$$= \frac{1}{2} \lim_{y\to 0^+} \cos y \cdot \infty = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\infty = \infty$$

Άρα, $\lim_{x\to\infty} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = \infty$

H/w Ασκ: Υπολ. το όριο χωρίς l'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin(\tfrac1x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sin\frac1x}{\frac1x} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = \infty\cdot 1 = \infty$$

[Θέτω $y=\frac1x$, $x\to\infty \Rightarrow \frac1x \to 0^+ \Rightarrow y\to 0^+$]

H/w: • κεφ 7.6, σελ 559-563
• Επαναλ. ερ. κεφ 7: 12
• 11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων
• Ασκ. κεφ. 7.6: 1-8, 11, 16-17, 20, 23-24, 39, 48

13/11/2018

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3,2]$

Άρα, η $f(x)$ έχει ΟΕ και Ο.Μ. στο $[-3,2]$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$ στο $(-3,2)$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^{2/5} - \frac23 x^3\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5\frac{d}{dx}(x^{2/5}) - \frac23 \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 5\cdot\frac25 x^{-3/5} - \frac23\cdot 3x^2 = 2x^{-3/5} - 2x^2, \text{ για } x\neq 0.$$

Η $f'(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^{-3/5} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^{-3/5}(1-x^{13/5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{-3/5}=0 \text{ ή } 1-x^{13/5}=0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^{13/5} = 0 \Leftrightarrow x^{13/5}=1 \Leftrightarrow x=1$$

Επομένως,

Η $f(x)$ έχει δύο κρίσιμα σημεία για $x=0$ και για $x=1$

Άρα, η $f(x)$ μπορεί να παρουσιάζει ο.α. είτε στα κρίσιμα σημεία $x=0$ και $x=1$ ή στα άκρα του D_f για $x=-3$ και $x=2$.

Έχουμε ότι

$f(0)=0$,

$f(1)=5\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{13}{3}$,

$f(-3)=5\cdot(-3)^{2/5}-\frac{2}{3}\cdot(-3)^3=5\cdot\sqrt[5]{(-3)^2}-\frac{2}{3}\cdot(-27)$

$=5\cdot\sqrt[5]{9}+18$,

$f(2)=5\cdot 2^{2/5}-\frac{2}{3}\cdot 2^3=5\cdot\sqrt[5]{4}-\frac{16}{3}$

Προφανώς

$f(-3)>f(0), f(1), f(2)$

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.μ. $5\cdot\sqrt[5]{9}+18$ στο $x=-3$

Προφανώς,

$f(0)=0<\frac{13}{3}=f(1)$

Έχουμε ότι

$f(0)<f(2)\Leftrightarrow 0<5\sqrt[5]{4}-\frac{16}{3}\Leftrightarrow\frac{16}{3}<5\sqrt[5]{4}\Leftrightarrow$

$16<15\sqrt[5]{4}\Leftrightarrow 16^5<(15\sqrt[5]{4})^5\Leftrightarrow$

$16^5<15^5(\sqrt[5]{4})^5\Leftrightarrow 1048576<759375\cdot 4\Leftrightarrow$

$1048576<3037500$

Άρα, $f(0)<f(2), f(1)$

Επομένως, η $f(x)$ έχει ο.ε. 0 για $x=0$

2) Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$
Άρα, η $h(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-1,0]$
Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $h(x)$
Έχουμε ότι

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}} - \frac{10}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^{5/3}) - \frac{10}{7}\frac{d}{dx}x^{\frac{7}{3}} =$$

$$= \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{7}\cdot\frac{7}{3}\cdot x^{4/3}$$

$$= \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{4/3}$$

Η $h'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-1,0)$
Έχουμε ότι

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{4/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{3}x^{2/3}(1 - 2x^{2/3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x^{2/3} = 0 \text{ ή } 1 - 2x^{2/3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 1 - 2x^{2/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^{2/3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ή } x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Επομένως, $h'(x) = 0$ στο $(-1,0)$ για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Άρα, η $h(x)$ έχει κρίσιμο σημείο για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Επομένως, η $h(x)$ μπορεί να εμφανίζει Ο.Α. είτε στο κρίσιμο σημείο $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ είτε στα άκρα του D_h $x=-1$ και $x=0$.

Έχουμε ότι

$$h(-1/2\sqrt{2}) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^{5/3} - \frac{10}{7}\cdot\left(-1/2\sqrt{2}\right)^{7/3}$$

$$= \left(-2^{-3/2}\right)^{5/3} - \frac{10}{7}\left(-2^{-3/2}\right)^{7/3}$$

$$= -\left(2^{-3/2}\right)^{5/3} - \frac{10}{7}\cdot\left(-\left(2^{-3/2}\right)^{7/3}\right)$$

$$= -2^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}} + \frac{10}{7}\cdot 2^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}} = -2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7}\cdot 2^{-\frac{7}{2}},$$

$$h(-1) = (-1)^{5/3} - \frac{10}{7}(-1)^{7/3} = -1 - \frac{10}{7}\cdot(-1) = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7},$$

$$h(0) = 0^{5/3} - \frac{10}{7}\cdot 0^{7/3} = 0$$

Προφανώς $h(-1) = \frac{3}{7} > 0 = h(0)$.

Έχουμε ότι

$$h(0) < h(-1/2\sqrt{2}) \Leftrightarrow 0 < -2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7}\cdot 2^{-7/2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-5/2} < \frac{10}{7}\cdot 2^{-7/2} \Leftrightarrow \frac{2^{-5/2}}{2^{-7/2}} < \frac{10}{7} \Leftrightarrow \qquad [2^{-7/2} > 0]$$

$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{5}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)} < \frac{10}{7} \Leftrightarrow 2 < \frac{10}{7} \Leftrightarrow 14 < 10$$

Άρα, $h(-1/2\sqrt{2}) < h(0)$

Επομένως,

$$h(-1/2\sqrt{2}) < h(0) < h(-1)$$

Άρα, $h(x)$ έχει ο.ε. $-2^{-5/2} + \frac{10}{7}\cdot 2^{-7/2}$ για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ και ο.μ. $\frac{3}{7}$ για $x=-1$

3) Η $g(\theta)$ είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ επομένως η $g(\theta)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $g(\theta)$.

Έχουμε ότι

$$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\sin 2\theta) = 2\cos 2\theta$$

Η $g'(\theta)$ ορίζεται για όλα τα θ στο $(-\pi/2, \pi)$

Έχουμε ότι

$$g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\theta = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \overset{\theta \in (-\pi/2, \pi)}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3\pi}{4} < \frac{k\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \frac{k}{2} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -1 \text{ ή } k = 0 \text{ ή } k = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta = (-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει κρίσιμα σημεία για $\theta = -\pi/4$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Επομένως η $g(\theta)$ μπορεί να εμφανίζει ο.α. είτε στα κρίσιμα σημεία $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ είτε στα άκρα του D_g, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ και $\theta = \pi$

Έχουμε ότι

$g(-\pi/4) = \sin(2 \cdot (-\frac{\pi}{4})) = \sin(-\pi/2) = -1$,

$g(\pi/4) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$g(\frac{3\pi}{4}) = \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$,

$g(-\pi/2) = \sin(2\cdot(-\frac{\pi}{2})) = \sin(-\pi) = 0$,

$g(\pi) = \sin(2\pi) = 0$

Προφανώς ισχύει ότι

$g(-\pi/4) = g(3\pi/4) < g(-\pi/2) = g(\pi) < g(\pi/4)$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει ο.ε. -1 για $\theta = -\frac{\pi}{4}$ και για $\theta = \frac{3\pi}{4}$ και ο.μ. 1 για $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$

Επομένως η $f(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-\pi,\pi]$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$.

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = \frac{d}{dx}(\cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{d}{dx}(x)$$

$$= -\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\pi,\pi)$

Έχουμε ότι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$

$x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4})$ ή $x = (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \alpha$

$x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + \pi - \theta$

$\cos x = \alpha$

$x = 2k\pi + \theta$ ή

$x = 2k\pi - \theta$

• $-\pi < 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < 2k\pi < \frac{5\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} < k\pi < \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{5}{8} \Leftrightarrow k = 0$

• $-\pi < (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{4}) < \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{4} < (2k+1)\pi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{4} < 2k+1 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < 2k < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{8} < k < -\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow k = -1$

$\Leftrightarrow x = 2\cdot 0\cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ή $x = (2\cdot(-1)+1)\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ ή $x = -\frac{3\pi}{4}$

Άρα, η f(x) έχει κρίσιμα σημεία για $x = -\frac{\pi}{4}$ και για $x = -\frac{3\pi}{4}$

Επομένως, η f(x) είναι πιθανό να παρουσιάζει ολ.
είτε στα κρίσιμα σημεία $x = -\frac{\pi}{4}$ και $x = -\frac{3\pi}{4}$ είτε στα
άκρα του D_f $x = -\pi$, $x = \pi$

Έχουμε ότι

$f(-\pi/4) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$,

$f(-3\pi/4) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}$,

$f(-\pi) = \cos(-\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\pi) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi$

$f(\pi) = \cos\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi$.

Προφανώς,

$f(\pi) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi < -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = f(-\pi)$

Έχουμε ότι

$f(-\pi/4) < f(-3\pi/4) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$1 + \frac{\pi}{4} < -1 + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2 < \frac{\pi}{2}$, δεν ισχύει

Εφόσον $2 > \frac{\pi}{2}$,

$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < f(-\pi/4)$

Έχουμε ότι

$$f(\pi) < f(-3\pi/4) \Leftrightarrow -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}$$

$$-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi \Leftrightarrow$$

$$-1 < \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\left(-1 + \frac{7\pi}{4}\right)}_{\text{θετικό}}$$

Εφόσον $\frac{7\pi}{4} > 1$, $-1 + \frac{7\pi}{4} > 0$

και άρα

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + \frac{7\pi}{4}\right) > 0 > -1$$

Επομένως, $f(\pi) < f(-3\pi/4)$

Έχουμε ότι

$$f(-\pi) < f(-\pi/4) \Leftrightarrow -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} < 1 - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < 1 - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$-1 - \sqrt{2} < -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < 1 + \sqrt{2}$$

H/W → Άρα;

$11^{\underline{o}}$ Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Έστω $f(x) = 3x^3 + 8x + 7$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$.

Έχουμε ότι

$f(-3) = -98 < 0$

και ότι $f(0) = 7 > 0$

Άρα, από το ΘΕΤ, υπάρχει τουλάχιστον ένα c στο $[-3, 0]$ τ.ω. $f(c) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $3x^3 + 8x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[-3, 0]$

Θ.δ.ο αν $c_1, c_2 \in [-3, 0]$ με $c_1 \leq c_2$ είναι λύσεις της $3x^3 + 8x + 7 = 0$, τότε $c_1 = c_2$

Έστω $c_1 < c_2$

$1^{\underline{o}}$ Τρόπος: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[c_1, c_2]$.

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-3, 0]$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (c_1, c_2)

Εφόσον c_1, c_2 είναι λύσεις της $3x^3 + 8x + 7 = 0$,

ισχύει ότι $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

Επομένως, από το θεώρημα Rolle, παίρνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $d \in (c_1, c_2)$ τ.ω. $f'(d) = 0$

Έχουμε ότι

$f'(x) = 9x^2 + 8$

Προφανώς $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως οδηγούμαστε σε άτοπο

Άρα, $c_1 = c_2$

$2^{\underline{o}}$ Τρόπος: Έχουμε ότι

$f'(x) = 9x^2 + 8$

Επομένως $f'(x) = 9x^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα, $f(x)$ αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Επομένως, $c_1 < c_2 \Leftrightarrow f(c_1) < f(c_2)$
Άτοπο γιατί έχω υποθέσει ότι $f(c_1) = f(c_2) = 0$
Επομένως $c_1 = c_2$
Άρα, η εξίσωση $3x^3 + 8x + 7 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[-3, \alpha]$.

2)(b) Εφόσον $\alpha < b$, $b - \alpha > 0$.
Άρα,
$$\tan b - \tan \alpha \geq b - \alpha \Leftrightarrow \frac{\tan b - \tan \alpha}{b - \alpha} \geq 1$$
Έστω $f(x) = \tan x$.
Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
Εφόσον $[\alpha, b] \subseteq (\pi/2, 3\pi/2)$, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$.
Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
Εφόσον $(\alpha, b) \subseteq (\pi/2, 3\pi/2)$, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (α, b)
Επομένως, από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (\alpha, b)$
τ.ω. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha}$.
Έχουμε ότι $f'(x) = \sec^2 x \geq 1$, για $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$
Άρα, $f'(c) \geq 1$
Επομένως, $\dfrac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha} \geq 1$
και άρα $\tan b - \tan \alpha \geq b - \alpha$

3)(b) Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση τ.ω. $f'(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
Έστω $g(x) = -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$
$g'(x) = -(-\sin x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
Άρα, $f'(x) = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Επομένως υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$f(x) = g(x) + k, \ x \in \mathbb{R}$$

Άρα, οι συναρτήσεις $f(x)$ με $f'(x) = \sin x$ είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = -\cos x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$

4) Έστω $f(x)$ η συνάρτηση με $f'(x) = \frac{x^3}{5} - x, \ x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$

Έστω $g(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$g'(x) = \frac{x^3}{5} - x$$

Άρα, $f'(x) = g'(x), \ x \in \mathbb{R}$

Επομένως, υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = g(x) + k, \ x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2} + k, \ x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον $f(1) = 2$, παίρνουμε ότι

$$\frac{1^4}{20} - \frac{1^2}{2} + k = 2 \Leftrightarrow$$

Έχουμε ότι

$$-\frac{9}{20} + k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{49}{20}$$

Άρα, $f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2} + \frac{49}{20}$

5) Ταλάντωση

(α) Έχουμε ότι $V'(t) = a(t) = -8\cos(2t), \ t \in \mathbb{R}$

Έστω $f(t) = -4\sin(2t), \ t \in \mathbb{R}$.

Τότε $f'(t) = -8\cos(2t), \ t \in \mathbb{R}$

Επομένως,

$v'(t) = f'(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Άρα, υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τ.ω.
$$v(t) = f(t) + k, \; t \in \mathbb{R}.$$
Δηλ. $v(t) = -4\sin(2t) + k$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Έχουμε ότι
$v(0) = 4 \Leftrightarrow -4\sin 2\cdot 0 + k = 4 \Leftrightarrow -4\cdot \sin 0 + k = 4 \Leftrightarrow k = 4$
Άρα, $v(t) = -4\sin(2t) + 4, \; t \in \mathbb{R}$

β) Έχουμε ότι
$x'(t) = v(t) = -4\sin(2t) + 4, \; t \in \mathbb{R}$
Έστω
$g(t) = 2\cos(2t) + 4t, \; t \in \mathbb{R}$
$g'(t) = -4\sin(2t) + 4, \; t \in \mathbb{R}$

Άρα, $x'(t) = g'(t), \; \forall t \in \mathbb{R}$
Επομένως υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τ.ω.
$$x(t) = g(t) + k, \; t \in \mathbb{R}.$$
Άρα, $x(t) = 2\cos(2t) + 4t + k, \; t \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι
$x(0) = 2 \Leftrightarrow 2\cdot\cos(2\cdot 0) + 4\cdot 0 + k = 2 \Leftrightarrow$
$2\cdot\cos 0 + 0 + k = 2 \Leftrightarrow 2 + k = 2 \Leftrightarrow k = 0$

Επομένως, $x(t) = 2\cos 2t + 4t, \; t \in \mathbb{R}$.

Η f(x) παρουσιάζει τ.ο. για $x=-1$ και $x=3$

$f(-1)=-1+2+4=5$, $f(1)=-1-2+4=1$

$f(3)=-9+18-4=5$

Επομένως, η f(x) παρουσιάζει τ.ελ. για $x=1$ και ο.μ. 5 για $x=-1$ και $x=3$

12ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Εφόσον $x^2+3\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $D_g=\mathbb{R}$

Η g(x) είναι ρητή και επομένως η g(x) είναι συνεχής στο $D_g=\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x^2+3}\right)=\frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}$$

Η g'(x) ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}=0 \Leftrightarrow -3x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Επομένως η g(x) έχει κρίσιμα σημεία για $x=-\sqrt{3}$ και $x=\sqrt{3}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}>0 \Leftrightarrow -3x^2+9>0 \Leftrightarrow 3x^2<9 \Leftrightarrow$$

$$x^2<3 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
Πρόσημο $g'(x)$	$-$	$+$	$-$	
Μονοτονία $g(x)$	Φθιν.	τ.ε. Αυξ.	τ.μ. Φθιν	

(α) Η g(x) είναι φθίνουσα στο $(-\infty,-\sqrt{3}]$ και στο $[\sqrt{3},\infty)$ και αύξουσα στο $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

(β) Η g(x) έχει τ.ε. $g(-\sqrt{3})$ για $x=-\sqrt{3}$ και τ.μ. $g(\sqrt{3})$ για $x=\sqrt{3}$

(γ) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=3\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

Επίσης έχουμε ότι

$g(-\sqrt{3}) = \dfrac{3(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+3} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ και ότι $g(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα, η $g(x)$ έχει Ο.Ε. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $x=-\sqrt{3}$ και ο.μ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $x=\sqrt{3}$.

2) Προφανώς $D_f=[0,\infty)$

Η $f(t)$ είναι συνεχής στο $[0,\infty)$

Έχουμε ότι

$f'(t)=\frac{d}{dt}(\sqrt{t}-2t)=\frac{1}{2}t^{-1/2}-2 = \frac{1}{2\sqrt{t}}-2$ για $t\neq 0$

Η $f'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0,\infty)$

Έχουμε ότι

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{t}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow t=\frac{1}{16}$

Άρα, η $f(t)$ έχει κρίσιμο σημείο για $t=\frac{1}{16}$

Έχουμε ότι

$f'(t)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}-2>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}>2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>2\sqrt{t} \Leftrightarrow \frac{1}{4}>\sqrt{t} \Leftrightarrow$

$t<\frac{1}{16}$

t	0	1/16	∞
πρόσημο $f'(t)$	+		−
Μονοτονία $f(t)$	Αυξ.		Φθιν
	τ.Ε.	ε.μ.	

(α) Η $f(t)$ είναι αύξουσα στο $[0,1/16]$ και φθίνουσα στο $[1/16,\infty)$

(β) Η $f(t)$ έχει τ.Ε. για $t=0$ και τ.μ. για $t=\frac{1}{16}$

(γ) Έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to\infty} f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{t}-2t)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{t}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1-2\sqrt{t})=\infty(-\infty)=-\infty$

Άρα, η $f(t)$ έχει ο.μ. $f(1/16)=\frac{1}{8}$ για $t=1/16$

και δεν έχει Ο.Ε.

3) $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - x^{\frac{3}{5}}$

Έχουμε ότι $D_f = \mathbb{R}$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{6}{5}} - x^{\frac{3}{5}}\right) = \frac{6}{5}x^{1/5} - \frac{3}{5}x^{-2/5} \quad , \text{ για } x \neq 0$$

Η $f'(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x^{1/5} - \frac{3}{5}x^{-2/5} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^{-2/5}\left(2 \cdot x^{3/5} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x^{-2/5} = 0 \text{ ή } 2x^{3/5} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{3/5} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{3/5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x^3 = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{5/3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

Άρα, η $f(x)$ έχει κρίσιμα σημεία για $x=0$ και για $x = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

Έχουμε ότι

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{3/5} > \frac{1}{2} \qquad \left[\frac{3}{5}x^{-2/5} > 0, \text{ για } x \neq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$	∞
Πρόσημο $f'(x)$	$-$	$-$	$+$	
Μονοτονία $f(x)$	Φθιν	Φθιν	ε.ε. Αυξ	

(α) Η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right]$ και αύξουσα στο $\left[1/\sqrt[3]{32}, \infty\right)$

(β) Η $f(x)$ έχει ε.ε. για $x = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$ και δεν έχει ε.μ.

(γ) Εφόσον η $f(x)$ έχει ένα μόνο ε.α. αυτό είναι και ο.α.

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.ε. $f(2^{-5/3}) = \left(2^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} - \left(2^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$

$$= 2^{-\frac{6}{3}} - 2^{-1} = 2^{-2} - 2^{-1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

για $x = 2^{-5/3}$ και δεν έχει ο.μ.

4) $h(x) = 9x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^2$, $D_h = [-1,1]$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$

Έχουμε ότι

$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(9x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^2\right) = 9\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x\cdot 2 = 3x^{-2/3} - 3x$, για $x \neq 0$

Η $h'(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Έχουμε ότι

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^{-\frac{2}{3}} - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x^{-2/3}(1-x^{5/3}) = 0 \Leftrightarrow$

$1 - x^{5/3} = 0 \Leftrightarrow x^{5/3} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα, η $h'(x) \neq 0$ για $x \in (-1,1)$

Επομένως, η $h(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=0$

Έχουμε ότι

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^{-2/3}(1-x^{5/3}) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^{5/3} > 0 \Leftrightarrow$

$1 > x^{5/3} \Leftrightarrow x < 1$

x	-1	0	1
Πρόσημο $f'(x)$	+	+	
Μονοτονία $f(x)$	Αυξ.	Αυξ.	
	τ.ε.		τ.μ.

(α) Η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $[-1,1]$

(β) Η $h(x)$ έχει τ.ε. για $x=-1$ και τ.μ. για $x=1$

(γ) Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$

Άρα, η $h(x)$ έχει ο.ε. και ο.μ. στο $[-1,1]$

Επομένως η $h(x)$ έχει ο.ε. $h(-1) = 9(-1) - \frac{3}{2}\cdot 1 = -\frac{21}{2}$ για $x=-1$ και

ο.μ.

$h(1) = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$ για $x=1$.

5) $g(t) = 2t\sqrt{t^2-9}$

Έχουμε ότι

$t^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow |t| \geq 3 \Leftrightarrow t \geq 3$ ή $t \leq -3$

Άρα, $D_g = (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο D_g

Έχουμε ότι

$$g'(t)=\frac{d}{dt}\left(2t\sqrt{t^2-9}\right)=2t\cdot\cancel{2}t\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t^2-9}}+2\sqrt{t^2-9}=\frac{2t^2}{\sqrt{t^2-9}}+2\sqrt{t^2-9}$$

για $t\neq\pm3$

Η g'(t) ορίζεται από$^{\tau}$εατ στο $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Έχουμε ότι

$$g'(t)=0\Leftrightarrow\frac{2t^2}{\sqrt{t^2-9}}+2\sqrt{t^2-9}=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{t^2-9}\cdot\sqrt{t^2-9}+2t^2}{\sqrt{t^2-9}}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{2(t^2-9)+2t^2}{\sqrt{t^2-9}}=0\Leftrightarrow\frac{4t^2-18}{\sqrt{t^2-9}}=0\Leftrightarrow t^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$t=\pm\frac{3}{\sqrt2}$ και $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Άρα, $g'(t)\neq0$, για $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Επομένως, η g(t) δεν έχει κρίσιμο σημείο

Έχουμε ότι

$$g'(t)>0\Leftrightarrow\frac{4t^2-18}{\sqrt{t^2-9}}>0$$

$\Leftrightarrow 4t^2-18>0$ και $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

$t^2>\frac{9}{2}$ και $t\in$ ....

$t<-\frac{3}{\sqrt2}$ ή $t>\frac{3}{\sqrt2}$ και $t\in$ ...

$\Leftrightarrow t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

t	$-\infty$	-3	3	∞
Πρόσημο $g'(t)$	$+$		$+$	
Μονοτονία $g(t)$	Αυξ.		Αυξ.	
		τ.μ.	τ.ε.	

(α) Η g(t) είναι αυξ. στο $(-\infty,-3]$ και στο $[3,\infty)$

(β) Η g(t) έχει τ.μ. για $t=-3$ και τ.ε. για $t=3$

(γ) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}g(t)=\lim_{x\to-\infty}2t\sqrt{t^2-9}=\lim_{x\to-\infty}2t\cdot\lim_{x\to-\infty}\sqrt{t^2-9}=(-\infty)\infty=-\infty$$

Άρα, η g(t) δεν έχει ο.ε.

Έχουμε ότι $\lim_{x\to\infty}g(t)=\infty$. Άρα, η g(t) δεν έχει ο.μ.

β) $h(t) = \sin(t+\pi)$

Η $h(t)$ είναι συνεχής $[0, 2\pi]$

Έχουμε ότι

$h'(t) = \frac{d}{dt}(\sin(t+\pi)) = \cos(t+\pi)$

Η $h'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0, 2\pi)$

Έχουμε ότι

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t+\pi) = 0 \Leftrightarrow t+\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$t = (k-1)\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Big[0 < (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < (k-1)\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} < k < \frac{5}{2}$

$k = 1$ ή $k = 2\Big]$

$\Leftrightarrow t = (1-1)\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $t = (2-1)\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ή $t = \frac{3\pi}{2}$

Επομένως η $h(t)$ έχει κρίσιμα σημεία για $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$

t	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
πρόσημο $g'(t)$	$-$	$+$	$-$	
Μονοτονία $g(t)$	φθιν.	Αυξ.	φθιν.	
	ε.μ.	ε.ε.	ε.μ.	ε.ε.

$h'(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ Άρα, $h'(t) < 0$ για $t \in (0, \pi/2)$

Έχουμε ότι

$h'(\pi) = \cos 2\pi = 1 > 0$

Άρα, $h'(t) > 0$ για $t \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Έχουμε ότι

$h'(7\pi/4) = \cos(\frac{7\pi}{4} + \pi) = \cos(\frac{3\pi}{4} + 2\pi) = \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

Άρα, $h'(t) < 0$ για $t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$