8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων 29/10/2018

Άσκ 1: (α) Για $x \neq 0$,

$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

για $x \neq 0$

Άρα, $0 \cdot |x| \leq |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \cdot 1$

Επομένως, για $x \neq 0$,

$0 \leq \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. (*)

Έχουμε ότι

$\lim_{x \to 0} 0 = 0$ (**) και ότι $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ (***)

Από τις (*), (**) (***) και το θεώρημα Σάντουιτς παίρνουμε ότι

$\lim_{x \to 0} \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0.$

Επομένως, $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Άρα, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

Επομένως, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0

(β) Έχουμε ότι

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

Άρα, το

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει.

Επομένως η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Σημ.: (α) Προφανώς εναλλακτικά θα μπορούσα να πάρω

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

(β) Εφόσον τα $\lim_{x\to 0^-} \sin(\frac{1}{x})$ και $\lim_{x\to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ δεν υπάρχουν η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο 0.

Άσκ2: Σημείωση: Από άσκηση 9/φυλ.2 $\lim_{x\to 0} x^2\sin(\frac{1}{x})=0$ Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(\frac{1}{h})-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cdot\sin(\frac{1}{h}) = 0 \quad [\text{από Άσκ 1(α)}]$$

Επομένως, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=0$

Σημ.: Προφανώς θα μπορούσαμε να πάρουμε και το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Άσκ3: Σημ.: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 ως απολ + πολυωνυμ.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & x<0 \\ x^3 & x\geq 0 \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(-x^2) = 0$$

Σημ.: Θα μπορούσα να πάρω $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

Άρα, $f'_-(0)=0$

Έχουμε ότι

$$\lim_{\cancel{x\to 0}\; h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0$$

Επομένως, $f'_+(0)=0$.

Εφόσον, οι $f'_-(0)$ και $f'_+(0)$ υπάρχουν και $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0. Και $f'(0)=0$

Άσκ4: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{\frac{3}{5}}-0}{x} = \lim_{x\to 0} -x^{-\frac{2}{5}}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\infty$$

Εφόσον, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Σημ.: Εφόσον $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ η $y=f(x)$ έχει

κατακόρυφη εφαπτομένη στο $(0,0)$ (σημείο)

Άσκ5: Σημ.: η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{\frac{4}{7}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-3/7} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[7]{h^3}} = -\infty$$

Εφόσον $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ δεν υπάρχει η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Σημ(α) Εναλλακτικά, θα μπορούσα να πάρω ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty.$$

(6) Εφόσον $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\infty$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \infty$

η $y=f(x)$ έχει σημείο ανάκαμψης στο $(0,0)$.

Ασκ6: Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9$$

και ότι $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x = 6$

Εφόσον $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9 \neq 6 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$.

Άρα, το $\lim_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει.

Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο 3

Επομένως, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3.

Ασκ7: Σημ. η $f(x)$ είναι συνεχής στο 2.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} (x^2+2x+4) = 12$$

Άρα, $f'_-(2) = 12$

Έχουμε ότι $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4(2+h)-8}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{8+4h-8}{h} = \lim_{h\to 0^+} 4 = 4.$$

Άρα, $f'_+(2) = 4$

Εφόσον, $f'_-(2) = 12 \neq 4 = f'_+(2)$, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

Σημείωση: Εφόσον οι $f'_-(2)$ και $f'_+(2)$ υπάρχουν και $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, η $y=f(x)$ σχηματίζει γωνία στο $(2,8)$.

Ασκ.8: (α) Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0 πρέπει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Εφόσον $|f(x)| \leq |x^3|$, για $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$,

$$|f(0)| \leq |0^3|$$

και άρα $0 \leq |f(0)| \leq 0$

Επομένως $|f(0)| = 0$ και άρα $f(0)=0$

Έχουμε ότι, για $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$

$0 \leq |f(x)| \leq |x|^3$ (*)

Επίσης έχουμε ότι

(**) $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ και ότι $\lim_{x\to 0} |x|^3 = 0$ (***)

Από τις (*),(**),(***) και το θεώρημα σάντουιτς παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$

Άρα, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(β) Έχουμε ότι

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$$

Γνωρίζουμε ότι για $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$,

$0 \leq |f(x)| \leq |x|^3$

Άρα $\frac{0}{|x|} \leq \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x|^3}{|x|}$, $x \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{5}\right)$

Επομένως,

$0 \le \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le x^2$, για $x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{5})$ (+)

Έχουμε ότι

(++) $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ και ότι $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ (+++)

Από (+), (++) (+++) και το θεώρημα Σάντουιτς παίρνουμε ότι $\lim_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0$

Άρα, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

Επομένως, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$

Άσκ 9: (α) Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0 πρέπει να υπάρχουν τα $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ και να ισχύει ότι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Έχουμε ότι

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ax^2) = 0$ και ότι $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (bx + c) = c$

Άρα, τα $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ υπάρχουν για $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Επίσης, έχουμε ότι

$f(0) = 0$.

Άρα, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 0 = c = 0$

Επομένως, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 για $a, b \in \mathbb{R}$ και $c = 0$.

(β) Για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει η $f(x)$ να είναι συνεχής στο 0

Άρα, από το (α) πρέπει το $c = 0$

Επομένως,

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\le 0 \\ bx, & x>0 \end{cases}$$

Για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει να υπάρχουν οι $f'_-(0)$ και $f'_+(0)$ και να ισχύει ότι $f'_-(0)=f'_+(0)$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}ax=0$$

Άρα, $f'_-(0)$ υπάρχει για $a,b\in\mathbb{R}$ και $f'_-(0)=0$

και ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{bx-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}b=b$$

Άρα, η $f'_+(0)$ υπάρχει για $a,b\in\mathbb{R}$ και $f'_+(0)=b$

Επομένως

$$f'_-(0)=f'_+(0)\Leftrightarrow 0=b$$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 για $a\in\mathbb{R}$ και $b=c=0$.

Άσκ. 10: Για νδο. η $f'(x)$ είναι άρτια πρέπει νδ.ο.

$f'(-x)=f'(x)$, για $x\in D_{f'}=D_f$.

Έστω $x_0\in D_{f'}=D_f$.

Θ.δ.ο. $f'(-x_0)=f'(x_0)$.

Έχουμε ότι

$$f'(-x_0)=\lim_{x\to -x_0}\frac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)}$$

[Θέτω $u = -x \Rightarrow x \to -x_0 \Rightarrow -x \to x_0$] $u \to x_0$

$$\lim_{u \to x_0} \frac{f(-u) - f(-x_0)}{-u-(-x_0)}$$

[$f(x)$ περιττή $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$]

$$= \lim_{u \to x_0} \frac{-f(u) - (-f(x_0))}{-u-(-x_0)} =$$

$$= \lim_{u \to x_0} \frac{-(f(u) - f(x_0))}{-(u-x_0)} = \lim_{u \to x_0} \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} = f'(x_0)$$

Άρα, $f'(x)$ είναι άρτια.

Ασκ 12: Έστω ότι υπάρχει κάποια $f(x)$ με $D_f = [3,2]$ τ.ω.

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \le x \le -1 \\ x-4, & -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

τότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για παραγώγους η $f'(x)$ πρέπει να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των

$f'(-3) = 9$ και $f'(2) = -2$.

$f'(-1) = 1$

Άτοπο, γιατί δεν παίρνει ~~ποτέ~~ την τιμή 0

Άρα, δεν υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ με $D_f = [3,2]$ τ.ω.

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \le x \le -1 \\ x-4, & -1 < x \le 2 \end{cases}$$

Σύγγραμμα: Thomas παλαιότερη έκδοση (προτείνει)