

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι**  
**5ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**ΑΠΕΙΡΑ ΟΡΙΑ**

**1.** Έστω  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ , με  $a_n \neq 0$ , και  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n \in \mathbb{Q}$ , με  $r_n > r_i$ , για  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

(α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^{r_n} + a_{n-1} x^{r_{n-1}} + \dots + a_2 x^{r_2} + a_1 x^{r_1}) = a_n \lim_{x \rightarrow \infty} x^{r_n}.$$

(β) Έστω ότι  $x^{r_i}$  ορίζεται για  $x < 0$ , για  $i = 1, 2, \dots, n-1, n$ . Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^{r_n} + a_{n-1} x^{r_{n-1}} + \dots + a_2 x^{r_2} + a_1 x^{r_1}) = a_n \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{r_n}.$$

**2.** Έστω  $n \in \mathbb{N}$  και  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ , με  $a_n \neq 0$ . Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

(α)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0),$

(β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0).$

**3.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

(α)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 4\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} - 3\sqrt[3]{x^2} \right),$

(β)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x - \sqrt[8]{x^9} + \frac{4}{x^{13}} \right).$

**4.** Έστω  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m \in \mathbb{R}$ , με  $a_n, b_m \neq 0$ , και  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n, s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m \in \mathbb{Q}$ , με  $r_n > r_i$ , για  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , και  $s_m > s_j$ , για  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ .

(α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^{r_n} + a_{n-1} x^{r_{n-1}} + \dots + a_2 x^{r_2} + a_1 x^{r_1}}{b_m x^{s_m} + b_{m-1} x^{s_{m-1}} + \dots + b_2 x^{s_2} + b_1 x^{s_1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^{r_n}}{b_m x^{s_m}} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{r_n - s_m}.$$

(β) Έστω ότι  $x^{r_i}$  και  $x^{s_j}$  ορίζονται για  $x < 0$ , για  $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$  και  $j = 1, 2, \dots, m - 1, m$ . Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^{r_n} + a_{n-1} x^{r_{n-1}} + \dots + a_2 x^{r_2} + a_1 x^{r_1}}{b_m x^{s_m} + b_{m-1} x^{s_{m-1}} + \dots + b_2 x^{s_2} + b_1 x^{s_1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^{r_n}}{b_m x^{s_m}} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{r_n - s_m}.$$

**5.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x - 9},$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8\sqrt[6]{x} + \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}}{\frac{9}{x} - 2\sqrt[6]{x}},$$

$$(γ) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt[3]{x^5} - 2\sqrt[9]{x^2} - 3x^2}{\frac{2}{x^2} + 12\sqrt[6]{x^8}}.$$

**6.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 2x - 3}{5x^3 - 7x},$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^7} + 8x^2}{-3x + 8\sqrt[5]{x^{12}} - 7\sqrt[3]{x}}.$$

**7.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x - 2)^2 + 3(x - 2)^7}{-6(x - 2)^{\frac{7}{3}} + 5(x - 2)},$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5|x + 3|^2 + 9|x + 3|^{\frac{1}{2}}}{2|x + 3|^7 - 11|x + 3|^6}.$$

**8.** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^5}.$$

**9.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4}.$$

**10.** Έστω  $f(x)$  μία συνάρτηση με  $D_f = (-1, 0)$  για την οποία ισχύει ότι

$$-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}, \text{ για } x \in \left(-\frac{5}{7}, 0\right).$$

Υπολογίστε το

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

**11.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(3x)}{4x + 1},$$

$$(β) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(5x^2 - 12x + 9)}{-x^4 + 16}.$$