

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
8ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΩΝ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

(α) Είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0;

(β) Είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0;

2. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

3. Έστω

$$f(x) = |x^3| .$$

Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Έστω

$$f(x) = -x^{\frac{3}{5}} .$$

Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5. Έστω

$$f(x) = x^{\frac{4}{7}} .$$

Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

6. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3 \\ 2x, & x > 3 \end{cases} .$$

Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 3.

7. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 4x, & x \geq 2 \end{cases} .$$

Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 2.

8. Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση με $D_f = (-1, 1)$ για την οποία ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq |x|^3, \text{ για } x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right) .$$

(α) Είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0;

(β) Είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0; Αν ναι, ποια είναι η τιμή της $f'(0)$;

9. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 0 \\ bx + c, & x > 0 \end{cases} .$$

(α) Για ποιες τιμές των a, b, c είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0;

(β) Για ποιες τιμές των a, b, c είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0;

10. Έστω $f(x)$ μία περιττή συνάρτηση με $D_{f'} = D_f$ (δηλαδή η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα $x \in D_f$). Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι άρτια.

11. Έστω $f(x)$ μία άρτια συνάρτηση με $D_{f'} = D_f$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι περιττή.

12. Εξετάστε αν υπάρχει κάποια συνάρτηση $f(x)$ με $D_f = [-3, 2]$ τέτοια ώστε

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \leq x \leq -1 \\ x - 4, & -1 < x \leq 2 \end{cases} .$$