ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΜΟΣ Ι
16ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

1. Εκτιμήστε χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα το εμβαδόν A του χωρίου μεταξύ της καμπύλης
$$y = x^3$$
και του άξονα x από $x = 0$ ως $x = 8$.
(α) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το
$$[0, 8]\,.$$
(β) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα
$$[0, 4],\ \ [4, 8]\,.$$
(γ) Πάρτε 4 υποδιαστήματα, τα
$$[0, 2],\ \ [2, 4],\ \ [4, 6],\ \ [6, 8]\,.$$
(δ) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα
$$\left[0, \frac{8}{n}\right],\ \ \left[\frac{8}{n}, 2\cdot\frac{8}{n}\right],\ \ \left[2\cdot\frac{8}{n}, 3\cdot\frac{8}{n}\right], \ldots,\ \ \left[(n-2)\cdot\frac{8}{n}, (n-1)\cdot\frac{8}{n}\right],\ \ \left[(n-1)\cdot\frac{8}{n}, 8\right],$$
όπου $n \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε
$$1^3 + 2^3 + \ldots + (m-1)^3 + m^3 = \sum_{l=1}^{m} l^3 = \frac{m^2\,(m+1)^2}{4}\,.$$
(ε) Τι συμβαίνει στο (δ) όταν $n \to \infty$;

2. Εκτιμήστε χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα το εμβαδόν A του ημικυκλίου

$$y = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

(α) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[-1, 1]\,.$$

(β) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[-1, 0], \quad [0, 1]\,.$$

(γ) Πάρτε 3 υποδιαστήματα, τα

$$\left[-1, -\frac{1}{3}\right], \quad \left[-\frac{1}{3}\,, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}\,, 1\right].$$

(δ) Πάρτε 4 υποδιαστήματα, τα

$$\left[-1, -\frac{1}{2}\right], \quad \left[-\frac{1}{2}\,, 0\right], \quad \left[0\,, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}\,, 1\right].$$

3. Εκτιμήστε χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα τη μέση τιμή $\mathrm{av}(f)$ της

$$f(x) = x^2$$

στο διάστημα $[0, 6]$.
(α) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[0, 6]\,.$$

(β) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 3], \quad [3, 6]\,.$$

(γ) Πάρτε 3 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 2], \quad [2, 4], \quad [4, 6]\,.$$

(δ) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα

$$\left[0, \frac{6}{n}\right], \quad \left[\frac{6}{n}\,, 2 \cdot \frac{6}{n}\right], \quad \left[2 \cdot \frac{6}{n}\,, 3 \cdot \frac{6}{n}\right], \ldots, \quad \left[(n-2) \cdot \frac{6}{n}\,, (n-1) \cdot \frac{6}{n}\right], \quad \left[(n-1) \cdot \frac{6}{n}\,, 6\right],$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (m-1)^2 + m^2 = \sum_{l=1}^{m} l^2 = \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}\,.$$

(ε) Τι συμβαίνει στο (δ) όταν $n \to \infty$;

4. Εκτιμήστε χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα τη μέση τιμή $\mathrm{av}(f)$ της

$$f(x) = x^3$$

στο διάστημα $[0, 6]$.

(α) Πάρτε 1 υποδιάστημα, το

$$[0, 6]\,.$$

(β) Πάρτε 2 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 3], \quad [3, 6]\,.$$

(γ) Πάρτε 3 υποδιαστήματα, τα

$$[0, 2], \quad [2, 4], \quad [4, 6]\,.$$

(δ) Πάρτε n υποδιαστήματα, τα

$$\left[0, \frac{6}{n}\right], \quad \left[\frac{6}{n}, 2 \cdot \frac{6}{n}\right], \quad \left[2 \cdot \frac{6}{n}, 3 \cdot \frac{6}{n}\right], \ldots, \quad \left[(n-2) \cdot \frac{6}{n}, (n-1) \cdot \frac{6}{n}\right], \quad \left[(n-1) \cdot \frac{6}{n}, 6\right],$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (m-1)^3 + m^3 = \sum_{l=1}^{m} l^3 = \frac{m^2\,(m+1)^2}{4}\,.$$

(ε) Τι συμβαίνει στο (δ) όταν $n \to \infty$;