

$u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow -du = dx$]

$$= -\int \csc^2 u \cdot \cot u \cdot du.$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \csc^2 u \cdot \cot u \, du$$

$1^{ος}$ τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int \csc^2 u \cdot \cot u \, du$$

[Θέτω $w = \cot u$

$w = \cot u \Rightarrow dw = -\csc^2 u \, du \Rightarrow -dw = \csc^2 u \, du$]

$$= -\int w \, dw = -\frac{w^2}{2} + C = -\frac{\cot^2 u}{2} + C$$

2ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int \csc^2 u \cdot \cot u \, du =$$

$$= \int \csc u \cdot \csc u \cdot \cot u \, du$$

Θέτω $w = \csc u$

$w = \csc u \Rightarrow dw = -\csc u \cdot \cot u \, du$

$\Rightarrow -dw = \csc u \cdot \cot u \, du$

$$= -\int w \, dw = -\frac{w^2}{2} + C = -\frac{\csc^2 u}{2} + C$$

Ερώτ.: Γιατί είναι ίδια τα αποτελέσματα που βρήκα;

Ισχύει $\boxed{\cot^2 u + 1 = \csc^2 u}$

Άρα, $\displaystyle\int \csc^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \frac{\cot^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2} + C$

ή $\displaystyle\int \csc^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2} + C$

f) (α) Έχουμε ότι

$a(t) = \pi^2 \cos(\pi t) \Rightarrow v'(t) = \pi^2 \cos(\pi t)$

$\Rightarrow \int v'(t) \, dt = \int \pi^2 \cos(\pi t) \, dt$

$\Rightarrow v(t) = \int \pi^2 \cos(\pi t) \, dt$

$\Rightarrow v(t) = \pi^2 \int \cos(\pi t) \, dt$

$\Rightarrow v(t) = \pi^2 \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi} + C$

$\Rightarrow v(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + C$

Επειδή $v(0) = 8$, έχουμε ότι $\pi \cdot \sin(\pi \cdot 0) + C = 8 \Leftrightarrow \pi \cdot \sin 0 + C = 8 \Rightarrow$

$\pi \cdot 0 + C = 8 \Leftrightarrow C = 8$

Επομένως η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t είναι $V(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + 8$ m/sec

(β) Έχουμε ότι

$V(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow S'(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int S'(t)dt = \int (\pi \cdot \sin(\pi t) + 8)\,dt$

$\Rightarrow S(t) = \int (\pi \cdot \sin(\pi t) + 8)\,dt$

$\Rightarrow S(t) = \pi \int \sin(\pi t)\,dt + 8 \int dt$

$\Rightarrow S(t) = -\pi \cdot \dfrac{\cos(\pi t)}{\pi} + 8t + c$

$\Rightarrow S(t) = -\cos(\pi t) + 8t + c$

Εφόσον $S(0) = 0$,

$-\cos(\pi \cdot 0) + 8 \cdot 0 + c = 0$.

Έχουμε ότι

$-\cos(\pi \cdot 0) + 8 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\cos 0 + 0 + c = 0$

$\Rightarrow -1 + c = 0$

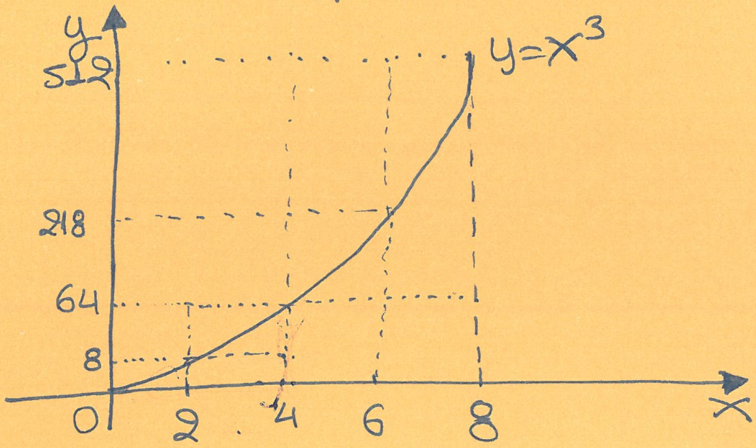
$\Rightarrow c = 1$.

Άρα

$S(t) = -\cos(\pi t) + 8t + 1$ m

16ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1)



(α) Προφανώς

$$f(0)(8-0)\le A\le f(8)\cdot(8-0)$$

και άρα $0\le A\le 4096$

(β) Έχουμε ότι

$$f(0)(4-0)+f(4)(8-4)\le A\le f(4)(4-0)+f(8)(8-4)$$

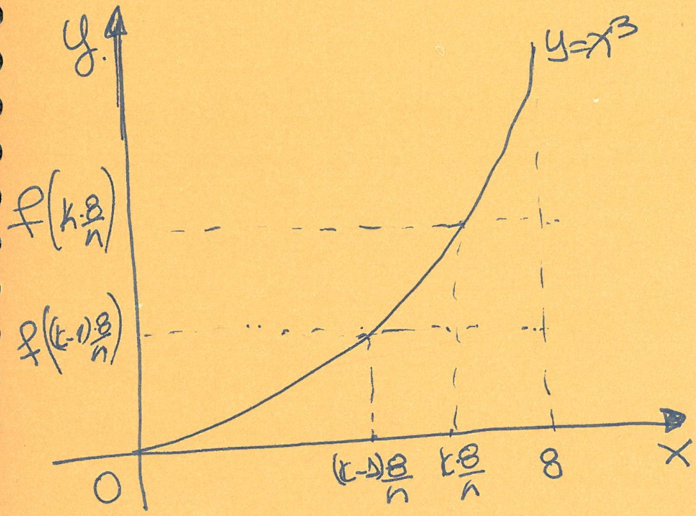
και άρα $256\le A\le 2304$

(γ) Έχουμε ότι

$$f(0)\cdot 2+f(2)\cdot 2+f(4)\cdot 2+f(6)\cdot 2\le A\le f(2)\cdot 2+f(4)\cdot 2+f(6)\cdot 2+f(8)\cdot 2$$

Η/Υ: πράξεις

δ) Η $f(x)=x^3$ είναι αύξουσα στο $[0,8]$ και επομένως είναι αύξουσα σε κάθε υποδιάστημα $\left[(k-1)\cdot\frac{8}{n},k\cdot\frac{8}{n}\right]$, $k=1,2,\dots,n$.



Άρα το ο.ε. της $f(x)$ στο $\left[(k-1)\frac{8}{n},k\cdot\frac{8}{n}\right]$ είναι $f\left((k-1)\frac{8}{n}\right)=(k-1)^3\frac{8^3}{n^3}$ και το ο.μ. είναι $f\left(k\cdot\frac{8}{n}\right)=k^3\frac{8^3}{n^3}$.

Επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} f\left((k-1)\frac{8}{n}\right)\frac{8}{n}\le A\le \sum_{k=1}^{n} f\left(k\cdot\frac{8}{n}\right)\cdot\frac{8}{n}$$

Κάτω άθροισμα Άνω άθροισμα

Έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} f\left((k-1)\cdot\frac{8}{n}\right)\frac{8}{n} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^3\cdot\frac{8^3}{n^3}\cdot\frac{8}{n} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^3\cdot\frac{8^4}{n^4} =$$

$$= \frac{8^4}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = \frac{8^4}{n^4}\sum_{l=0}^{n-1} l^3 \qquad [l=k-1]$$

$$= \frac{8^4}{n^4}\cdot\sum_{l=1}^{n-1} l^3 = \frac{8^4}{n^4}\frac{(n-1)^2\left((n-1)+1\right)^2}{4}$$

$$= \frac{2\cdot 8^3\cdot(n-1)^2\cdot n^2}{n^4} = 2\cdot 8^3\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(k\cdot\frac{8}{n}\right)\cdot\frac{8}{n} = \sum_{k=1}^{n} k^3\left(\frac{8}{n}\right)^3\frac{8}{n} = \sum_{k=1}^{n} k^3\cdot\frac{8^4}{n^4}$$

$$= \frac{8^4}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{8^4}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2\cdot 8^3\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Επομένως

$$2\cdot 8^3\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \le A \le 2\cdot 8^3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \text{ ή } 2\cdot 8^3\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \le A \le 2\cdot 8^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

Για παράδειγμα, για $n=10^6$ παίρνω ότι

$$2\cdot 8^3\left(1-\frac{1}{10^6}\right)^2 \le A \le 2\cdot 8^3\cdot\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^2$$

(ε) Όταν $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$ και άρα

$1-\frac{1}{n}\to 1$ και $1+\frac{1}{n}\to 0$

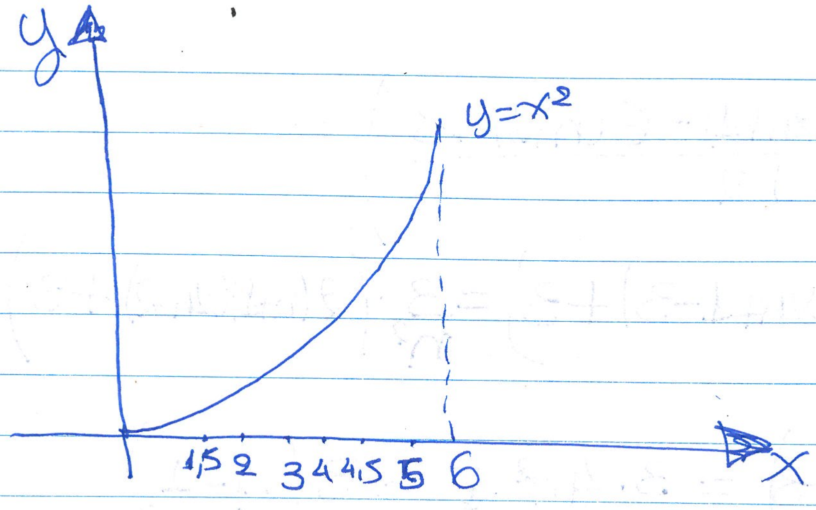
Επομένως $2\cdot 8^3 \le A \le 2\cdot 8^3$

Άρα $A = 2\cdot 8^3$

Παρατήρηση: Εφόσον $x^3\ge 0$ στο $[0,8]$,

$$A = \int_0^8 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8 = 2\cdot 8^3$$

3)



(α) Έχουμε ότι

$av(f) \simeq f(3) = 3^2 = 9$.

(β) Έχουμε ότι

$av(f) \simeq \frac{1}{2}\cdot\left(f(1,5)+f(4,5)\right) \simeq \frac{1}{2}\left((1,5)^2+4,5^2\right) \simeq 11,25$

(γ) Έχουμε ότι

$av(f) \simeq \frac{1}{3}\left(f(1)+f(3)+f(5)\right) = \frac{35}{3}$

(δ) Το μέσο του υποδιαστήματος

$$\left[(k-1)\frac{6}{n}, k\cdot\frac{6}{n}\right]$$

είναι το $\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{n}$

Άρα,

$$av(f) \simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{n}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{6^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{6^2}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6^2}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{6^2}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}1\right) =$$

$$= \frac{6^2}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{n}{4}\right) = \frac{6^2}{n^3}n\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{6^2}{n^2}\left(\frac{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3}{12}\right) =$$

$$= \frac{3}{n^2}\left(2(n+1)(2n+1-3) + 3\right) = \frac{3}{n^2}\cdot\left(2(n+1)(2n-2) + 3\right)$$

$$= \frac{3}{n^2}\left(4(n^2-1) + 3\right) = 3\cdot\frac{4n^2-1}{n^2} = 3\left(4 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Επομένως

$$av(f) \approx 3\left(4 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Για παράδειγμα, για $n = 10^6$,

$$av(f) \simeq 3\cdot\left(4 - \frac{1}{(10^6)^2}\right) = 3\cdot\left(4 - \frac{1}{10^{12}}\right)$$

(ε) Αν $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ και επομένως

$$4 - \frac{1}{n^2} \to 4$$

Άρα

$$av(f) = 3\cdot 4 = 12.$$

<u>Παρατήρηση:</u> Έχουμε ότι

$$av(f) = \frac{1}{6-0}\cdot\int_0^6 x^2\,dx = \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{1}{6}\cdot\frac{6^3}{3} = 12.$$

7) Η $f(x)=\sin x$ και $g(x)=x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$
Βρίσκουμε τα x στο $(0, \pi/4)$ στα οποία η $y=\sin x$ και $g(x)=x$ τέμνονται

$$\sin x = x \Rightarrow \sin x - x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ και } x=0$$
$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \text{ και } x = 0$$

Επομένως δεν τέμνονται.

Άρα,
$$A = \int_0^{\pi/4} (\sin x - x)\, dx$$

Αρχικά έχουμε ότι
$$\int (\sin x - x)\, dx = \int \sin x\, dx - \int x\, dx = -\cos x - \frac{x^2}{2} + c$$

Επομένως,
$$\int_0^{\pi/4} (\sin x - x)\, dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/4} =$$
$$= \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{2}{1}}\right) - (-\cos 0 - 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} + 1$$

Άρα, $A = \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right| = |1 - 0,707 - 32,045| = |-31,7| = 31,7$

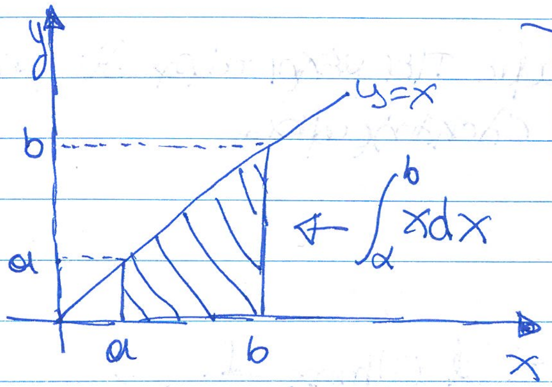
$= \frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414}{2} = 0,707$, $\frac{\pi^2}{32} = \frac{9,87}{0,308} = 32,045$

10/12/2018

17ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1)(β) Έστω $f(x)=x$.
Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επομένως η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.
Επίσης έχουμε ότι
$$f(x) = x \geq 0 \text{ για } x \in [\alpha,\beta]$$
Άρα, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta x\, dx =$ το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y=x$ και του άξονα x από $x=\alpha$ έως $x=\beta$.



$\leftarrow \int_a^b x\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot(b+a)(b-a)$

$= (b^2-a^2)\cdot\frac{1}{2}$

<u>Παρατήρηση</u>: Χρησιμοποιώντας το Θ.Θ.Α.Λ.2 παίρνω ότι

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

2) (β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3,0]$

Άρα η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-3,0]$.

Επομένως

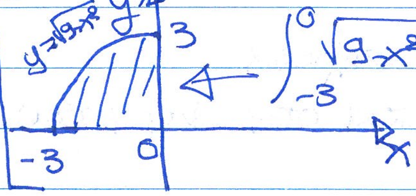
$$\alpha\nu(f) = \frac{1}{0-(-3)}\cdot\int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

<u>Παρατ.</u>: Με όσα ξέρουμε μέχρι τώρα, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx$

Εφόσον $f(x)=\sqrt{9-x^2}\geq 0$ για $x\in[-3,0]$,

παίρνω ότι

$\int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx =$ το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y=\sqrt{9-x^2}$ και του άξονα x από $x=-3$ έως $x=0$.



$\leftarrow \int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{4}\pi$

Άρα,

$\alpha\nu(f) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$

5) <u>Παρατήρηση</u>: Απ' όσα έχουμε πει μέχρι τώρα δν μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα.

Γνωρίζουμε ότι

$$(2-0)\min_{x\in[0,2]}\frac{1}{x^2+1} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq (2-0)\max_{x\in[0,2]}\frac{1}{1+x^2},$$

δηλ.

$$2\min_{x\in[0,2]}\frac{1}{1+x^2} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq 2\max_{x\in[0,2]}\frac{1}{1+x^2}$$

Θα βρούμε το Ο.Ε. και το ο.μ. της $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ στο $[0,2]$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$.
Άρα, η $f(x)$ έχει ο.α. στο $[0,2]$.
Έχουμε ότι

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,2)$.
Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Άρα,

$$f'(x)\neq 0, \text{ για } x\in(0,2).$$

Επομένως η $f(x)$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.
Άρα, τα ο.α. της $f(x)$ εμφανίζονται στα άκρα του π.ο. της $x=0$ και $x=2$.
Έχουμε ότι

$$f(0)=\frac{1}{1+0^2}=1 \quad \text{και ότι}$$

$$f(2)=\frac{1}{5}$$

Άρα,

$$\min_{x\in[0,2]} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad \max_{x\in[0,2]} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$2\cdot\frac{1}{5} \le \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \le 2\cdot 1$$

ή $$\frac{2}{5} \le \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \le 2.$$

6) Παρατ.: το $\int_\alpha^b \frac{dx}{3x-x^2}$ δεν μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας όσα έχουμε πει μέχρι τώρα.

Έστω

$$f(x) = \frac{1}{3x-x^2}.$$

Έχουμε ότι

- $3x-x^2=0 \Leftrightarrow x(3-x)=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=0$.

Επομένως $D_f = (-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,\infty)$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο D_f.

Άρα, το $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ ορίζεται για $\alpha<b<0$ ή για $0<\alpha<b<3$ ή $3<\alpha<b$

Έχουμε ότι

$f(x) = \frac{1}{3x-x^2}$ $\quad f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3x-x^2} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x-x^2>0 \Leftrightarrow x(3-x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \text{ και } 3-x>0 \\ \text{ή } x<0 \text{ και } 3-x<0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \text{ και } 3>x \\ \text{ή} \\ x<0 \text{ και } 3<x \end{array}\right] \Leftrightarrow 0<x<3$$

Έστω $\alpha<b<0$

τότε $f(x)<0$, για $x\in[\alpha,b]$.

Και επομένως $\int_\alpha^b f(x)\,dx<0$

Όμοια αν $3<\alpha<b$ τότε $\int_\alpha^b f(x)\,dx<0$