

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
9ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Έστω $u(x), v(x)$ δύο συναρτήσεις.

(α) Αν οι $u(x), v(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο x_0 , δηλαδή υπάρχουν οι

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=x_0},$$

βρείτε την

$$\left. \frac{d^2}{dx^2}(uv) \right|_{x=x_0}.$$

(β) Αν οι $u(x), v(x)$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμες στο x_0 , δηλαδή υπάρχουν οι

$$\left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_{x=x_0} \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^3 v}{dx^3} \right|_{x=x_0},$$

βρείτε την

$$\left. \frac{d^3}{dx^3}(uv) \right|_{x=x_0}.$$

(γ) Αν οι $u(x), v(x)$ είναι τέσσερις φορές παραγωγίσιμες στο x_0 , δηλαδή υπάρχουν οι

$$\left. \frac{d^4 u}{dx^4} \right|_{x=x_0} \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^4 v}{dx^4} \right|_{x=x_0},$$

βρείτε την

$$\left. \frac{d^4}{dx^4}(uv) \right|_{x=x_0}.$$

2. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

$$(α) \quad f(x) = \frac{\sec x}{1 + \sec x},$$

$$(β) \quad g(t) = \frac{t^2 + 3}{\sin(t^2 + 1)},$$

$$(γ) \quad h(u) = u \tan(4u^2 - 9),$$

$$(δ) \quad \alpha(x) = \cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1})x,$$

$$(ε) \quad h(t) = \sqrt[3]{\tan t},$$

$$(στ) \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}.$$

3. Έστω

$$f(x) = \sin(-2x).$$

Υπολογίστε τις

$$f^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Βρείτε την τιμή του a για την οποία η εφαπτομένη της καμπύλης

$$y = \tan(ax)$$

για $x = 0$ είναι η ευθεία με εξίσωση

$$y = -4x.$$

5. Βρείτε την εξίσωση της κάθετης στην καμπύλη

$$y = \frac{3}{x+1}$$

για $x = 0$.

6. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης στην καμπύλη

$$y = 1 + \cos x$$

για $x = \frac{\pi}{2}$.

7. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης στην καμπύλη

$$y = \sin(-3x)$$

για $x = \frac{\pi}{6}$.

8. Αν

$$y = 3u^2 + 7 \text{ και } u = 6 \sin x + 2x ,$$

βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

9. Αν

$$s = (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} \text{ και } x = \cot(3t^2 - 1) ,$$

βρείτε την παράγωγο $\frac{ds}{dt}$.

10. Αν

$$u = \tan(\sec x) \text{ και } x = \sin(-9\theta) ,$$

βρείτε την παράγωγο $\frac{du}{d\theta}$.