

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
12ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΧΗΜΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Έστω

$$g(x) = \frac{3x}{x^2 + 3}.$$

- (α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.
- (β) Βρείτε τα x στα οποία η $g(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.
- (γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $g(x)$ και τα x στα οποία εμφανίζονται.

2. Έστω

$$f(t) = \sqrt{t} - 2t.$$

- (α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(t)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.
- (β) Βρείτε τα t στα οποία η $f(t)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.
- (γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(t)$ και τα t στα οποία εμφανίζονται.

3. Έστω

$$f(x) = x^{\frac{6}{5}} - x^{\frac{3}{5}}.$$

- (α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.
- (β) Βρείτε τα x στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.
- (γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(x)$ και τα x στα οποία εμφανίζονται.

4. Έστω

$$h(x) = 9x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^2$$

με $D_h = [-1, 1]$.

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $h(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $h(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $h(x)$ και τα x στα οποία εμφανίζονται.

5. Έστω

$$g(t) = 2t\sqrt{t^2 - 9}.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(t)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα t στα οποία η $g(t)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $g(t)$ και τα t στα οποία εμφανίζονται.

6. Έστω

$$h(t) = \sin(t + \pi)$$

με $D_h = [0, 2\pi]$.

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $h(t)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα t στα οποία η $h(t)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $h(t)$ και τα t στα οποία εμφανίζονται.

7. Έστω

$$f(x) = \sin x + x$$

με $D_f = [0, 2\pi]$.

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(x)$ και τα x στα οποία εμφανίζονται.

8. Έστω

$$g(\theta) = \cos^2 \theta$$

με $D_g = [0, 2\pi]$.

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(\theta)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα θ στα οποία η $g(\theta)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $g(\theta)$ και τα θ στα οποία εμφανίζονται.

9. Έστω

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

και

$$g(x) = x^{\frac{5}{3}} - x.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

(γ) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(δ) Βρείτε τα x στα οποία η $g(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

10. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

11. Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $h(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

12. Έστω

$$f(\theta) = \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 7\theta$$

με $D_f = [0, 2\pi]$.

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(\theta)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(β) Βρείτε τα θ στα οποία η $f(\theta)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

13. Έστω

$$h(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}.$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $h(x)$ είναι αύξουσα και αυτά στα οποία είναι φθίνουσα.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $h(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(γ) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(δ) Βρείτε τα x στα οποία η $h(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

14. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και

$$g(x) = ax^2 + bx + c.$$

(α) Βρείτε, χρησιμοποιώντας το κριτήριο 2ης παραγώγου, τα x στα οποία η $g(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(β) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $g(x)$ και τα x στα οποία εμφανίζονται.

15. Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

(α) Βρείτε, χρησιμοποιώντας το κριτήριο 2ης παραγώγου, τα x στα οποία η $h(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο και αυτά στα οποία εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.

(β) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $h(x)$ και τα x στα οποία εμφανίζονται.