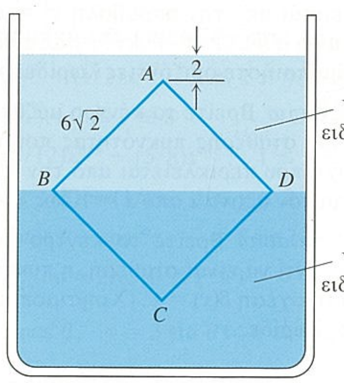
Έργο και δύναμη ρευστού

5. *Έργο και κινητική ενέργεια* Τοποθετούμε ένα μπαλάκι του γκολφ, βάρους 45 gr, σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 3{,}5$ N/cm. Συμπιέζουμε το ελατήριο 15 cm και κατόπιν το αφήνουμε ελεύθερο. Σε πόσο ύψος θα φθάσει το μπαλάκι (μετρώμενο από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου);

6. *Δύναμη ρευστού* Μια τριγωνική πλάκα ABC είναι βυθισμένη στο νερό, με το επίπεδό της κατακόρυφο. Η πλευρά AB, μήκους 4 m, βρίσκεται 6 m κάτω από την υδάτινη επιφάνεια, ενώ η κορυφή C βρίσκεται 2 m κάτω από την επιφάνεια. Βρείτε τη δύναμη που ασκείται από το νερό σε μια πλευρά της πλάκας.

7. *Μέση πίεση* Μια κατακόρυφη ορθογώνια πλάκα είναι βυθισμένη σε ρευστό με την άνω ακμή της παράλληλη προς την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Δείξτε ότι η δύναμη που ασκεί το ρευστό στη μια πλευρά της πλάκας ισούται με τη μέση πίεση (μεταξύ της άνω και της κάτω ακμής) επί το εμβαδόν της πλάκας.

8. *Κατακόρυφη τετραγωνική πλάκα* Η δεξαμενή που φαίνεται εδώ είναι γεμάτη από δύο μη αναμειγνυόμενα υγρά ειδικού βάρους w_1 και w_2 αντίστοιχα. Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στη μια πλευρά της κατακόρυφης τετράγωνης πλάκας $ABCD$. Τα σημεία B και D κείνται στη διαχωριστική επιφάνεια και το τετράγωνο έχει μήκος πλευράς $6\sqrt{2}$ m. (*Υπόδειξη:* Αν το y μετριέται προς τα κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, τότε η πίεση είναι $p = w_1 y$ για $0 \le y \le 8$ και $p = 8w_1 + w_2(y - 8)$ για $y > 8$.)



Ροπές και κέντρα μάζας

9. *Οριακή θέση κεντροειδούς* Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής που φράσσεται από κάτω από τον άξονα x και από πάνω από την καμπύλη $y = 1 - x^n$, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος. Ποια είναι η οριακή θέση του κεντροειδούς καθώς $n \to \infty$;

10. *Τηλεφωνικός στύλος* Αν μεταφέρουμε τηλεφωνικούς στύλους με δίτροχο καρότσι προσδεδεμένο σε φορτηγό, θέλουμε οι τροχοί του να βρίσκονται περίπου 1 m πίσω από το κέντρο μάζας κάθε στύλου, ώστε να παρέχουν την απαιτούμενη ροπή για ευστάθεια. Οι ξύλινοι στύλοι κατηγορίας 1 της εταιρείας NYNEX της Νέας Υόρκης έχουν μήκος 12 m και περιφέρεια 70 cm στην κορυφή και 110 cm στη βάση τους, αντίστοιχα. Πόσο περίπου απέχει από την κορυφή του στύλου το κέντρο μάζας του;

11. *Σταθερή πυκνότητα* Έστω ότι μια λεπτή μεταλλική πλάκα εμβαδού A και σταθερής πυκνότητας δ καταλαμβάνει μια περιοχή R του επιπέδου xy, και έστω ότι M_y είναι η ροπή της πλάκας ως προς τον άξονα y. Δείξτε ότι η ροπή της πλάκας ως προς την ευθεία $x = b$ είναι

(α) $M_y - b\delta A$, αν η πλάκα βρίσκεται στα δεξιά της ευθείας

(β) $b\delta A - M_y$, αν η πλάκα βρίσκεται στα αριστερά της ευθείας.

12. *Μεταβλητή πυκνότητα* Βρείτε το κέντρο μάζας μιας λεπτής επίπεδης πλάκας που καταλαμβάνει την περιοχή που φράσσεται από την καμπύλη $y^2 = 4ax$ και την ευθεία $x = a$, όπου a = θετική σταθερά, αν η πυκνότητα στο σημείο (x, y) είναι ευθέως ανάλογη του (α) x, (β) $|y|$.

13. **(α)** *Ομόκεντροι κύκλοι* Βρείτε το κεντροειδές μιας περιοχής στο πρώτο τεταρτημόριο, η οποία φράσσεται από δύο ομόκεντρους κύκλους και τους άξονες συντεταγμένων, αν οι εν λόγω κύκλοι έχουν ακτίνες a και b, $0 < a < b$, και τα κέντρα τους συμπίπτουν με την αρχή των αξόνων.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Βρείτε τα όρια των συντεταγμένων του κεντροειδούς καθώς το a τείνει στο b, και αναλύστε το νόημα του αποτελέσματός σας.

14. *Εντοπισμός κεντροειδούς* Από ένα τετράγωνο πλευράς 12 cm αποκόπτουμε μια τριγωνική «γωνία». Το εμβαδόν του τριγώνου που αποκόψαμε είναι 36 cm². Αν το κεντροειδές της εναπομείνασας επιφάνειας απέχει 7 cm από τη μια πλευρά του αρχικού τετραγώνου, πόσο απέχει από τις υπόλοιπες πλευρές;

6 Υπερβατικές συναρτήσεις και διαφορικές εξισώσεις

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Οι συναρτήσεις $\ln x$ και e^x αποτελούν μάλλον το ευρύτερα γνωστό ζεύγος συνάρτησης-αντίστροφης συνάρτησης, αλλά σίγουρα όχι το μόνο σημαντικό. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όταν περιοριστούν σε κατάλληλο πεδίο ορισμού, έχουν αντίστροφες που βρίσκουν πολλές εφαρμογές· επίσης, υπάρχουν άλλα χρήσιμα ζεύγη λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων (σε άλλη βάση). Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τέτοιες συναρτήσεις και θα πλουτίσουμε την εμπειρία μας με το εκπληκτικό εύρος προβλημάτων που αυτές μας επιτρέπουν να λύσουμε.

6.1 Λογάριθμοι

Η συνάρτηση φυσικού (νεπέριου) λογαρίθμου • Παράγωγος του $y = \ln x$ • Το πεδίο τιμών του $\ln x$ • Το ολοκλήρωμα $\int (1/u)\, du$ • Ολοκληρώματα των $\tan x$ και $\cot x$ • Λογαριθμική παραγώγιση • Παράγωγος του $\log_a u$ • Ολοκληρώματα του $\log_a x$

Στην παρούσα ενότητα, ορίζουμε τη συνάρτηση φυσικού λογαρίθμου ως ολοκλήρωμα, βασιζόμενοι στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Πρόκειται για διαφορετική προσέγγιση από αυτήν που είδαμε στο κεφάλαιο των Προκαταρκτικών (ή που είχατε συναντήσει στα προ του απειροστικού λογισμού μαθηματικά σας), όπου ξεκινώντας με την e^x ορίσαμε κατόπιν την αντίστροφή της $\ln x$.

Από ιστορικής απόψεως, η σπουδαιότητα των λογαρίθμων έγκειται κατ' αρχάς στη διευκόλυνση των αριθμητικών υπολογισμών. Κατά τον 17ο αιώνα, οι επαναστατικές ιδιότητες των λογαρίθμων επέτρεψαν την περάτωση μαθηματικών υπολογισμών που έδωσαν τεράστια ώθηση στην υπεράκτια ναυσιπλοΐα και την ουράνια μηχανική. Στις μέρες μας, βέβαια, οι περίπλοκες αριθμητικές πράξεις εκτελούνται από υπολογιστές, ωστόσο εξαιτίας των ιδιοτήτων τους οι λογάριθμοι εξακολουθούν να έχουν σημασία στον απειροστικό λογισμό και στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων.

Η συνάρτηση φυσικού (νεπέριου) λογαρίθμου

Ο φυσικός (νεπέριος) λογάριθμος θετικού αριθμού x, γράφεται $\ln x$, και ισούται με το ακόλουθο ολοκλήρωμα.

CD-ROM
Δικτυότοπος

Ορισμός **Η συνάρτηση φυσικού (νεπέριου) λογαρίθμου**

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad x > 0$$

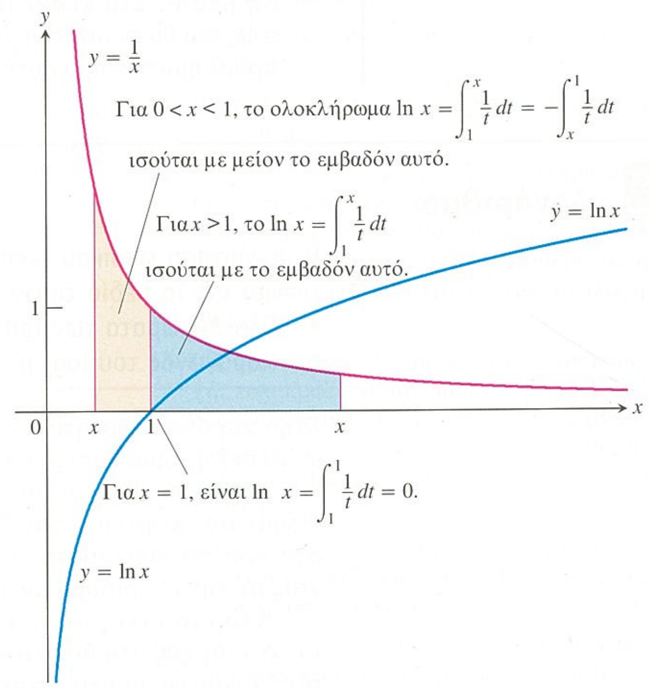
Για $x > 1$, η τιμή της συναρτήσεως $\ln x$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = 1/t$ από $t = 1$ έως $t = x$ (Σχήμα 6.1). Για $0 < x < 1$, η τιμή $\ln x$ ισούται με μείον το εμβαδόν του αντίστοιχου χωρίου από x έως 1. Η συνάρτηση του λογαρίθμου δεν ορίζεται για $x \leq 0$. Ισχύει επίσης ότι

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0. \qquad \text{Άνω και κάτω όρια ίσα}$$

Προσέξτε ότι ενώ στο Σχήμα 6.1 δείχνουμε το γράφημα της $y = 1/x$, στο ολοκλήρωμα γράφουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση ως $y = 1/t$. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει το x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, θα είχαμε

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx,$$

πράγμα που δημιουργεί σύγχυση λόγω του διπλού ρόλου τού x. Αλλάζουμε λοιπόν τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε t (η οποία ακολούθως καλείται βωβή ή πλασματική μεταβλητή).



Σχήμα 6.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$ και η σχέση της με τη συνάρτηση $y = 1/x$, $x > 0$. Η λογαριθμική καμπύλη κείται πάνω από τον άξονα x για x μεγαλύτερο του 1, ενώ για x μικρότερο του 1 η καμπύλη κείται κάτω από τον άξονα x.

Παράγωγος του $y = \ln x$

Βάσει του πρώτου μέρους του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού (βλ. Ενότητα 4.5),

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}.$$

CD-ROM Δικτυότοπος

Συνεπώς, για κάθε θετικό x, θα ισχύει ότι

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0}$$

Εφόσον $x > 0$, στον ορισμό του $\ln x$, η παράγωγος του λογαρίθμου είναι πάντα θετική, οπότε η συνάρτηση $\ln x$ είναι παντού αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Η δεύτερη παράγωγος, $-1/x^2$, είναι αρνητική και συνεπώς το γράφημα της $\ln x$ στρέφει παντού τα κοίλα κάτω.

Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ενός θετικού x θα ορίζεται η $\ln u$, οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

στη συνάρτηση $y = \ln u$, παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0} \qquad (1)$$

Παράδειγμα 1 Παράγωγοι φυσικών λογαρίθμων

(α) $\frac{d}{dx}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$

(β) Η Εξίσωση (1) για $u = x^2 + 3$ δίνει

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}.$$

Υπάρχει κάτι που πρέπει να προσέξουμε στο Παράδειγμα 1(α). Η συνάρτηση $y = \ln 2x$ έχει την ίδια παράγωγο με την $y = \ln x$. Αυτό αληθεύει γενικότερα για τη συνάρτηση $y = \ln ax$ και τυχόν a:

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Για τυχόντες αριθμούς $a > 0$ και $x > 0$,

1. $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. $\ln x^n = n \ln x$.

Απόδειξη της πρότασης $\ln ax = \ln a + \ln x$ Η απόδειξη είναι κάπως ασυνήθιστη, αλλά κομψή. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\ln ax$ και $\ln x$ έχουν την ίδια παράγωγο· δείτε την Εξίσωση (2). Σύμφωνα λοιπόν με το Πόρισμα 1 του θεωρήματος μέσης τιμής, οι συναρτήσεις πρέπει να διαφέρουν κατά μια σταθερά, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\ln ax = \ln x + C \qquad (3)$$

για κάποιο C. Τώρα απομένει να δείξουμε ότι η σταθερά C ισούται με $\ln a$.

Η Εξίσωση (3) ισχύει για κάθε θετικό x, άρα και για $x = 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\ C &= \ln a. && \text{Αναδιατάσσοντας} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $C = \ln a$ στην Εξίσωση (3) προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση:

$$\ln ax = \ln a + \ln x. \tag{4}$$

Απόδειξη της πρότασης $\ln(a/x) = \ln a - \ln x$ Η πρόταση αυτή προκύπτει από την Εξίσωση (4) σε δύο βήματα. Αντικαθιστώντας στην Εξίσωση (4) το a με $1/x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ln\frac{1}{x} + \ln x &= \ln\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \\ &= \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

οπότε

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην Εξίσωση (4) το x με το $1/x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ln\frac{a}{x} &= \ln\left(a \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{x} \\ &= \ln a - \ln x. \end{aligned}$$

Απόδειξη της πρότασης $\ln x^n = n \ln x$ (όπου n ρητός) Ανακαλούμε και πάλι το επιχείρημα περί κοινής παραγώγου. Για κάθε θετικό x,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln x^n &= \frac{1}{x^n}\frac{d}{dx}(x^n) && \text{Εξ. (1) με } u = x^n \\ &= \frac{1}{x^n} n x^{n-1} && \text{Προς το παρόν αξιώνουμε ότι ο } n \text{ είναι ρητός, δεδομένου ότι} \\ &= n \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(n \ln x). && \text{αποδείξαμε τον τύπο παραγώγου δύναμης μόνο για ρητούς εκθέτες.} \end{aligned}$$

Εφόσον οι $\ln x^n$ και $n \ln x$ έχουν ίσες παραγώγους, θα ισχύει

$$\ln x^n = n \ln x + C$$

για κάποια σταθερά C. Θέτουμε x ίσο με 1 οπότε η σταθερά C μηδενίζεται, ό.έ.δ.

Αν διερωτάστε κατά πόσον ο κανόνας $\ln x^n = n \ln x$ ισχύει για άρρητους n, η απάντηση είναι καταφατική. Ο κανόνας ισχύει για κάθε n, οπότε μπορείτε να τον χρησιμοποιείτε, παρότι δεν τον έχουμε αποδείξει στη γενική του εκδοχή.

Το πεδίο τιμών του $\ln x$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του $\ln 2$ με αριθμητική ολοκλήρωση, οπότε βρίσκουμε περίπου 0,69. Άρα γνωρίζουμε ότι

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

και ότι

$$\ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Πεδίο ορισμού της $\ln x$ είναι το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών· πεδίο τιμών είναι όλος ο άξονας των πραγματικών.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Jean d'Alembert
(1717-1783)

Το ολοκλήρωμα $\int(1/u)\,du$

Η Εξίσωση (1) μας οδηγεί στον ολοκληρωτικό τύπο

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C \tag{5}$$

όπου u είναι θετική διαφορίσιμη συνάρτηση, αλλά τι συμβαίνει όταν η u είναι αρνητική; Στην περίπτωση αυτή, η $-u$ είναι συνάρτηση θετική, οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u}\,du &= \int \frac{1}{(-u)}\,d(-u) && \text{Εξ. (5) με το } -u \text{ στη θέση του } u \\ &= \ln(-u) + C. \end{aligned} \tag{6}$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τις Εξισώσεις (5) και (6) σε έναν μόνο τύπο, αν παρατηρήσουμε ότι σε κάθε περίπτωση, η έκφραση στο δεξιό μέλος ισούται με $\ln|u| + C$. Στην Εξίσωση (5), $\ln u = \ln|u|$ αφού $u > 0$· στην Εξίσωση (6), $\ln(-u) = \ln|u|$ αφού $u < 0$. Είτε είναι θετική είτε αρνητική η συνάρτηση u, το ολοκλήρωμα της $(1/u)\,du$ ισούται με $\ln|u| + C$.

> Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και δεν μηδενίζεται πουθενά στο πεδίο ορισμού της, τότε
>
> $$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C. \tag{7}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

Η Εξίσωση (7) μας δίδει την τιμή του ολοκληρώματος αυτού για n ίσο με -1. Η Εξίσωση (7) μας πληροφορεί ότι ολοκληρώματα μιας συγκεκριμένης *μορφής* καταλήγουν σε λογαρίθμους. Αναλυτικότερα,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$ με σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή της Εξίσωσης (7)

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx &= \int_{-5}^{-1}\frac{du}{u} = \ln|u|\Big]_{-5}^{-1} && u = x^2 - 5,\ du = 2x\,dx,\ u(0) = -5,\ u(2) = -1 \\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή της Εξίσωσης (7)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}\,du \qquad u = 3+2\sin\theta,\ du = 2\cos\theta\,d\theta,\ u(-\pi/2)=1,\ u(\pi/2)=5$$

$$= 2\ln|u|\Big]_1^5$$

$$= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5$$

Ολοκληρώματα των tan x και cot x

Η Εξίσωση (7) μας πληροφορεί (επιτέλους!) για το πώς ολοκληρώνονται οι συναρτήσεις εφαπτομένης και συνεφαπτομένης. Για την εφαπτομένη,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} \qquad u=\cos x,\ du = -\sin x\,dx$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C \qquad \text{Εξ. (7)}$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C \qquad \text{Ιδιότητα λογαρίθμων}$$

$$= \ln|\sec x| + C.$$

Για τη συνεφαπτομένη,

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} \qquad u=\sin x,\ du=\cos x\,dx$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C.$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C\\ &\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C\end{aligned}}$$

Παράδειγμα 4 Κάνοντας χρήση του ολοκληρώματος της tan u

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x\,dx = \int_0^{\pi/3} \tan u\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\tan u\,du \qquad \text{Αντικαθιστούμε } u=2x,\ dx = du/2,\ u(0)=0,\ u(\pi/6)=\pi/3.$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Λογαριθμική παραγώγιση

Οι παράγωγοι θετικών συναρτήσεων, των οποίων οι τύποι περιέχουν γινόμενα, πηλίκα, και δυνάμεις, μπορούν συνήθως να υπολογιστούν πιο γρήγορα αν πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών του τύπου προτού παραγωγίσουμε. Η πράξη αυτή μας επιτρέπει να κάνουμε χρήση των λογαριθμικών ιδιοτήτων, προκειμένου να απλοποιήσουμε τις μαθηματικές εκφράσεις. Η διαδικασία καλείται **λογαριθμική παραγώγιση** και παρουσιάζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5 Λογαριθμική παραγώγιση

Βρείτε την παράγωγο dy/dx όπου

$$y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \qquad x>1.$$

Λύση Παίρνουμε τον φυσικό λογάριθμο αμφότερων των μελών της εξίσωσης ορισμού της y και απλοποιούμε, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων:

$$\ln y = \ln\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$$

$$= \ln((x^2+1)(x+3)^{1/2}) - \ln(x-1) \qquad \text{Ιδιότητα (2)}$$

$$= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) \qquad \text{Ιδιότητα (1)}$$

$$= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1). \qquad \text{Ιδιότητα (3)}$$

Κατόπιν παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς x, εφαρμόζοντας την Εξίσωση (1) στο αριστερό μέλος:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}.$$

Λύνουμε ως προς dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Τέλος, αντικαθιστούμε για το y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Παράγωγος του $\log_a u$

Για να βρούμε την παράγωγο του λογαρίθμου βάσεως a, τον μετατρέπουμε πρώτα σε φυσικό λογάριθμο (βλ. Προκαταρκτικά, Ενότητα 4). Αν η u είναι θετική διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \qquad (8)$$

Παράδειγμα 6 Παραγώγιση λογαρίθμου βάσεως a

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

Ολοκληρώματα του $\log_a x$

Υπολογίζουμε ολοκληρώματα που περιέχουν λογαρίθμους βάσεως a μετατρέποντάς τα σε ολοκληρώματα φυσικών λογαρίθμων.

Παράδειγμα 7 Χρήση αντικατάστασης

$$\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \qquad u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.1

Παράγωγοι λογαρίθμων

Στις Ασκήσεις 1-22, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή (x, t, ή θ).

1. $y = \ln 3x$
2. $y = \ln (t^2)$
3. $y = \ln \frac{3}{x}$
4. $y = \ln (\theta + 1)$
5. $y = \ln x^3$
6. $y = (\ln x)^3$
7. $y = t\,(\ln t)^2$
8. $y = t\sqrt{\ln t}$
9. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$
10. $y = \frac{\ln t}{t}$
11. $y = \frac{1 + \ln t}{t}$
12. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$
13. $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$
14. $y = \ln (\ln x)$
15. $y = \ln (\ln (\ln x))$
16. $y = \theta(\sin (\ln \theta) + \cos (\ln \theta))$
17. $y = \ln (\sec \theta + \tan \theta)$
18. $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$
19. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$
20. $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$
21. $y = \ln (\sec (\ln \theta))$
22. $y = \ln \left(\frac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$

Στις Ασκήσεις 23 και 24, εφαρμόστε τον κανόνα του Leibniz (βλ. Επιπρόσθετες ασκήσεις, Κεφάλαιο 4) για να βρείτε την παράγωγο του y ως προς x.

23. $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t}\,dt$
24. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\,dt$

Ολοκλήρωση

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 25-42.

25. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$
26. $\int_{-1}^{0} \frac{3\,dx}{3x - 2}$
27. $\int \frac{2y\,dy}{y^2 - 25}$
28. $\int \frac{8r\,dr}{4r^2 - 5}$
29. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2 - \cos t}\,dt$
30. $\int_0^{\pi/3} \frac{4 \sin \theta}{1 - 4\cos \theta}\,d\theta$
31. $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx$
32. $\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$
33. $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
34. $\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$
35. $\int \frac{3\sec^2 t}{6 + 3\tan t}\,dt$
36. $\int \frac{\sec y \tan y}{2 + \sec y}\,dy$
37. $\int_0^{\pi/2} \tan \frac{x}{2}\,dx$
38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\,dt$
39. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cot \frac{\theta}{3}\,d\theta$
40. $\int_0^{\pi/12} 6\tan 3x\,dx$
41. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x}$
42. $\int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln (\sec x + \tan x)}}$

Λογαριθμική παραγώγιση

Στις Ασκήσεις 43-52, εφαρμόστε λογαριθμική παραγώγιση για να βρείτε την παράγωγο του y ως προς την εκάστοτε ανεξάρτητη μεταβλητή.

43. $y = \sqrt{x(x + 1)}$
44. $y = \sqrt{\frac{t}{t + 1}}$
45. $y = \sqrt{\theta + 3}\,\sin \theta$
46. $y = (\tan \theta)\sqrt{2\theta + 1}$
47. $y = t(t + 1)(t + 2)$
48. $y = \frac{\theta + 5}{\theta \cos \theta}$
49. $y = \frac{\theta \sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$
50. $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$
51. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}$
52. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικής τιμής των Ασκήσεων 53 και 54.

53. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

54. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y'(0) = 1$

Λογάριθμοι σε άλλες βάσεις

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 55-60.

55. $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,dx$
56. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\,dx$
57. $\int_0^2 \frac{\log_2 (x + 2)}{x + 2}\,dx$
58. $\int_0^9 \frac{2\log_{10} (x + 1)}{x + 1}\,dx$
59. $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$
60. $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

Στις Ασκήσεις 61-66, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή (x, t, ή θ).

61. $y = \log_2 5\theta$
62. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$
63. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$
64. $y = \log_3 \left(\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\ln 3}\right)$
65. $y = \theta \sin (\log_7 \theta)$
66. $y = 3\log_8 (\log_2 t)$

Θεωρία και εφαρμογές

67. *Απόλυτα ακρότατα* Εντοπίστε πού υπάρχουν και ποια είναι τα απόλυτα ακρότατα των
 (α) $\ln (\cos x)$ στο $[-\pi/4, \pi/3]$
 (β) $\cos (\ln x)$ στο $[1/2, 2]$.
68. *$\ln x < x$ για $x > 1$*
 (α) Δείξτε ότι η $f(x) = x - \ln x$ είναι αύξουσα για $x > 1$.
 (β) Βασιζόμενοι στο (α), δείξτε ότι $\ln x < x$ για $x > 1$.
69. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των $y = \ln x$ και $y = \ln 2x$ από $x = 1$ έως $x = 5$.
70. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = \tan x$ και του άξονα x από $x = -\pi/4$ έως $x = \pi/3$.
71. *Όγκος* Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τους άξονες συντεταγμένων, την ευθεία $y = 3$, και την καμπύλη $x = 2/\sqrt{y + 1}$, περιστρέφεται ως προς τον άξονα y παράγοντας ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του παραγόμενου στερεού εκ περιστροφής.
72. *Όγκος* Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{\cot x}$ και τον άξονα x από $x = \pi/6$ έως $x = \pi/2$, περιστρέφεται ως προς τον άξονα x παράγοντας ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του παραγόμενου στερεού εκ περιστροφής.
73. *Όγκος* Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = 1/x^2$ και τον άξονα x από $x = 1/2$ έως $x = 2$, περιστρέφεται ως προς τον άξονα y παράγοντας ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του παραγόμενου στερεού εκ περιστροφής.
74. *Μήκος τόξου* Βρείτε τα μήκη των ακόλουθων καμπυλών.
 (α) $y = (x^2/8) - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$
 (β) $x = (y/4)^2 - 2\ln (y/4), \quad 4 \le y \le 12$
75. *Γραμμικοποίηση του $\ln (1 + x)$ στο $x = 0$* Αντί να προσεγγίσουμε το $\ln x$ κοντά στο $x = 1$, προσεγγίζουμε το $\ln(1 + x)$ κοντά στο $x = 0$. Έτσι απλοποιείται η τελική μαθηματική έκφραση.

 CD-ROM Δικτυότοπος

 (α) Εξαγάγετε τη γραμμικοποίηση του $\ln (1 + x) \approx x$ στο $x = 0$.
 (β) Εκτιμήστε με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων το σφάλμα που υπεισέρχεται όταν αντικαταστήσουμε το $\ln (1 + x)$ με το x στο διάστημα $[0, 0{,}1]$.
 (γ) Παραστήστε γραφικά στο ίδιο σχήμα τα $\ln (1 + x)$ και x για $0 \le x \le 0{,}5$ (με διαφορετικά χρώματα αν είναι δυνατόν). Σε ποια σημεία του γραφήματος αποδίδει περισσότερο και σε ποια λιγότερο η προσέγγιση του $\ln (1 + x)$; Με απλή ανάγνωση αριθμητικών τιμών από το σχήμα που κάνατε, βρείτε το καλύτερο δυνατόν άνω φράγμα του σφάλματος που σας επιτρέπει η σχεδίαση στον υπολογιστή σας.
76. *Πολυωνυμική (δευτεροβάθμια) προσέγγιση του $\ln (1 + x)$ στο $x = 0$*
 (α) Προσεγγίστε με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού το $y = \ln (1 + x)$ στο $x = 0$ (δείτε την Άσκηση 46, Ενότητα 3.6).
 (β) Παραστήστε γραφικά στο ίδιο σχήμα το $\ln (1 + x)$ και το προσεγγιστικό πολυώνυμο για $0 \le x \le 1$ (με διαφορετικά χρώματα αν είναι δυνατόν). Σε ποια σημεία του γραφήματος αποδίδει περισσότερο και σε ποια λιγότερο η προσέγγιση του $\ln (1 + x)$;
 (γ) Χρησιμοποιήστε την πολυωνυμική προσέγγιση που κάνατε για να υπολογίσετε προσεγγιστικά τις τιμές των $\ln (1{,}1)$ και $\ln 2$.
77. *Εκτίμηση τιμών του $\ln x$ με τον κανόνα Simpson* Αν και οι γραμμικοποιήσεις μας αρκούν όταν θέλουμε να προσεγγίσουμε τιμές του λογαρίθμου σε μικρά διαστήματα, ο κανόνας Simpson υπερέχει όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε *συγκεκριμένες* τιμές του $\ln x$.

 Για παράδειγμα, οι τιμές των $\ln (1{,}2)$ και $\ln (0{,}8)$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων είναι

 $$\ln (1{,}2) = 0{,}18232, \qquad \ln (0{,}8) = -0{,}22314.$$

 Εκτιμήστε τα $\ln (1{,}2)$ και $\ln (0{,}8)$ κάνοντας πρώτα χρήση του τύπου $\ln (1 + x) \approx x$ και κατόπιν βάσει του κανόνα Simpson για $n = 2$. (Το αποτέλεσμα δεν είναι εντυπωσιακό;)

T 78. *Μάθετε γράφοντας* Παραστήστε γραφικά το $y = \ln |\sin x|$ στην περιοχή $0 \le x \le 22$, $-2 \le y \le 0$. Εξηγήστε το σχήμα που βλέπετε. Ποια αλλαγή πρέπει να επιφέρετε στον τύπο για να αντιστρέψετε τα τόξα της καμπύλης;

T 79. (α) Παραστήστε γραφικά στο ίδιο σχήμα το $y = \sin x$ και τις καμπύλες $y = \ln (a + \sin x)$ για $a = 2, 4, 8, 20$, και 50, στο διάστημα $0 \le x \le 23$.

(β) Γιατί γίνονται όλο και πιο επίπεδες οι καμπύλες καθώς αυξάνεται το a; (*Υπόδειξη*: Βρείτε ένα άνω φράγμα του $|y'|$ που να εξαρτάται από το a.)

T 80. *Γραφική παράσταση* Παρουσιάζει σημείο καμπής η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$; Προσπαθήστε να απαντήσετε στην ερώτηση αυτή

(α) με γραφική παράσταση της καμπύλης

(β) με χρήση μεθόδων του απειροστικού λογισμού.

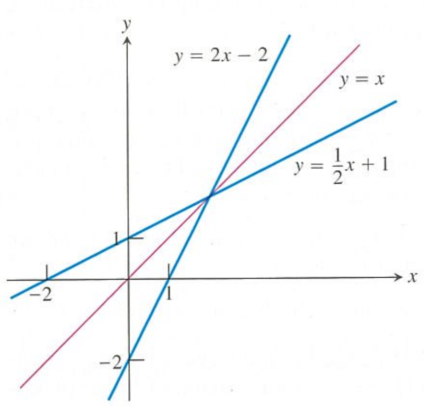
6.2 Εκθετικές συναρτήσεις

Παράγωγοι αντίστροφων διαφορίσιμων συναρτήσεων • Το Θεώρημα 1 από άλλη οπτική γωνία • Η αντίστροφη συνάρτηση του $\ln x$ και ο αριθμός e • Η φυσική εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ • Παράγωγος και ολοκλήρωμα του e^x • Ο αριθμός e εκπεφρασμένος ως όριο • Η γενική εκθετική συνάρτηση a^x • Ο τύπος παραγώγου δύναμης (τελική μορφή) • Παράγωγος και ολοκλήρωμα του a^u

Όταν ο ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας y είναι ανάλογος της y, έχουμε να κάνουμε με μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $y = y_0$ για $t = 0$, τότε πρόκειται για την εκθετική συνάρτηση $y = y_0 e^{kt}$. Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση ως την αντίστροφη του $\ln x$ και θα διερευνήσουμε τις ιδιότητές της, στις οποίες οφείλεται η εκπληκτική συχνότητα με την οποία εμφανίζεται η συνάρτηση αυτή στα μαθηματικά και στις εφαρμογές τους. Μερικές από τις εφαρμογές αυτές θα μελετήσουμε στην Ενότητα 6.4. Αλλά πρώτα πρέπει να γνωρίζουμε πότε έχει παράγωγο η αντίστροφη μιας συναρτήσεως.



Σχήμα 6.2 Αν παραστήσουμε γραφικά στο ίδιο σχήμα τις $f(x) = (1/2)x + 1$ και $f^{-1}(x) = 2x - 2$ φαίνεται αμέσως η συμμετρία των γραφημάτων ως προς την ευθεία $y = x$. Οι κλίσεις είναι αντίστροφες η μία της άλλης.

Παράγωγοι αντίστροφων διαφορίσιμων συναρτήσεων

Αν υπολογίσουμε τις παραγώγους της $f(x) = (1/2)x + 1$ και της αντίστροφής της $f^{-1}(x) = 2x - 2$ από το Παράδειγμα 3 της Ενότητας 4 των Προκαταρκτικών, βλέπουμε ότι

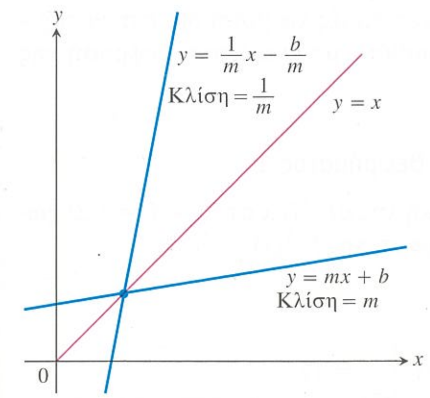
$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2.$$

Οι παράγωγοι είναι αντίστροφες η μία της άλλης. Το γράφημα της f είναι η ευθεία $y = (1/2)x + 1$, και το γράφημα της f^{-1} είναι η ευθεία $y = 2x - 2$ (Σχήμα 6.2). Οι κλίσεις είναι αντίστροφες η μία της άλλης.

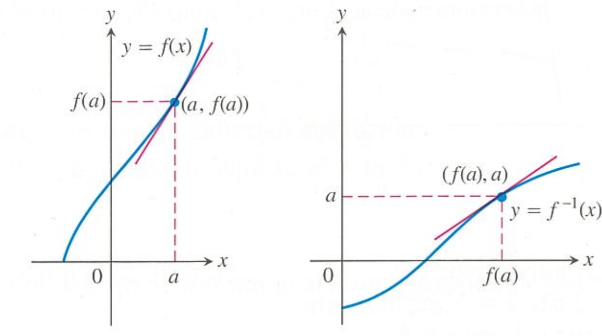
Αυτό δεν αποτελεί σύμπτωση. Αν κατοπτρίσουμε τυχούσα μη οριζόντια ή μη κατακόρυφη ευθεία ως προς την ευθεία $y = x$, θα αντιστραφεί η κλίση της. Αν η αρχική ευθεία είχε κλίση $m \neq 0$ (Σχήμα 6.3), η κατοπτριζόμενη ευθεία έχει κλίση $1/m$ (Άσκηση 69).

Αυτή η σχέση αντιστροφής μεταξύ των κλίσεων των γραφημάτων αντίστροφων συναρτήσεων ισχύει γενικότερα. Αν η κλίση της $y = f(x)$ στο σημείο $(a, f(a))$ είναι $f'(a) \neq 0$, τότε η κλίση της $y = f^{-1}(x)$ στο



Σχήμα 6.3 Οι κλίσεις μη κατακόρυφων ευθειών που κατοπτρίζονται στην ευθεία $y = x$ είναι αντίστροφες η μια της άλλης.

αντίστοιχο σημείο $(f(a), a)$ είναι $1/f'(a)$ (Σχήμα 6.4). Συνεπώς, η παράγωγος της f^{-1} στο $f(a)$ ισούται με την αντίστροφη της παραγώγου της f στο a. Όπως αντιλαμβάνεστε, θα πρέπει να αξιώσουμε από την f να πληροί κάποιες μαθηματικές συνθήκες, ώστε να ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα. Οι συνήθεις συνθήκες, που προκύπτουν από τον προχωρημένο λογισμό, δηλώνονται στο Θεώρημα 1.



Οι κλίσεις είναι μεταξύ τους αντίστροφες: $\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_a}$.

Σχήμα 6.4 Οι γραφικές παραστάσεις αντίστροφων συναρτήσεων έχουν αντίστροφες κλίσεις στα αντίστοιχα σημεία.

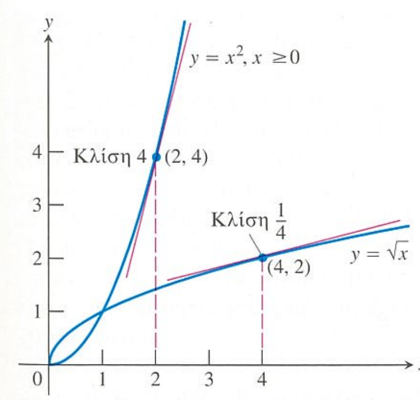
Θεώρημα 1 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος I και αν η df/dx δεν μηδενίζεται πουθενά στο I, τότε η f^{-1} είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος $f(I)$. Η τιμή της df^{-1}/dx σε τυχόν σημείο $f(a)$ είναι η αντίστροφη της τιμής της df/dx στο a:

$$\left(\frac{df^{-1}}{dx}\right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}}. \qquad (1)$$

Εν συντομία,

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}. \qquad (2)$$



Σχήμα 6.5 Η παράγωγος της $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ στο σημείο $(4, 2)$ είναι η αντίστροφη της παραγώγου της $f(x) = x^2$ στο $(2, 4)$.

Παράδειγμα 1 Έλεγχος του Θεωρήματος 1

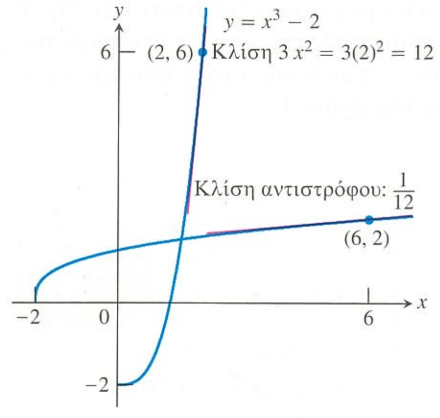
Για την $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, και την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (Σχήμα 6.5), έχουμε

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad \text{και} \quad \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$$

Το σημείο $(4, 2)$ είναι κατοπτρικό είδωλο του $(2, 4)$ ως προς την ευθεία $y = x$.

Στο σημείο $(2, 4)$: $\quad \frac{df}{dx} = 2x = 2(2) = 4.$

Στο σημείο $(4, 2)$: $\quad \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{df/dx}.$



ΣΧΗΜΑ 6.6 Η παράγωγος της $f(x) = x^3 - 2$ στο $x = 2$ μας δίνει την παράγωγο της f^{-1} στο $x = 6$.

Η Εξίσωση (1) μας επιτρέπει μερικές φορές να βρίσκουμε συγκεκριμένες τιμές της df^{-1}/dx χωρίς να διαθέτουμε αναλυτική έκφραση της f^{-1}.

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή του Θεωρήματος 1

Έστω $f(x) = x^3 - 2$. Βρείτε την τιμή της df^{-1}/dx στο $x = 6 = f(2)$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε την έκφραση της $f^{-1}(x)$.

Λύση

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = 3x^2\Big|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12} \qquad \text{Εξ. (1)}$$

Δείτε το Σχήμα 6.6.

Το θεώρημα 1 από άλλη οπτική γωνία

Αν η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$ και μεταβάλουμε το x κατά μια μικρή ποσότητα dx, τότε η αντίστοιχη μεταβολή του y ισούται περίπου με

$$dy = f'(a)\,dx.$$

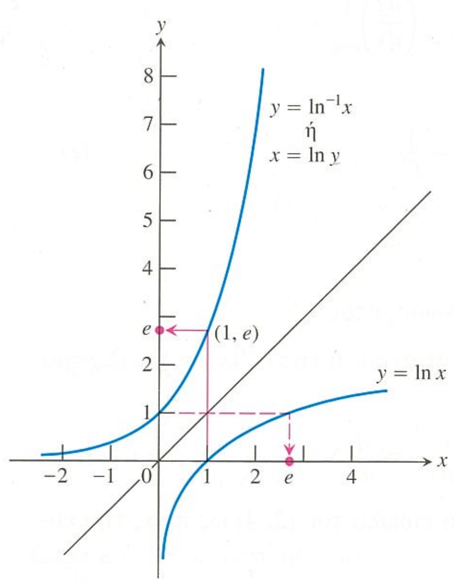
Δηλαδή το y μεταβάλλεται περίπου $f'(a)$ φορές γρηγορότερα του x, ενώ το x μεταβάλλεται περίπου $1/f'(a)$ φορές γρηγορότερα του y.

Η αντίστροφη συνάρτηση του ln *x* και ο αριθμός *e*

Η συνάρτηση $\ln x$, όντας αύξουσα συνάρτηση του x με πεδίο ορισμού το $(0, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\infty, \infty)$, διαθέτει αντίστροφη $\ln^{-1} x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(0, \infty)$. Η γραφική παράσταση της $\ln^{-1} x$ είναι η γραφική παράσταση της $\ln x$ κατοπτρισμένη ως προς την ευθεία $y = x$. Όπως μπορείτε να δείτε,

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

Ο αριθμός $\ln^{-1} 1$ συμβολίζεται με το γράμμα e (Σχήμα 6.7).



ΣΧΗΜΑ 6.7 Γραφικές παραστάσεις των $y = \ln x$ και $y = \ln^{-1} x$. Ο αριθμός e ισούται εξ ορισμού με $\ln^{-1} 1$.

Ορισμός Ο αριθμός *e*

$$e = \ln^{-1} 1$$

Αν και ο αριθμός e δεν είναι ρητός, θα δούμε αργότερα έναν τρόπο υπολογισμού του ως ορίου.

Η φυσική εκθετική συνάρτηση $y = e^x$

Μπορούμε να υψώσουμε τον αριθμό e σε ρητή δύναμη x ως συνήθως:

$$e^2 = e \cdot e, \qquad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \qquad e^{1/2} = \sqrt{e},$$

κ.ο.κ. Εφόσον το e είναι θετικός αριθμός, και το e^x θα είναι θετικός. Άρα ο αριθμός e^x έχει λογάριθμο. Λογαριθμίζοντας λοιπόν παίρνουμε

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x. \tag{3}$$

Εφόσον η συνάρτηση λογαρίθμου $\ln x$ είναι ένα-προς-ένα και ισχύει $\ln(\ln^{-1} x) = x$, η Εξίσωση (3) μας πληροφορεί ότι

$$e^x = \ln^{-1} x \qquad \text{για ρητά } x. \tag{4}$$

Η Εξίσωση (4) μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό του e^x για άρρητες τιμές του x. Η συνάρτηση $\ln^{-1} x$ είναι ορισμένη για κάθε x, άρα μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να αναθέσουμε μια τιμή στο e^x για κάθε σημείο όπου δεν του έχει αποδοθεί ήδη.

Ορισμός Η φυσική εκθετική συνάρτηση

Για κάθε πραγματικό αριθμό x, $e^x = \ln^{-1} x$.

Εφόσον οι συναρτήσεις $\ln x$ και e^x είναι αντίστροφες η μία της άλλης, έχουμε

Αντίστροφες εξισώσεις για τα e^x και ln *x*

$$e^{\ln x} = x \ (\text{για κάθε } x > 0) \tag{5}$$

$$\ln(e^x) = x \ (\text{για κάθε } x) \tag{6}$$

Παράγωγος και ολοκλήρωμα του e^x

Η εκθετική συνάρτηση είναι διαφορίσιμη διότι είναι η αντίστροφη μιας διαφορίσιμης συναρτήσεως της οποίας η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά. Ξεκινώντας από την $y = e^x$, έχουμε,

$$y = e^x$$

$$\ln y = x \qquad \text{Λογαριθμίζουμε κάθε μέλος}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς } x$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x. \qquad \text{Αντικαθιστούμε το } y \text{ με το } e^x$$

Το απρόσμενο συμπέρασμα που συνάγεται από την αλληλουχία των εξισώσεων αυτών είναι ότι η e^x είναι η παράγωγος του εαυτού της. Όπως θα δούμε στην Ενότητα 6.4, οι μόνες άλλες συναρτήσεις που παρουσιάζουν τέτοια συμπεριφορά είναι τα σταθερά πολλαπλάσια της e^x.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης επεκτείνει το αποτέλεσμα αυτό σε μια γενικότερη μορφή.

Υπερβατικοί αριθμοί και υπερβατικές συναρτήσεις

Αριθμοί που αποτελούν λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων με ρητούς συντελεστές ονομάζονται **αλγεβρικοί**: ο −2 είναι αλγεβρικός αφού ικανοποιεί την εξίσωση $x + 2 = 0$, και ο $\sqrt{3}$ είναι επίσης αλγεβρικός αφού ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - 3 = 0$. Αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί καλούνται **υπερβατικοί,** όρος τον οποίο καθιέρωσε ο Euler για να περιγράψει αριθμούς, όπως ο e και ο π, οι οποίοι «υπερβαίνουν τις δυνατότητες χειρισμού μέσω αλγεβρικών μεθόδων». Ωστόσο, έπρεπε να περάσουν εκατό ακόμη χρόνια από τον θάνατο του Euler, μέχρι ο Charles Hermite να αποδείξει (1873) την υπερβατικότητα του e κατά την έννοια που περιγράφουμε. Λίγο αργότερα (1882), ο C. L. F. Lindemann απέδειξε την υπερβατικότητα του π.

Σήμερα, αποκαλούμε αλγεβρική τη συνάρτηση $y = f(x)$ αν ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0,$$

όπου τα P είναι πολυώνυμα του x με ρητούς συντελεστές. Η συνάρτηση $y = 1/\sqrt{x+1}$ είναι αλγεβρική διότι ικανοποιεί την εξίσωση $(x + 1)y^2 - 1 = 0$. Στην περίπτωση αυτή τα πολυώνυμα είναι $P_2 = x + 1$, $P_1 = 0$, και $P_0 = -1$. Αλγεβρικά είναι τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις με ρητούς συντελεστές, όπως αλγεβρικά είναι και όλων των ειδών τα αθροίσματα, γινόμενα, πηλίκα, ρητές δυνάμεις, και ρητές ρίζες αλγεβρικών συναρτήσεων.

Συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές καλούνται υπερβατικές. Οι έξι κύριες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους είναι υπερβατικές. Το ίδιο ισχύει και για τις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις.

Αν u είναι τυχούσα διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}. \tag{7}$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Charles Hermite (1822-1901)
C. L. F. Lindemann (1852-1939)

Παράδειγμα 3 Παραγώγιση εκθετικών

(α) $\frac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ Εξ. (7) για $u = -x$

(β) $\frac{d}{dx}e^{\sin x} = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x}\cdot \cos x$ Εξ. (7) για $u = \sin x$

Η Εξίσωση (7) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σε μορφή ολοκληρώματος,

$$\int e^u\,du = e^u + C.$$

Παράδειγμα 4 Ολοκλήρωση εκθετικού

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x}\Big]_0^{\pi/2} \quad \text{Η αντιπαράγωγος του Παραδείγματος 3}$$
$$= e^1 - e^0 = e - 1$$

Παράδειγμα 5 Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$e^y\frac{dy}{dx} = 2x, \qquad x > \sqrt{3}\cdot \quad y(2) = 0.$$

Λύση Ολοκληρώνουμε κάθε μέλος της διαφορικής εξίσωσης ως προς x, παίρνοντας

$$e^y = x^2 + C.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη για να προσδιορίσουμε το C:

$$C = e^0 - (2)^2$$
$$= 1 - 4 = -3.$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την πλήρη έκφραση του e^y:

$$e^y = x^2 - 3. \tag{8}$$

Για να λύσουμε ως προς y, λογαριθμίζουμε την τελευταία εξίσωση:

$$\ln e^y = \ln(x^2 - 3)$$
$$y = \ln(x^2 - 3). \tag{9}$$

Σημειώστε ότι η εξίσωση ισχύει για $x > \sqrt{3}$.

Αποτελεί καλή τακτική να επαληθεύετε πάντα τη λύση που βρήκατε, μέσω της αρχικής εξίσωσης. Από τις Εξισώσεις (8) και (9), έχουμε

$$e^y\frac{dy}{dx} = e^y\frac{d}{dx}\ln(x^2-3) \quad \text{Εξ. (9)}$$
$$= e^y\frac{2x}{x^2-3}$$
$$= (x^2-3)\frac{2x}{x^2-3} \quad \text{Εξ. (8)}$$
$$= 2x.$$

Επιβεβαιώνουμε έτσι την ορθότητα της λύσεως.

Ο αριθμός e εκπεφρασμένος ως όριο

Έχουμε ορίσει το e ως τον αριθμό που ικανοποιεί τη σχέση $\ln e = 1$. Το ακόλουθο θεώρημα προτείνει έναν τρόπο υπολογισμού του e ως ορίου.

Θεώρημα 2 **Ο αριθμός e ως όριο**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

Απόδειξη Αν $f(x) = \ln x$, τότε $f'(x) = 1/x$, οπότε $f'(1) = 1$. Αλλά από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] \quad \text{Η συνάρτηση ln είναι συνεχής.}$$

Εφόσον $f'(1) = 1$, έχουμε

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \quad \ln e = 1 \text{ και η συνάρτηση ln είναι ένα-προς-ένα.}$$

Ο πίνακας τιμών του Σχήματος 6.8 συμπληρώθηκε με υπολογιστή. Με ακρίβεια 15 ψηφίων,

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45.$$

X	Y1	
1,	2,	
0,1	2,59374	
0,01	2,70481	
0,001	2,71692	
0,0001	2,71815	
0,00001	2,71827	
0,000001	2,71828	

Y1=(1+X)^(1/X)

Σχήμα 6.8 Πίνακας τιμών της συναρτήσεως $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

Η γενική εκθετική συνάρτηση a^x

Εφόσον $a = e^{\ln a}$ για κάθε θετικό αριθμό a, μπορούμε να γράψουμε το a^x στη μορφή $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Κατά συνέπεια προβαίνουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός **Γενικές εκθετικές συναρτήσεις**
Για τυχόντες αριθμούς $a > 0$ και x,
$$a^x = e^{x \ln a}.$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

Παράδειγμα 6 Υπολογισμός εκθετικών συναρτήσεων

(α) $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$

(β) $2^{\pi} = e^{\pi \ln 2} \approx e^{2,18} \approx 8,8$

Ο τύπος παραγώγου δύναμης (τελική μορφή)

Είμαστε σε θέση τώρα να ορίσουμε το x^n για κάθε $x > 0$ και για κάθε πραγματικό αριθμό n ως $x^n = e^{n \ln x}$. Άρα το n στην εξίσωση $\ln x^n = n \ln x$ δεν είναι πλέον απαραιτήτως ρητός· μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός, αρκεί να ισχύει $x > 0$:

$$\begin{aligned} \ln x^n &= \ln (e^{n \ln x}) = n \ln x \cdot \ln e && \ln e^u = u, \text{ για τυχόν } u \\ &= n \ln x. \end{aligned}$$

Αν συνδυάσουμε τον κανόνα $a^x/a^y = a^{x-y}$ με τον ορισμό $x^n = e^{n \ln x}$ μπορούμε να εκφράσουμε τον τύπο της παραγώγου δύναμης στην τελική του μορφή. Παραγωγίζοντας το x^n ως προς x παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= \frac{d}{dx} e^{n \ln x} && \text{Ορισμός του } x^n,\ x > 0 \\ &= e^{n \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(n \ln x) && \text{Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης για } e^u \\ &= x^n \cdot \frac{n}{x} && \text{Ορισμός, πάλι} \\ &= n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, για $x > 0$,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης επεκτείνει την παραπάνω εξίσωση στην τελική μορφή του τύπου παραγώγου δύναμης.

Τύπος παραγώγου δύναμης (τελική μορφή)
Αν u είναι θετική διαφορίσιμη συνάρτηση του x και n είναι τυχών πραγματικός αριθμός, τότε η u^n είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, και

$$\frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}.$$

Παράδειγμα 7 Χρήση του τύπου παραγώγου δύναμης

(α) $\dfrac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} \qquad (x > 0)$

(β) $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2 + \sin 3x)^{\pi} &= \pi(2 + \sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x) \cdot 3 \\ &= 3\pi(2 + \sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x). \end{aligned}$$

Παράγωγος και ολοκλήρωμα του a^u

Αφετηρία μας είναι ο ορισμός $a^x = e^{x \ln a}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) && \text{Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης} \\ &= a^x \ln a. \end{aligned}$$

Αν $a > 0$, τότε

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης μας δίνει μια γενικότερη μορφή της τελευταίας εξίσωσης.

Αν $a > 0$ και η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε η a^u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, και

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}. \qquad (10)$$

Η Εξίσωση (10) δείχνει για ποιο λόγο η εκθετική συνάρτηση e^x εμφανίζεται τόσο συχνά στον λογισμό. Αν $a = e$, τότε $\ln a = 1$ και η Εξίσωση (10) παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \ln e = e^x.$$

Παράδειγμα 8 Παραγώγιση γενικών εκθετικών συναρτήσεων

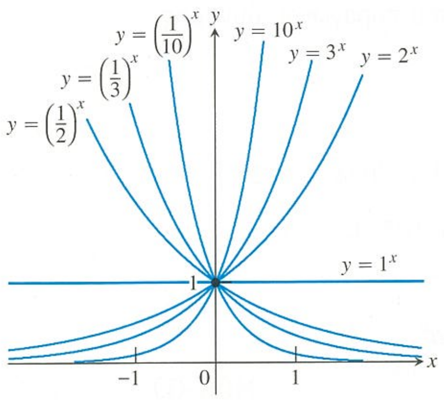
(α) $\dfrac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3$

(β) $\dfrac{d}{dx} 3^{-x} = 3^{-x} (\ln 3) \dfrac{d}{dx}(-x) = -3^{-x} \ln 3$

(γ) $\dfrac{d}{dx} 3^{\sin x} = 3^{\sin x} (\ln 3) \dfrac{d}{dx}(\sin x) = 3^{\sin x}(\ln 3) \cos x$

Από την Εξίσωση (10), βλέπουμε ότι η παράγωγος του a^x είναι θετική αν $\ln a > 0$, ή αν $a > 1$, και αρνητική αν $\ln a < 0$, ή αν $0 < a < 1$. Συνεπώς, η a^x είναι αύξουσα συνάρτηση του x για $a > 1$ και φθίνουσα συνάρτηση του x για $0 < a < 1$. Ούτως ή άλλως, όμως, η a^x είναι ένα-προς-ένα. Η δεύτερη παράγωγός της,

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$



Σχημα 6.9 Οι εκθετικές συναρτήσεις είναι φθίνουσες για $0 < a < 1$ και αύξουσες για $a > 1$. Καθώς $x \to \infty$, έχουμε $a^x \to 0$ αν $0 < a < 1$ και $a^x \to \infty$ αν $a > 1$. Καθώς $x \to -\infty$, έχουμε $a^x \to \infty$ αν $0 < a < 1$ και $a^x \to 0$ αν $a > 1$.

είναι θετική για κάθε x, οπότε το γράφημα της a^x έχει τα κοίλα άνω σε κάθε διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. (Σχήμα 6.9).

Αν $a \neq 1$, οπότε $\ln a \neq 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε κάθε μέλος της Εξίσωσης (10) με το $\ln a$, παίρνοντας

$$a^u \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx}(a^u).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x, παίρνουμε

$$\int a^u \frac{du}{dx}\, dx = \int \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx}(a^u)\, dx = \frac{1}{\ln a} \int \frac{d}{dx}(a^u)\, dx = \frac{1}{\ln a} a^u + C.$$

Αν γράψουμε το πρώτο ολοκλήρωμα σε διαφορική μορφή, τότε

$$\boxed{\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \qquad (11)}$$

Παράδειγμα 9 Ολοκλήρωση γενικών εκθετικών συναρτήσεων

(α) $\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ Εξ. (11) για $a = 2$, $u = x$

(β) $\int 2^{\sin x} \cos x\, dx$

$= \int 2^u\, du = \frac{2^u}{\ln 2} + C$ $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$, και Εξ. (11)

$= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C$ Το u αντικαταστάθηκε από το $\sin x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.2

Παράγωγοι φυσικών εκθετικών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 1-14, παραγωγίστε το y ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή (x, t, ή θ).

1. $y = e^{-5x}$

2. $y = e^{5-7x}$

3. $y = e^{(4\sqrt{x} + x^2)}$

4. $y = xe^x - e^x$

5. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

6. $y = e^\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

7. $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

8. $y = \cos(e^{-\theta^2})$

9. $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

10. $y = \ln\left(\frac{e^\theta}{1 + e^\theta}\right)$

11. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}\right)$

12. $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

13. $y = \int_0^{\ln x} \sin e^t\, dt$

14. $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\, dt$

Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

Στις Ασκήσεις 15-18, βρείτε το dy/dx.

15. $\ln y = e^y \sin x$

16. $\ln xy = e^{x+y}$

17. $e^{2x} = \sin(x + 3y)$

18. $\tan y = e^x + \ln x$

Ολοκληρώματα φυσικών εκθετικών συναρτήσεων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 19-32.

19. $\int (e^{3x} + 5e^{-x})\, dx$

20. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\, dx$

21. $\int 8e^{(x+1)}\, dx$

22. $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\, dx$

23. $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$

24. $\int 2te^{-t^2}\, dt$

25. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

26. $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\, dx$

27. $\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta}) \sec^2\theta\, d\theta$

28. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta}) \csc^2\theta\, d\theta$

29. $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t\, dt$

30. $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2x\, e^{x^2} \cos(e^{x^2})\, dx$

31. $\int \frac{e^r}{1 + e^r}\, dr$

32. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

Παράγωγοι γενικών εκθετικών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 33-44, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την εκάστοτε ανεξάρτητη μεταβλητή.

33. $y = 2^x$

34. $y = 2^{\sqrt{s}}$

35. $y = x^\pi$

36. $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$

37. $y = 7^{\sec\theta} \ln 7$

38. $y = 2^{\sin 3t}$

39. $y = t^{1-e}$

40. $y = (\ln\theta)^\pi$

41. $y = \log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$

42. $y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$

43. $y = \log_7\left(\frac{\sin\theta \cos\theta}{e^\theta\, 2^\theta}\right)$

44. $y = \log_2\left(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}}\right)$

Λογαριθμική παραγώγιση

Στις Ασκήσεις 45-50, χρησιμοποιήστε λογαριθμική παραγώγιση για να βρείτε την παράγωγο του y ως προς την εκάστοτε ανεξάρτητη μεταβλητή.

45. $y = (x + 1)^x$

46. $y = t^{\sqrt{t}}$

47. $y = (\sin x)^x$

48. $y = x^{\sin x}$

49. $y = x^{\ln x}$

50. $y = (\ln x)^{\ln x}$

Ολοκληρώματα συναρτήσεων με γενικά εκθετικά

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 51-58.

51. $\int_1^{\sqrt{2}} x\, 2^{(x^2)}\, dx$

52. $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t\, dt$

53. $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}\, dx$

54. $\int 3x^{\sqrt{3}}\, dx$

55. $\int x^{\sqrt{2}-1}\, dx$

56. $\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}}\, dx$

57. $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}\, dx$

58. $\int_1^{e^x} \frac{3^{\ln t}}{t}\, dt$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 59-62.

59. $\frac{dy}{dt} = e^t \sin(e^t - 2)$, $y(\ln 2) = 0$

60. $\frac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t})$, $y(\ln 4) = 2/\pi$

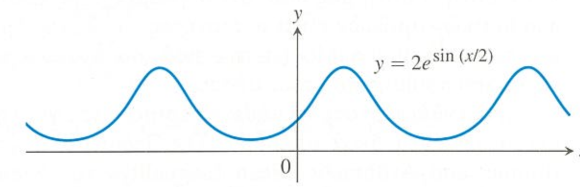
61. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}$, $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$

62. $\frac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}$, $y(1) = -1$ και $y'(1) = 0$

Θεωρία και εφαρμογές

63. *Απόλυτα ακρότατα* Βρείτε το απόλυτο (ολικό) μέγιστο και το απόλυτο ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = e^x - 2x$ στο διάστημα $[0, 1]$.

64. *Μια περιοδική συνάρτηση* Σε ποια σημεία εμφανίζει ακρότατα η περιοδική συνάρτηση $f(x) = 2e^{\sin(x/2)}$, και ποια είναι αυτά;



65. *Απόλυτο μέγιστο* Βρείτε το ολικό μέγιστο της συναρτήσεως $f(x) = x^2 \ln(1/x)$ και σε ποιο x εμφανίζεται αυτό.

66. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν της «τριγωνικής» περιοχής του πρώτου τεταρτημορίου η οποία φράσσεται άνω από την καμπύλη $y = e^{2x}$, κάτω από την καμπύλη $y = e^x$, και δεξιά από την ευθεία $x = \ln 3$.

67. *Εκθετικό όριο* Δείξτε ότι $\lim_{k\to\infty} (1 + (r/k))^k = e^r$.

68. *Μήκος καμπύλης* Βρείτε μια καμπύλη στο επίπεδο xy η οποία να διέρχεται από την αρχή και να έχει μήκος από $x = 0$ έως $x = 1$ που να δίνεται από τη σχέση

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^x}\, dx.$$

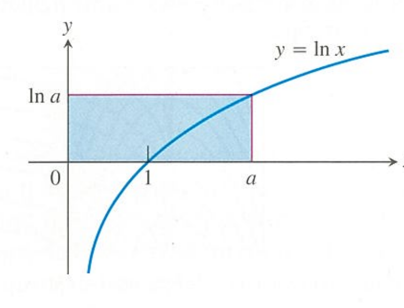
69. *Αντίστροφη ευθείας* Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της αντιστρόφου της $f(x) = mx + b$, όπου m και b είναι σταθερές και $m \neq 0$, είναι μια ευθεία με κλίση $1/m$ και τεταγμένη $-b/m$.

70. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = 2^{1-x}$ και το διάστημα $-1 \le x \le 1$ στον άξονα x.

71. *Άθροισμα ολοκληρωμάτων* Δείξτε ότι για κάθε αριθμό $a > 1$,

$$\int_1^a \ln x\, dx + \int_0^{\ln a} e^y\, dy = a \ln a.$$

(Δείτε το σχήμα.)



72. *Η ανισότητα γεωμετρικού, λογαριθμικού, και αριθμητικού μέσου*

(α) Δείξτε ότι η γραφική παράσταση του e^x στρέφει τα κοίλα άνω σε κάθε διάστημα τιμών του x.

(β) Δείξτε, συμβουλευόμενοι κατάλληλα το παρατιθέμενο σχήμα, ότι αν $0 < a < b$, τότε

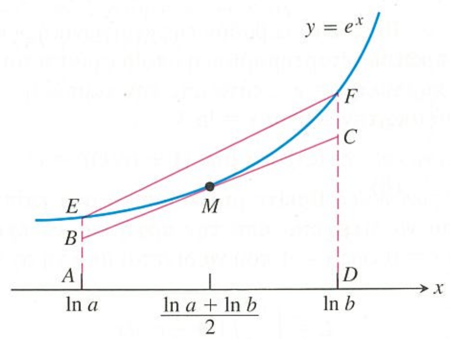
$$e^{(\ln a+\ln b)/2}\cdot(\ln b-\ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx < \frac{e^{\ln a}+e^{\ln b}}{2}\cdot(\ln b-\ln a).$$

(γ) Χρησιμοποιήστε την ανισότητα του ερωτήματος (β) για να συμπεράνετε ότι

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b-\ln a} < \frac{a+b}{2}.$$

Η ανισότητα αυτή μας λέει ότι ο γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών είναι μικρότερος του λογαριθμικού τους μέσου, ο οποίος με τη σειρά του είναι μικρότερος του αριθμητικού τους μέσου.

(Αν ενδιαφέρεστε να μάθετε περισσότερα για την ανισότητα αυτή, δείτε το άρθρο «The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality» του Frank Burk, *American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No. 6 (June-July 1987), pp. 527-528.)



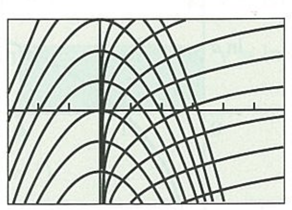
ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

T **73.** Παραστήστε γραφικά σε κοινό σχήμα την $f(x) = (x-3)^2e^x$ και την πρώτη της παράγωγο. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της f σε σχέση με τα πρόσημα και τις τιμές της f'. Με μεθόδους απειροστικού λογισμού, εντοπίστε σημεία των γραφημάτων που χρήζουν προσοχής.

74. *Ορθογώνιες οικογένειες καμπυλών* Αποδείξτε ότι όλες οι καμπύλες της οικογένειας

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + k$$

(k τυχούσα σταθερά) τέμνουν κάθετα όλες τις καμπύλες της οικογένειας $y = \ln x + c$ (c τυχούσα σταθερά). (Δείτε το σχήμα.)



[-3, 6] επί [-3, 3]

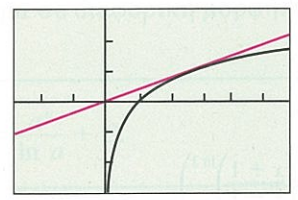
75. *Η σχέση αντιστροφής μεταξύ των e^x και $\ln x$* Βρείτε πόσο καλά μπορεί ο υπολογιστής σας να υπολογίσει τις σύνθετες συναρτήσεις

$$e^{\ln x} \quad \text{και} \quad \ln(e^x).$$

76. *Δεκαδική αναπαράσταση του e* Βρείτε το e με όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία επιτρέπει το κομπιουτεράκι σας, επιλύοντας την εξίσωση $\ln x = 1$.

77. *Ποιο είναι μεγαλύτερο, το π^e ή το e^π;* Η έλευση των υπολογιστών αφαίρεσε ένα μέρος της αίγλης που συνόδευε κάποτε το ερώτημα αυτό (αν κάνετε τον υπολογισμό με κομπιουτεράκι, θα δείτε ότι οι δυο ποσότητες πλησιάζουν αρκετά η μία την άλλη.) Ωστόσο, μπορείτε να απαντήσετε στο ερώτημα και χωρίς υπολογιστή.

(α) Βρείτε μια εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή και εφάπτεται του γραφήματος της $y=\ln x$.



[-3, 6] επί [-3, 3]

(β) Βασιζόμενοι στα γραφήματα της $y = \ln x$ και της εφαπτομένης, εξηγήστε γιατί $\ln x < x/e$ για κάθε θετικό $x \neq e$.

(γ) Δείξτε ότι $\ln(x^e) < x$ για κάθε θετικό $x \neq e$.

(δ) Να συμπεράνετε ότι ισχύει $x^e < e^x$ για κάθε θετικό $x \neq e$.

(ε) Λοιπόν, ποιο από τα δύο είναι μεγαλύτερο, το π^e ή το e^π;

Γραμμικοποιήσεις

78. *Η γραμμικοποίηση του e^x στο $x = 0$*

(α) Εξαγάγετε τη γραμμική προσέγγιση του $e^x \approx 1 + x$ στο $x = 0$.

(β) Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τις e^x και $1 + x$ για $-2 \le x \le 2$ (με διαφορετικά χρώματα, αν σας είναι δυνατόν). Σε ποια διαστήματα δείχνει το σχήμα ότι η προσέγγιση «υπερεκτιμά» τη συνάρτηση e^x; Σε ποια διαστήματα την «υποεκτιμά»;

T (γ) Εκτιμήστε με 5 δεκαδικά ψηφία το σφάλμα που υπεισέρχεται αν αντικαταστήσουμε το e^x με το $1 + x$ στο διάστημα [0, 0,2].

79. *Η γραμμικοποίηση του 2^x*

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = 2^x$ στο $x = 0$. Κατόπιν στρογγυλοποιήστε τους συντελεστές της σε 2 δεκαδικά ψηφία.

(β) Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα τη συνάρτηση και τη γραμμικοποίησή της, στην περιοχή $-3 \le x \le 3$ και $-1 \le y \le 1$.

80. *Η γραμμικοποίηση του $\log_3 x$*

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \log_3 x$ στο $x = 3$. Κατόπιν στρογγυλοποιήστε τους συντελεστές της σε 2 δεκαδικά ψηφία.

(β) Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα τη συνάρτηση και τη γραμμικοποίησή της στην περιοχή $0 \le x \le 8$ και $2 \le y \le 4$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Αντίστροφες συναρτήσεις και παράγωγοι

Στις Ασκήσεις 81-88, καλείστε να διερευνήσετε μερικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους, μαζί με τις παραγώγους τους και τις γραμμικές τους προσεγγίσεις σε συγκεκριμένα σημεία. Εκτελέστε τα παρακάτω βήματα με χρήση συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας.

(α) Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα τη συνάρτηση $y = f(x)$ και την παράγωγό της στο διάστημα που δίνεται. Εξηγήστε γιατί έχετε λόγο να πιστεύετε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα αυτό.

(β) Λύστε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x συναρτήσει του y και ονομάστε την προκύπτουσα αντίστροφη συνάρτηση g.

(γ) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται του γραφήματος της f στο καθορισμένο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

(δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας του γραφήματος της g στο σημείο $(f(x_0), x_0)$ το οποίο κείται αντισυμμετρικά του σημείου $(x_0, f(x_0))$ ως προς την ευθεία κλίσεως 45° $y = x$ (η ευθεία αυτή είναι το γράφημα της ταυτοτικής συνάρτησης). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 βρείτε την κλίση της εφαπτομένης αυτής.

(ε) Παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις f και g, την ταυτοτική συνάρτηση, τις δυο εφαπτομένες, και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(f(x_0), x_0)$. Περιγράψτε τις συμμετρίες που υπάρχουν στο σχήμα ως προς την κύρια διαγώνιο (την ευθεία $y = x$).

81. $y = \sqrt{3x-2}$, $\quad \frac{2}{3} \le x \le 4$, $\quad x_0 = 3$

82. $y = \dfrac{3x+2}{2x-11}$, $\quad -2 \le x \le 2$, $\quad x_0 = 1/2$

83. $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$, $\quad -1 \le x \le 1$, $\quad x_0 = 1/2$

84. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\quad -1 \le x \le 1$, $\quad x_0 = 1/2$

85. $y = x^3 - 3x^2 - 1$, $\quad 2 \le x \le 5$, $\quad x_0 = \dfrac{27}{10}$

86. $y = 2 - x - x^3$, $\quad -2 \le x \le 2$, $\quad x_0 = \dfrac{3}{2}$

87. $y = e^x$, $\quad -3 \le x \le 5$, $\quad x_0 = 1$

88. $y = \sin x$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $\quad x_0 = 1$

Στις Ασκήσεις 89 και 90, επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για να βρείτε τις πεπλεγμένες συναρτήσεις $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$ που ορίζονται ακολούθως στα διαστήματα που δίδονται.

89. $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3$, $\quad -5 \le x \le 5$, $\quad x_0 = -3/2$

90. $\cos y = x^{1/5}$, $\quad 0 \le x \le 1$, $\quad x_0 = 1/2$

6.3 Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων· Ολοκληρώματα

Παράγωγος τόξου ημιτόνου • Παράγωγος τόξου εφαπτομένης • Παράγωγος τόξου τέμνουσας • Παράγωγοι τόξων συνημιτόνου, συνεφαπτομένης, και συντέμνουσας • Τύποι ολοκλήρωσης

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις παρέχουν αντιπαραγώγους για μεγάλο πλήθος συναρτήσεων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τους μηχανικούς, τους μαθηματικούς, και τους φυσικούς. Στην παρούσα ενότητα, θα βρούμε τις παραγώγους των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων και θα μελετήσουμε τα σχετικά ολοκληρώματα.

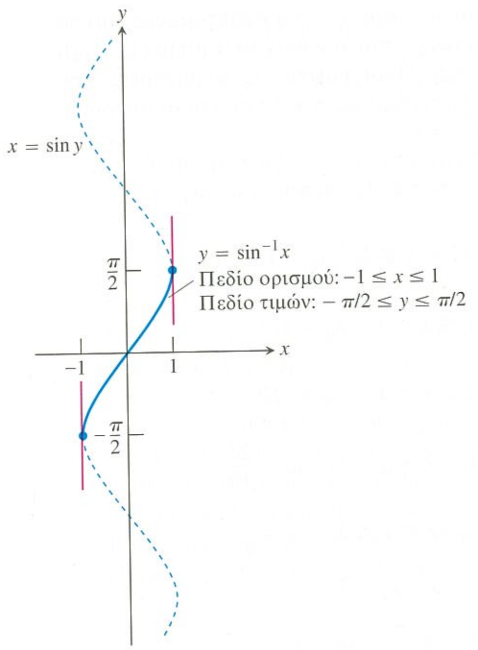
Παράγωγος τόξου ημιτόνου

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $x = \sin y$ είναι διαφορίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $-\pi/2 < y < \pi/2$ και ότι η παράγωγός της, το συνημίτονο, είναι θετική εκεί. Το Θεώρημα 1 μας εγγυάται ότι η αντίστροφη συνάρτηση $y = \sin^{-1} x$ είναι διαφορίσιμη παντού στο διάστημα $-1 < x < 1$. Για $x = -1$ και $x = 1$ η διαφορισιμότητα δεν υφίσταται πλέον, αφού οι εφαπτομένες του γραφήματος στα σημεία αυτά γίνονται κατακόρυφες (Σχήμα 6.10).

Βρίσκουμε την παράγωγο του $y = \sin^{-1} x$ ως εξής:

$$y = \sin^{-1} x \qquad \text{Σχέση αντίστροφων συναρτήσεων}$$

$$\sin y = x$$



Σχημα 6.10 Η γραφική παράσταση της $y = \sin^{-1} x$ έχει κατακόρυφες εφαπτομένες στα $x = -1$ και $x = 1$.

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}x \qquad \text{Παραγωγίζουμε κάθε μέλος}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Η διαίρεση στο τελευταίο βήμα είναι επιτρεπτή αφού $\cos y \neq 0$ για $-\pi/2 < y < \pi/2$. Μάλιστα το $\cos y$ είναι *θετικό* για $-\pi/2 < y < \pi/2$, οπότε μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το $\sqrt{1-(\sin y)^2}$, δηλαδή με το $\sqrt{1-x^2}$. Έτσι,

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x και $|u| < 1$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης, οπότε παίρνουμε

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.}$$

Παράδειγμα 1 Εφαρμογή του τύπου

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Παράγωγος τόξου εφαπτομένης

Παρόλο που η συνάρτηση $y = \sin^{-1} x$ έχει ένα μάλλον στενό πεδίο ορισμού $[-1, 1]$, η συνάρτηση $y = \tan^{-1} x$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό. Είναι και διαφορίσιμη για κάθε πραγματικό αριθμό, όπως θα δούμε αμέσως. Για την παραγώγιση, εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο όπως και για τη συνάρτηση του τόξου ημιτόνου.

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\tan y = x \qquad \text{Σχέση αντίστροφων συναρτήσεων}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan y) = \frac{d}{dx}x$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+(\tan y)^2} \qquad \text{Τριγωνομετρική ταυτότητα: } \sec^2 y = 1 + \tan^2 y$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

Η παράγωγος λοιπόν ορίζεται στο πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε από τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης έχουμε:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}.}$$

Παράδειγμα 2 Κινούμενο σωματίδιο

Σωματίδιο κινείται επί του άξονα x ούτως ώστε η θέση του ανά πάσα στιγμή $t \geq 0$ να είναι $x(t) = \tan^{-1}\sqrt{t}$. Με ποια ταχύτητα κινείται το σωματίδιο για $t = 16$;

Λύση

$$v(t) = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\sqrt{t} = \frac{1}{1+(\sqrt{t})^2}\cdot\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Για $t = 16$, η ταχύτητα είναι

$$v(16) = \frac{1}{1+16}\cdot\frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}.$$

Παράγωγος τόξου τέμνουσας

Την παράγωγο της συναρτήσεως $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, τη βρίσκουμε με παρόμοιο τρόπο όπως και για τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

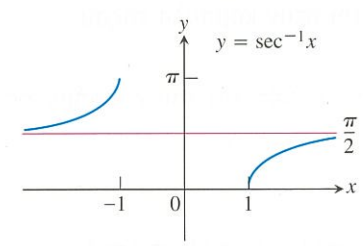
$$y = \sec^{-1} x$$

$$\sec y = x \qquad \text{Σχέση αντίστροφων συναρτήσεων}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = \frac{d}{dx}x$$

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \qquad \text{Εφόσον } |x| > 1, \text{ το } y \text{ κείται στο } (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \text{ και } \sec y \tan y \neq 0.$$



Σχημα 6.11 Η κλίση της καμπύλης $y = \sec^{-1} x$ είναι θετική για $x < -1$ και $x > 1$.

Εκφράζουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει του x, κάνοντας χρήση των σχέσεων

$$\sec y = x \qquad \text{και} \qquad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$$

οπότε

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Τι μπορούμε να πούμε για το πρόσημο $\pm$; Μια ματιά στο Σχήμα 6.11 μας πείθει για το ότι η κλίση της $y = \sec^{-1} x$ είναι πάντοτε θετική. Συνεπώς,

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{για } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{για } x < -1. \end{cases}$$

Με χρήση του συμβόλου απόλυτης τιμής, μπορούμε να γράψουμε μια έκφραση που απαλείφει την ασάφεια ως προς το πρόσημο $\pm$:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x με $|u| > 1$, τότε

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1.}$$

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του τύπου

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)\\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3)\\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}\end{aligned}$$

Παράγωγοι τόξων συνημιτόνου, συνεφαπτομένης, και συντέμνουσας

Με παρόμοιες τεχνικές μπορούμε να βρούμε τις παραγώγους των άλλων τριών αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων —του τόξου συνημιτόνου, του τόξου συνεφαπτομένης, και του τόξου συντέμνουσας— αλλά υπάρχει ένας απλούστερος τρόπος, αν εκμεταλλευθούμε τις ακόλουθες ταυτότητες.

Ταυτότητες αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\cos^{-1}x = \pi/2 - \sin^{-1}x$$
$$\cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x$$
$$\csc^{-1}x = \pi/2 - \sec^{-1}x$$

Από τα παραπάνω εύκολα προκύπτει ότι η παράγωγος του αντίστροφου συνημιτόνου, π.χ., είναι η αντίθετη της παραγώγου του αντίστροφου ημιτόνου, κ.ο.κ. (δείτε τις Ασκήσεις 45 έως 47).

Παράδειγμα 4 Ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη τόξου συνεφαπτομένης

Βρείτε μια εξίσωση για την ευθεία που εφάπτεται του γραφήματος της $y = \cot^{-1}x$ στο $x = -1$.

Λύση Κατ' αρχάς έχουμε

$$\cot^{-1}(-1) = \pi/2 - \tan^{-1}(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο εν λόγω σημείο είναι

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2},$$

άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση την $y - 3\pi/4 = (-1/2)(x+1)$.

Οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνοψίζονται στον Πίνακα 6.1.

Πίνακας 6.1 Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

1. $\dfrac{d(\sin^{-1}u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$
2. $\dfrac{d(\cos^{-1}u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$
3. $\dfrac{d(\tan^{-1}u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{1+u^2}$
4. $\dfrac{d(\cot^{-1}u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{1+u^2}$
5. $\dfrac{d(\sec^{-1}u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$
6. $\dfrac{d(\csc^{-1}u)}{dx} = \dfrac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$

Τύποι ολοκλήρωσης

Από τους τύπους παραγώγων του Πίνακα 6.1 συνάγονται οι τρεις χρήσιμοι τύποι ολοκλήρωσης του Πίνακα 6.2. Οι τύποι αυτοί μπορούν εύκολα να επαληθευτούν παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις στα δεξιά μέλη.

Πίνακας 6.2 Ολοκληρώματα που καταλήγουν σε αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι ακόλουθοι τύποι αληθεύουν για τυχούσα σταθερά $a \neq 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Ισχύει για $u^2 < a^2$) (1)
2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Ισχύει για κάθε u) (2)
3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$ (Ισχύει για $u^2 > a^2$) (3)

Οι τύποι παραγώγων του Πίνακα 6.1 αφορούν την περίπτωση $a = 1$, αλλά στις περισσότερες ολοκληρώσεις που καλούμαστε να εκτελέσουμε είναι $a \neq 1$, οπότε οι γενικοί τύποι του Πίνακα 6.2 αποδεικνύονται χρησιμότεροι.

Παράδειγμα 5 Χρήση των τύπων ολοκλήρωσης

(α) $$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \sin^{-1}x\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

(β) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x\Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(γ) $$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Παράδειγμα 6 Χρήση αντικατάστασης και του Πίνακα 6.2

(α) $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ Εξ. (1) με $a = 3$, $u = x$

(β) $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} && a = \sqrt{3},\ u = 2x, \text{ και } du/2 = dx\\ &= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Εξ. (1)}\\ &= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7 Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

Λύση Η έκφραση $\sqrt{4x-x^2}$ δεν ταιριάζει με κανέναν από τους τύπους του Πίνακα 6.2, οπότε τη φέρνουμε στην κατάλληλη μορφή, ξαναγράφοντας το $4x - x^2$ ως πλήρες τετράγωνο:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = 4 - (x-2)^2.$$

Αντικαθιστούμε $a = 2$, $u = x - 2$, και $du = dx$ παίρνοντας

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad a = 2,\ u = x-2, \text{ και } du = dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Εξ. (1)}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Παράδειγμα 8 Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}.$$

Λύση Συμπληρώνουμε το τετράγωνο στο διώνυμο $4x^2 + 4x$:

$$4x^2+4x+2 = 4(x^2+x)+2 = 4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+2-\frac{4}{4}$$

$$= 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1 = (2x+1)^2+1.$$

Έτσι,

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2} \qquad a = 1,\ u = 2x+1, \text{ και } du/2 = dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) \qquad \text{Εξ. (2)}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1) + C \qquad a = 1,\ u = 2x+1$$

Παράδειγμα 9 Χρήση αντικατάστασης

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}}.$$

Λύση

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-a^2}} \qquad u = e^x,\ du = e^x\,dx,\ dx = du/e^x = du/u,\ a = \sqrt{6}$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \qquad \text{Εξ. (3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + \mathrm{C}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.3

Εύρεση παραγώγων

Στις Ασκήσεις 1-14, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την κατάλληλη ανεξάρτητη μεταβλητή.

1. $y = \cos^{-1}(1/x)$
2. $y = \sin^{-1}(1-t)$
3. $y = \sec^{-1}(2s+1)$
4. $y = \csc^{-1}(x^2+1),\ x > 0$
5. $y = \sec^{-1}\frac{1}{t},\quad 0 < t < 1$
6. $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$
7. $y = \ln(\tan^{-1}x)$
8. $y = \tan^{-1}(\ln x)$
9. $y = \cos^{-1}(e^{-t})$
10. $y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1}s$
11. $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \csc^{-1}x,\quad x > 1$
12. $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1}x$
13. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$
14. $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 15-26.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
16. $\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{dx}{9+3x^2}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$
18. $\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$
19. $\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2}$
20. $\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$
21. $\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$
22. $\int \frac{dx}{1+(3x+1)^2}$
23. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$
24. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,d\theta}{1+(\sin\theta)^2}$
25. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$
26. $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1+\ln^2 t)}$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 27-32.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$
28. $\int_{-1}^{0} \frac{6\,dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$
29. $\int \frac{dy}{y^2-2y+5}$
30. $\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$
31. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
32. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x-3}}$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 33-36.

33. $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
34. $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
35. $\int \frac{dy}{(\tan^{-1}y)(1+y^2)}$
36. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sec^2(\sec^{-1}x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Τύποι ολοκλήρωσης

Επαληθεύστε τους τύπους ολοκλήρωσης των Ασκήσεων 37-40.

37. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1}x}{x} + C$
38. $\int x^3\cos^{-1}5x\,dx = \frac{x^4}{4}\cos^{-1}5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-25x^2}}$
39. $\int (\sin^{-1}x)^2\,dx = x(\sin^{-1}x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + C$
40. $\int \ln(a^2+x^2)\,dx = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 41-44.

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y(0) = 0$
42. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1,\quad y(0) = 1$
43. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\quad x > 1\cdot\quad y(2) = \pi$
44. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},\quad y(0) = 2$

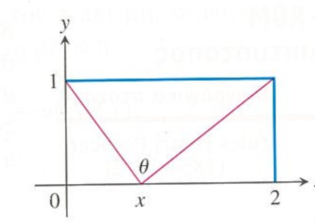
Θεωρία και παραδείγματα

45. Εφαρμόστε την ταυτότητα
$$\cos^{-1}u = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}u$$
για να επαληθεύσετε τον τύπο της παραγώγου του $\cos^{-1}u$ του Πίνακα 6.1 όταν σας είναι γνωστή η παράγωγος του $\sin^{-1}u$.

46. Εφαρμόστε την ταυτότητα
$$\cot^{-1}u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}u$$
για να επαληθεύσετε τον τύπο της παραγώγου του $\cot^{-1}u$ του Πίνακα 6.1 όταν σας είναι γνωστή η παράγωγος του $\tan^{-1}u$.

47. Εφαρμόστε την ταυτότητα
$$\csc^{-1}u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}u$$
για να επαληθεύσετε τον τύπο της παραγώγου του $\csc^{-1}u$ του Πίνακα 6.1 όταν σας είναι γνωστή η παράγωγος του $\sec^{-1}u$.

48. *Μεγιστοποίηση γωνίας* Για ποια τιμή του x μεγιστοποιείται η γωνία θ του επόμενου σχήματος; Πόση είναι τότε η γωνία θ; Ξεκινήστε την απάντησή σας δείχνοντας ότι $\theta = \pi - \cot^{-1}x - \cot^{-1}(2-x)$.



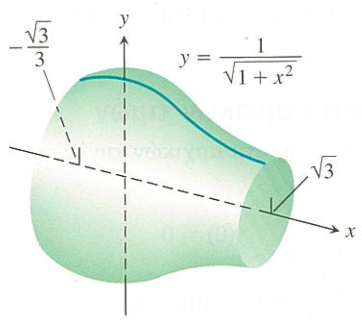
49. *Παράγωγος αντίστροφου ημιτόνου* Χρησιμοποιήστε τον τύπο της παραγώγου αντίστροφων συναρτήσεων της Ενότητας 6.2, Θεώρημα 1, για να αποδείξετε τη σχέση

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

50. *Παράγωγος αντίστροφης εφαπτομένης* Χρησιμοποιήστε τον τύπο της παραγώγου αντίστροφων συναρτήσεων της Ενότητας 6.2, Θεώρημα 1, για να αποδείξετε τη σχέση

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}.$$

51. *Όγκος στερεού εκ περιστροφής* Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που φαίνεται στο σχήμα.



52. *Μήκος τόξου* Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = 1\sqrt{1-x^2}$, $-1/2 \le x \le 1/2$.

Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις

Βρείτε τους όγκους των στερεών στις Ασκήσεις 53 και 54.

53. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι

(α) κύκλοι των οποίων οι διάμετροι εκτείνονται από την καμπύλη $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ ώς την καμπύλη $y = 1/\sqrt{1+x^2}$

(β) κατακόρυφα τετράγωνα των οποίων οι ακμές βάσεως εκτείνονται από την καμπύλη $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ ώς την καμπύλη $y = 1/\sqrt{1+x^2}$.

54. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -\sqrt{2}/2$ και $x = \sqrt{2}/2$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι

(α) κύκλοι των οποίων οι διάμετροι εκτείνονται από τον άξονα x ώς την καμπύλη $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$.

(β) τετράγωνα των οποίων οι διαγώνιοι εκτείνονται από τον άξονα x ώς την καμπύλη $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$.

55. *Εκτίμηση* Εφαρμόστε αριθμητική ολοκλήρωση για να εκτιμήσετε την τιμή του

$$\sin^{-1}0{,}6 = \int_0^{0{,}6}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Δίδεται ότι $\sin^{-1}0{,}6 = 0{,}64350$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

56. *Εκτίμηση του π* Εφαρμόστε αριθμητική ολοκλήρωση για να εκτιμήσετε την τιμή του

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

T **57.** *Μάθετε γράφοντας* Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα την $f(x) = \sin^{-1}x$ και τις πρώτες δύο παραγώγους της. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της f και το σχήμα του γραφήματός της αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές των f' και f''.

T **58.** *Μάθετε γράφοντας* Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα την $f(x) = \tan^{-1}x$ και τις πρώτες δύο παραγώγους της. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της f και το σχήμα του γραφήματός της αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές των f' και f''.

6.4 Διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και οι λύσεις τους • Διαχωρίσιμες εξισώσεις • Πεδία διευθύνσεων: Γραφήματα καμπυλών λύσεων • Νόμος εκθετικής μεταβολής • Συνεχής ανατοκισμός • Ραδιενέργεια • Μεταφορά θερμότητας: Ο νόμος ψύξεως του Νεύτωνα • Αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας • Σώμα που κινείται χωρίς ώθηση μέχρι να σταματήσει • Ο νόμος του Torricelli

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Jules Henri Poincaré
(1854-1912)

Κατά τον υπολογισμό των παραγώγων με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως (Ενότητα 2.6), βρήκαμε ότι η έκφραση της παραγώγου dy/dx περιείχε συχνά και τις δύο μεταβλητές x και y, όχι μόνο την ανεξάρτητη μεταβλητή x. Στην παρούσα ενότητα, μελετούμε προβλήματα αρχικών τιμών στα οποία η παράγωγος έχει τη μορφή $dy/dx = f(x, y)$.

Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και οι λύσεις τους

Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως είναι μια σχέση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

όπου $f(x, y)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών που ορίζεται σε μια περιοχή του επιπέδου xy. **Λύση** της Εξίσωσης (1) είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται σε διάστημα τιμών του x (ενδεχομένως άπειρο) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

στο εν λόγω διάστημα. Η αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ σημαίνει ότι η καμπύλη λύσεως $y = y(x)$ διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0).

Παράδειγμα 1 Επαλήθευση λύσεως

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

επιλύει το πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξεως

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}, \qquad y(2) = \frac{3}{2}.$$

Λύση Η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$$

είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης όπου $f(x, y) = 1 - (y/x)$.

Η συνάρτηση $y = (1/x) + (x/2)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης αφού την επαληθεύει, όπως διαπιστώνουμε αντικαθιστώντας:

Αριστερό μέλος:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

Δεξιό μέλος:

$$1 - \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

Η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη διότι

$$y(2) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Διαχωρίσιμες εξισώσεις

Συνηθίζεται να γράφουμε $y' = f(x, y)$ αντί για $dy/dx = f(x, y)$.

Η εξίσωση $y' = f(x, y)$ είναι **διαχωρίσιμη** αν η f μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο μιας συνάρτησης του x επί μια συνάρτηση του y. Η διαφορική εξίσωση παίρνει τότε τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Αν $h(y) \neq 0$, μπορούμε να **διαχωρίσουμε τις μεταβλητές** διαιρώντας κάθε μέλος με το h, παίρνοντας διαδοχικά

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx \quad \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } x.$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Έχοντας διαχωρίσει τις μεταβλητές x και y, απομένει απλώς να ολοκληρώσουμε κάθε μέλος για να εξαγάγουμε τις ζητούμενες λύσεις εκφράζοντας το y συναρτήσει του x με ακρίβεια μιας προσθετικής σταθεράς.

Παράδειγμα 2 Επίλυση διαχωρίσιμης εξίσωσης

Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\,e^x.$$

Λύση Εφόσον η ποσότητα $1 + y^2$ δεν μηδενίζεται ποτέ, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση με χωρισμό μεταβλητών.

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\,e^x$$

$$dy = (1+y^2)\,e^x\,dx \quad \text{Θεωρούμε το } dy/dx \text{ ως πηλίκο διαφορικών και πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος με } dx.$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x\,dx \quad \text{Διαιρούμε με } (1+x^2).$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x\,dx \quad \text{Ολοκληρώνουμε κάθε μέλος.}$$

$$\tan^{-1} y = e^x + C \quad \text{Συνενώνουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης σε μία, τη } C.$$

Η εξίσωση $\tan^{-1} y = e^x + C$ ορίζει το y ως πεπλεγμένη συνάρτηση του x. Αν ισχύει $-\pi/2 < e^x + C < \pi/2$, μπορούμε να βρούμε μια αναλυτική έκφραση του y συναρτήσει του x παίρνοντας την εφαπτομένη κάθε μέλους:

$$\tan(\tan^{-1} y) = \tan(e^x + C)$$

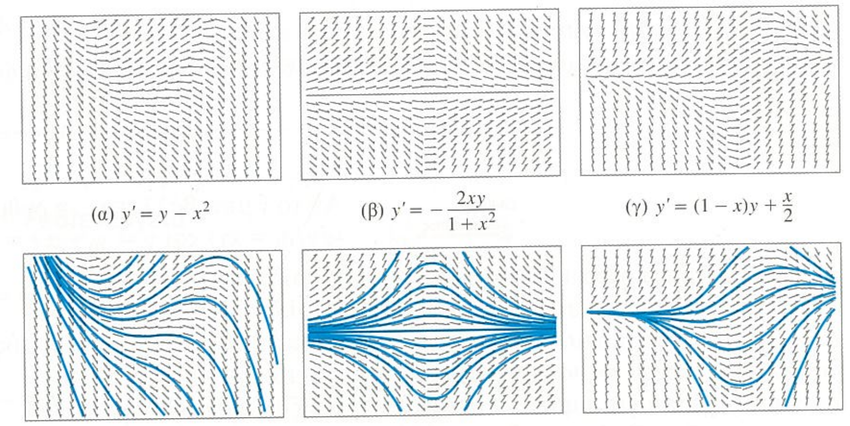
$$y = \tan(e^x + C).$$

CD-ROM Δικτυότοπος

Πεδία διευθύνσεων: Γραφήματα καμπυλών λύσεων

Κάθε φορά που καθορίζουμε μια αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ για τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης $y' = f(x, y)$, η **καμπύλη λύσεως** (γραφική παράσταση της λύσεως) οφείλει να διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) με κλίση $f(x_0, y_0)$. Μπορούμε να απεικονίσουμε γραφικά τις κλίσεις αυτές σχεδιάζοντας μικρά ευθύγραμμα τμήματα κλίσεως $f(x, y)$ σε επιλεγμένα σημεία (x, y) στην περιοχή του επιπέδου xy που αποτελεί πεδίο ορισμού της f. Κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα έχει την ίδια κλίση με την καμπύλη λύσεως που διέρχεται από το (x, y) και άρα είναι εφαπτόμενο της καμπύλης στο σημείο αυτό. Ακολουθώντας με το μάτι τα εφαπτόμενα αυτά τμήματα, βλέπουμε τη συμπεριφορά των καμπυλών λύσεων (Σχήμα 6.12).

Η κατασκευή του πεδίου διευθύνσεων με μολύβι και χαρτί μπορεί να αποβεί αρκετά χρονοβόρα διαδικασία. Σε όλα τα παραδείγματα που αναφέρουμε, τα πεδία διευθύνσεων σχεδιάστηκαν με υπολογιστή.



Σχημα 6.12 Πεδία διευθύνσεων (πάνω) και επιλεγμένες καμπύλες λύσεων (κάτω). Σε διαγράμματα που σχεδιάζονται με υπολογιστή, όπως αυτό του σχήματος, τα ευθύγραμμα τμήματα που αποδίδουν την κλίση αναπαρίστανται μερικές φορές με βέλος στο ένα τους άκρο. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι οι κλίσεις έχουν δεδομένη φορά (κατεύθυνση), πράγμα που βέβαια δεν ισχύει.

Νόμος εκθετικής μεταβολής

Έστω ότι μας ενδιαφέρει μια ποσότητα y (πληθυσμός, ποσότητα ραδιενεργού στοιχείου, χρήματα, ή οτιδήποτε άλλο) που αυξάνεται ή μειώνεται με ρυθμό ανάλογο του εαυτού της. Αν γνωρίζουμε επίσης την ποσότητα που υπήρχε μια δεδομένη χρονική στιγμή, π.χ. αν για $t = 0$ υπήρχε y_0, τότε μπορούμε να βρούμε το y συναρτήσει του t επιλύοντας το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\text{Διαφορική εξίσωση:} \quad \frac{dy}{dt} = ky$$

$$\text{Αρχική συνθήκη:} \quad y = y_0 \text{ για } t = 0$$

Αν η συνάρτηση y είναι θετική και αύξουσα, τότε το k είναι θετικό και ο ρυθμός αύξησης είναι ανάλογος της ήδη συσσωρευθείσας ποσότητας. Αν η συνάρτηση y είναι θετική και φθίνουσα, τότε το k είναι αρνητικό και ο ρυθμός ελάττωσης είναι ανάλογος της εναπομείνασας ποσότητας.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Josiah Willard Gibbs
(1839-1903)

Η σταθερή συνάρτηση $y = 0$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης, αλλά συνήθως χωρίς ενδιαφέρον. Για να βρούμε μη μηδενικές λύσεις, διαχωρίζουμε τις μεταβλητές και ολοκληρώνουμε.

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C \quad \text{Ολοκληρώνουμε.}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kt+C} \quad \text{Εκθετικό κάθε μέλους.}$$

$$|y| = e^C \cdot e^{kt} \quad e^{\ln u} = u,\ e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$y = \pm e^C e^{kt} \quad |y| = r \Rightarrow y = \pm r$$

$$y = Ae^{kt} \quad \text{Θέτουμε } A = \pm e^C.$$

Αν επιτρέψουμε στο A να πάρει εκτός από όλες τις δυνατές τιμές $\pm e^C$, και την τιμή μηδέν, μπορούμε να συμπεριλάβουμε τη λύση $y = 0$ στην τελευταία έκφραση. Η διαφορική εξίσωση έχει τώρα λυθεί.

Για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών, θέτουμε $t = 0$ και $y = y_0$ και λύνουμε ως προς A.

$$y_0 = Ae^{(k)(0)} = A$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι λοιπόν $y = y_0e^{kt}$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Νόμος εκθετικής μεταβολής
Αν το y μεταβάλλεται με ρυθμό ανάλογο του εαυτού του ($dy/dt = ky$) και $y = y_0$ για $t = 0$, τότε

$$y = y_0e^{kt},$$

όπου $k > 0$ αντιστοιχεί σε αύξηση και $k < 0$ σε ελάττωση.

Συνεχής ανατοκισμός

Έστω ότι ένα ποσό A_0 ευρώ επενδύεται με σταθερό ετήσιο επιτόκιο r (εκπεφρασμένο ως δεκαδικός αριθμός). Αν στον λογαριασμό κατατίθεται τόκος k φορές τον χρόνο, τότε το ποσόν που θα υπάρχει μετά από t έτη είναι

$$A(t) = A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Ο τόκος μπορεί να προστίθεται σε μηνιαία ($k = 12$), εβδομαδιαία ($k = 52$), ή ημερήσια βάση ($k = 365$), ή ακόμα συχνότερα, π.χ. ανά ώρα ή ανά λεπτό.

Αν όμως ο τόκος, αντί να κατατίθεται ανά διακριτά χρονικά διαστήματα, προστίθεται *συνεχώς* με ρυθμό ανάλογο του ποσού που ήδη υπάρχει στον λογαριασμό, μπορούμε να περιγράψουμε την αύξηση του κεφαλαίου με το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών.

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{dA}{dt} = rA$

Αρχική συνθήκη: $A(0) = A_0$

Το ποσό που υπάρχει στον λογαριασμό μετά από t έτη είναι λοιπόν

$$A(t) = A_0e^{rt}.$$

Από την Άσκηση 67, Ενότητα 6.2,

$$A_0e^{rt} = \lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Αν ο τόκος υπολογίζεται με τον παραπάνω τύπο, τότε μιλάμε για **συνεχή ανατοκισμό.** Ο αριθμός r είναι το **επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού.**

Παράδειγμα 3 Συνεχώς ανατοκιζόμενο κεφάλαιο

Έστω ότι καταθέτετε ποσό 800 € σε λογαριασμό που σας προσφέρει ετήσιο επιτόκιο 6,3%. Πόσες θα είναι οι καταθέσεις σας μετά από 8 έτη αν το κεφάλαιό σας ανατοκίζεται

(α) συνεχώς;

(β) ανά τρίμηνο;

Λύση Εδώ έχουμε $A_0 = 800$ και $r = 0{,}063$. Το ποσό στον λογαριασμό μετά από 8 έτη θα είναι (με προσέγγιση ενός λεπτού)

(α) $A(8) = 800e^{(0{,}063)(8)} = 1324{,}26$

(β) $A(8) = 800\left(1 + \dfrac{0{,}063}{4}\right)^{(4)(8)} = 1319{,}07.$

Ενδεχομένως είχατε την εντύπωση ότι ο συνεχής ανατοκισμός θα απέφερε περισσότερα από 5,19 € επιπλέον σε σχέση με τον τριμηνιαίο ανατοκισμό.

Για το ράδιο-226, με το οποίο επιστρώνονταν παλιότερα οι δείκτες των ρολογιών για να φέγγουν τη νύχτα (μια επικίνδυνη δουλειά για τους τεχνίτες που την έκαναν, αφού συνήθιζαν να γλείφουν την άκρη από το βουρτσάκι που χρησιμοποιούσαν), ο χρόνος t μετράται σε χρόνια και $k = 4{,}3 \times 10^{-4}$. Για το αέριο ραδόνιο-222, ο χρόνος t μετράται σε ημέρες και $k = 0{,}18$. Η ραδιενεργός διάσπαση του ραδίου που υπάρχει στην επιφάνεια της Γης είναι η πηγή του ραδονίου που μερικές φορές ανιχνεύεται στα υπόγεια κατοικιών.

Ραδιενέργεια

Όταν ένα άτομο κάποιου χημικού στοιχείου εκπέμπει μέρος της μάζας του ως ακτινοβολία, το τμήμα που απομένει αναδιοργανώνεται σχηματίζοντας άτομο ενός νέου στοιχείου. Αυτή η διαδικασία εκπομπής ακτινοβολίας και μετατροπής του ατόμου καλείται **ραδιενεργός διάσπαση,** ενώ το στοιχείο του οποίου τα άτομα συμμετέχουν αυθόρμητα σε αυτή τη διαδικασία καλείται **ραδιενεργό.** Ο ραδιενεργός άνθρακας-14 διασπάται σε άζωτο. Το ράδιο, πάλι, ακολουθεί μια πορεία ενδιάμεσων ραδιενεργών μεταβάσεων μέχρι να καταλήξει σε μόλυβδο.

Όπως έχει αποδειχθεί από πειραματικές μετρήσεις, σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός διάσπασης ενός ραδιενεργού στοιχείου (που μετράται ως ο αριθμός των πυρήνων που διασπώνται ανά μονάδα χρόνου) είναι περίπου ανάλογος του αριθμού των ραδιενεργών πυρήνων που υπάρχουν στο δείγμα. Κατά συνέπεια, η ραδιενεργός διάσπαση ενός στοιχείου περιγράφεται από την εξίσωση $dy/dt = -ky$, $k > 0$. Αν y_0 είναι ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων που υπάρχουν τη χρονική στιγμή μηδέν, τότε ο αριθμός που θα έχει απομείνει σε μια τυχούσα μεταγενέστερη χρονική t θα είναι

$$y = y_0e^{-kt}, \qquad k > 0.$$

Σύμβαση
Είναι βολικότερο να χρησιμοποιούμε το $-k$ ($k > 0$) στον εκθέτη, αντί του k ($k < 0$), για να δώσουμε έμφαση στο ότι το y μειώνεται. Υπ' αυτή την έννοια, ο αριθμός k καλείται **σταθερά διάσπασης** του ραδιενεργού στοιχείου.

Η **ημιζωή** ενός ραδιενεργού στοιχείου είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διασπαστούν οι μισοί από τους ραδιενεργούς πυρήνες του δείγματος που μας ενδιαφέρει. Το Παράδειγμα 4 αναδεικνύει το απρόσμενο γεγονός ότι η ημιζωή είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το είδος της ραδιενεργού ουσίας, και όχι από το πλήθος των ραδιενεργών πυρήνων που περιέχει το δείγμα μας.

Παράδειγμα 4 Εύρεση ημιζωής

Βρείτε την ημιζωή μιας ραδιενεργού ουσίας της οποίας η διάσπαση περιγράφεται από την εξίσωση $y = y_0e^{-kt}$ και δείξτε ότι η ημιζωή εξαρτάται μόνον από τη σταθερά διασπάσεως k.

Λύση

Μοντέλο

Η ημιζωή είναι η λύση της εξίσωσης

$$y_0\, e^{-kt} = \frac{1}{2}y_0.$$

Αλγεβρική επίλυση

$$e^{-kt} = \frac{1}{2} \qquad \text{Διαιρούμε με } y_0.$$

$$-kt = \ln\frac{1}{2} \qquad \text{Λογαριθμίζουμε κάθε μέλος.}$$

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{k} \qquad \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

Χρονολόγηση με άνθρακα-14

Η διάσπαση ραδιενεργών στοιχείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χρονολογήσουμε γεγονότα που συνέβησαν στο απώτερο παρελθόν της Γης. Πετρώματα που η ηλικία τους υπερβαίνει τα 2 δισεκατομμύρια έτη χρονολογούνται βάσει της ραδιενεργού διάσπασης του ουρανίου (με ημιζωή 4,5 δισεκατομμύρια έτη!). Σε ζωντανούς οργανισμούς, το πηλίκο της ποσότητας του ραδιενεργού άνθρακα-14, προς τον μη ραδιενεργό άνθρακα-12, μένει περίπου σταθερό κατά τη διάρκεια ζωής, όντας περίπου ίσο με το αντίστοιχο πηλίκο στο περιβάλλον όπου ζει και με το οποίο αλληλεπιδρά ο οργανισμός. Μετά τον θάνατο του οργανισμού, ωστόσο επειδή δεν προσλαμβάνεται πια άνθρακας από το περιβάλλον, η αναλογία του άνθρακα-14 μειώνεται καθώς το στοιχείο αυτό διασπάται. Είναι λοιπόν δυνατόν να εκτιμήσουμε την ηλικία παλαιότερων οργανικών δειγμάτων συγκρίνοντας την αναλογία του άνθρακα-14 που περιέχουν με αυτήν που υποθέτουμε ότι υπήρχε στο περιβάλλον τους ενόσω ζούσαν. Με αυτόν τον τρόπο οι αρχαιολόγοι έχουν χρονολογήσει κελύφη (που περιέχουν $CaCO_3$), φύκια, και ξύλινα εργαλεία. Η ηλικία των τοιχογραφιών στο σπήλαιο Λασκώ της Γαλλίας, που εκτιμάται σε 15.500 χρόνια, έγινε μέσω της χρονολόγησης με άνθρακα-14. Μετά από διαμάχες που κράτησαν ολόκληρες γενεές, το Σάβανο του Τορίνου, που πολλοί πίστευαν ότι με αυτό είχε τυλιχθεί το σώμα του Χριστού, αποδείχθη, μέσω της χρονολόγησης με άνθρακα-14, ότι είχε υφανθεί μετά το έτος 1200 μ.Χ.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία
Διαφορικές εξισώσεις

Ερμηνεία

Η τιμή αυτή του t είναι η ημιζωή του στοιχείου. Εξαρτάται μόνον από το k, και όχι από το αρχικό πλήθος των πυρήνων y_0.

Ημιζωή στοιχείου με σταθερή διάσπαση k

Η **ημιζωή** μιας ραδιενεργού ουσίας με σταθερά διασπάσεως k ($k > 0$) δίδεται από τον τύπο

$$\text{ημιζωή} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Παράδειγμα 5 Χρονολόγηση με άνθρακα-14

Οι επιστήμονες που χρονολογούν με άνθρακα-14 χρησιμοποιούν ως χρόνο ημιζωής του τα 5700 έτη. Βρείτε την ηλικία ενός δείγματος του οποίου το 10% των ραδιενεργών πυρήνων που υπήρχαν αρχικά έχει διασπαστεί.

Λύση Εφόσον η ημιζωή $= 5700 = (\ln 2)/k$, έχουμε $k = (\ln 2)/5700$.

Μοντέλο

Ζητούμε την τιμή του t για την οποία

$$y_0 e^{-kt} = 0{,}9\, y_0 \qquad \text{δηλαδή} \qquad e^{-kt} = 0{,}9,$$

όπου $k = (\ln 2)/5700$.

Αλγεβρική επίλυση

$$e^{-kt} = 0{,}9$$

$$-kt = \ln 0{,}9 \qquad \text{Λογαριθμίζουμε κάθε μέλος}$$

$$t = -\frac{1}{k}\ln 0{,}9 = -\frac{5700}{\ln 2}\ln 0{,}9 \approx 866$$

Ερμηνεία

Η ηλικία του δείγματος είναι 866 έτη.

Μεταφορά θερμότητας: Ο νόμος ψύξεως του Νεύτωνα

Στην Ενότητα 3.4, εξαγάγαμε τη θερμοκρασιακή καμπύλη ενός θερμού σώματος που περιβάλλεται από ψυχρότερο μέσο, αναφερόμενοι στο παράδειγμα της καυτής σούπας σε μεταλλικό πιάτο η οποία αφήνεται να κρυώσει στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει αυτή τη διεργασία ψύξεως βασίζεται στην αρχή ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι περίπου ανάλογος με τη διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας του και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος μέσου (πρόκειται για τον *νόμο ψύξεως του Νεύτωνα,* που ισχύει βεβαίως και για τη θέρμανση).

Αν H είναι η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t και H_S είναι η σταθερή θερμοκρασία περιβάλλοντος, τότε η διαφορική εξίσωση που ισχύει είναι

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S). \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τη διαφορά $(H - H_S)$ με y, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_S) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}(H_S) \\
&= \frac{dH}{dt} - 0 && \text{Η } H_S \text{ είναι σταθερή} \\
&= \frac{dH}{dt} \\
&= -k(H - H_S) && \text{Εξ. (2)} \\
&= -ky. && H - H_S = y
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι λύση της εξίσωσης $dy/dt = -ky$ είναι η $y = y_0 e^{-kt}$, όπου $y(0) = y_0$. Αντικαθιστώντας τώρα το y με $(H - H_S)$, παίρνουμε

$$H - H_S = (H_0 - H_S)e^{-kt}, \tag{3}$$

όπου H_0 είναι η θερμοκρασία για $t = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι ο νόμος ψύξεως του Νεύτωνα.

Παράδειγμα 6 Ψύχοντας το σφιχτό αυγό που βράσαμε

Ένα σφιχτό βρασμένο αυγό θερμοκρασίας 98°C τοποθετείται σε δοχείο που περιέχει νερό στη θερμοκρασία των 18°C. Μετά από 5 λεπτά, η θερμοκρασία του αυγού είναι 38°C. Αν υποθέσουμε ότι η θέρμανση του νερού είναι αμελητέα, πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται ακόμη για να φτάσει τους 20°C η θερμοκρασία του αυγού;

Λύση Βρίσκουμε πόσος χρόνος απαιτείται για να ψυχθεί το αυγό από τους 98°C στους 20°C και αφαιρούμε τα 5 λεπτά που έχουν ήδη παρέλθει.

Βήμα 1: *Επιλύουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών.* Εφαρμόζουμε την Εξίσωση (3) με $H_S = 18$ και $H_0 = 98$, οπότε η θερμοκρασία του αυγού t λεπτά μετά τη βύθισή του στο νερό γίνεται

$$H = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}.$$

Για να βρούμε το k, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $H = 38$ για $t = 5$:

$$38 = 18 + 80e^{-5k}$$

$$e^{-5k} = \frac{1}{4}$$

$$-5k = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

$$k = \frac{1}{5}\ln 4$$

Η θερμοκρασία λοιπόν του αυγού τη χρονική στιγμή t είναι $H = 18 + 80e^{-(0{,}2\ln 4)t}$.

Βήμα 2: *Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία $H = 20$.*

$$20 = 18 + 80e^{-(0{,}2\ln 4)t}$$

$$80e^{-(0{,}2\ln 4)t} = 2$$

$$e^{-(0{,}2\ln 4)t} = \frac{1}{40}$$

$$-(0{,}2\ln 4)t = \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \qquad \text{Λογαριθμίζουμε κάθε μέλος}$$

$$t = \frac{\ln 40}{0{,}2\ln 4} \approx 13 \text{ min}$$

Βήμα 3: *Ερμηνεία του αποτελέσματος.*

Η θερμοκρασία του αυγού θα φτάσει τους 20°C περίπου 13 min από την ώρα που το βυθίσαμε στο δοχείο για να κρυώσει. Εφόσον σε 5 min είχε φτάσει τους 38°C, θα χρειαστούν άλλα 8 min για να φθάσει το αυγό στους 20°C.

Αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας

Σε μερικές περιπτώσεις είναι λογικό να υποθέσουμε ότι, απουσία άλλων δυνάμεων, η αντίσταση που ασκείται στην κίνηση ενός σώματος, όπως ενός αυτοκινήτου που αφήνεται να κυλήσει μέχρι να ακινητοποιηθεί, είναι ανάλογη της ταχύτητάς του. Όσο αργότερα κινείται το σώμα, τόσο λιγότερο δυσχεραίνεται η κίνησή του από τον αέρα που εκτοπίζει κινούμενο. Έστω m η μάζα του σώματος το οποίο κινείται επί ενός άξονα συντεταγμένων έτσι ώστε η συνάρτηση θέσης του να είναι s και η ταχύτητά του να είναι v τη χρονική στιγμή t. Η δύναμη αντίστασης στην κίνησή του είναι

$$\text{Δύναμη} = \text{μάζα} \times \text{επιτάχυνση} = m\frac{dv}{dt}.$$

Εκφράζουμε την υπόθεσή μας ότι η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας, γράφοντας

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \quad (k > 0).$$

Προκύπτει λοιπόν μια διαφορική εξίσωση εκθετικής μεταβολής. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη $v = v_0$ για $t = 0$ είναι

$$v = v_0 e^{-(k/m)t}. \tag{4}$$

Σώμα που κινείται χωρίς ώθηση μέχρι να σταματήσει

Τι μπορούμε να διδαχθούμε από την Εξίσωση (4); Κατ' αρχάς, ότι αν η μάζα m είναι μεγάλη, όπως η μάζα ενός πλοίου 20.000 τόνων, τότε απαιτείται η παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος μέχρι αυτό να σταματήσει. Επίσης, μπορούμε ολοκληρώνοντας την εξίσωση να βρούμε το s συναρτήσει του t.

Έστω ότι ένα σώμα κινείται χωρίς ώθηση και ότι η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μια αντίσταση ανάλογη της ταχύτητάς του. Πόση απόσταση θα διανύσει έτσι μέχρι να σταματήσει; Σημείο αφετηρίας μας είναι η Εξίσωση (4), οπότε λύνουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-(k/m)t}, \qquad s(0) = 0.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς t παίρνουμε

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C.$$

Αντικαθιστώντας $s = 0$ για $t = 0$ παίρνουμε

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \qquad \text{και} \qquad C = \frac{v_0 m}{k}.$$

Η θέση λοιπόν του σώματος τη χρονική στιγμή t είναι

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = -\frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}). \tag{5}$$

Για να βρούμε πόσο μακριά θα φτάσει έτσι το σώμα, βρίσκουμε το όριο $s(t)$ καθώς $t \to \infty$. Εφόσον $-(k/m) < 0$, ξέρουμε ότι $e^{-(k/m)t} \to 0$ καθώς $t \to \infty$, οπότε

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})$$

$$= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\text{Διανυθείσα απόσταση} = \frac{v_0 m}{k}. \tag{6}$$

Βάρος έναντι μάζας

Βάρος είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα λόγω της μάζας του:

Βάρος = μάζα × επιτάχυνση της βαρύτητας.

Πρόκειται βέβαια για ένα ιδανικό αποτέλεσμα, αφού μόνο στα μαθηματικά μπορεί ο χρόνος να τείνει στο άπειρον. Έτσι το $v_0 m/k$ αποτελεί ένα άνω φράγμα της απόστασης, χρήσιμο ωστόσο. Πέραν αυτού, το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει κάτι ακόμη: αν η μάζα m είναι μεγάλη, απαιτείται πολλή ενέργεια για να ακινητοποιηθεί το σώμα. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο τα μεγάλα υπερωκεάνεια πρέπει να συρθούν από ρυμουλκά για τον ασφαλή ελλιμενισμό τους. Αν ένα τέτοιο μεγάλο καράβι πλησιάσει μια προβλήτα με την ελάχιστη ταχύτητα ώστε να μπορεί να κάνει ελιγμούς, θα προσκρούσει σε αυτήν πριν προλάβει να ακινητοποιηθεί.

Παράδειγμα 7 Πατινάζ χωρίς ώθηση

Για έναν παγοδρόμο βάρους 833 N, το k της Εξίσωσης (4) ισούται περίπου με 5 kg/sec και $m = 833/9{,}8 = 85$ kg. Αν ο παγοδρόμος πατινάρει χωρίς να δίνει ώθηση στον εαυτό του, τότε σε πόσο διάστημα θα μεταβληθεί η ταχύτητά του από 3 m/sec σε 0,3 m/sec; Πόση απόσταση θα διανύσει μέχρι να ακινητοποιηθεί ο παγοδρόμος;

Λύση Απαντούμε στο πρώτο ερώτημα λύνοντας την Εξίσωση (4) ως προς τον χρόνο t:

$$3e^{-t/17} = 0{,}3 \qquad \text{Εξ. (4) για } k = 1/3,\ m = 6,\ v_0 = 11,\ v = 1$$

$$e^{-t/17} = 0{,}3/3$$

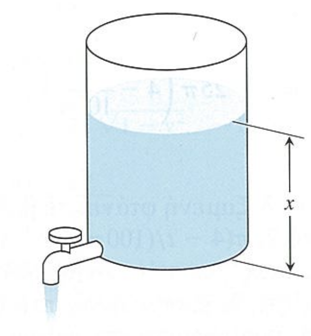
$$-t/17 = \ln(0{,}3/3) = -\ln 10$$

$$t = 17\ln 10 \approx 39 \text{ sec}.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, επικαλούμαστε την Εξίσωση (6):

$$\text{Διανυθείσα απόσταση} = \frac{v_0 m}{k} = \frac{3 \cdot 85}{5}$$

$$= 51 \text{ m}.$$



ΣΧΗΜΑ 6.13 Ο ρυθμός με τον οποίο εκρέει νερό είναι $0{,}5\sqrt{x}$ m³/min. (Παράδειγμα 8)

Ο νόμος του Torricelli

Ο νόμος του Torricelli λέει ότι αν αδειάζουμε ένα δοχείο όπως αυτό του Σχήματος 6.13, τότε ο ρυθμός εκροής του νερού ισούται με το γινόμενο μιας σταθεράς επί την τετραγωνική ρίζα του βάθους του νερού x. Η σταθερά εξαρτάται από το μέγεθος της βαλβίδας (οπής) εκροής. Στο Παράδειγμα 8, υποθέτουμε ότι η σταθερά αυτή είναι 1/2.

Παράδειγμα 8 Εκκένωση δεξαμενής

Μια κυλινδρική δεξαμενή ακτίνας 5 m και ύψους 16 m που αρχικά ήταν γεμάτη νερό, αδειάζει με ρυθμό $0{,}5\sqrt{x}$ m^3/min. Βρείτε μια έκφραση για το βάθος του νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου t. Πόσος χρόνος απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή;

Λύση Ο όγκος της κυλινδρικής δεξαμενής ακτίνας r και ύψους h είναι $V = \pi r^2 h$.

Μοντέλο

Ο όγκος του νερού στη δεξαμενή (Σχήμα 6.13) είναι

$$V = \pi r^2 h = \pi (5)^2 x = 25\pi x.$$

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{dV}{dt} = 25\pi \dfrac{dx}{dt}$ — Αρνητικού προσήμου εφόσον το V μειώνεται και $dx/dt < 0$

$-0{,}5\sqrt{x} = 25\pi \dfrac{dx}{dt}$ — Νόμος του Torricelli

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{x}}{50\pi}$$

Αρχική συνθήκη: $x(0) = 16$ — Το νερό έχει βάθος 16 m για $t = 0$.

Αναλυτική επίλυση

Λύνουμε πρώτα τη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

$$x^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{50\pi}\,dt$$

$\displaystyle\int x^{-1/2}\,dx = -\int \frac{1}{50\pi}\,dt$ — Ολοκληρώνουμε κάθε μέλος.

$2x^{1/2} = -\dfrac{1}{50\pi} t + C$ — Συνενώνουμε τις σταθερές σε μία

Η αρχική συνθήκη $x(0) = 16$ καθορίζει την τιμή του C.

$$2(16)^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}(0) + C$$

$$C = 8$$

Για $C = 8$, έχουμε

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi} t + 8 \quad \text{δηλαδή} \quad x^{1/2} = 4 - \frac{t}{100\pi}.$$

Οι ζητούμενες εκφράσεις είναι

$$x = \left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2 \quad \text{και} \quad V = 25\pi x = 25\pi\left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2.$$

Ερμηνεία

Σε τυχούσα χρονική στιγμή t, το νερό στη δεξαμενή φτάνει σε βάθος $(4 - t/(100\pi))^2$ m και καταλαμβάνει όγκο $25\pi(4 - t/(100\pi))^2$ m^3. Για $t = 0$, έχουμε $x = 16$ m και $V = 400\pi$ m^3, όπως απαιτείται από την αρχική συνθήκη. Η δεξαμενή θα αδειάσει ($V = 0$) σε $t = 400\pi$ λεπτά της ώρας, δηλαδή σε περίπου 21 h.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Evangelista Torricelli
(1608-1647)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.4

Επαλήθευση λύσεων

Στις Ασκήσεις 1 και 2, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ είναι λύση της παρατιθέμενης διαφορικής εξίσωσης.

1. $2y' + 3y = e^{-x}$

(α) $y = e^{-x}$

(β) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$

(γ) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

2. $y' = y^2$

(α) $y = -\frac{1}{x}$ (β) $y = -\dfrac{1}{x+3}$ (γ) $y = -\dfrac{1}{x+C}$

Στις Ασκήσεις 3 και 4, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση είναι λύση του παρατιθέμενου προβλήματος αρχικών τιμών.

3. Διαφορική εξίσωση: $y' = e^{-x^2} - 2xy$

Αρχική συνθήκη: $y(2) = 0$

Υποψήφια λύση: $y = (x - 2)e^{-x^2}$

4. Διαφορική εξίσωση: $xy' + y = -\sin x, \quad x > 0$

Αρχική συνθήκη: $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Υποψήφια λύση: $y = \dfrac{\cos x}{x}$

Διαχωρίσιμες εξισώσεις

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 5-14.

5. $2\sqrt{xy}\,\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

10. $\sqrt{2xy}\,\dfrac{dy}{dx} = 1$

11. $\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

12. $(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

Εφαρμογές

15. *Ατμοσφαιρική πίεση* Συνηθίζεται να περιγράφουμε μαθηματικά την ατμοσφαιρική πίεση p της Γης κάνοντας την υπόθεση ότι ο ρυθμός dp/dh με τον οποίο αυτή μεταβάλλεται συναρτήσει του υψομέτρου h από τη στάθμη της θάλασσας είναι ανάλογος της πιέσεως p. Έστω ότι η πίεση στη στάθμη της θάλασσας είναι 1013 millibars (περίπου 10 N/cm^2) και ότι η πίεση σε ύψος 20 km είναι 90 millibars.

(α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

Διαφορική εξίσωση: $dp/dh = kp$ (k μια σταθερά)

Αρχική συνθήκη: $p = p_0$ για $h = 0$

για την πίεση p συναρτήσει του υψομέτρου h. Επίσης να προσδιοριστούν οι τιμές των p_0 και k.

(β) Πόση είναι η ατμοσφαιρική πίεση σε υψόμετρο $h = 50$ km;

(γ) Σε ποιο υψόμετρο ισούται η πίεση με 900 millibar;

16. *Χημικές αντιδράσεις πρώτης τάξεως* Σε ορισμένες χημικές αντιδράσεις, ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της ποσότητας μιας ουσίας, είναι ανάλογος της ήδη υπάρχουσας ποσότητας. Για τη μετατροπή της δ-γλυκονολακτόνης σε γλυκονικό οξύ, για παράδειγμα,

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}6y$$

όπου ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Αν αρχικά υπάρχουν 100g δ-γλυκονολακτόνης (για $t = 0$) πόσα γραμμάρια θα έχουν απομείνει μετά την πρώτη ώρα;

17. *Επεξεργασία ζάχαρης* Η επεξεργασία της ακατέργαστης ζάχαρης περιλαμβάνει ένα στάδιο κατά το οποίο μεταβάλλεται η μοριακή δομή της. Όταν ξεκινήσει η διαδικασία αυτή, ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας της ακατέργαστης ζάχαρης είναι ανάλογος της εναπομείνασας ποσότητας. Αν 1000 kg ακατέργαστης ζάχαρης μετατραπούν σε 800 kg κατεργασμένης κατά τις πρώτες 10 h, πόση ακατέργαστη ζάχαρη θα έχει απομείνει μετά από παρέλευση άλλων 14 h;

18. *Υποβρύχια έργα* Η ένταση $L(x)$ του φωτός σε βάθος x m κάτω από την επιφάνεια του ωκεανού ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dL}{dx} = -kL.$$

Από την εμπειρία σας ως δύτης γνωρίζετε ότι αν βουτήξετε στα 5 m στη Θάλασσα της Καραϊβικής, το φως έχει ήδη υποδιπλασιαστεί. Σας είναι αδύνατον να εργαστείτε με μόνο το φυσικό φως, αν η έντασή του πέσει κάτω από το ένα δέκατο της έντασης στην επιφάνεια. Μέχρι ποιο βάθος λοιπόν αναμένετε ότι μπορείτε να εργαστείτε χωρίς τεχνητό φωτισμό;

19. *Ηλεκτρική τάση σε εκφορτιζόμενο πυκνωτή* Έστω ότι ένας πυκνωτής εκφορτίζεται με ρυθμό που είναι ανάλογος της τάσης V μεταξύ των οπλισμών του, (δεδομένου ότι ο χρόνος t μετριέται σε δευτερόλεπτα),

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Λύστε την εξίσωση αυτή ως προς V, συμβολίζοντας με V_0 την τιμή του V για $t = 0$. Σε πόσο χρόνο θα πέσει η τάση των οπλισμών του πυκνωτή στο 10% της αρχικής της τιμής;

20. *Εξάντληση πετρελαϊκών αποθεμάτων* Έστω ότι η ποσότητα πετρελαίου που εξορύσσεται από μια πετρελαιοπηγή των φαραγγιών της περιοχής Whittier στην Καλιφόρνια μειώνεται με σταθερό ρυθμό 10% κατ' έτος. Πότε θα πέσει η παραγωγή της συγκεκριμένης πετρελαιοπηγής στο ένα πέμπτο της σημερινής της τιμής;

CD-ROM Δικτυότοπος

21. *Ενδοφλέβια πρόσληψη γλυκόζης* Ένας νοσηλευόμενος σε νοσοκομείο λαμβάνει ενδοφλεβίως (απευθείας στο αίμα) γλυκόζη με ρυθμό r μονάδες ανά λεπτό. Ο οργανισμός προσλαμβάνει γλυκόζη από το αίμα με ρυθμό ανάλογο της ποσότητάς της $Q(t)$ στο αίμα τη χρονική στιγμή t.

(α) Γράψτε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει τη μεταβολή της ποσότητας γλυκόζης στο αίμα συναρτήσει του χρόνου.

(β) Λύστε τη διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α) με αρχική συνθήκη την $Q(0) = Q_0$.

(γ) Βρείτε το όριο του $Q(t)$ καθώς $t \to \infty$.

22. *Συνεχής έκπτωση τιμών* Προκειμένου να ενθαρρύνει τους αγοραστές να κάνουν παραγγελίες των 100 μονάδων, το τμήμα πωλήσεων της εταιρείας σας εφαρμόζει συνεχή έκπτωση, βάσει της οποίας η τιμή μονάδος $p(x)$ είναι συνάρτηση του πλήθους μονάδων x που έχουν παραγγελθεί. Η έκπτωση μειώνει την τιμή κατά 0,01 € για κάθε παραγγελθείσα μονάδα. Η τιμή μονάδος για μια παραγγελία των 100 μονάδων είναι $p(100) = 20{,}09$ €.

(α) Βρείτε το $p(x)$ λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

Διαφορική εξίσωση: $$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{100}p.$$

Αρχική συνθήκη: $p(100) = 20{,}09$.

(β) Βρείτε την τιμή μονάδος $p(10)$ για μια παραγγελία 10 μονάδων και την τιμή μονάδος $p(90)$ για παραγγελία 90 μονάδων.

(γ) Το τμήμα πωλήσεων σάς έχει ζητήσει να διερευνήσετε το ενδεχόμενο η έκπτωση να είναι τόσο μεγάλη ώστε τα έσοδα της εταιρείας σας, $r(x) = x \cdot p(x)$, να είναι λιγότερα για παραγγελίες των 10 μονάδων σε σχέση με παραγγελίες, π.χ. των 90 μονάδων. Καθησυχάστε τους δείχνοντας ότι η ποσότητα r παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $x = 100$.

23. *Συνεχής ανατοκισμός* Μόλις έχετε καταθέσει A_0 ευρώ σε τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο 4%, με συνεχή ανατοκισμό.

(α) Πόσα χρήματα θα υπάρχουν στον λογαριασμό σας μετά από 5 έτη;

(β) Σε πόσο διάστημα θα έχει διπλασιαστεί το κεφάλαιό σας; Σε πόσο θα έχει τριπλασιαστεί;

24. *Το ερώτημα του John Napier* Ο John Napier (1550-1617), ο Σκωτσέζος γαιοκτήμονας που εφεύρε τους λογαρίθμους, ήταν ο πρώτος που έθεσε το ερώτημα: Τι θα συμβεί σε ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 100% και ανατοκίζεται συνεχώς;

(α) Τι θα συμβεί στο κεφάλαιο αυτό;

(β) Σε πόσο χρόνο θα τριπλασιαστεί το αρχικό κεφάλαιο;

(γ) Πόσο κέρδος θα υπάρχει κατ' έτος;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

25. *Ραδόνιο-222* Η εξίσωση διασπάσεως του αέριου ραδονίου-222 είναι η $y = y_0 e^{-0{,}18t}$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε ημέρες. Πόσο περίπου διάστημα απαιτείται για μια ποσότητα ραδονίου σε σφραγισμένο δοχείο μέχρι να μειωθεί στο 90% της αρχικής της τιμής;

26. *Πολώνιο-210* Η ημιζωή του πολωνίου είναι 139 ημέρες, αλλά το δείγμα που έχετε στη διάθεσή σας δεν θα σας είναι πια χρήσιμο όταν έχει ήδη διασπαστεί το 95% των ραδιενεργών πυρήνων που υπήρχαν την ημέρα που το αποκτήσατε. Για πόσες περίπου ημέρες αφού παραλάβατε το δείγμα σας θα μπορείτε να το χρησιμοποιείτε;

27. *Η μέση ζωή ενός ραδιενεργού πυρήνα* Οι φυσικοί που χρησιμοποιούν την εξίσωση $y = y_0 e^{-kt}$ καλούν τον αριθμό $1/k$ *μέση ζωή* ενός ραδιενεργού πυρήνα. Η μέση ζωή ενός πυρήνα ραδονίου είναι περίπου $1/0{,}18 = 5{,}6$ ημέρες. Η μέση ζωή ενός πυρήνα άνθρακα-14 υπερβαίνει τα 8000 έτη. Δείξτε ότι το 95% των ραδιενεργών πυρήνων που υπήρχαν αρχικά σε ένα δείγμα θα έχει διασπαστεί σε διάστημα τριών μέσων ζωών, δηλαδή μέσα σε χρόνο $t = 3/k$. Έτσι, η μέση ζωή ενός πυρήνα μάς παρέχει έναν εύχρηστο τρόπο υπολογισμού του πόσο θα διαρκέσει η ραδιενέργεια ενός δείγματος.

28. *Καλιφόρνιο-252* Τι είναι αυτό που κοστίζει 27.000.000 € το γραμμάριο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη θεραπεία του καρκίνου στον εγκέφαλο, για την ανίχνευση θείου στον γαιάνθρακα, και για την ανίχνευση εκρηκτικών σε αποσκευές; Πρόκειται για το καλιφόρνιο-252, ένα ραδιενεργό ισότοπο τόσο σπάνιο ώστε μονάχα 8 g του στοιχείου έχουν παρασκευαστεί στον Δυτικό κόσμο από την ημέρα της ανακάλυψής του από τον Glenn Seaborg το 1950. Η ημιζωή του ισοτόπου αυτού είναι 2.645 έτη, χρόνος αρκετά μεγάλος για να αποβεί χρήσιμο, αλλά και αρκετά μικρός ώστε να μας δίνει μια αξιόλογη ραδιενεργό δράση ανά μονάδα μάζας. Ένα μικρογραμμάριο του στοιχείου απελευθερώνει 170 εκατομμύρια νετρόνια το δευτερόλεπτο.

(α) Ποια η τιμή του k στην εξίσωση διασπάσεως του ισοτόπου;

(β) Πόση είναι η μέση ζωή του ισοτόπου; (Δείτε την Άσκηση 27.)

(γ) Πόσο διάστημα απαιτείται για να διασπαστεί το 95% των ραδιενεργών πυρήνων ενός δείγματος;

29. *Σούπα που κρυώνει* Έστω ότι μια σούπα ψύχεται από τους 90°C στους 60°C μέσα σε 10 λεπτά σε ένα δωμάτιο θερμοκρασίας 20°C. Εφαρμόστε τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα.

(α) Πόσο περίπου διάστημα χρειάζεται για να ψυχθεί η σούπα στους 35°C;

(β) Αντί να την αφήσουμε να κρυώσει μέσα στο δωμάτιο, τοποθετούμε τη σούπα των 90°C σε ψυγείο θερμοκρασίας −15°C. Σε πόσο χρόνο θα ψυχθεί τώρα η σούπα από τους 90°C στους 35°C;

30. *Μια δοκός άγνωστης θερμοκρασίας* Μια δοκός αλουμινίου μεταφέρθηκε από εξωτερικό χώρο όπου κάνει κρύο σε ένα εργαστήριο θερμοκρασίας 18°C. Μετά από 10 λεπτά, η θερμοκρασία της δοκού ανέβηκε στους 2°C, και μετά από άλλα 10 λεπτά, έφτασε τους 10°C. Εφαρμόστε τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε την αρχική θερμοκρασία της δοκού.

31. *Περιβάλλον μέσον άγνωστης θερμοκρασίας* Ένα σκεύος με ζεστό νερό (46°C) τοποθετείται σε ψυγείο. Δέκα λεπτά αργότερα, η θερμοκρασία του νερού είναι 39°C, ενώ μετά από άλλα 10 λεπτά, είναι 33°C. Εφαρμόστε τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του ψυγείου.

32. *Άργυρος που ψύχεται στον αέρα* Μια ράβδος αργύρου έχει θερμοκρασία κατά 60°C υψηλότερη από τη θερμοκρασία δωματίου αυτή τη στιγμή. Πριν από 20 λεπτά, η διαφορά ήταν 70°C. Κατά πόσο θα υπερβαίνει τη θερμοκρασία δωματίου η θερμοκρασία της ράβδου

(α) 15 λεπτά από τώρα;

(β) 2 h από τώρα;

(γ) Ποια χρονική στιγμή θα έχει η ράβδος θερμοκρασία 10°C υψηλότερη από τη θερμοκρασία δωματίου;

33. *Η ηλικία του κρατήρα Lake* Ο ξυλάνθρακας που προέκυψε από τον θάνατο ενός δέντρου κατά την ηφαιστειακή έκρηξη του κρατήρα Lake του Oregon περιέχει 44,5% της ποσότητας άνθρακα-14 που βρίσκεται στην έμβια ύλη. Πόση περίπου είναι η ηλικία του κρατήρα Lake;

34. *Ευαισθησία χρονολόγησης με άνθρακα-14* Για να δείτε τις επιπτώσεις ενός σχετικά μικρού σφάλματος που υπεισέρχεται στην εκτίμηση της ποσότητας του άνθρακα-14 που περιέχεται σε ένα χρονολογούμενο δείγμα, θεωρήστε την ακόλουθη υποθετική κατάσταση.

(α) Ένα απολιθωμένο οστό που βρέθηκε στο κεντρικό Illinois το έτος 2000 μ.Χ. περιέχει 17% του αρχικού του άνθρακα-14. Εκτιμήστε το έτος που πέθανε το ζώο στο οποίο ανήκει το οστό.

(β) Επαναλάβετε το (α) υποθέτοντας ότι περιέχει 18% του αρχικού άνθρακα αντί για 17%.

(γ) Επαναλάβετε το (α) υποθέτοντας ότι περιέχει 16% του αρχικού άνθρακα αντί για 17%.

35. *Πλαστά έργα τέχνης* Ένας πίνακας που αποδίδεται στον Vermeer (1632–1675), και που συνεπώς θα έπρεπε να περιέχει το 96,2% του αρχικού του άνθρακα-14, περιέχει αντ' αυτού 99,5%. Περίπου πόσο παλιό είναι το πλαστό έργο;

36. *Αύξηση βακτηρίων χολέρας* Υποθέστε ότι τα βακτήρια χολέρας σε μια αποικία αυξάνονται σύμφωνα με τον νόμο εκθετικής μεταβολής. Η αποικία έχει αρχικά 1 βακτήριο και διπλασιάζει τον πληθυσμό της ανά μισή ώρα.

(α) Πόσα βακτήρια θα περιέχει η αποικία μετά από 24 h;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Εφαρμόστε το ερώτημα (α) για να εξηγήσετε γιατί ένα άτομο που αισθάνεται καλά το πρωί μπορεί να είναι σοβαρά άρρωστο το ίδιο βράδυ, παρά το ότι σε ένα άτομο που νοσεί, μεγάλος αριθμός βακτηρίων εξοντώνονται.

37. *Ποδήλατο που ρολάρει μέχρι να σταματήσει* Ένας ποδηλάτης μάζας 66 kg που επιβαίνει σε ποδήλατο μάζας 7 kg αφήνει το ποδήλατό του να ρολάρει σε επίπεδο δρόμο με ταχύτητα 9 m/sec. Το k στην Εξίσωση (4) είναι περίπου 3,9 kg/sec.

(α) Πόση περίπου απόσταση θα διανύσει ρολάροντας ο ποδηλάτης μέχρι να ακινητοποιηθεί πλήρως;

(β) Πόσο διάστημα απαιτείται για να ελαττωθεί η ταχύτητα του ποδηλάτη στο 1 m/sec;

38. *Πολεμικό πλοίο που πλέει με σβηστές τις μηχανές μέχρι να ακινητοποιηθεί* Έστω ότι ένα πολεμικό πλοίο έχει μάζα περίπου 51.000 τόνους (51.000.000 kg) και τιμή k για την Εξίσωση (4) περίπου 59.000 kg/sec. Υποθέστε ότι το πλοίο χάνει τον έλεγχο των μηχανών του ενώ πλέει με ταχύτητα 9 m/sec.

(α) Πόση περίπου απόσταση θα διανύσει ακυβέρνητο το πλοίο μέχρι να ακινητοποιηθεί στο νερό;

(β) Πόσο διάστημα απαιτείται για να ελαττωθεί η ταχύτητα του πλοίου στο 1 m/sec;

39. Οι μετρήσεις του Πίνακα 6.3 καταγράφηκαν με έναν ανιχνευτή κίνησης και μια συσκευή CBL™ από την Valerie Sharritts, μια καθηγήτρια μαθηματικών στο Γυμνάσιο St. Francis DeSales του Columbus της πολιτείας του Ohio. Στον πίνακα δείχνεται η απόσταση s (μέτρα) που διένυσε με τροχοπέδιλα και χωρίς επιτάχυνση σε χρόνο t sec η κόρη της Ashley όταν ήταν 10 ετών. Κατασκευάστε ένα μαθηματικό μοντέλο της θέσης της Ashley που να ανταποκρίνεται στα δεδομένα του Πίνακα 6.3 και να έχει τη μορφή της Εξίσωσης (5). Η αρχική της ταχύτητα ήταν $v_0 = 2{,}75$ m/sec, η μάζα της ήταν $m = 39{,}92$ kg, και η συνολική της απόσταση μέχρι ακινητοποιήσεως ήταν 4,91 m.

Πίνακας 6.3 Το πατινάζ της Ashley Sharritts

t (sec)	s (m)	t (sec)	s (m)	t (sec)	s (m)
0	0	2,24	3,05	4,48	4,77
0,16	0,31	2,40	3,22	4,64	4,82
0,32	0,57	2,56	3,38	4,80	4,84
0,48	0,80	2,72	3,52	4,96	4,86
0,64	1,05	2,88	3,67	5,12	4,88
0,80	1,28	3,04	3,82	5,28	4,89
0,96	1,50	3,20	3,96	5,44	4,90
1,12	1,72	3,36	4,08	5,60	4,90
1,28	1,93	3,52	4,18	5,76	4,91
1,44	2,09	3,68	4,31	5,92	4,90
1,60	2,30	3,84	4,41	6,08	4,91
1,76	2,53	4,00	4,52	6,24	4,90
1,92	2,73	4,16	4,63	6,40	4,91
2,08	2,89	4,32	4,69	6,56	4,91

40. *Κύλιση μέχρι ακινητοποιήσεως* Ο Πίνακας 6.4 δείχνει την απόσταση s (σε μέτρα) που διανύει με τροχοπέδιλα χωρίς ώθηση η Kelly Schmitzer, συναρτήσει του χρόνου t (σε δευτερόλεπτα). Κατασκευάστε ένα μαθηματικό μοντέλο της θέσης της που να έχει τη μορφή της Εξίσωσης (5). Η αρχική της ταχύτητα ήταν $v_0 = 0{,}80$ m/sec, η μάζα της είναι $m = 49{,}90$ kg, και η συνολική της απόσταση μέχρι ακινητοποιήσεως είναι 1,32 m.

Πίνακας 6.4 Το πατινάζ της Kelly Schmitzer

t (sec)	s (m)	t (sec)	s (m)	t (sec)	s (m)
0	0	1,5	0,89	3,1	1,30
0,1	0,07	1,7	0,97	3,3	1,31
0,3	0,22	1,9	1,05	3,5	1,32
0,5	0,36	2,1	1,11	3,7	1,32
0,7	0,49	2,3	1,17	3,9	1,32
0,9	0,60	2,5	1,22	4,1	1,32
1,1	0,71	2,7	1,25	4,3	1,32
1,3	0,81	2,9	1,28	4,5	1,32

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Πεδία διευθύνσεων και καμπύλες λύσεων

Στις Ασκήσεις 41-46, καλείστε να εξαγάγετε ένα πεδίο διευθύνσεων και στο ίδιο σχήμα να προσθέσετε γραφικές παραστάσεις των καμπυλών λύσεων που διέρχονται από τα δοθέντα σημεία.

41. $y' = y$ με τις καμπύλες λύσεων να διέρχονται από τα σημεία

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $(0, 1)$

(β) $(0, 2)$

(γ) $(0, -1)$

42. $y' = 2(y - 4)$ με τις καμπύλες λύσεων να διέρχονται από τα σημεία

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $(0, 1)$

(β) $(0, 4)$

(γ) $(0, 5)$

43. $y' = y(2 - y)$ με τις καμπύλες λύσεων να διέρχονται από τα σημεία

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $(0, 1/2)$

(β) $(0, 3/2)$

(γ) $(0, 2)$

(δ) $(0, 3)$

44. $y' = y^2$ με τις καμπύλες λύσεων να διέρχονται από τα σημεία

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $(0, 1)$

(β) $(0, 2)$

(γ) $(0, -1)$

(δ) $(0, 0)$

45. $y' = \dfrac{3y}{x}$ με τις καμπύλες λύσεων να διέρχονται από τα σημεία

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $(-3, 2)$

(β) $(1, 1)$

(γ) $(2, 4)$

46. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$ με τις καμπύλες λύσεων να διέρχονται από τα σημεία

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $(0, 2)$

(β) $(0, -6)$

(γ) $(-2\sqrt{3}, -4)$

6.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως • Επίλυση της γραμμικής εξίσωσης • Προβλήματα αναμείξεως • Κυκλώματα *RL*

Στην ενότητα που προηγήθηκε, δείξαμε ότι ο νόμος της εκθετικής μεταβολής, $y = y_0 e^{kt}$, προκύπτει ως λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $dy/dt = ky$, $y(0) = y_0$. Όπως είδαμε, το πρόβλημα αυτό περιγράφει μαθηματικά τη ραδιενεργό διάσπαση, τη μεταφορά της θερμότητας, καθώς και πολλά άλλα φαινόμενα. Στην παρούσα ενότητα, θα μελετήσουμε προβλήματα αρχικών τιμών που βασίζονται στην εξίσωση $dy/dx = f(x, y)$, όπου f είναι συνάρτηση τόσο της ανεξάρτητης όσο και της εξαρτημένης μεταβλητής. Η συνάρτηση f θα έχει μια συγκεκριμένη μορφή, που καλείται *γραμμική μορφή,* και οι συναφείς διαφορικές εξισώσεις θα έχουν ακόμη ευρύτερες εφαρμογές.

Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

όπου P και Q είναι συναρτήσεις του x, είναι **γραμμική** εξίσωση πρώτης τάξεως. Η (1) είναι η λεγόμενη **πρότυπη μορφή** της εξίσωσης.

Παράδειγμα 1 Εύρεση πρότυπης μορφής

Φέρτε την ακόλουθη εξίσωση στην πρότυπη μορφή της:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Λύση

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \qquad \text{Διαιρούμε με } x.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{Πρότυπη μορφή με } P(x) = -3/x \text{ και } Q(x) = x$$

Σημειώστε ότι το $P(x)$ ισούται με $-3/x$, όχι με $+3/x$. Η πρότυπη μορφή είναι $y' + P(x)y = Q(x)$, οπότε το πρόσημο μείον ενσωματώνεται στο $P(x)$.

Παράδειγμα 2 Γραμμικότητα του μοντέλου εκθετικής αύξησης

Η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

την οποία χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε τον συνεχή ανατοκισμό, τη ραδιενεργό διάσπαση, και τις θερμοκρασιακές μεταβολές, στην προηγούμενη ενότητα, είναι μια γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως. Η πρότυπη μορφή της είναι

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0. \qquad P(x) = -k \text{ και } Q(x) = 0$$

Επίλυση της γραμμικής εξίσωσης

Λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με μια *θετική* συνάρτηση $v(x)$ η οποία μετασχηματίζει το αριστερό μέλος στην παράγωγο του γινομένου $v(x) \cdot y$. Σε λίγο θα δείξουμε πώς βρίσκουμε το v, αλλά ας δούμε πρώτα πώς το χρησιμοποιούμε.

Ιδού γιατί ο πολλαπλασιασμός με το v αποβαίνει χρήσιμος:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad \text{Η αρχική εξίσωση είναι στην πρότυπη μορφή της.}$$

Καλούμε το $v(x)$ **ολοκληρωτικό παράγοντα** της Εξίσωσης (2) διότι η παρουσία του καθιστά την εξίσωση ολοκληρώσιμη.

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x)$$ Πολλαπλασιάζουμε με τον θετικό παράγοντα $v(x)$.

$$\frac{d}{dx}(v(x)\cdot y) = v(x)Q(x)$$ Ο παράγοντας $v(x)$ επιλέγεται ώστε να ικανοποιείται η $v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v\cdot y)$.

$$v(x)\cdot y = \int v(x)Q(x)\,dx$$ Ολοκληρώνουμε ως προς x.

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx. \qquad (3)$$ Λύνουμε ως προς y.

Η Εξίσωση (3) εκφράζει τη λύση της Εξίσωσης (2) συναρτήσει των $v(x)$ και $Q(x)$.

Γιατί όμως να μην εμφανίζεται στη λύση και η συνάρτηση $P(x)$; Η αλήθεια είναι ότι εμφανίζεται, αλλά έμμεσα, μετέχοντας στην κατασκευή της θετικής συναρτήσεως $v(x)$. Έχουμε

$$\frac{d}{dx}(vy) = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$ Συνθήκη που πρέπει να πληροί το v

$$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$ Παράγωγος γινομένου

$$y\frac{dv}{dx} = Pvy$$ Απαλείφονται οι όροι $v\,\frac{dy}{dx}$.

Η τελευταία εξίσωση θα ισχύει αν

$$\frac{dv}{dx} = Pv$$

$$\frac{dv}{v} = P\,dx$$ Χωρισμός μεταβλητών

$$\int\frac{dv}{v} = \int P\,dx$$ Ολοκληρώνουμε κάθε μέλος.

$$\ln v = \int P\,dx$$ Εφόσον $v > 0$, δεν χρειάζεται να πάρουμε απόλυτες τιμές του $\ln v$.

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,dx}$$ Παίρνουμε το εκθετικό κάθε μέλους προκειμένου να λύσουμε ως προς v.

$$v = e^{\int P\,dx} \qquad (4)$$

Βλέπουμε εδώ ότι κάθε συνάρτηση v που ικανοποιεί την Εξίσωση (4) μας επιτρέπει να λύσουμε την Εξίσωση (2) βάσει της Εξίσωσης (3). Δεν χρειαζόμαστε τη γενικότερη δυνατή v, αλλά οποιαδήποτε ικανοποιεί την Εξίσωση (4). Μπορούμε λοιπόν να απλοποιήσουμε τα πράγματα επιλέγοντας την απλούστερη δυνατή αντιπαράγωγο της P προκειμένου να υπολογίσουμε το $\int P\,dx$. Σημειώστε επίσης ότι κάθε συνάρτηση v που ικανοποιεί την Εξίσωση (4) είναι θετική.

Θεώρημα 3

Η λύση της γραμμικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

είναι

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx, \qquad (5)$$

όπου

$$v(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \qquad (6)$$

Στην έκφραση για το v, δεν χρειαζόμαστε την πλέον γενική αντιπαράγωγο της συναρτήσεως $P(x)$. Οποιαδήποτε αντιπαράγωγος αρκεί.

Πώς επιλύουμε μια γραμμική πρωτοτάξια εξίσωση

Βήμα 1. Τη φέρνουμε στην πρότυπη μορφή.

Βήμα 2. Βρίσκουμε μια αντιπαράγωγο της συνάρτησης $P(x)$.

Βήμα 3. Βρίσκουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $v(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Βήμα 4. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση (5) για να βρούμε το y.

CD-ROM Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του Θεωρήματος 3

Λύστε την εξίσωση

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Λύση Λύνουμε την εξίσωση σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1: *Φέρνουμε την εξίσωση στην πρότυπη μορφή για να αναγνωρίσουμε τα P και Q.*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x, \qquad P(x) = -\frac{3}{x}, \qquad Q(x) = x$$ Παράδειγμα 1

Βήμα 2: *Βρίσκουμε μια αντιπαράγωγο του $P(x)$ (οποιαδήποτε).*

$$\int P(x)\,dx = \int -\frac{3}{x}\,dx = -3\int\frac{1}{x}\,dx = -3\ln|x| = -3\ln x \qquad (x > 0)$$

Βήμα 3: *Βρίσκουμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα $v(x)$.*

$$v(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}$$ Εξ. (6)

Βήμα 4: *Βρίσκουμε τη λύση.*

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx$$ Εξ. (5)

$$= \frac{1}{(1/x^3)}\int\left(\frac{1}{x^3}\right)(x)\,dx$$ Αντικαθιστούμε με τις τιμές που βρήκαμε στα Βήματα 1–3

$$= x^3\cdot\int\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right)$$ Δεν ξεχνούμε τη σταθερά C . . .

$$= -x^2 + Cx^3$$ . . .η οποία είναι μέρος της λύσεως.

Η λύση είναι $y = -x^2 + Cx^3,\ x > 0$.

Παράδειγμα 4 Επίλυση γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών πρώτης τάξεως

Λύστε την εξίσωση

$$xy' = x^2 + 3y, \qquad x > 0,$$

με αρχική συνθήκη $y(1) = 2$.

Λύση Λύνουμε πρώτα τη διαφορική εξίσωση (Παράδειγμα 3), παίρνοντας

$$y = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0.$$

Κατόπιν χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη για να βρούμε την τιμή της σταθεράς C:

$$y = -x^2 + Cx^3$$
$$2 = -(1)^2 + C(1)^3 \qquad y = 2 \text{ όταν } x = 1$$
$$C = 2 + (1)^2 = 3.$$

Έτσι λοιπόν, λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η συνάρτηση $y = -x^2 + 3x^3$.

Προβλήματα αναμείξεως

Μία χημική ουσία διαλυμένη σε υγρό (ή διαχυμένη σε αέριο) εισρέει σε δεξαμενή που περιέχει τον υγρό (ή αέριο) διαλύτη σε καθαρή μορφή ή ενδεχομένως σε διάλυμα της ίδιας ουσίας αλλά σε γνωστή αναλογία. Ομογενοποιούμε το μείγμα ανακατεύοντάς το και κατόπιν το αφήνουμε να εκρεύσει από τη δεξαμενή με γνωστό ρυθμό. Κατά τη διαδικασία αυτή, μας είναι συχνά απαραίτητο να γνωρίζουμε τη συγκέντρωση της χημικής ουσίας στη δεξαμενή ανά πάσα στιγμή. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διαδικασία βασίζεται στον τύπο

$$\begin{matrix}\text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της ποσότητας} \\ \text{στο δοχείο}\end{matrix} = \begin{pmatrix}\text{ρυθμός} \\ \text{εισροής} \\ \text{ουσίας}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{ρυθμός} \\ \text{εκροής} \\ \text{ουσίας}\end{pmatrix} \qquad (7)$$

Αν $y(t)$ είναι η ποσότητα της χημικής ουσίας στη δεξαμενή τη χρονική στιγμή t και $V(t)$ είναι ο συνολικός όγκος του υγρού στο δοχείο την ίδια στιγμή, τότε ο ρυθμός εκροής της ουσίας τη στιγμή t είναι

$$\text{Ρυθμός εκροής} = \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{ρυθμός εκχύσεως})$$
$$= \begin{pmatrix}\text{συγκέντρωση στη} \\ \text{δεξαμενή τη στιγμή } t\end{pmatrix} \cdot (\text{ρυθμός εκχύσεως}). \qquad (8)$$

Κατά συνέπεια, η Εξίσωση (7) γίνεται τώρα

$$\frac{dy}{dt} = (\text{ρυθμός εισροής ουσίας}) - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{ρυθμός εκχύσεως}). \qquad (9)$$

Αν, για παράδειγμα, το y μετράται σε kg, το V σε L, και το t σε λεπτά, τότε οι μονάδες στην Εξίσωση (9) είναι

$$\frac{\text{kg}}{\text{min}} = \frac{\text{kg}}{\text{min}} - \frac{\text{kg}}{\text{L}} \cdot \frac{\text{L}}{\text{min}}.$$

Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5 Δεξαμενή πετρελαίου σε διυλιστήριο

Σε ένα διυλιστήριο πετρελαίου, μια δεξαμενή περιέχει 2000 L βενζίνης και 100 kg μιας προσθετικής ουσίας διαλυμένης στη βενζίνη. Κατά την προετοιμασία για τον χειμώνα, προστίθεται στη δεξαμενή διάλυμα βενζίνης που περιέχει 2 kg προσθετικής ουσίας ανά L, με ρυθμό 40 L/min. Το καλώς αναμεμειγμένο διάλυμα αντλείται κατόπιν με ρυθμό 45 L/min. Πόση προσθετική ουσία παραμένει στη δεξαμενή 20 min μετά την έναρξη της άντλησης (Σχήμα 6.14);

Σχήμα 6.14 Η δεξαμενή του Παραδείγματος 5.

Λύση

Μοντέλο διαφορικής εξίσωσης

Έστω y η ποσότητα (σε kg) της προσθετικής ουσίας στη δεξαμενή τη χρονική στιγμή t. Γνωρίζουμε ότι $y = 100$ για $t = 0$. Μετά την παρέλευση τυχόντος χρονικού διαστήματος t, στη δεξαμενή θα υπάρχει συνολικά διάλυμα (βενζίνη και προσθετική ουσία) όγκου

$$V(t) = 2000 \text{ L} + \left(40 \frac{\text{L}}{\text{min}} - 45 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right)(t \text{ min})$$
$$= (2000 - 5t) \text{ L}.$$

Συνεπώς,

$$\text{Ρυθμός εκροής} = \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{ρυθμός εκχύσεως}$$
$$= \left(\frac{y}{2000 - 5t}\right) 45 \qquad \text{Εξ. (8)}$$
$$= \frac{45y}{2000 - 5t} \frac{\text{kg}}{\text{min}}. \qquad \text{Ο ρυθμός εκχύσεως είναι 45 L/min και } v = 2000 - 5t.$$

Επίσης,

$$\text{Ρυθμός εισροής} = \left(2 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(40 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right)$$
$$= 80 \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διαδικασία αναμείξεως είναι συνεπώς

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t} \qquad \text{Εξ. (9)}$$

σε μονάδες kg ανά λεπτό.

Αναλυτική επίλυση

Για να επιλύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση, τη φέρνουμε πρώτα σε πρότυπη μορφή:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t} y = 80.$$

Έτσι, $P(t) = 45/(2000 - 5t)$ και $Q(t) = 80$.

Μια αντιπαράγωγος της $P(t)$ είναι η

$$\int P(t)\, dt = \int \frac{45}{2000 - 5t}\, dt$$
$$= -9 \ln(2000 - 5t). \qquad 2000 - 5t > 0$$

(Θυμηθείτε, μας αρκεί οποιαδήποτε αντιπαράγωγος του P.)

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$v(t) = e^{\int P\, dt}$$

$$= e^{-9\ln(2000-5t)}$$
$$= (2000-5t)^{-9}.$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \frac{1}{(2000-5t)^{-9}}\int (2000-5t)^{-9}(80)\,dt \qquad \text{Εξ. (5)}$$
$$= \frac{80}{(2000-5t)^{-9}}\left(\frac{(2000-5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C\right) \qquad \text{Δεν ξεχνούμε τη σταθερά } C.$$
$$= 2(2000-5t) + C(2000-5t)^{9}. \qquad \text{Ονομάζουμε τη σταθερά } 80C \text{ πάλι } C$$

Εφόσον $y = 100$ για $t = 0$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς C:

$$100 = 2(2000-0) + C(2000-0)^9$$
$$C = -\frac{3900}{(2000)^9}.$$

Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = 2(2000-5t) - \frac{3900}{(2000)^9}(2000-5t)^9.$$

Ερμηνεία

Η ποσότητα προσθετικής ουσίας στη δεξαμενή 20 min μετά την έναρξη της άντλησης από τη δεξαμενή είναι

$$y(20) = 2[2000-5(20)] - \frac{3900}{(2000)^9}[2000-5(20)]^9 \approx 1342{,}03 \text{ kg}.$$

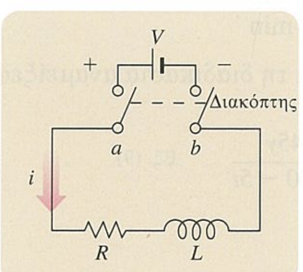
Κυκλώματα RL

Στο διάγραμμα του Σχήματος 6.15 αναπαριστούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα συνολικής αντίστασης (σταθερής) R Ohm και αυτεπαγωγής (που συμβολίζεται από το πηνίο) L Henry, επίσης σταθερής. Το κύκλωμα περιλαμβάνει διακόπτη, με άκρα τα σημεία a και b, που όταν κλείσει συνδέει το κύκλωμα με ηλεκτρική πηγή V Volt.

Ο νόμος του Ohm, $V = RI$, θα πρέπει να τροποποιηθεί για ένα τέτοιο κύκλωμα. Η τροποποιημένη του μορφή είναι

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{10}$$

όπου i είναι η ένταση του ρεύματος σε Ampere και t ο χρόνος σε sec. Επιλύοντας την εξίσωση αυτή, μπορούμε να περιγράψουμε το ρεύμα στο κύκλωμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Σχημα 6.15 Το κύκλωμα RL του Παραδείγματος 6.

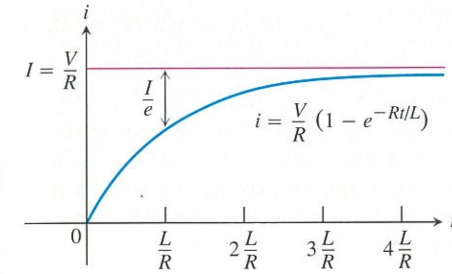
Παράδειγμα 6 Ροή ηλεκτρικού ρεύματος

Ο διακόπτης του κυκλώματος RL στο Σχήμα 6.15 κλείνει τη στιγμή $t = 0$. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται με τον χρόνο το ρεύμα στο κύκλωμα.

Λύση Η Εξίσωση (10) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς το i συναρτήσει του t. Η πρότυπη μορφή της είναι

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}, \tag{11}$$

και η αντίστοιχη λύση, από το Θεώρημα 3, δεδομένου ότι $i = 0$ για $t = 0$, είναι



Σχημα 6.16 Χρονική εξέλιξη του ρεύματος στο κύκλωμα RL του Παραδείγματος 9. I είναι η τιμή χρονοανεξάρτητης κατάστασης του ρεύματος . Η ποσότητα $t = L/R$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος. Το ρεύμα φθάνει στο 95% της τιμής χρονοανεξάρτητης κατάστασης σε χρόνο ίσο με 3 σταθερές χρόνου. (Άσκηση 31)

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{12}$$

(Άσκηση 32). Εφόσον τα R και L είναι θετικά, η ποσότητα $-(R/L)$ είναι αρνητική και $e^{-(R/L)t} \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}.$$

Σε τυχούσα χρονική στιγμή, το ρεύμα είναι θεωρητικά μικρότερο από V/R, όμως καθώς ο χρόνος περνά, το ρεύμα προσεγγίζει την **τιμή χρονοανεξάρτητης κατάστασης** V/R. Σύμφωνα με την εξίσωση

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

$I = V/R$ είναι το ρεύμα που θα διαρρέει το κύκλωμα είτε εάν $L = 0$ (μηδενική αυτεπαγωγή) είτε εάν $di/dt = 0$ (σταθερό ρεύμα, $i =$ σταθερό) (Σχήμα 6.16).

Η (12) εκφράζει τη λύση της Εξίσωσης (11) ως άθροισμα δύο προσθετέων: μιας **λύσης χρονοανεξάρτητης κατάστασης** V/R και μιας **μεταβατικής λύσης** $-(V/R)e^{-(R/L)t}$ που τείνει στο μηδέν καθώς $t \to \infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.5

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 1-14.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

2. $e^x\dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

3. $xy' + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2}, \quad x > 0$

4. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

6. $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$

7. $2y' = e^{x/2} + y$

8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

9. $xy' - y = 2x\ln x$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

11. $(t-1)^3\dfrac{ds}{dt} + 4(t-1)^2 s = t + 1, \quad t > 1$

12. $(t+1)\dfrac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \dfrac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

13. $\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

14. $\tan\theta\dfrac{dr}{d\theta} + r = \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

Επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 15-20.

	Διαφορική εξίσωση	Αρχική συνθήκη
15.	$\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3$	$y(0) = 1$
16.	$t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0$	$y(2) = 1$
17.	$\theta\dfrac{dy}{d\theta} + y = \sin\theta, \quad \theta > 0$	$y(\pi/2) = 1$
18.	$\theta\dfrac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3\sec\theta\tan\theta, \quad \theta > 0$	$y(\pi/3) = 2$
19.	$(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2(x^2 + x)y = \dfrac{e^{x^2}}{x+1}, \ x > -1$	$y(0) = 5$
20.	$\dfrac{dy}{dx} + xy = x$	$y(0) = -6$

21. Τι αποτέλεσμα παίρνετε αν εφαρμόσετε το Θεώρημα 3 για να λύσετε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για το y συναρτήσει του t;

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k \text{ σταθερά}), \quad y(0) = y_0$$

22. Εφαρμόστε το Θεώρημα 3 για να λύσετε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για το v συναρτήσει του t.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0 \ (k \text{ και } m \text{ θετικές σταθερές}), \ v(0) = v_0$$

Θεωρία και παραδείγματα

23. *Μάθετε γράφοντας* Είναι ορθές οι ακόλουθες εξισώσεις; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(α) $x\int \frac{1}{x}\,dx = x \ln|x| + C$

(β) $x\int \frac{1}{x}\,dx = x \ln|x| + Cx$

24. *Συνεχής ανατοκισμός* Διαθέτετε 1000 € για το άνοιγμα ενός λογαριασμού, στον οποίο προγραμματίζετε να προσθέτετε 1000 € ανά έτος. Ο λογαριασμός θα σας αποδίδει 10% τόκο ετησίως, με συνεχή ανατοκισμό. Αν οι επιπρόσθετες καταθέσεις που κάνετε πιστώνονται κατά συνεχή τρόπο, τότε το ποσό x που περιέχει ο λογαριασμός σας τη στιγμή t (σε έτη) θα ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dx}{dt} = 1000 + 0{,}10x, \qquad x(0) = 1000.$$

(α) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το x συναρτήσει του t.

(β) Πόσα περίπου έτη απαιτούνται για να ανέλθουν οι καταθέσεις σας στο ποσό των 100.000 €;

25. *Μείγμα αλατιού* Μια δεξαμενή περιέχει αρχικά 100 L άλμης στην οποία είναι διαλυμένα 5 kg αλατιού. Ένα δεύτερο διάλυμα άλμης που περιέχει 0,2 kg/L αλατιού χύνεται στη δεξαμενή με ρυθμό 5 L/min. Το μείγμα ομογενοποιείται με ανάδευση και εκχύνεται από τη δεξαμενή με ρυθμό 4 L/min.

(α) Με ποιο ρυθμό (kg/min) εισέρχεται αλάτι στη δεξαμενή τη χρονική στιγμή t;

(β) Ποιος είναι ο όγκος της άλμης στη δεξαμενή τη χρονική στιγμή t;

(γ) Με ποιο ρυθμό (kg/min) εξέρχεται αλάτι από τη δεξαμενή τη χρονική στιγμή t;

(δ) Γράψτε την εξίσωση του προβλήματος αρχικών τιμών που περιγράφει τη διαδικασία αναμείξεως και λύστε την εξίσωση αυτήν.

(ε) Βρείτε τη συγκέντρωση του αλατιού στη δεξαμενή 25 min μετά την έναρξη της διαδικασίας.

26. *Πρόβλημα αναμείξεως* Μια δεξαμενή χωρητικότητας 200 L είναι κατά το ήμισυ γεμάτη με αποσταγμένο νερό. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένα διάλυμα που περιέχει μια ουσία σε συγκέντρωση 0,5 kg/L εισρέει στη δεξαμενή με ρυθμό 5 L/min, και κατόπιν το καλά αναδευμένο μείγμα αντλείται με ρυθμό 3 L/min.

(α) Σε ποια χρονική στιγμή θα έχει γεμίσει η δεξαμενή;

(β) Τη στιγμή που είναι γεμάτη η δεξαμενή, πόσα kg της ουσίας θα περιέχει;

27. *Μείγμα λιπάσματος* Μια δεξαμενή περιέχει 100 L νερού. Ένα διάλυμα που περιέχει 1 kg/L διαλυτού λιπάσματος εισρέει στη δεξαμενή με ρυθμό 1 L/min, και το μείγμα αντλείται κατόπιν από τη δεξαμενή με ρυθμό 3 L/min. Βρείτε πότε θα έχει μεγιστοποιηθεί η ποσότητα λιπάσματος στη δεξαμενή και πόση είναι αυτή.

28. *Ρύπανση από μονοξείδιο του άνθρακα* Μια αίθουσα συνεδριάσεων περιέχει 130 m³ αέρα και αρχικά καθόλου μονοξείδιο του άνθρακα. Τη στιγμή $t = 0$, καπνός από τσιγάρο περιεκτικότητας 4% σε μονοξείδιο του άνθρακα εκπνέεται στην αίθουσα από καπνιστές, με ρυθμό 0,008 m³/min. Ένας ανεμιστήρας οροφής διατηρεί την κυκλοφορία του αέρα, έτσι ώστε να εξέρχεται αέρας από την αίθουσα με τον ίδιο ρυθμό 0,008 m³/min. Βρείτε σε ποια χρονική στιγμή θα φτάσει η συγκέντρωση μονοξειδίου του άνθρακα στην αίθουσα την τιμή 0,01%..

29. *Ρεύμα σε κλειστό κύκλωμα RL* Σε πόσα δευτερόλεπτα από τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης ενός κυκλώματος RL θα φτάσει το ρεύμα i το ήμισυ της τιμής σταθεράς κατάστασης; Σημειώστε ότι ο ζητούμενος χρόνος εξαρτάται από τα R και L και όχι από την τάση που εφαρμόζεται.

30. *Ρεύμα σε ανοιχτό κύκλωμα RL* Αν σε κύκλωμα RL ανοίξει ο διακόπτης αφού το ρεύμα έχει φτάσει στη μέγιστη τιμή του $I = V/R$, τότε το ελαττωνόμενο ρεύμα (που αναπαρίσταται γραφικά ως ακολούθως) ικανοποιεί την εξίσωση

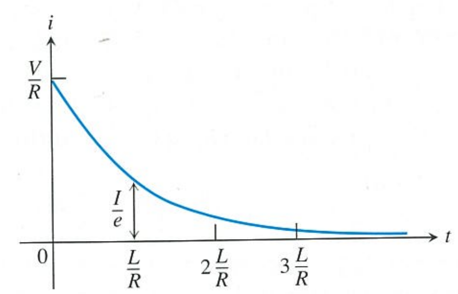
$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

που δεν είναι παρά η Εξίσωση (10) για $V = 0$.

(α) Λύστε την εξίσωση για να εκφράστε το i συναρτήσει του t.

(β) Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται μετά το άνοιγμα του διακόπτη για να φθάσει το ρεύμα στο ήμισυ της αρχικής του τιμής;

(γ) Δείξτε ότι η τιμή του ρεύματος για $t = L/R$ είναι I/e. (Η φυσική σημασία του χρονικού αυτού διαστήματος εξηγείται στην επόμενη άσκηση.)



31. *Σταθερές χρόνου* Οι μηχανικοί καλούν το πηλίκο L/R *σταθερά χρόνου* του κυκλώματος RL του Σχήματος 6.15. Η φυσική σημασία της σταθεράς χρόνου είναι ότι το ρεύμα θα φτάσει στο 95% της τελικής τιμής του σε χρόνο ίσο με 3 σταθερές χρόνου από τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης (Σχήμα 6.16). Έτσι, η σταθερά χρόνου αποτελεί ένα «εγγενές» μέτρο του πόσο γρήγορα θα φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας ένα δεδομένο κύκλωμα.

(α) Βρείτε την τιμή του i στην Εξίσωση (12) που αντιστοιχεί σε χρόνο $t = 3L/R$ και δείξτε ότι το ρεύμα που βρήκατε είναι περίπου 95% του ρεύματος στάσιμης κατάστασης $I = V/R$.

(β) Τι ποσοστό του ρεύματος στάσιμης κατάστασης είναι το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα 2 σταθερές χρόνου μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δηλ., όταν $t = 2L/R$);

32. *Απόδειξη της Εξίσωσης (12) στο Παράδειγμα 6*

(α) Εφαρμόστε το Θεώρημα 3 για να δείξετε ότι η λύση της εξίσωσης

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

είναι η

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}.$$

(β) Κατόπιν χρησιμοποιήστε την αρχική συνθήκη $i(0) = 0$ για να προσδιορίσετε την τιμή του C. Έτσι συμπληρώνεται η απόδειξη της Εξίσωσης (12).

(γ) Δείξτε ότι η $i = V/R$ είναι λύση της Εξίσωσης (11) και ότι η $i = Ce^{-(R/L)t}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0.$$

6.6 Η μέθοδος Euler· πληθυσμιακά μοντέλα

Η μέθοδος Euler • Γραφικές λύσεις • Βελτιωμένη μέθοδος Euler • Εκθετικό πληθυσμιακό μοντέλο • Λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο

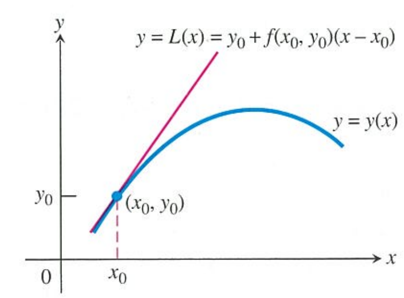
Αν δεν είναι απαραίτητη ή εφικτή η *ακριβής* επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, τότε μπορούμε κάλλιστα να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή για να παραγάγουμε έναν πίνακα προσεγγιστικών αριθμητικών τιμών του y για τιμές του x σε κάποιο κατάλληλο διάστημα. Ένας τέτοιος πίνακας τιμών καλείται **αριθμητική λύση** του προβλήματος, και η μέθοδος με την οποία τον κατασκευάζουμε καλείται **αριθμητική μέθοδος.** Εν γένει, οι αριθμητικές μέθοδοι παρέχουν ταχύτητα υπολογισμών και ακρίβεια, και τις χρησιμοποιούνται πολύ συχνά, όταν οι ακριβείς τύποι είτε δεν μας χρειάζονται είτε δεν είναι διαθέσιμοι είτε είναι υπερβολικά περίπλοκοι. Στην παρούσα ενότητα, θα μελετήσουμε μια τέτοια μέθοδο, που ονομάζεται μέθοδος Euler, και στην οποία βασίζονται πολλές άλλες αριθμητικές μέθοδοι.

Η μέθοδος Euler

Αν μας δοθεί μια διαφορική εξίσωση $dy/dx = f(x, y)$ και μια αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση $y = y(x)$ με τη γραμμικοποίησή της

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{δηλαδή} \qquad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Η συνάρτηση $L(x)$ αποτελεί καλή προσέγγιση της λύσεως $y(x)$ σε μικρό διάστημα γύρω από το x_0 (Σχήμα 6.17). Η ουσία της μεθόδου Euler είναι να «συνδέει» μια ακολουθία από διαδοχικές γραμμικοποιήσεις έτσι ώστε να προσεγγίσει τελικά μια καμπύλη σε μεγαλύτερο διάστημα. Ιδού πώς λειτουργεί η μέθοδος.

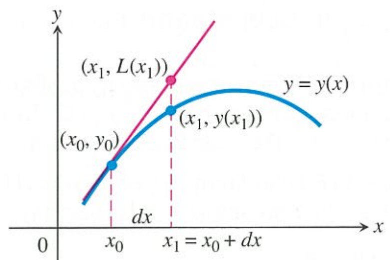


ΣΧΗΜΑ 6.17 Η γραμμικοποίηση της $y = y(x)$ στο $x = x_0$.

Γνωρίζουμε ότι το σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην καμπύλη λύσεως. Θεωρούμε μια νέα τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής $x_1 = x_0 + dx$. Αν η μεταβολή dx είναι μικρή, τότε η

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\,dx$$

είναι μια καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσεως $y = y(x_1)$. Ξεκινήσαμε δηλαδή από το σημείο (x_0, y_0), το οποίο κείται *ακριβώς* πάνω στην κα-



Σχημα 6.18 Το πρώτο βήμα της μεθόδου του Euler προσεγγίζει το $y(x_1)$ με το $y_1 = L(x_1)$.

μπύλη λύσεως, και φθάσαμε στο σημείο (x_1, y_1), που κείται πολύ κοντά στο $(x_1, y(x_1))$ της καμπύλης λύσεως (Σχήμα 6.18).

Εφοδιασμένοι με το σημείο (x_1, y_1) και την κλίση $f(x_1, y_1)$ της καμπύλης λύσεως που διέρχεται από το (x_1, y_1), κάνουμε το δεύτερο βήμα. Θέτουμε $x_2 = x_1 + dx$, και γραμμικοποιούμε την καμπύλη στο σημείο (x_1, y_1), οπότε βρίσκουμε

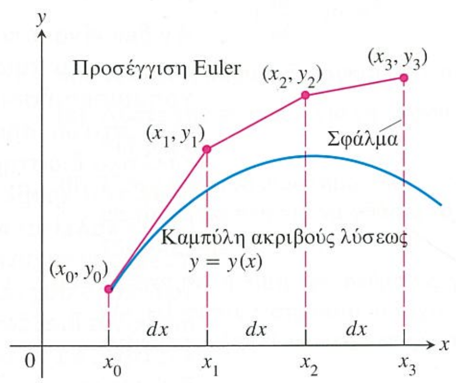
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,dx.$$

Λαμβάνουμε έτσι τη δεύτερη γραμμικοποίηση (x_2, y_2) της αληθούς καμπύλης λύσεως $y = y(x)$ (Σχήμα 6.19). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, κάνουμε ένα τρίτο βήμα από το σημείο (x_2, y_2) με κλίση $f(x_2, y_2)$ οπότε εξάγουμε την τρίτη προσέγγιση

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,dx,$$

κ.ο.κ. Αυτό που ουσιαστικά κάνουμε με όλη αυτή τη διαδικασία είναι να κατασκευάζουμε μια προσέγγιση μιας καμπύλης λύσεως, ακολουθώντας την πορεία του πεδίου διευθύνσεων της διαφορικής εξίσωσης.

Τα βήματα στο Σχήμα 6.19 σχεδιάζονται επίτηδες μεγάλα για να επεξηγήσουν τη διαδικασία κατασκευής, συνεπώς η προσέγγιση μοιάζει κάπως χονδροειδής. Στην πράξη, το dx είναι αρκούντως μικρό ώστε να κάνει την κόκκινη καμπύλη να «αγκαλιάζει» τη μπλε καμπύλη, δίδοντας παντού μια καλή προσέγγιση της λύσεως.



Σχημα 6.19 Τρία βήματα στην προσέγγιση κατά Euler της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Καθώς κάνουμε περισσότερα βήματα, το σφάλμα συνήθως μεγαλώνει, όχι όμως στον υπερβολικό βαθμό που φαίνεται στο σχήμα.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Leonhard Euler
(1703-1783)

Παράδειγμα 1 Εφαρμογή της μεθόδου Euler

Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler για να βρείτε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις y_1, y_2, y_3 στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1$$

με σημείο εκκίνησης το $x_0 = 0$ και βήμα $dx = 0{,}1$.

Λύση Έχουμε $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_1 = x_0 + dx = 0{,}1$, $x_2 = x_0 + 2dx = 0{,}2$, και $x_3 = x_0 + 3dx = 0{,}3$.

Πρώτη:
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\ &= y_0 + (1 + y_0)\,dx \\ &= 1 + (1 + 1)(0{,}1) = 1{,}2 \end{aligned}$$

Δεύτερη:
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\ &= y_1 + (1 + y_1)\,dx \\ &= 1{,}2 + (1 + 1{,}2)(0{,}1) = 1{,}42 \end{aligned}$$

Τρίτη:
$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,dx \\ &= y_2 + (1 + y_2)\,dx \\ &= 1{,}42 + (1 + 1{,}42)(0{,}1) = 1{,}662 \end{aligned}$$

Η βήμα προς βήμα διαδικασία του Παραδείγματος 1 μπορεί εύκολα να συνεχιστεί. Επιλέγοντας n ισαπέχουσες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής θέτουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + dx \\ x_2 &= x_1 + dx \\ &\ \vdots \\ x_n &= x_{n-1} + dx. \end{aligned}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις της λύσεως,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\ &\ \vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx. \end{aligned}$$

Το πλήθος των βημάτων n μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε, αλλά το σφάλμα συσσωρεύεται αν το n γίνει υπερβολικά μεγάλο.

Η μέθοδος Euler προσφέρεται για προγραμματισμό σε ηλεκτρονικό υπολογιστή ή σε προγραμματιζόμενο κομπιουτεράκι. Το πρόγραμμα παράγει έναν πίνακα αριθμητικών λύσεων στο πρόβλημα αρχικών τιμών που του εισάγουμε, ζητώντας μας τα x_0 και y_0, το πλήθος των βημάτων n, και το μέγεθος του βήματος dx. Κατόπιν υπολογίζει τις προσεγγιστικές τιμές λύσεως $y_1, y_2, \ldots, y_n$ εφαρμόζοντας κατ' επανάληψη τη διαδικασία που περιγράψαμε.

Στην Άσκηση 13, σας ζητάται να δείξετε ότι η ακριβής λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών του Παραδείγματος 1 είναι $y = 2e^x - 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία αυτή στο Παράδειγμα 2.

Παράδειγμα 2 Διερεύνηση της ακρίβειας της μεθόδου Euler

Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler για να λύσετε το πρόβλημα

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

στο διάστημα $0 \le x \le 1$, με σημείο εκκίνησης το $x_0 = 0$ και βήμα

(α) $dx = 0{,}1$

(β) $dx = 0{,}05$.

Συγκρίνετε τις προσεγγίσεις με τις τιμές της ακριβούς λύσεως $y = 2e^x - 1$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιήσαμε ένα προγραμματιζόμενο κομπιουτεράκι για να παραγάγουμε τις προσεγγιστικές τιμές του Πίνακα 6.5. Η στήλη με τα σφάλματα προέκυψε με αφαίρεση των μη στρογγυλοποιημένων τιμών τις οποίες έδωσε η μέθοδος Euler από τις μη στρογγυλοποιημένες τιμές που βρήκαμε από την ακριβή λύση. Όλες οι τιμές του πίνακα έχουν στρογγυλοποιηθεί στα 4 δεκαδικά ψηφία.

Πίνακας 6.5 Λύση κατά Euler της εξίσωσης $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, με βήμα $dx = 0{,}1$

x	y (Euler)	y (ακριβής)	Σφάλμα
0	1	1	0
0,1	1,2	1,2103	0,0103
0,2	1,42	1,4428	0,0228
0,3	1,662	1,6997	0,0377
0,4	1,9282	1,9836	0,0554
0,5	2,2210	2,2974	0,0764
0,6	2,5431	2,6442	0,1011
0,7	2,8974	3,0275	0,1301
0,8	3,2872	3,4511	0,1639
0,9	3,7159	3,9192	0,2033
1,0	4,1875	4,4366	0,2491

Βλέπουμε λοιπόν ότι, φθάνοντας στο $x = 1$ (μετά από 10 βήματα), το σφάλμα έχει ανέλθει στο 5,6% της ακριβούς λύσεως.

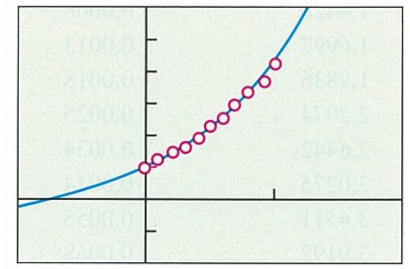
(β) Ένας τρόπος μείωσης του σφάλματος είναι να ελαττώσουμε το βήμα. Ο Πίνακας 6.6 δείχνει τα αποτελέσματα της μεθόδου Euler σε σύγκριση με τις τιμές της ακριβούς λύσεως, όταν μειώσαμε το βήμα σε 0,05, διπλασιάζοντας έτσι το πλήθος βημάτων σε 20. Όπως και στον Πίνακα 6.5, όλοι οι υπολογισμοί έγιναν χωρίς στρογγυλοποίηση. Βλέπουμε ότι τώρα, όταν φθάνουμε στο $x = 1$, το σχετικό σφάλμα είναι μόνο 2,9%.

Πίνακας 6.6 Λύση κατά Euler της εξίσωσης $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, με βήμα $dx = 0{,}05$

x	y (Euler)	y (ακριβής)	Σφάλμα
0	1	1	0
0,05	1,1	1,1025	0,0025
0,10	1,205	1,2103	0,0053
0,15	1,3153	1,3237	0,0084
0,20	1,4310	1,4428	0,0118
0,25	1,5526	1,5681	0,0155
0,30	1,6802	1,6997	0,0195
0,35	1,8142	1,8381	0,0239
0,40	1,9549	1,9836	0,0287
0,45	2,1027	2,1366	0,0340
0,50	2,2578	2,2974	0,0397
0,55	2,4207	2,4665	0,0458
0,60	2,5917	2,6442	0,0525
0,65	2,7713	2,8311	0,0598
0,70	2,9599	3,0275	0,0676
0,75	3,1579	3,2340	0,0761
0,80	3,3657	3,4511	0,0853
0,85	3,5840	3,6793	0,0953
0,90	3,8132	3,9192	0,1060
0,95	4,0539	4,1714	0,1175
1,00	4,3066	4,4366	0,1300

Υπάρχει ο πειρασμός να ελαττώσουμε το βήμα ακόμη περισσότερο, στο Παράδειγμα 2, προκειμένου να επιτύχουμε ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια. Ωστόσο, κάθε επιπρόσθετος υπολογισμός όχι μόνον απαιτεί περαιτέρω υπολογιστικό χρόνο, αλλά —το σπουδαιότερο— εντείνει τη συσσώρευση σφαλμάτων κατά τη στρογγυλοποίηση, λόγω της προσεγγιστικής αναπαράστασης δεκαδικών αριθμών στη μνήμη του υπολογιστή.

Η ανάλυση σφαλμάτων και η διερεύνηση μεθόδων για τη μείωσή τους όταν εκτελούμε αριθμητικούς υπολογισμούς είναι ζήτημα ουσιώδες, αλλά παραπέμπει σε υψηλότερο γνωστικό επίπεδο από αυτό του παρόντος συγγράμματος. Υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι ακριβέστερες της μεθόδου Euler, όπως θα δείτε μελετώντας περαιτέρω τις διαφορικές εξισώσεις. Εμείς εδώ θα αναφερθούμε σε μια βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου Euler.



[−1, 2] επί [−2, 6]

Σχημα 6.20 Γραφική παράσταση της $y = 2e^x - 1$ σε ενιαίο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των προσεγγίσεων κατά Euler που δείχνονται στον Πίνακα 6.5. (Παράδειγμα 3)

Γραφικές λύσεις

Η μελέτη μιας γραφικής παράστασης είναι συνήθως εναργέστερος τρόπος κατανόησης της περιεχόμενης πληροφορίας, απ' ό,τι είναι η ανάγνωση ενός εκτεταμένου πίνακα τιμών. Αν απεικονίσουμε σε διάγραμμα διασποράς τα ζεύγη τιμών μιας αριθμητικής λύσεως, προκύπτει η λεγόμενη **γραφική λύση,** όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 3.

Παράδειγμα 3 Γραφική απεικόνιση των προσεγγίσεων Euler

Το Σχήμα 6.20 αποτελεί μια απεικόνιση της αριθμητικής λύσεως που παρατίθεται στον Πίνακα 6.5. Το σχήμα αυτό περιέχει δύο γραφήματα: την καμπύλη ακριβούς λύσεως και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων του πίνακα.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Carl Runge
(1856-1927)

Βελτιωμένη μέθοδος Euler

Μπορούμε να βελτιώσουμε τη μέθοδο του Euler παίρνοντας τον μέσο όρο δύο κλίσεων. Εκτιμούμε πρώτα το y_n όπως κάνουμε στην «παραδοσιακή» μέθοδο Euler, αλλά το συμβολίζουμε τώρα με z_n. Στο επόμενο στάδιο παίρνουμε τον μέσο όρο των $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ και $f(x_n, z_n)$ αντί του $f(x_{n-1}, y_{n-1})$. Έτσι, υπολογίζουμε την επόμενη προσέγγιση y_n χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$z_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx$$

$$y_n = y_{n-1} + \left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, z_n)}{2}\right] dx.$$

Παράδειγμα 4 Διερεύνηση της ακρίβειας της βελτιωμένης μεθόδου Euler

Εφαρμόστε τη βελτιωμένη μέθοδο Euler για να λύσετε το πρόβλημα

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

στο διάστημα $0 \le x \le 1$, με σημείο εκκίνησης $x_0 = 0$ και βήμα $dx = 0{,}1$. Συγκρίνετε τις προσεγγίσεις σας με τις τιμές της ακριβούς λύσεως $y = 2e^x - 1$.

Λύση Χρησιμοποιήσαμε ένα προγραμματιζόμενο κομπιουτεράκι για να παραγάγουμε τις προσεγγιστικές τιμές του Πίνακα 6.7. Η στήλη με τα σφάλματα προέκυψε με αφαίρεση των μη στρογγυλοποιημένων τιμών τις οποίες έδωσε η βελτιωμένη μέθοδος Euler από τις μη στρογγυλοποιημένες τιμές που βρήκαμε από την ακριβή λύση. Όλες οι τιμές του πίνακα έχουν στρογγυλοποιηθεί στα 4 δεκαδικά ψηφία.

Πίνακας 6.7 Βελτιωμένη λύση Euler της εξίσωσης $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, με βήμα $dx = 0{,}1$

x	y (βελτιωμένη Euler)	y (ακριβής)	Σφάλμα
0	1	1	0
0,1	1,21	1,2103	0,0003
0,2	1,4421	1,4428	0,0008
0,3	1,6985	1,6997	0,0013
0,4	1,9818	1,9836	0,0018
0,5	2,2949	2,2974	0,0025
0,6	2,6409	2,6442	0,0034
0,7	3,0231	3,0275	0,0044
0,8	3,4456	3,4511	0,0055
0,9	3,9124	3,9192	0,0068
1,0	4,4282	4,4366	0,0084

Βλέπουμε λοιπόν ότι, φθάνοντας στο $x = 1$ (μετά από 10 βήματα), το σχετικό σφάλμα είναι 0,19%.

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 6.5 και 6.7, βλέπουμε ότι η βελτιωμένη μέθοδος Euler είναι σαφώς ακριβέστερη από την απλή μέθοδο Euler, τουλάχιστον όσον αφορά το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$.

Εκθετικό πληθυσμιακό μοντέλο

Αυστηρά μιλώντας, ο αριθμός των ατόμων σε έναν πληθυσμό είναι ασυνεχής συνάρτηση του χρόνου εφόσον παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Ωστόσο, συνηθίζουμε να περιγράφουμε μαθηματικά έναν πληθυσμό με μια διαφορίσιμη συνάρτηση P η οποία αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού. Έτσι, υπάρχει κάποια σταθερά k, για την οποία θα ισχύει

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Σημειώστε ότι η ποσότητα

$$\frac{dP/dt}{P} = k \tag{1}$$

είναι σταθερή. Η ποσότητα αυτή καλείται **σχετικός ρυθμός αύξησης**. Όπως είδαμε στην Ενότητα 6.4, μπορούμε να παραστήσουμε τον πληθυσμό με το μοντέλο $P = P_0 e^{kt}$, όπου P_0 είναι η τιμή του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Στον Πίνακα 6.8 παραθέτουμε στοιχεία του παγκόσμιου πληθυσμού στο μέσον κάθε έτους, για το χρονικό διάστημα 1980 έως 1989. Παίρνοντας $dt = 1$ και $dP \approx \Delta P$, βλέπουμε από τον πίνακα ότι ο σχετικός ρυθμός αύξησης στην Εξίσωση (1) είναι περίπου σταθερός και ίσος με 0,017.

Πίνακας 6.8 Παγκόσμιος πληθυσμός (στο μέσον κάθε έτους)

Έτος	Πληθυσμός (εκατομμύρια)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0{,}0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0{,}177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0{,}0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0{,}171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0{,}0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0{,}0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0{,}0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0{,}0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0{,}0167$
1989	5190	

Πηγή: U.S. Bureau of the Census (Sept., 1999): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.

Παράδειγμα 5 Πρόβλεψη παγκόσμιου πληθυσμού

Αφού βρείτε ένα μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα αρχικών τιμών του παγκόσμιου πληθυσμού, χρησιμοποιήστε το μοντέλο σας για να προβλέψετε τον πληθυσμό στο μέσον του έτους 1999. Παραστήστε γραφικά το μοντέλο σας και τα αριθμητικά δεδομένα.

Λύση Έστω ότι το $t = 0$ αντιστοιχεί στο 1980, το $t = 1$ στο 1981, κ.ο.κ. Το έτος 1999 αντιστοιχεί τότε στο $t = 19$. Αν προσεγγίσουμε τα πηλίκα του Πίνακα 6.8 με $k = 0{,}017$, προκύπτει το πρόβλημα αρχικών τιμών

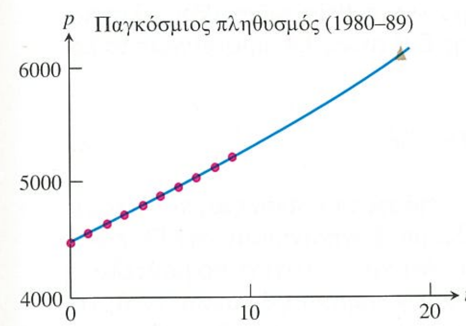
$$\text{Διαφορική εξίσωση:} \quad \frac{dP}{dt} = 0{,}017\,P$$

$$\text{Αρχική συνθήκη:} \quad P(0) = 4454.$$

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι η συνάρτηση πληθυσμού $P = 4454e^{0{,}017t}$. Το μέσον του έτους 1999 παριστάνεται από την τιμή $t = 19$, οπότε

$$P(19) \approx 6152.$$

Στο Σχήμα 6.21 φαίνεται το πληθυσμιακό μοντέλο μαζί με ένα διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.



Σχημα 6.21 Η λύση $P = 4454e^{0{,}017t}$ παίρνει την τιμή 6152,16 για $t = 19$. (Παράδειγμα 5)

Ερμηνεία

Το μοντέλο αυτό προβλέπει ότι ο παγκόσμιος πληθυσμός το έτος 1999 θα ήταν 6152 εκατομμύρια, δηλαδή 6,15 δισεκατομμύρια, τιμή που υπερβαίνει τον πραγματικό πληθυσμό του έτους αυτού, που ήταν 5996 εκατομμύρια (όπως τον δίδει η στατιστική υπηρεσία των ΗΠΑ, U.S. Bureau of the Census). Στο παράδειγμα που ακολουθεί, εξετάζουμε πιο πρόσφατα δεδομένα για να δούμε αν προκύπτει μεταβολή στον ρυθμό αύξησης.

Λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο

Το εκθετικό μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης προϋποθέτει απεριόριστη αύξηση και θεωρεί σταθερό τον σχετικό ρυθμό αύξησης (Εξίσωση (1)). Η υπόθεση αυτή μπορεί να είναι αληθοφανής για τα έτη 1980 έως 1989, αλλά ας δούμε και πιο πρόσφατα δεδομένα. Ο Πίνακας 6.9 δείχνει τον παγκόσμιο πληθυσμό για τα έτη 1990 έως 1999.

Πίνακας 6.9 Παγκόσμιος πληθυσμός (πρόσφατα δεδομένα)

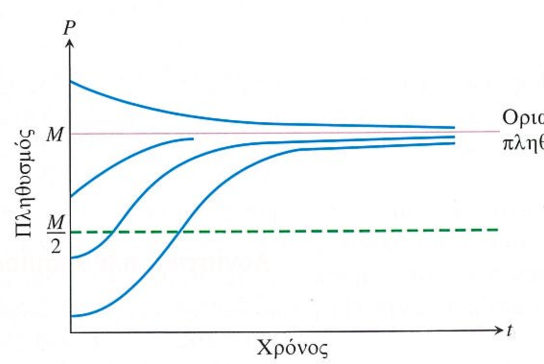
Έτος	Πληθυσμός (εκατομμύρια)	$\Delta P/P$
1990	5277	$82/5277 \approx 0{,}0155$
1991	5359	$83/5359 \approx 0{,}0155$
1992	5442	$81/5442 \approx 0{,}0149$
1993	5523	$80/5523 \approx 0{,}0145$
1994	5603	$79/5603 \approx 0{,}0141$
1995	5682	$79/5682 \approx 0{,}0139$
1996	5761	$79/5761 \approx 0{,}0137$
1997	5840	$79/5840 \approx 0{,}0135$
1998	5919	$77/5919 \approx 0{,}0130$
1999	5996	

Πηγή: U.S. Bureau of the Census (Sept., 1999): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.

Από τους Πίνακες 6.8 και 6.9 βλέπουμε ότι ο σχετικός ρυθμός αύξησης είναι θετικός, αλλά μειώνεται καθώς αυξάνεται ο πληθυσμός, λόγω περιβαλλοντικών, οικονομικών, και άλλων παραγόντων. Κατά μέσον όρο, ο ρυθμός αύξησης μειώνεται κατά περίπου 0,00036 για κάθε έτος μεταξύ 1990 και 1999. Με άλλα λόγια, το γράφημα του k στην Εξίσωση (1) μοιάζει περισσότερο με την ευθεία αρνητικής κλίσεως $-r = -0{,}00036$. Στο Παράδειγμα 5 της Ενότητας 3.4, προτείναμε το **λογιστικό μοντέλο αύξησης**

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P, \qquad (2)$$

όπου M είναι ο μέγιστος πληθυσμός, ή **φέρουσα ικανότητα,** που μπορεί να θρέψει το περιβάλλον μακροπρόθεσμα. Συγκρίνοντας την Εξίσωση (2) με το εκθετικό μοντέλο, βλέπουμε ότι για το λογιστικό μοντέλο, η ποσότητα $k = r(M - P)$ είναι όντως μια γραμμικά φθίνουσα συνάρτηση του πληθυσμού. Οι γραφικές καμπύλες λύσεως για το λογιστικό μοντέλο (2) παρήχθησαν στην Ενότητα 3.4 και απεικονίζονται στο Σχήμα 6.22. Όπως προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις, για $P < M$, ο πληθυσμός αυξάνεται τείνοντας προς την τιμή M· για $P > M$, ο ρυθμός αύξησης είναι αρνητικός (εφόσον $r > 0$, $M > 0$) και ο πληθυσμός φθίνει.



CD-ROM Δικτυότοπος

Σχήμα 6.22 Καμπύλες λύσεων του λογιστικού πληθυσμιακού μοντέλου $dP/dt = r(M - P)P$.

Παράδειγμα 6 Μοντέλο για τον πληθυσμό αρκούδων

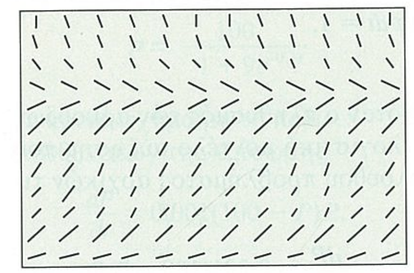
Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποιος εθνικός δρυμός μπορεί να θρέψει έναν πληθυσμό το πολύ 100 αρκούδων. Προς το παρόν ζουν 10 αρκούδες στον δρυμό. Περιγράφουμε μαθηματικά τον πληθυσμό μέσω μιας λογιστικής διαφορικής εξίσωσης με $r = 0{,}001$.

(α) Σχεδιάστε και περιγράψτε ένα πεδίο διευθύνσεων για τη διαφορική εξίσωση.

(β) Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με βήμα $dt = 1$ για να εκτιμήσετε τον πληθυσμό μετά από 20 έτη.

(γ) Βρείτε μια αναλυτική λύση $P(t)$ λογιστικής αύξησης του πληθυσμού και παραστήστε την γραφικά.

(δ) Πότε θα φτάσει ο πληθυσμός των αρκούδων τα 50 άτομα;



[0, 150] επί [0, 150]

Σχήμα 6.23 Πεδίο διευθύνσεων της λογιστικής διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$. (Παράδειγμα 6)

Λύση

(α) *Πεδίο διευθύνσεων.* Η φέρουσα ικανότητα είναι 100, οπότε $M = 100$. Ζητούμε μια λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης.

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$$

Το Σχήμα 6.23 δείχνει ένα πεδίο διευθύνσεων της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Απ' ό,τι φαίνεται, υπάρχει μια οριζόντια ασύμπτωτη για $P = 100$, προς την οποία τείνουν οι καμπύλες λύσεων.

(β) *Μέθοδος Euler.* Με βήμα $dt = 1$, $t_0 = 0$, $P(0) = 10$, και

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P) = 0{,}001(100 - P)P,$$

εξάγουμε τις προσεγγίσεις του Πίνακα 6.10, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο

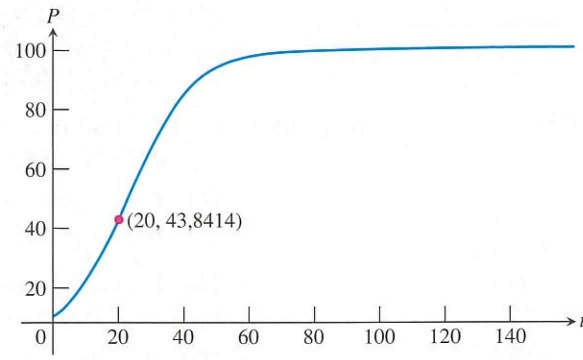
$$P_n = P_{n-1} + 0{,}001(100 - P_{n-1})P_{n-1}.$$

Πίνακας 6.10 Λύση Euler της εξίσωσης $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, βήμα $dt = 1$

t	P (Euler)	t	P (Euler)
0	10		
1	10,9	11	24,3629
2	11,8712	12	26,2056
3	12,9174	13	28,1395
4	14,0423	14	30,1616
5	15,2493	15	32,2680
6	16,5417	16	34,4536
7	17,9222	17	36,7119
8	19,3933	18	39,0353
9	20,9565	19	41,4151
10	22,6130	20	43,8414

Άρα μετά από 20 χρόνια θα υπάρχουν 44 αρκούδες. Στο Σχήμα 6.24 παρατίθεται ένα γράφημα της προσέγγισης Euler στο διάστημα $0 \le t$

≤ 150 με βήμα $dt = 1$. Το γράφημα αυτό μοιάζει με μια από τις χαμηλότερες καμπύλες του Σχήματος 6.22.



Σχημα 6.24 Προσεγγίσεις Euler της λύσεως της εξίσωσης $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, με βήμα $dt = 1$.

(γ) *Αναλυτική επίλυση.* Έστω $t = 0$ όταν ο πληθυσμός των αρκούδων είναι 10, οπότε $P(0) = 10$. Το λογιστικό μοντέλο αύξησης που ζητούμε είναι η λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών.

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$

Αρχική συνθήκη: $P(0) = 10$

Για να προετοιμάσουμε την ολοκλήρωση, ξαναγράφουμε τη διαφορική εξίσωση υπό τη μορφή

$$\frac{1}{P(100-P)}\frac{dP}{dt} = 0{,}001$$

Το κλάσμα $1/(P(100 - P))$ μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{1}{P(100-P)} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100-P}\right).$$

(Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε μια γενική μέθοδο χωρισμού σε μερικά κλάσματα.) Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη διαφορική εξίσωση και πολλαπλασιάζοντας κάθε μέλος με 100, παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100-P}\right)\frac{dP}{dt} = 0{,}1$$

$$\ln|P| - \ln|100-P| = 0{,}1\,t + C \qquad \text{Ολοκλήρωση ως προς } t.$$

$$\ln\frac{P}{100-P} = 0{,}1\,t + C$$

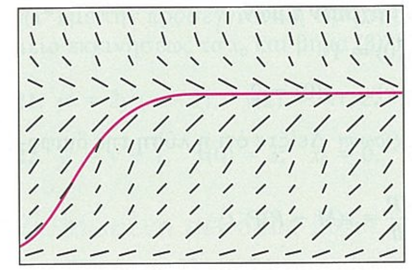
$$\ln\frac{100-P}{P} = -0{,}1\,t - C \qquad \ln\frac{a}{b} = -\ln\frac{b}{a}$$

$$\frac{100-P}{P} = e^{-0{,}1\,t - C}$$

$$\frac{100-P}{P} = (\pm e^{-C})\,e^{-0{,}1t} \qquad \text{Εκθετικό κάθε μέλους.}$$

$$\frac{100}{P} - 1 = Ae^{-0{,}1t} \qquad \text{Θέτουμε } A = \pm e^{-c}.$$

$$P = \frac{100}{1 + Ae^{-0{,}1t}}. \qquad \text{Λύνουμε ως προς } P.$$



[0, 150] επί [0, 150]

Σχημα 6.25 Η γραφική παράσταση της

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-0{,}1t}}$$

σε κοινό σχήμα με το πεδίο διευθύνσεων της εξίσωσης

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P.$$

(Παράδειγμα 6)

Βρήκαμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Για $t = 0$, $P = 10$, οπότε

$$10 = \frac{100}{1 + Ae^0}$$

$$1 + A = 10$$

$$A = 9.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο λογιστικό μοντέλο είναι

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-0{,}1t}}.$$

Στο Σχήμα 6.25, η γραφική παράσταση του μοντέλου απεικονίζεται μαζί με το πεδίο διευθύνσεων του Σχήματος 6.23.

(δ) *Ερμηνεία.* Πότε θα έχει φτάσει τα 50 άτομα ο πληθυσμός των αρκούδων; Σύμφωνα με το μοντέλο μας,

$$50 = \frac{100}{1 + 9e^{-0{,}1t}}$$

$$1 + 9e^{-0{,}1t} = 2$$

$$e^{-0{,}1t} = \frac{1}{9}$$

$$e^{0{,}1t} = 9$$

$$t = \frac{\ln 9}{0{,}1} \approx 22 \text{ έτη.}$$

Η λύση της γενικής λογιστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

προκύπτει με τρόπο ανάλογο με εκείνον στο Παράδειγμα 6. Στην Άσκηση 14, καλείστε να δείξετε ότι η λύση αυτή είναι

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}}.$$

Η τιμή του A προσδιορίζεται από την εκάστοτε αρχική συνθήκη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.6

Υπολογισμός προσεγγίσεων Euler

Στις Ασκήσεις 1-4, εφαρμόστε τη μέθοδο Euler για να υπολογίσετε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις στο εκάστοτε πρόβλημα αρχικών τιμών για το καθορισμένο βήμα. Υπολογίστε την ακριβή λύση και διερευνήστε την ακρίβεια των προσεγγίσεών σας. Στρογγυλοποιήστε το αποτέλεσμά σας σε 4 δεκαδικά ψηφία.

1. $y' = x(1 - y)$, $y(1) = 0$, $dx = 0{,}2$
2. $y' = 1 - \dfrac{y}{x}$, $y(2) = -1$, $dx = 0{,}5$
3. $y' = 2xy + 2y$, $y(0) = 3$, $dx = 0{,}2$
4. $y' = y^2(1 + 2x)$, $y(-1) = 1$, $dx = 0{,}5$
5. Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με $dx = 0{,}2$ για να εκτιμήσετε το $y(1)$ αν $y' = y$ και $y(0) = 1$. Ποια είναι η ακριβής τιμή του $y(1)$;
6. Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με $dx = 0{,}2$ για να εκτιμήσετε το $y(2)$ αν $y' = y/x$ και $y(1) = 2$. Ποια είναι η ακριβής τιμή του $y(2)$;

Βελτιωμένη μέθοδος Euler

Στις Ασκήσεις 7 και 8, εφαρμόστε τη βελτιωμένη μέθοδο Euler για να υπολογίσετε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις στο εκάστοτε πρόβλημα αρχικών τιμών. Συγκρίνετε τις προσεγγίσεις σας με τις τιμές της ακριβούς λύσεως.

7. $y' = 2y(x + 1)$, $y(0) = 3$, $dx = 0{,}2$
   (Δείτε την Άσκηση 3 για την ακριβή λύση.)
8. $y' = x(1 - y)$, $y(1) = 0$, $dx = 0{,}2$
   (Δείτε την Άσκηση 1 για την ακριβή λύση.)

9. *Ιχθυοπληθυσμός* Μια δεξαμενή ιχθυοκαλλιέργειας χωρητικότητας 2000 L δεν μπορεί να θρέψει περισσότερα από 150 ψάρια κάποιου είδους. Έξι τέτοια ψάρια εισάγονται στη δεξαμενή. Υποθέστε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0015\,(150 - P)P,$$

όπου ο χρόνος t μετρείται σε εβδομάδες.

(α) Βρείτε έναν τύπο για τον ιχθυοπληθυσμό συναρτήσει του t.

(β) Πόσο διάστημα απαιτείται για να φτάσει ο πληθυσμός τα 100 άτομα; Τα 125 άτομα;

10. *Πληθυσμός γορίλλων* Ένα καταφύγιο άγριων ζώων δεν μπορεί να θρέψει περισσότερους από 250 γορίλλες. Το έτος 1970 γνωρίζαμε ότι στο καταφύγιο υπήρχαν 28 γορίλλες. Υποθέστε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους είναι

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004\,(250 - P)P,$$

όπου ο χρόνος t μετρείται σε έτη.

(α) Βρείτε έναν τύπο για τον πληθυσμό των γορίλλων συναρτήσει του t.

(β) Πόσο διάστημα απαιτείται για να φτάσει ο πληθυσμός γορίλλων τη φέρουσα ικανότητα του καταφυγίου;

11. *Ιχθυότοπος ιππόγλωσσου στον Ειρηνικό Ωκεανό* Ο ιχθυοπληθυσμός ιππόγλωσσου στον Ειρηνικό Ωκεανό έχει περιγραφεί από τη λογιστική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = r(M - y)y$$

όπου $y(t)$ είναι το συνολικό βάρος του ιχθυοπληθυσμού σε kg τη χρονική στιγμή t (σε έτη). Η φέρουσα ικανότητα του ιχθυοτόπου έχει εκτιμηθεί ότι είναι $M = 8 \times 10^7$ kg, και $r = 0{,}08875 \times 10^{-7}$ ανά έτος.

(α) Αν $y(0) = 1{,}6 \times 10^7$ kg, ποιο είναι το συνολικό βάρος του ιχθυοπληθυσμού μετά από 1 έτος;

(β) Πότε θα ανέλθει το συνολικό βάρος του ιχθυοπληθυσμού στην τιμή 4×10^7 kg;

12. *Τροποποιημένο λογιστικό μοντέλο* Ας υποθέσουμε ότι η λογιστική διαφορική εξίσωση στο Παράδειγμα 6 τροποποιείται στη μορφή

CD-ROM Δικτυότοπος

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001\,(100 - P)P - c$$

για κάποια σταθερά c.

(α) *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε το νόημα της σταθεράς c. Ποιες τιμές της c σας φαίνονται ρεαλιστικές για έναν πληθυσμό αρκούδων;

T **(β)** Σχεδιάστε ένα πεδίο διευθύνσεων της διαφορικής εξίσωσης για $c = 1$. Ποιες είναι οι λύσεις ισορροπίας (Ενότητα 3.4);

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε μερικές καμπύλες λύσεων στο πεδίο διευθύνσεων που φτιάξατε στο ερώτημα (α). Εξηγήστε τι θα συμβεί στον πληθυσμό των αρκούδων για διάφορες αρχικές τιμές του πληθυσμού.

13. *Ακριβείς λύσεις* Βρείτε τις ακριβείς λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων αρχικών τιμών.

(α) $y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$

(β) $y' = 0{,}5(400 - y)y, \quad y(0) = 2$

14. *Λογιστική διαφορική εξίσωση* Δείξτε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

είναι

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}},$$

όπου A είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

15. *Καταστροφική λύση* Έστω k και P_0 θετικές σταθερές.

(α) Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \qquad P(0) = P_0$$

T **(β)** Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της λύσης στο ερώτημα (α) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη σε κάποια θετική τιμή του t. Ποια είναι η τιμή αυτή του t;

16. *Αφανιζόμενοι πληθυσμοί* Στην Άσκηση 14, Ενότητα 3.4, παρουσιάσαμε το πληθυσμιακό μοντέλο

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)(P - m),$$

όπου $r > 0$, M είναι ο μέγιστος πληθυσμός, και m είναι ο ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο το συγκεκριμένο είδος οδηγείται σε εξαφάνιση.

(α) Έστω $m = 100$, και $M = 1200$, και ας υποθέσουμε ότι $m < P < M$. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\left[\frac{1}{1200 - P} + \frac{1}{P - 100}\right]\frac{dP}{dt} = 1100r.$$

Εφαρμόζοντας μια διαδικασία παρόμοια με αυτήν του Παραδείγματος 6, λύστε αυτή τη διαφορική εξίσωση.

(β) Βρείτε τη λύση στο ερώτημα (α) που ικανοποιεί τη συνθήκη $P(0) = 300$.

(γ) Λύστε τη διαφορική εξίσωση υπό τον περιορισμό $m < P < M$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Μέθοδος Euler

Στις Ασκήσεις 17-20, εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με το εκάστοτε υποδεικνυόμενο βήμα για να εκτιμήσετε την τιμή της λύσεως στο σημείο x^* που δίδεται. Βρείτε την τιμή της ακριβούς λύσεως στο x^*.

17. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0{,}1, \quad x^* = 1$

18. $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0{,}5, \quad x^* = 2$

19. $y' = y^2/\sqrt{x}, \quad y(1) = -1, \quad dx = 0{,}5, \quad x^* = 5$

20. $y' = y - e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad dx = 1/3, \quad x^* = 2$

Στις Ασκήσεις 21 και 22, **(α)** βρείτε την ακριβή λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών. Κατόπιν συγκρίνετε την τιμή $y(x^*)$ με την προσεγγιστική τιμή της μεθόδου Euler με σημείο εκκινήσεως το x_0 και βήμα **(β)** 0,2, **(γ)** 0,1, και **(δ)** 0,05.

21. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$

22. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$

Βελτιωμένη μέθοδος Euler

Στις Ασκήσεις 23 και 24, συγκρίνετε την τιμή $y(x^*)$ με την προσεγγιστική τιμή της βελτιωμένης μεθόδου Euler με σημείο εκκινήσεως το x_0 και βήμα

(α) 0,2

(β) 0,1

(γ) 0,05

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Περιγράψτε τι επίπτωση έχει στο σφάλμα η μείωση του βήματος.

23. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$

(Δείτε την Άσκηση 21 για την ακριβή λύση.)

24. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$

(Δείτε την Άσκηση 22 για την ακριβή λύση.)

Γραφική διερεύνηση διαφορικών εξισώσεων

Με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας διερευνήστε γραφικά καθεμία από τις διαφορικές εξισώσεις στις Ασκήσεις 25-28. Εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα για να βοηθηθείτε στη διερεύνηση.

(α) Σχεδιάστε ένα πεδίο διευθύνσεων για τη διαφορική εξίσωση στο περιοχή του επιπέδου xy που δίδεται.

(β) Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας την εφαρμογή επίλυσης διαφορικών εξισώσεων («DE solver») στο υπολογιστικό σας σύστημα.

(γ) Παραστήστε γραφικά, σε ενιαίο σχήμα με το πεδίο διευθύνσεων, τις λύσεις της εξίσωσης για τις τιμές της αυθαίρετης σταθεράς $C = -2, -1, 0, 1, 2$.

(δ) Βρείτε και παραστήστε γραφικά τη λύση που ικανοποιεί τη δοθείσα αρχική συνθήκη στο διάστημα $[0, b]$.

(ε) Βρείτε την αριθμητική προσέγγιση Euler της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών με 4 υποδιαστήματα στο διάστημα x και σχεδιάστε την προσέγγιση Euler σε ενιαίο σχήμα με το γράφημα του ερωτήματος (δ).

(στ) Επαναλάβετε το ερώτημα (ε) για 8, 16, και 32 υποδιαστήματα. Σχεδιάστε τις τρεις αυτές προσεγγίσεις Euler σε ενιαίο σχήμα με το γράφημα του ερωτήματος (ε).

(ζ) Βρείτε το σφάλμα (y (ακριβές) $-$ y (Euler)) στο καθορισμένο σημείο $x = b$ για καθεμία προσέγγιση Euler που κάνατε. Αναλύστε τη βελτίωση του ποσοστιαίου σφάλματος.

25. $y' = x + y, \; y(0) = -7/10 \cdot\; -4 \le x \le 4, \; -4 \le y \le 4 \cdot\; b = 1$

26. $y' = -x/y, \; y(0) = 2 \cdot\; -3 \le x \le 3, \; -3 \le y \le 3 \cdot\; b = 2$

27. *Μια λογιστική εξίσωση* $y' = y(2 - y), \; y(0) = 1/2 \cdot\; 0 \le x \le 4, \; 0 \le y \le 3 \cdot\; b = 3$

28. $y' = (\sin x)(\sin y), \; y(0) = 2 \cdot\; -6 \le x \le 6, \; -6 \le y \le 6 \cdot\; b = 3\pi/2$

Οι Ασκήσεις 29 και 30 δεν έχουν αναλυτική λύση που να μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων. Με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας διερενήστε γραφικά καθεμία από τις διαφορικές εξισώσεις, εκτελώντας όσο περισσότερα από τα βήματα (α) έως (ζ) σας είναι δυνατόν.

29. $y' = \cos\,(2x - y), \; y(0) = 2 \cdot\; 0 \le x \le 5, \; 0 \le y \le 5 \cdot\; y(2)$ CD-ROM Δικτυότοπος

30. *Εξίσωση Gompertz* $y' = y(1/2 - \ln y), \; y(0) = 1/3 \cdot\; 0 \le x \le 4, \; 0 \le y \le 3 \cdot \quad y(3)$ CD-ROM Δικτυότοπος

31. Με ένα πρόγραμα υπολογιστικής άλγεβρας βρείτε τις λύσεις των $y' + y = f(x)$ με αρχική συνθήκη την $y(0) = 0$ αν η $f(x)$ ισούται με CD-ROM Δικτυότοπος

(α) $2x$

(β) $\sin 2x$

(γ) $3e^{x/2}$

(δ) $2e^{-x/2} \cos 2x$.

Σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα και τις τέσσερις λύσεις στο διάστημα $-2 \le x \le 6$, ώστε να μπορέσετε να τις συγκρίνετε.

32. **(α)** Με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας σχεδιάστε το πεδίο διευθύνσεων της διαφορικής εξίσωσης CD-ROM Δικτυότοπος

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

στην περιοχή $-3 \le x \le 3$ και $-3 \le y \le 3$.

(β) Χωρίστε τις μεταβλητές και χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα υπολογιστικής ολοκλήρωσης για να βρείτε τη γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

(γ) Με ένα πρόγραμμα υπολογιστικής σχεδίασης πεπλεγμένων συναρτήσεων, παραστήστε γραφικά τις καμπύλες λύσεων για τις τιμές της αυθαίρετης σταθεράς $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

(δ) Βρείτε και παραστήστε γραφικά τη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = -1$.

6.7 Υπερβολικές συναρτήσεις

Ορισμοί και ταυτότητες • Παράγωγοι και ολοκληρώματα • Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις • Χρήσιμες ταυτότητες • Παράγωγοι και ολοκληρώματα

Κάθε συνάρτηση f που ορίζεται σε διάστημα συμμετρικό ως προς την αρχή μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως το άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα,

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{άρτιο μέρος}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{περιττό μέρος}}.$$

Αν γράψουμε το e^x με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{άρτιο μέρος}} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{περιττό μέρος}}.$$

Τα άρτια και περιττά μέρη του e^x, που καλούνται υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο του x, αντίστοιχα, έχουν αρκετές εφαρμογές. Περιγράφουν την κίνηση των κυμάτων σε ελαστικά στερεά, το σχήμα ηλεκτρικών καλωδίων που κρέμονται, και τη θερμοκρασιακή κατανομή σε μεταλλικά πτερύγια. Η κεντρική γραμμή της αψίδας "Gateway Arch to the West" στην πόλη St. Louis δεν είναι παρά μια σταθμισμένη καμπύλη υπερβολικού συνημιτόνου. Στην παρούσα ενότητα, θα κάνουμε μια συνοπτική εισαγωγή στις υπερβολικές συναρτήσεις.

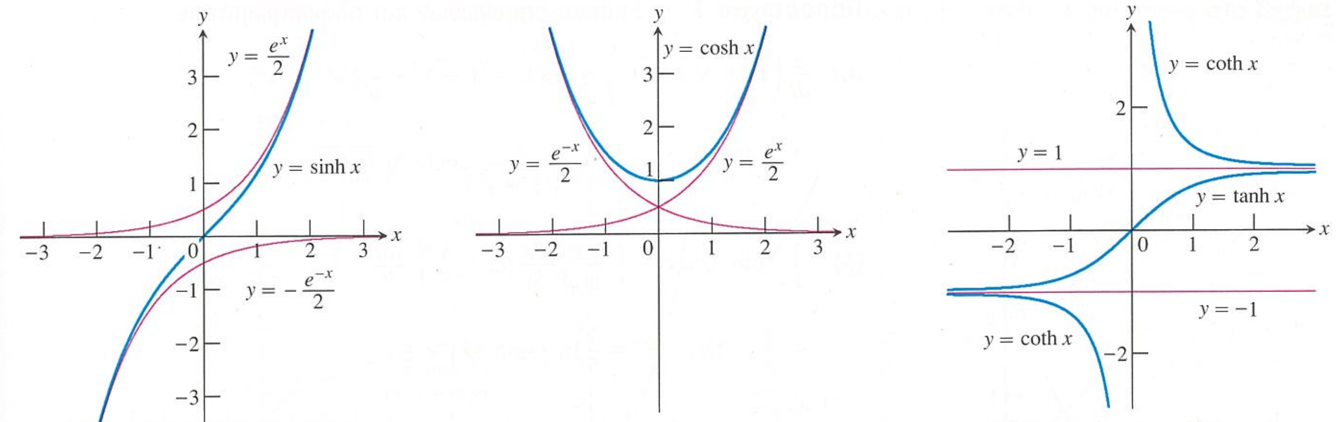
Ορισμοί και ταυτότητες

Οι συναρτήσεις του υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου ορίζονται από τις δύο πρώτες εξισώσεις του Πίνακα 6.11. Ο πίνακας παραθέτει επίσης τους ορισμούς της υπερβολικής εφαπτομένης, της συνεφαπτομένης, της τέμνουσας και της συντέμνουσας. Καθώς θα δούμε, οι υπερβολικές συναρτήσεις εμφανίζουν κάποιες ομοιότητες με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις από τις οποίες αντλούν την ονομασία τους. (Δείτε επίσης την Άσκηση 84.)

Πίνακας 6.11 Οι έξι κύριες υπερβολικές συναρτήσεις (δείτε το Σχήμα 6.26 για τις γραφικές παραστάσεις τους)

Υπερβολικό συνημίτονο του x:	$\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
Υπερβολικό ημίτονο του x:	$\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
Υπερβολική εφαπτομένη:	$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
Υπερβολική συνεφαπτομένη:	$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
Υπερβολική τέμνουσα:	$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$
Υπερβολική συντέμνουσα:	$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

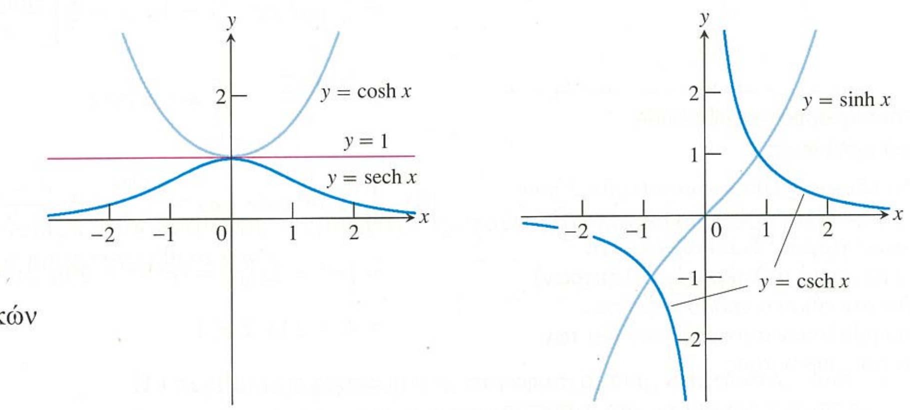
Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν τις ταυτότητες του Πίνακα 6.12. Αν εξαιρέσουμε τις διαφορές στα πρόσημα, πρόκειται για



(α) Το υπερβολικό ημίτονο και τα εκθετικά που το απαρτίζουν.

(β) Το υπερβολικό συνημίτονο και τα εκθετικά που το απαρτίζουν.

(γ) Γραφικές παραστάσεις των $y = \tanh x$ και $y = \coth x = 1/\tanh x$.



(δ) Γραφικές παραστάσεις των $y = \cosh x$ και $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$.

(ε) Γραφικές παραστάσεις των $y = \sinh x$ και $y = \operatorname{csch} x = 1/\sinh x$.

Σχήμα 6.26 Οι γραφικές παραστάσεις των έξι υπερβολικών συναρτήσεων.

ταυτότητες που μας είναι ήδη γνωστές από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Παράγωγοι και ολοκληρώματα

Οι έξι υπερβολικές συναρτήσεις, όντας ρητοί συνδυασμοί των διαφορίσιμων συναρτήσεων e^x και e^{-x}, έχουν παράγωγο σε κάθε σημείο ορισμού τους (Πίνακας 6.13). Και πάλι υπάρχουν ομοιότητες με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι τύποι παραγώγων του Πίνακα 6.13 συνεπάγονται τους τύπους ολοκλήρωσης του Πίνακα 6.14.

Πίνακας 6.12 Ταυτότητες υπερβολικών συναρτήσεων

$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
$\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$
$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$

Πίνακας 6.13 Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων

$\dfrac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u\tanh u\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u\coth u\dfrac{du}{dx}$

Πίνακας 6.14 Τύποι ολοκλήρωσης υπερβολικών συναρτήσεων

$\int \sinh u\,du = \cosh u + C$
$\int \cosh u\,du = \sinh u + C$
$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$
$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$
$\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$
$\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Παράδειγμα 1 Εύρεση παραγώγων και ολοκληρωμάτων

(α) $\frac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2})$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

(β) $\int \coth 5x\,dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u}$ $\qquad u = \sinh 5x,\ du = 5\cosh 5x\,dx$

$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$$

(γ) $\int_0^1 \sinh^2 x\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}\,dx$ $\qquad$ Πίνακας 6.12

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(\cosh 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2x}{2} - x\right]_0^1$$

$$= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}40672$$

(δ) $\int_0^{\ln 2} 4e^x\sinh x\,dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\,dx$

$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$

$$= 4 - 2\ln 2 - 1$$

$$\approx 1{,}6137$$

Υπολογισμός υπερβολικών συναρτήσεων

Τα περισσότερα κομπιουτεράκια που προορίζονται για επιστημονικούς υπολογισμούς διαθέτουν ειδικά πλήκτρα (ή αλληλουχίες πλήκτρων) για τον εύκολο υπολογισμό των υπερβολικών συναρτήσεων και των αντίστροφών τους.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Οι αντίστροφες συναρτήσεις των έξι υπερβολικών συναρτήσεων χρησιμεύουν στην ολοκλήρωση. Εφόσον $d(\sinh x)/dx = \cosh x > 0$, το υπερβολικό ημίτονο είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x. Συμβολίζουμε την αντίστροφή της με

$$y = \sinh^{-1} x.$$

Για κάθε x στο διάστημα $-\infty < x < \infty$, η τιμή του $y = \sinh^{-1} x$ είναι ο αριθμός του οποίου το υπερβολικό ημίτονο ισούται με x. Οι γραφικές παραστάσεις των $y = \sinh x$ και $y = \sinh^{-1} x$ απεικονίζονται στο Σχήμα 6.27α.

Η συνάρτηση $y = \cosh x$ δεν είναι ένα-προς-ένα, όπως μπορούμε να δούμε από το γράφημα του Σχήματος 6.26β. Η περιορισμός $y = \cosh x$, $x \geq 0$, ωστόσο, είναι ένα-προς-ένα και άρα διαθέτει αντίστροφη, η οποία συμβολίζεται ως

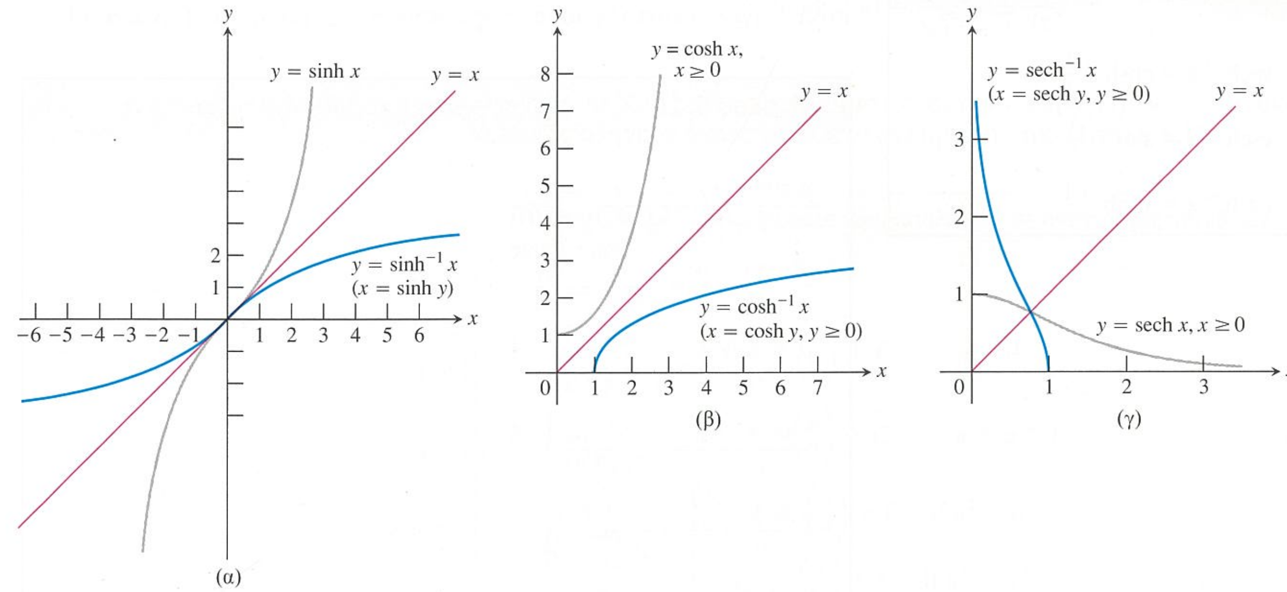
$$y = \cosh^{-1} x.$$

Για κάθε $x \geq 1$, $y = \cosh^{-1} x$ είναι ο αριθμός στο διάστημα $0 \leq y < \infty$ του οποίου το υπερβολικό συνημίτονο ισούται με x. Τα γραφήματα των $y = \cosh x$, $x \geq 0$, και $y = \cosh^{-1} x$ φαίνονται στο Σχήμα 6.27β.

Όπως συμβαίνει με τη συνάρτηση $y = \cosh x$, έτσι και η $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ δεν είναι ένα-προς-ένα, αλλά αν την περιορίσουμε σε μη αρνητικές τιμές του x αποκτά αντίστροφη, που συμβολίζεται ως

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

Για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$, $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός του οποίου η υπερβολική τέμνουσα ισούται με x. Οι γραφικές παραστάσεις των $y = \operatorname{sech} x$, $x \geq 0$, και $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ φαίνονται στο Σχήμα 6.27γ.

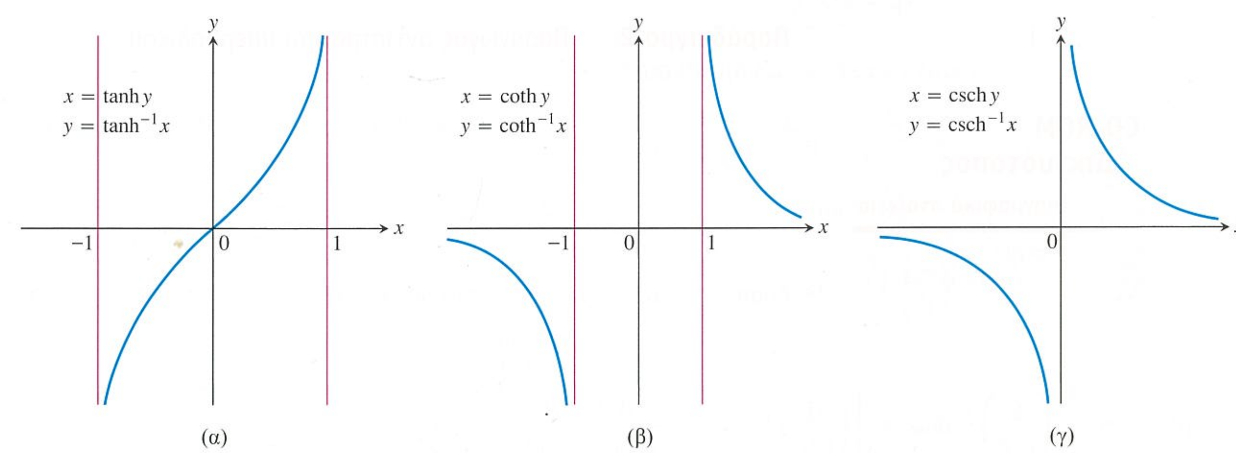


ΣΧΗΜΑ 6.27 Οι γραφικές παραστάσεις του αντίστροφου υπερβολικού ημιτόνου, συνημιτόνου, και τέμνουσας του x. Προσέξτε τη συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.

Η υπερβολική εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, και συντέμνουσα είναι ένα-προς-ένα στα πεδία ορισμού τους και συνεπώς έχουν αντίστροφες, που συμβολίζονται αντίστοιχα ως

$$y = \tanh^{-1} x, \qquad y = \coth^{-1} x, \qquad y = \operatorname{csch}^{-1} x.$$

Οι συναρτήσεις αυτές αναπαρίστανται γραφικά στο Σχήμα 6.28.



ΣΧΗΜΑ 6.28 Γραφικές παραστάσεις της αντίστροφης υπερβολικής εφαπτομένης, συνεφαπτομένης, και συντέμνουσας του x.

Χρήσιμες ταυτότητες

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες του Πίνακα 6.15 για να υπολογίσουμε τις τιμές των $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$, και $\coth^{-1} x$ σε κομπιουτεράκια που έχουν πλήκτρα μόνο για τον υπολογισμό των $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$, και $\tanh^{-1} x$.

Πίνακας 6.15 Ταυτότητες αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$$

Παράγωγοι και ολοκληρώματα

Η κυριότερη εφαρμογή των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων είναι ότι διευκολύνει τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν αν αντιστρέψουμε τους τύπους παραγώγων του Πίνακα 6.16.

Πίνακας 6.16 Παράγωγοι αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

Οι περιορισμοί $|u| < 1$ και $|u| > 1$ στους τύπους παραγώγων των $\tanh^{-1} u$ και $\coth^{-1} u$ προκύπτουν από τους φυσικούς περιορισμούς στις τιμές των συναρτήσεων αυτών. (Δείτε τα Σχήματα 6.28α και β.) Ο διαχωρισμός μεταξύ των περιπτώσεων $|u| < 1$ και $|u| > 1$ αποκτά σημασία κατά τη μετατροπή τύπων παραγώγων σε τύπους ολοκλήρωσης. Αν $|u| < 1$, τότε το ολοκλήρωμα του $1/(1-u^2)$ ισούται με $\tanh^{-1} u + C$. Αν $|u| > 1$, το ολοκλήρωμα ισούται με $\coth^{-1} u + C$.

Παράδειγμα 2 Παράγωγος αντίστροφου υπερβολικού συνημιτόνου

Δείξτε ότι αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x με τιμές μεγαλύτερες του 1, τότε

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

Λύση Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο του $y = \cosh^{-1} x$ για $x > 1$:

$$y = \cosh^{-1} x$$

$$x = \cosh y \qquad \text{Ισοδύναμη εξίσωση}$$

$$1 = \sinh y \frac{dy}{dx} \qquad \text{Παραγώγιση ως προς } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \qquad \text{Εφόσον } x > 1,\ y > 0 \text{ και } \sinh y > 0.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \qquad \cosh y = x$$

Δηλαδή,

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Sonya Kovalevsky
(1850-1891)

Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης μας δίνει το τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις, οι τύποι παραγώγων του Πίνακα 6.16 μας οδηγούν στους τύπους ολοκλήρωσης του Πίνακα 6.17.

Πίνακας 6.17 Ολοκληρώματα που καταλήγουν σε αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$$

2. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$$

3. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{if } u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{if } u^2 > a^2 \end{cases}$$

4. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$$

5. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0$$

Παράδειγμα 3 Χρήση του Πίνακα 6.17

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}}.$$

Λύση Για το αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} \qquad u = 2x,\ du = 2\,dx,\ a = \sqrt{3}$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Τύπος του Πίνακα 6.17}$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \sinh^{-1}(0)$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0{,}98665.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.7

Τιμές υπερβολικών συναρτήσεων και ταυτότητες

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-4 δίδεται μια τιμή του $\sinh x$ ή του $\cosh x$. Κάνοντας χρήση των ορισμών, καθώς και της ταυτότητας $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ βρείτε τις τιμές των υπόλοιπων πέντε υπερβολικών συναρτήσεων.

1. $\sinh x = -\frac{3}{4}$ **2.** $\sinh x = \frac{4}{3}$

3. $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$ **4.** $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

Ξαναγράψτε τις εκφράσεις στις Ασκήσεις 5-10 συναρτήσει εκθετικών, απλοποιώντας τις όσο μπορείτε.

5. $2\cosh(\ln x)$ **6.** $\sinh(2\ln x)$

7. $\cosh 5x + \sinh 5x$ **8.** $\cosh 3x - \sinh 3x$

9. $(\sinh x + \cosh x)^4$

10. $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

11. Εφαρμόστε τις ταυτότητες

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

για να δείξετε ότι

(α) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

(β) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

12. Εφαρμόστε τους ορισμούς των $\cosh x$ και $\sinh x$ για να δείξετε ότι

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Παράγωγοι

Στις Ασκήσεις 13-24, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την εκάστοτε ανεξάρτητη μεταβλητή.

13. $y = 6\sinh\frac{x}{3}$ **14.** $y = \frac{1}{2}\sinh(2x+1)$

15. $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$ **16.** $y = t^2\tanh\frac{1}{t}$

17. $y = \ln(\sinh z)$ **18.** $y = \ln(\cosh z)$

19. $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln\operatorname{sech}\theta)$ **20.** $y = \operatorname{csch}\theta(1 - \ln\operatorname{csch}\theta)$

21. $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\tanh^2 v$ **22.** $y = \ln\sinh v - \frac{1}{2}\coth^2 v$

23. $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$

(*Υπόδειξη*: Πριν παραγωγίσετε, εκφράστε συναρτήσει εκθετικών και απλοποιήστε.)

24. $y = (4x^2 - 1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$

Στις Ασκήσεις 25-36, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την εκάστοτε ανεξάρτητη μεταβλητή.

25. $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$ **26.** $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

27. $y = (1-\theta)\tanh^{-1}\theta$ **28.** $y = (\theta^2 + 2\theta)\tanh^{-1}(\theta+1)$

29. $y = (1-t)\coth^{-1}\sqrt{t}$ **30.** $y = (1-t^2)\coth^{-1} t$

31. $y = \cos^{-1} x - x\operatorname{sech}^{-1} x$ **32.** $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$

33. $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\theta$ **34.** $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta$

35. $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

Τύποι ολοκλήρωσης

Επαληθεύστε τους τύπους ολοκλήρωσης των Ασκήσεων 37-40.

37. **(α)** $\int \operatorname{sech} x\, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + C$

(β) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \sin^{-1}(\tanh x) + C$

38. $\int x\operatorname{sech}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

39. $\int x\coth^{-1} x\, dx = \frac{x^2-1}{2}\coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\int \tanh^{-1} x\, dx = x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Αόριστα ολοκληρώματα

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 41-50.

41. $\int \sinh 2x\, dx$ **42.** $\int \sinh\frac{x}{5}\, dx$

43. $\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) dx$ **44.** $\int 4\cosh(3x - \ln 2)\, dx$

45. $\int \tanh\frac{x}{7}\, dx$ **46.** $\int \coth\frac{\theta}{\sqrt{3}}\, d\theta$

47. $\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$ **48.** $\int \operatorname{csch}^2(5-x)\, dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}\, dt}{\sqrt{t}}$ **50.** $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t)\coth(\ln t)\, dt}{t}$

Ορισμένα ολοκληρώματα

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 51-60.

51. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x\, dx$ **52.** $\int_0^{\ln 2} \tanh 2x\, dx$

53. $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^\theta\cosh\theta\, d\theta$ **54.** $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta}\sinh\theta\, d\theta$

55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan\theta)\sec^2\theta\, d\theta$

56. $\int_0^{\pi/2} 2\sinh(\sin\theta)\cos\theta\, d\theta$

57. $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t}\, dt$ **58.** $\int_1^4 \frac{8\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

59. $\int_{-\ln 2}^0 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ **60.** $\int_0^{\ln 10} 4\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Υπολογισμός αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων και συναφών ολοκληρωμάτων

Ακόμα και αν το κομπιουτεράκι σας δεν διαθέτει ειδικά πλήκτρα για τον υπολογισμό υπερβολικών συναρτήσεων, είναι δυνατόν να υπολογίσετε τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις εκφράζοντάς τις ως λογαρίθμους, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \qquad |x| > 1$$

Εφαρμόστε τους τύπους του πίνακα αυτού για να εκφράσετε τις ποσότητες στις Ασκήσεις 61-66 συναρτήσει φυσικών λογαρίθμων.

61. $\sinh^{-1}(-5/12)$ **62.** $\cosh^{-1}(5/3)$

63. $\tanh^{-1}(-1/2)$ **64.** $\coth^{-1}(5/4)$

65. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$ **66.** $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 67-74 συναρτήσει

(α) αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων

(β) φυσικών λογαρίθμων.

67. $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ **68.** $\int_0^{1/3} \frac{6\, dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

69. $\int_{5/4}^2 \frac{dx}{1-x^2}$ **70.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

71. $\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$ **72.** $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

73. $\int_0^\pi \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ **74.** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

Εφαρμογές και θεωρία

75. **(α)** Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα συμμετρικό ως προς την αρχή (ούτως ώστε η f να ορίζεται και στο $-x$ εφόσον ορίζεται στο x), τότε

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \qquad (1)$$

Κατόπιν δείξτε ότι η $(f(x)+f(-x))/2$ είναι άρτια ενώ η $(f(x)-f(-x))/2$ είναι περιττή.

(β) Η Εξίσωση (1) απλοποιείται αισθητά αν η ίδια η f είναι (i) άρτια ή (ii) περιττή. Ποιες είναι τότε οι νέες εξισώσεις; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

76. *Μάθετε γράφοντας* Αποδείξτε τον τύπο $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $-\infty < x < \infty$. Εξηγήστε στην απόδειξή σας γιατί στην τετραγωνική ρίζα χρησιμοποιείται το θετικό πρόσημο αντί του αρνητικού.

77. *Ελεύθερη πτώση* Αν σε σώμα μάζας m που αφήνουμε να πέσει υπό την επίδραση της βαρύτητας, ασκείται αντίσταση από τον αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, τότε η ταχύτητα του σώματος t sec μετά την έναρξη της πτώσης θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

όπου k είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τις αεροδυναμικές ιδιότητες του σώματος και την πυκνότητα του αέρα. (Υποθέτουμε ότι η πτώση διαρκεί λίγο χρόνο, ώστε η μεταβολή της πυκνότητας του αέρα να μην επηρεάσει ουσιαστικά το αποτέλεσμα.)

(α) Δείξτε ότι η

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right)$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη $v = 0$ για $t = 0$.

(β) Βρείτε την *οριακή ταχύτητα* του σώματος, $\lim_{t\to\infty} v$.

(γ) Για έναν αλεξιπτωτιστή 75 kg ($mg = 735$), με τον χρόνο μετρούμενο σε sec και την απόσταση σε m, μια τυπική τιμή του k είναι 0,25. Ποια είναι η οριακή ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή (προτού ανοίξει το αλεξίπτωτο);

78. *Μέτρο επιτάχυνσης ανάλογο της μετατόπισης* Έστω σώμα που κινείται ευθύγραμμα, με συνάρτηση θέσεως κατά τη χρονική στιγμή t

(α) $s = a\cos kt + b\sin kt$

(β) $s = a\cosh kt + b\sinh kt$.

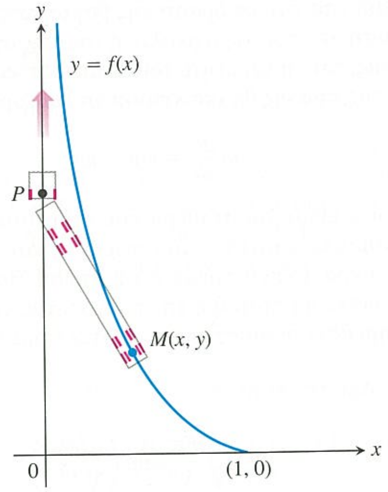
Δείξτε ότι και στις δύο περιπτώσεις η επιτάχυνση d^2s/dt^2 είναι ανάλογη του s, αλλά ότι στην (α) περίπτωση έχει φορά προς την αρχή, ενώ στη (β) περίπτωση η επιτάχυνση έχει φορά απομακρυνόμενη από την αρχή.

79. *Καρότσια σε τρακτέρ και η έλκουσα* Όταν ένα τρακτέρ που σέρνει καρότσι στρίβει στον δρόμο, οι πίσω τροχοί του καροτσιού διαγράφουν μια καμπύλη όπως αυτήν που φαίνεται στο σχήμα. (Αυτός είναι και ο λόγος που μερικές φορές οι πίσω τροχοί ανεβαίνουν στο κράσπεδο του πεζοδρομίου.) Μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση της καμπύλης αν θεωρήσουμε τους πίσω τροχούς ως μια μάζα M στο σημείο $(1, 0)$ του άξονα x, συνδεδεμένη μέσω μιας ράβδου μοναδιαίου μήκους με το σημείο P που παριστάνει το κουβούκλιο του οδηγού. Καθώς το σημείο P κινείται επί του άξονα y, σέρνει πίσω του το σημείο M. Μπορεί να αποδειχθεί πως η καμπύλη που διαγράφει κινούμενο το M —και η οποία καλείται *έλκουσα*— είναι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = f(x)$ που αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

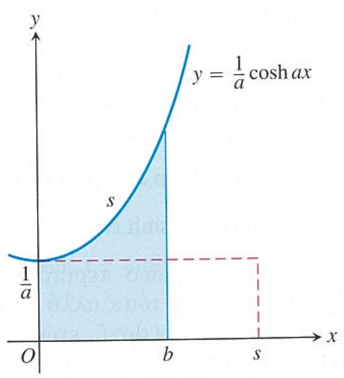
Διαφορική εξίσωση: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Αρχική συνθήκη: $y = 0$ για $x = 1$.

Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για να βρείτε μια εξίσωση της καμπύλης. (Θα χρησιμοποιήσετε μια αντίστροφη υπερβολική συνάρτηση.)



80. *Εμβαδόν* Δείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου του πρώτου τεταρτημόριου που περικλείεται από την καμπύλη $y = (1/a)\cosh ax$, τους άξονες συντεταγμένων, και την ευθεία $x = b$ ισούται με τον εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου ύψους $1/a$ και μήκους s, όπου s είναι το μήκος της καμπύλης από $x = 0$ έως $x = b$.

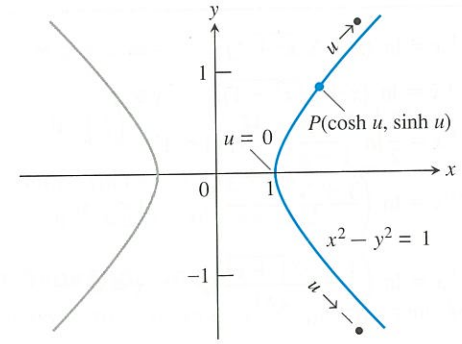


81. *Όγκος* Ένα χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $y = \cosh x$, από κάτω από την καμπύλη $y = \sinh x$, και εξ αριστερών και δεξιών από τον άξονα y και την ευθεία $x = 2$, αντίστοιχα. Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο ως προς τον άξονα x.

82. *Όγκος* Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = \operatorname{sech} x$, τον άξονα x, και τις ευθείες $x = \pm\ln\sqrt{3}$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που προκύπτει.

83. *Μήκος τόξου* Βρείτε το μήκος του τμήματος της καμπύλης $y = (1/2)\cosh 2x$ από $x = 0$ έως $x = \ln\sqrt{5}$.

84. *Γιατί «υπερβολικές» συναρτήσεις* Αν διερωτάστε για την προέλευση του όρου *υπερβολικό* που χρησιμοποιήσαμε, ιδού η απάντηση: Ακριβώς όπως μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις συναρτήσεις $x = \cos u$ και $y = \sin u$ σε σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου, έτσι και οι συναρτήσεις $x = \cosh u$ και $y = \sinh u$ αντιστοιχίζονται σε σημεία (x, y) του δεξιού κλάδου της μοναδιαίας υπερβολής, $x^2 - y^2 = 1$ (Σχήμα 6.29).



Σχημα 6.29 Εφόσον $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, το σημείο $(\cosh u, \sinh u)$ κείται στον δεξιό κλάδο της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ για κάθε τιμή του u. (Άσκηση 84)

Άλλη μία αναλογία μεταξύ υπερβολικών και κυκλικών συναρτήσεων είναι ότι η μεταβλητή u στις συντεταγμένες $(\cosh u, \sinh u)$ των σημείων του δεξιού κλάδου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ ισούται με το διπλάσιο εμβαδόν του τομέα AOP που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.30. Για να καταστεί προφανές αυτό, εκτελέστε τα παρακάτω.

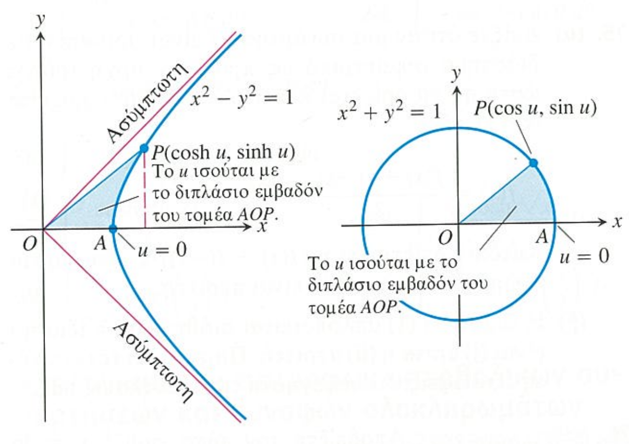
(α) Δείξτε ότι το εμβαδόν $A(u)$ του τομέα AOP ισούται με

$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

(β) Παραγωγίστε κάθε μέλος της εξίσωσης του ερωτήματος (α) ως προς u για να δείξετε ότι

$$A'(u) = \frac{1}{2}.$$

(γ) Λύστε την τελευταία αυτή εξίσωση ως προς $A(u)$. Ποια είναι η τιμή του $A(0)$; Ποια τιμή έχει η σταθερά ολοκλήρωσης C στη λύση σας; Έχοντας προσδιορίσει το C, ποια σχέση μεταξύ των u και $A(u)$ αναδεικνύει η λύση που βρήκατε;

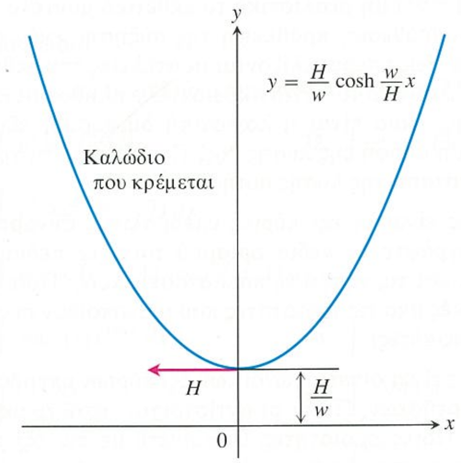


Σχημα 6.30 Στα δύο αυτά διαγράμματα επισημαίνεται μία από τις αναλογίες μεταξύ των υπερβολικών και των κυκλικών συναρτήσεων. (Άσκηση 84)

Καλώδια που κρέμονται

85. Φανταστείτε ένα καλώδιο, π.χ. ένα καλώδιο τηλεφώνου ή τηλεοράσεως, το οποίο στερεώνουμε στα άκρα και το αφήνουμε να κρέμεται ελεύθερο στη μέση. Το βάρος ανά μονάδα μήκους είναι w και η οριζόντια τάση στο κατώτερο σημείο του καλωδίου είναι διάνυσμα μέτρου H. Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο συντεταγμένων στο επίπεδο του καλωδίου τέτοιο ώστε ο άξονας x να είναι οριζόντιος, η δύναμη της βαρύτητας κατακόρυφη προς τα κάτω, ο θετικός ημιάξονας y κατακόρυφος προς τα πάνω, και το κατώτερο σημείο του καλωδίου να βρίσκεται στο σημείο $y = H/w$ του άξονα y (Σχήμα 6.31), τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η καμπύλη του καλωδίου αποδίδεται από τη γραφική παράσταση του υπερβολικού συνημιτόνου

$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x.$$



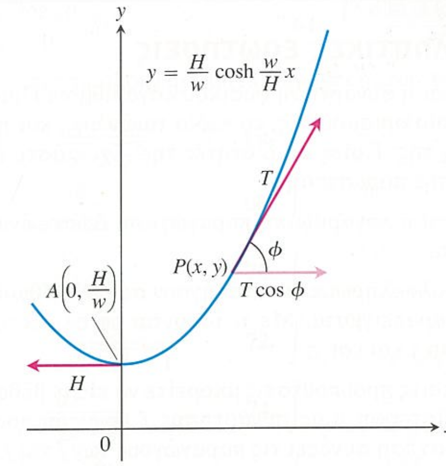
Σχημα 6.31 Σε σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεγεί έτσι ώστε να συνδέει τα H και w κατά τον τρόπο που δείχνει το σχήμα, το καλώδιο που κρέμεται κείται επί της καμπύλης του υπερβολικού συνημιτόνου $y = (H/w)\cosh(wx/H)$.

Μια τέτοια καμπύλη καλείται **αλυσοειδής καμπύλη** ή **καμπύλη αλυσίδας**.

(α) Έστω $P(x, y)$ ένα τυχόν σημείο του καλωδίου. Το Σχήμα 6.32 δείχνει την τάση στο P ως διάνυσμα μέτρου T, καθώς και την τάση H στο κατώτερο σημείο A. Δείξτε ότι η κλίση του καλωδίου στο P είναι

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{w}{H}x.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) και το γεγονός ότι η οριζόντια τάση στο P πρέπει να ισούται με H (εφόσον το καλώδιο παραμένει ακίνητο), δείξτε ότι $T = wy$. Συνεπώς, το μέτρο της τάσεως στο $P(x, y)$ ισούται ακριβώς με το βάρος y μονάδων καλωδίου.



Σχημα 6.32 Όπως εξηγείται στην Άσκηση 85, $T = wy$ σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

86. (*Συνέχεια της Άσκησης 85*) Το μήκος τόξου AP στο Σχήμα 6.32 είναι $s = (1/a)\sinh ax$, όπου $a = w/H$. Δείξτε ότι οι συντεταγμένες του P μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του s ως εξής

$$x = \frac{1}{a}\sinh^{-1} as, \qquad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

87. *Η «κοιλιά» και η οριζόντια τάση του καλωδίου* Τα άκρα ενός καλωδίου μήκους 32 m και βάρους 2 kg/m δένονται στο ίδιο ύψος σε δυο στύλους που απέχουν 30 m.

(α) Περιγράψτε το σχήμα του καλωδίου με την εξίσωση

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax, \qquad -15 \le x \le 15.$$

Αντλώντας πληροφορίες από την Άσκηση 86 δείξτε ότι το a ικανοποιεί την εξίσωση

$$16a = \sinh 15a. \tag{2}$$

T **(β)** Λύστε γραφικά την Εξίσωση (2) εκτιμώντας τις συντεταγμένες των σημείων όπου οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $y = 16a$ και $y = \sinh 15a$ τέμνουν το επίπεδο ay.

T **(γ)** Λύστε αριθμητικά την Εξίσωση (2) ως προς το a. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που βρήκατε στο (β).

T **(δ)** Εκτιμήστε την οριζόντια τάση στο κατώτερο σημείο του καλωδίου.

(ε) Με την τιμή για το a που βρήκατε στο (γ), σχεδιάστε την αλυσοειδή καμπύλη

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax$$

στο διάστημα $-15 \le x \le 15$. Εκτιμήστε την «κοιλιά» [Σ.τ.Μ. απόκλιση από την οριζόντια διεύθυνση] του καλωδίου στο κέντρο του.

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Τι είναι η συνάρτηση φυσικού λογαρίθμου; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της, το πεδίο τιμών της, και η παράγωγός της; Ποιες οι ιδιότητές της; Σχολιάστε τη γραφική της παράσταση.
2. Τι είναι η λογαριθμική παραγώγιση; Δώστε ένα παράδειγμα.
3. Ποια ολοκληρώματα καταλήγουν σε λογαρίθμους; Δώστε παραδείγματα. Με τι ισούνται τα ολοκληρώματα των $\tan x$ και $\cot x$;
4. Υπό ποιες προϋποθέσεις μπορείτε να είστε βέβαιοι ότι η αντίστροφη μιας συνάρτησης f είναι διαφορίσιμη; Ποια σχέση συνδέει τις παραγώγους των f και f^{-1};
5. Πώς ορίζεται η εκθετική συνάρτηση e^x μέσω του φυσικού λογαρίθμου; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της, το πεδίο τιμών της, και η παράγωγός της; Σε ποιους κανόνες εκθετών υπακούει; Σχολιάστε τη γραφική της παράσταση.
6. Πώς ορίζεται ο αριθμός e; Πώς μπορεί να εκφραστεί ως όριο;
7. Πώς ορίζονται οι συναρτήσεις a^x και $\log_a x$; Υπάρχουν περιορισμοί στο a; Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των γραφημάτων των $\log_a x$ και $\ln x$; Αληθεύει η δήλωση ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει παρά μόνο μία εκθετική συνάρτηση και μόνο μία λογαριθμική συνάρτηση;
8. Ποιες είναι οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων; Συγκρίνετε τα πεδία ορισμού των παραγώγων αυτών με τα πεδία ορισμού των αντίστοιχων συναρτήσεων.
9. Τι είδους ολοκληρώματα καταλήγουν σε αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις; Πώς μπορούμε να διευρύνουμε τη χρησιμότητα των ολοκληρωμάτων αυτών κάνοντας αντικατάσταση και συμπληρώνοντας το τετράγωνο;
10. Τι καλούμε διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως; Πότε μια συνάρτηση είναι λύση μιας τέτοιας εξισώσεως;
11. Πώς λύνουμε διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως;
12. Ποιος είναι ο νόμος της εκθετικής μεταβολής; Πώς προκύπτει από ένα πρόβλημα αρχικών τιμών; Αναφέρετε μερικές εφαρμογές του νόμου αυτού.
13. Τι είναι το πεδίο διευθύνσεων μιας διαφορικής εξίσωσης $y' = f(x, y)$; Τι πληροφορία μας παρέχει;
14. Πώς λύνουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως;
15. Περιγράψτε τη μέθοδο Euler για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Δώστε ένα παράδειγμα. Σχολιάστε την ακρίβεια της μεθόδου. Γιατί μας ενδιαφέρει η αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών;
16. Περιγράψτε τη βελτιωμένη μέθοδο Euler για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Συγκρίνετέ τη με τη μέθοδο Euler.
17. Γιατί είναι μη ρεαλιστικό το εκθετικό μοντέλο για τη μακροπρόθεσμη πρόβλεψη της αύξησης ενός πληθυσμού; Πώς υπερσκελίζονται οι ατέλειες του εκθετικού μοντέλου από το λογιστικό μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης; Ποια είναι η λογιστική διαφορική εξίσωση; Ποια η μορφή της λύσης της; Περιγράψτε τη γραφική παράσταση της λύσης αυτής.
18. Ποιες είναι οι έξι κύριες υπερβολικές συναρτήσεις; Περιγράψτε τα πεδία ορισμού τους, τα πεδία τιμών τους, και τις γραφικές παραστάσεις τους. Ποιες είναι μερικές από τις ταυτότητες που ικανοποιούν οι συναρτήσεις αυτές;
19. Ποιες είναι οι παράγωγοι των έξι κύριων υπερβολικών συναρτήσεων; Ποιοι οι αντίστοιχοι τύποι ολοκλήρωσης; Ποιες ομοιότητες διακρίνετε με τις έξι κύριες τριγωνομετρικές συναρτήσεις;
20. Πώς ορίζονται οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις; Περιγράψτε τα πεδία ορισμού τους, τα πεδία τιμών τους, και τις γραφικές τους παραστάσεις. Πώς μπορούμε να βρούμε τιμές των $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$, και $\coth^{-1} x$ όταν το κομπιουτεράκι μας διαθέτει πλήκτρα μόνο για τις συναρτήσεις $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$, και $\tanh^{-1} x$;
21. Ποια ολοκληρώματα καταλήγουν σε αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις;

Ασκήσεις κεφαλαίου

Παραγώγιση

Στις Ασκήσεις 1-24, βρείτε την παράγωγο του y ως προς την κατάλληλη ανεξάρτητη μεταβλητή.

1. $y = 10e^{-x/5}$
2. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$
3. $y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$
4. $y = x^2e^{-2/x}$
5. $y = \ln(\sin^2\theta)$
6. $y = \ln(\sec^2\theta)$
7. $y = \log_2(x^2/2)$
8. $y = \log_5(3x - 7)$
9. $y = 8^{-t}$
10. $y = 9^{2t}$
11. $y = 5x^{3,6}$
12. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$
13. $y = (x + 2)^{x+2}$
14. $y = 2(\ln x)^{x/2}$
15. $y = \sin^{-1}\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$
16. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$
17. $y = \ln\cos^{-1} x$
18. $y = z\cos^{-1} z - \sqrt{1 - z^2}$
19. $y = t\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln t$
20. $y = (1 + t^2)\cot^{-1} 2t$
21. $y = z\sec^{-1} z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$
22. $y = 2\sqrt{x - 1}\sec^{-1}\sqrt{x}$
23. $y = \csc^{-1}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$
24. $y = (1 + x^2)e^{\tan^{-1} x}$

Λογαριθμική παραγώγιση

Στις Ασκήσεις 25-30, εφαρμόστε λογαριθμική παραγώγιση για να βρείτε την παράγωγο του y ως προς την εκάστοτε ανεξάρτητη μεταβλητή.

25. $y = \dfrac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}$
26. $y = \sqrt[10]{\dfrac{3x + 4}{2x - 4}}$
27. $y = \left(\dfrac{(t + 1)(t - 1)}{(t - 2)(t + 3)}\right)^5, \quad t > 2$
28. $y = \dfrac{2u2^u}{\sqrt{u^2 + 1}}$
29. $y = (\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}$
30. $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

Ολοκλήρωση

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 31-50.

31. $\int e^x \sin(e^x)\, dx$
32. $\int e^t \cos(3e^t - 2)\, dt$
33. $\int e^x \sec^2(e^x - 7)\, dx$
34. $\int e^y \csc(e^y + 1)\cot(e^y + 1)\, dy$
35. $\int \sec^2(x)\, e^{\tan x}\, dx$
36. $\int \csc^2(x)\, e^{\cot x}\, dx$
37. $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{3x - 4}$
38. $\int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$
39. $\int_0^\pi \tan\dfrac{x}{3}\, dx$
40. $\int_{1/6}^{1/4} 2\cot \pi x\, dx$
41. $\int_0^4 \dfrac{2t}{t^2 - 25}\, dt$
42. $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}\, dt$
43. $\int \dfrac{\tan(\ln v)}{v}\, dv$
44. $\int \dfrac{dv}{v\ln v}$
45. $\int \dfrac{(\ln x)^{-3}}{x}\, dx$
46. $\int \dfrac{\ln(x - 5)}{x - 5}\, dx$
47. $\int \dfrac{1}{r}\csc^2(1 + \ln r)\, dr$
48. $\int \dfrac{\cos(1 - \ln v)}{v}\, dv$
49. $\int x3^{x^2}\, dx$
50. $\int 2^{\tan x}\sec^2 x\, dx$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 51-64.

51. $\int_1^7 \dfrac{3}{x}\, dx$
52. $\int_1^{32} \dfrac{1}{5x}\, dx$
53 $\int_1^4 \left(\dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{2x}\right) dx$
54. $\int_1^8 \left(\dfrac{2}{3x} - \dfrac{8}{x^2}\right) dx$
55. $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}\, dx$
56. $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}\, dw$
57. $\int_0^{\ln 5} e^r(3e^r + 1)^{-3/2}\, dr$
58. $\int_0^{\ln 9} e^\theta(e^\theta - 1)^{1/2}\, d\theta$
59. $\int_1^e \dfrac{1}{x}(1 + 7\ln x)^{-1/3}\, dx$
60. $\int_e^{e^2} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$
61. $\int_1^3 \dfrac{(\ln(v + 1))^2}{v + 1}\, dv$
62. $\int_2^4 (1 + \ln t)\, t\ln t\, dt$

63. $\int_1^8 \dfrac{\log_4\theta}{\theta}\, d\theta$
64. $\int_1^e \dfrac{8\ln 3\log_3\theta}{\theta}\, d\theta$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 65-78.

65. $\int_{-3/4}^{3/4} \dfrac{6\, dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$
66. $\int_{-1/5}^{1/5} \dfrac{6\, dx}{\sqrt{4 - 25x^2}}$
67. $\int_{-2}^{2} \dfrac{3\, dt}{4 + 3t^2}$
68. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \dfrac{dt}{3 + t^2}$
69. $\int \dfrac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$
70. $\int \dfrac{24\, dy}{y\sqrt{y^2 - 16}}$
71. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \dfrac{dy}{|y|\sqrt{9y^2 - 1}}$
72. $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \dfrac{dy}{|y|\sqrt{5y^2 - 3}}$
73. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}$
74. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 1}}$
75. $\int_{-2}^{-1} \dfrac{2\, dv}{v^2 + 4v + 5}$
76. $\int_{-1}^{1} \dfrac{3\, dv}{4v^2 + 4v + 4}$
77. $\int \dfrac{dt}{(t + 1)\sqrt{t^2 + 2t - 8}}$
78. $\int \dfrac{dt}{(3t + 1)\sqrt{9t^2 + 6t}}$

Θεωρία και εφαρμογές

79. *Παράγωγος αντιστρόφου* Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, όντας διαφορίσιμη και ένα-προς-ένα, διαθέτει διαφορίσιμη αντίστροφη $f^{-1}(x)$. Βρείτε την τιμή της df^{-1}/dx στο σημείο $f(\ln 2)$.
80. *Παράγωγος αντιστρόφου* Βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = 1 + (1/x)$, $x \neq 0$. Κατόπιν δείξτε ότι $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ και ότι
$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Στις Ασκήσεις 81 και 82, βρείτε τα ολικά ακρότατα κάθε συναρτήσεως στο διάστημα που δίδεται.

81. $y = x\ln 2x - x, \quad \left[\dfrac{1}{2e}, \dfrac{e}{2}\right]$
82. $y = 10x(2 - \ln x), \quad (0, e^2]$
83. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = 2(\ln x)/x$ και του άξονα x από $x = 1$ έως $x = e$.
84. **(α)** *Εμβαδόν* Δείξτε ότι το εμβαδόν του περικλειόμενου χωρίου από την καμπύλη $y = 1/x$ και τον άξονα x από $x = 10$ έως $x = 20$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα x από $x = 1$ έως $x = 2$.

    (β) *Εμβαδόν* Δείξτε ότι το εμβαδόν του περικλειόμενου χωρίου από την καμπύλη $y = 1/x$ και τον άξονα x από ka έως kb ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα x από $x = a$ έως $x = b$ $(0 < a < b,\ k > 0)$.
85. *Κινούμενο σωματίδιο* Ένα σωματίδιο κινείται προς τα πάνω και δεξιά επί της καμπύλης $y = \ln x$. Η συντεταγμένη x της θέσης του αυξάνεται με ρυθμό $(dx/dt) = \sqrt{x}$ m/sec. Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται η συντεταγμένη y της θέσης του στο σημείο $(e^2, 2)$;
86. *Ένα κοριτσάκι σε τσουλήθρα* Ένα μικρό κορίτσι γλιστρά σε μια τσουλήθρα που έχει το σχήμα της καμπύλης $y = 9e^{-x/3}$. Η συντεταγμένη y της θέσης του κοριτσιού μεταβάλλεται με ρυθμό $dy/dt = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ m/sec. Με ποιον περίπου ρυθμό μεταβάλλεται η συντεταγμέ-

νη x της θέσης του κοριτσιού τη στιγμή που φτάνει στο χαμηλότερο σημείο της τσουλήθρας $x = 9$ m; (Θεωρήστε το e^3 ίσο με 20 και στρογγυλοποιήστε την απάντησή σας στο πλησιέστερο m/sec.)

T 87. *Ακρότατα* Παραστήστε γραφικά τις ακόλουθες συναρτήσεις. Παρατηρήστε τα γραφήματα που κάνατε για να εκτιμήσετε τη θέση και την τιμή των συναρτήσεων στα ακρότατα, τις συντεταγμένες των σημείων καμπής, και τα διαστήματα όπου οι καμπύλες είναι κοίλες άνω ή κοίλες κάτω. Κατόπιν επαληθεύστε τις εκτιμήσεις σας υπολογίζοντας τις παραγώγους των συναρτήσεων.

(α) $y = (\ln x)/\sqrt{x}$ (β) $y = e^{-x^2}$

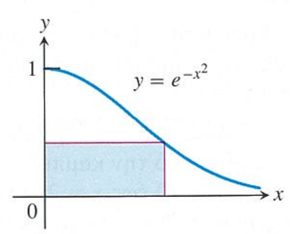
(γ) $y = (1 + x)e^{-x}$

T 88. *Ολικό ελάχιστο* Παραστήστε γραφικά την $f(x) = x \ln x$. Δείχνει να έχει ολικό ελάχιστο η συνάρτηση; Επαληθεύστε την απάντησή σας με χρήση των μεθόδων απειροστικού λογισμού που γνωρίζετε.

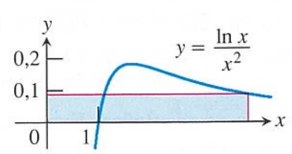
89. *Ηλικία ξυλάνθρακα* Τι ηλικία έχει ένα δείγμα ξυλάνθρακα στο οποίο το 90% του αρχικού άνθρακα-14 έχει διασπαστεί;

90. *Μηλόπιτα που κρυώνει* Μια μηλόπιτα με αρχική θερμοκρασία 104°C την βγάζουμε από τον φούρνο και την αφήνουμε να κρυώσει σε μια σκεπαστή βεράντα όπου φυσά δροσερός αέρας και η θερμοκρασία είναι 4°C. Δεκαπέντε λεπτά αργότερα, η θερμοκρασία στο εσωτερικό της μηλόπιτας είναι 82°C. Πόσο χρόνο χρειάστηκε στη συνέχεια η μηλόπιτα για να φτάσει τους 21°C;

91. *Μέγιστο ορθογώνιο* Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του σχήματος έχει μία πλευρά επί του θετικού ημιάξονα y, μία πλευρά επί του θετικού ημιάξονα x, και την άνω δεξιά κορυφή του επί της καμπύλης $y = e^{-x^2}$. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει το ορθογώνιο για να γίνει το εμβαδόν του μέγιστο, και ποιο είναι αυτό;



92. *Μέγιστο ορθογώνιο* Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του σχήματος έχει μία πλευρά επί του θετικού ημιάξονα y, μία πλευρά επί του θετικού ημιάξονα x, και την άνω δεξιά κορυφή του επί της καμπύλης $y = (\ln x)/x^2$. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει το ορθογώνιο για να γίνει το εμβαδόν του μέγιστο, και ποιο είναι αυτό;



93. *Μάθετε γράφοντας* Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln 5x$ και $g(x) = \ln 3x$ διαφέρουν κατά μία σταθερά. Ποια είναι η σταθερά αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

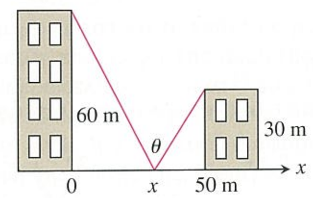
94. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Αν $(\ln x)/x = (\ln 2)/2$, τότε ισχύει κατ' ανάγκην ότι $x = 2$;

(β) Αν $(\ln x)/x = -2 \ln 2$, τότε ισχύει κατ' ανάγκην ότι $x = 1/2$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

95. *Χωροθέτηση φωτοβολταϊκού σταθμού* Σας έχει ανατεθεί η κατασκευή ενός φωτοβολταϊκού σταθμού παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Ο σταθμός πρόκειται να χτιστεί στο επίπεδο του εδάφους και στην ευθεία Ανατολής-Δύσης, ανάμεσα στα δύο κτίρια που φαίνονται στο σχήμα. Σε τι απόσταση από το ψηλότερο κτίριο πρέπει να τοποθετήσετε τον σταθμό ώστε να μεγιστοποιήσετε τον αριθμό ωρών άμεσης έκθεσης στην ηλιακή ακτινοβολία, σε μια μέρα όπου ο ήλιος διέρχεται ακριβώς πάνω από τον σταθμό;

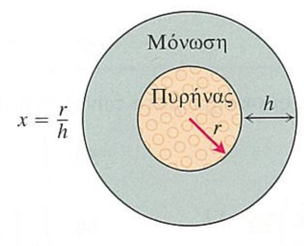


Ξεκινήστε κάνοντας την παρατήρηση ότι

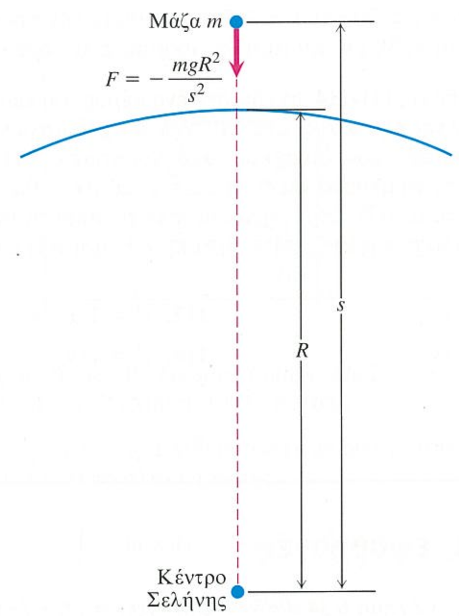
$$\theta = \pi - \cot^{-1}\frac{x}{60} - \cot^{-1}\frac{50 - x}{30}.$$

Κατόπιν βρείτε την τιμή του x που μεγιστοποιεί τη γωνία θ.

96. *Πάχος καλωδίου* Ένας κυκλικός υποθαλάσσιος αγωγός μεταφοράς αποτελείται από πυρήνα χάλκινων καλωδίων που περιβάλλονται από μη αγώγιμο μονωτικό υλικό. Αν x είναι ο λόγος της ακτίνας του πυρήνα προς το πάχος του μονωτή, είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του μεταφερόμενου σήματος δίδεται από την εξίσωση $v = x^2 \ln(1/x)$. Αν ο πυρήνας έχει ακτίνα 1 cm, τότε ποιο πρέπει να είναι το πάχος του μονωτικού υλικού h για να μεγιστοποιηθεί η ταχύτητα μεταφοράς δεδομένων;



97. *Ταχύτητα διαφυγής* Η βαρυτική έλξη F που ασκείται από τη Σελήνη (η οποία δεν έχει ατμόσφαιρα) σε σώμα μάζας m και απόστασης s από το κέντρο της Σελήνης δίδεται από την εξίσωση $F = -mg\,R^2 s^{-2}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας στη σεληνιακή επιφάνεια και R η ακτίνα της Σελήνης (Σχήμα 6.33). Η δύναμη F είναι αρνητική, εφόσον δρα στην κατεύθυνση προς την οποία μειώνεται το s.



Σχημα 6.33 Διάγραμμα για την Άσκηση 97.

(α) Αν το σώμα εκτοξευθεί κατακόρυφα προς τα πάνω από την επιφάνεια της Σελήνης με αρχική ταχύτητα v_0 τη στιγμή $t = 0$, τότε εφαρμόστε τον νόμο του Νεύτωνα, $F = ma$, για να δείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος στη θέση s δίδεται από την εξίσωση

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR.$$

Έτσι, η ταχύτητα παραμένει θετική εφόσον $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. Η ταχύτητα $v_0 = \sqrt{2gR}$ είναι η **ταχύτητα διαφυγής** στη Σελήνη. Αν εκτοξεύσουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα σώμα με αυτήν την ταχύτητα ή μεγαλύτερη, αυτό θα διαφύγει από τη Σεληνιακή έλξη.

(β) Δείξτε ότι αν $v_0 = \sqrt{2gR}$, τότε

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}.$$

Πίνακας 6.18 Μετρήσεις θέσης και χρόνου στο πατινάζ του Jonathan Krueger

t (sec)	s (m)	t (sec)	s (m)	t (sec)	s (m)
0	0	0,93	0,61	1,86	0,93
0,13	0,08	1,06	0,68	2,00	0,94
0,27	0,19	1,20	0,74	2,13	0,95
0,40	0,28	1,33	0,79	2,26	0,96
0,53	0,36	1,46	0,83	2,39	0,96
0,67	0,45	1,60	0,87	2,53	0,97
0,80	0,53	1,73	0,90	2,66	0,97

98. *Πατινάζ χωρίς ώθηση* Ο Πίνακας 6.18 δείχνει την απόσταση s (σε μέτρα) που καλύπτει τροχοδρομώντας χωρίς επιτάχυνση σε χρόνο t sec ο Jonathan Krueger. Κατασκευάστε ένα μαθηματικό μοντέλο της θέσης του στη μορφή της Εξίσωσης (5) της Ενότητας 6.4. Η αρχική του ταχύτητα ήταν $v_0 = 0{,}86$ m/sec, η μάζα του $m = 30{,}84$ kg, και η συνολική απόσταση μέχρι ακινητοποιήσεως ήταν 0,97 m.

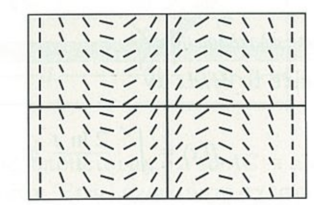
Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 99-102.

	Διαφορική εξίσωση	**Αρχική συνθήκη**
99.	$\frac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}$	$y(0) = -2$
100.	$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{1 + x^2}$	$y(0) = e^2$
101.	$(x + 1)\frac{dy}{dx} + 2y = x, \quad x > -1$	$y(0) = 1$
102.	$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0$	$y(1) = 1$

Πεδία διευθύνσεων και μέθοδος Euler

103. *Χάραξη λύσεων* Σχεδιάστε ένα πιθανό γράφημα της συναρτήσεως $y = f(x)$ με πεδίο κλίσεων αυτό που δίδεται στο σχήμα και αρχική συνθήκη $y(0) = 0$.



[−10, 10] επί [−10, 10]

Στις Ασκήσεις 104 και 105, εφαρμόστε την υποδεικνυόμενη μέθοδο για να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών στο διάστημα που δίδεται, με σημείο εκκινήσεως x_0 και βήμα $dx = 0{,}1$.

T 104. *Euler* $y' = y + \cos x$, $y(0) = 0$· $0 \leq x \leq 2$· $x_0 = 0$

T 105. *Βελτιωμένη Euler* $y' = (2 - y)(2x + 3)$, $y(-3) = 1$· $-3 \leq x \leq -1$· $x_0 = -3$

Στις Ασκήσεις 106 και 107, εφαρμόστε την υποδεικνυόμενη μέθοδο με βήμα $dx = 0{,}05$ για να εκτιμήσετε το $y(c)$ όπου y είναι η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών.

T 106. *Βελτιωμένη Euler* $c = 3$· $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{x + 1}$, $y(0) = 1$

T 107. *Euler* $c = 4$· $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y + 1}{x}$, $y(1) = 1$

Στις Ασκήσεις 108 και 109, εφαρμόστε την υποδεικνυόμενη μέθοδο για να επιλύσετε γραφικά το πρόβλημα αρχικών τιμών, με σημείο εκκινήσεως x_0 και βήμα

(α) $dx = 0{,}1$ (β) $dx = -0{,}1$.

T **108.** *Euler* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$

T **109.** *Βελτιωμένη Euler* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 + y}{e^y + x}, \quad y(0) = 0$

110. (α) *Εύρεση ακριβούς λύσεως* Χρησιμοποιήστε αναλυτικές μεθόδους για να βρείτε την ακριβή λύση της

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}002P\left(1 - \frac{P}{800}\right), \qquad P(0) = 50.$$

T **(β)** *Αριθμητική επίλυση* Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler για να λύσετε την εξίσωση στο ερώτημα (α) για $0 \le t \le 20$ και $dt = 0{,}5$. Συγκρίνετε την προσέγγιση $P(20)$ με την τιμή της ακριβούς λύσεως.

CD-ROM Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 111-114, σχεδιάστε ένα μέρος του πεδίου διευθύνσεων της εξίσωσης. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε την καμπύλη λύσεως που διέρχεται από το σημείο $P(1, -1)$. Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με $x_0 = 1$ και $dx = 0{,}2$ για να εκτιμήσετε το $y(2)$. Στρογγυλοποιήστε τις απαντήσεις σας σε 4 δεκαδικά ψηφία. Βρείτε την ακριβή τιμή $y(2)$ και συγκρίνετε.

111. $y' = x$ **112.** $y' = 1/x$

113. $y' = xy$ **114.** $y' = 1/y$

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

1. *Εμβαδόν χωρίου περικλειόμενου από καμπύλες* Βρείτε τα εμβαδά των περικλειόμενων χωρίων μεταξύ των καμπυλών $y = 2(\log_2 x)/x$ και $y = 2(\log_4 x)/x$ και του άξονα x από $x = 1$ έως $x = e$. Ποιος είναι ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο εμβαδόν;

2. *Μάθετε γράφοντας: Γενικά εκθετικά* Για ποιες τιμές του $x > 0$ ισχύει $x^{(x^x)} = (x^x)^x$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Παράγωγος ολοκληρώματος* Βρείτε το $f'(2)$ αν

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \text{και} \quad g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}\,dt.$$

4. *Παράγωγος ολοκληρώματος*

(α) Βρείτε το df/dx αν

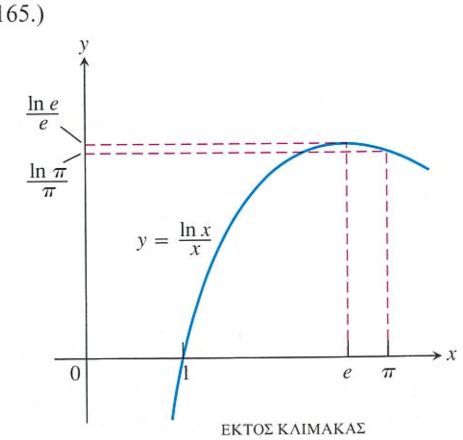
$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\ln t}{t}\,dt.$$

(β) Βρείτε το $f(0)$.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Τι συμπεραίνετε για τη γραφική παράσταση της f; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5. *Η ανισότητα $\pi^e < e^\pi$*

(α) Γιατί το Σχήμα 6.34 «αποδεικνύει» ότι $\pi^e < e^\pi$; (*Πηγή*: "Proof without Words," του Fouad Nakhil, *Mathematics Magazine*, Vol. 60, No. 3 (June 1987), p. 165.)

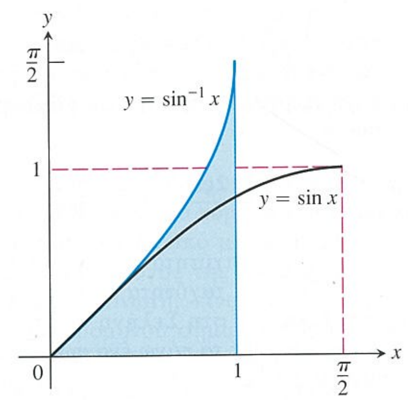


ΣΧΗΜΑ 6.34 Σχήμα για την Άσκηση 5.

(β) Στο Σχήμα 6.34 η συνάρτηση $f(x) = (\ln x)/x$ φαίνεται να εμφανίζει ολικό ακρότατο στο $x = e$. Μπορείτε να το αποδείξετε;

6. *Μια απρόσμενη ισότητα* Χρησιμοποιήστε το ακόλουθο σχήμα για να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sin^{-1} x\,dx.$$

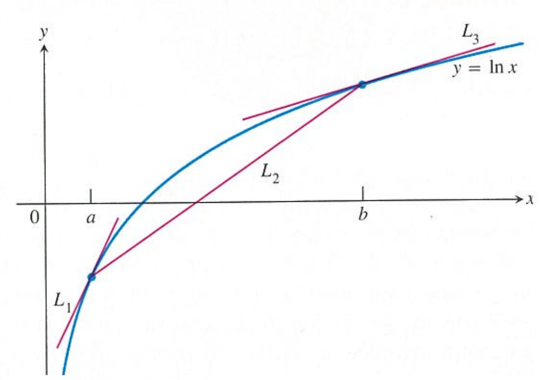


7. *Μάθετε γράφοντας: Η ανισότητα του Napier* Ακολουθούν δύο γραφικές αποδείξεις της πρότασης

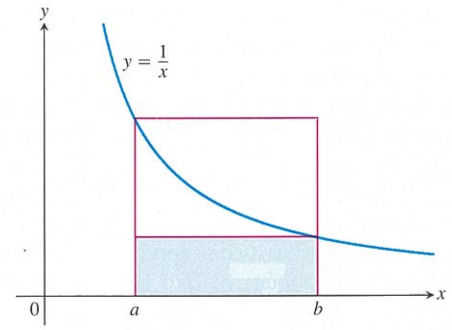
$$b > a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

Εξηγήστε τι συμβαίνει σε κάθε περίπτωση.

(α)



(β)



(*Πηγή*: Roger B. Nelson, *College Mathematics Journal*, Vol. 24, No. 2 (March 1993), p. 165.)

8. *Υποστήριξη λύσεως* Επιβεβαιώστε με δύο γραφικούς τρόπους τον τύπο ολοκλήρωσης

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

9. *Επαλήθευση λύσεως* Δείξτε ότι η

$$y = \int_0^x \sin(t^2)\,dt + x^3 + x + 2$$

είναι λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών.

Διαφορική εξίσωση: $y'' = 2x\cos(x^2) + 6x$

Αρχικές συνθήκες: $y'(0) = 1, \quad y(0) = 2$

10. *Σταθερά ολοκλήρωσης* Έστω

$$f(x) = \int_0^x u(t)\,dt \quad \text{και} \quad g(x) = \int_3^x u(t)\,dt.$$

(α) Δείξτε ότι οι f και g είναι αντιπαράγωγοι της $u(x)$.

(β) Βρείτε μια σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + C$.

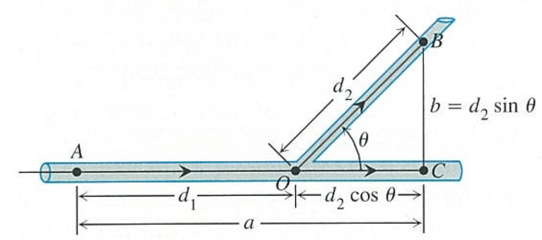
Εφαρμογές

11. *Όγκος* Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = 1/(2\sqrt{x})$ και τον άξονα x από $x = 1/4$ έως $x = 4$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x, παράγοντας ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής.

12. *Ελεύθερη πτώση τον 14ο αιώνα* Στα μέσα του 14ου αιώνα, ο πρίγκιπας Αλβέρτος της Σαξονίας (1316–1390) πρότεινε ένα μαθηματικό μοντέλο για την ελεύθερη πτώση το οποίο υπέθετε ότι η ταχύτητα ενός ελεύθερα πίπτοντος σώματος ήταν ανάλογη της απόστασης πτώσεως. Φαινόταν ίσως εύλογο εκείνη την εποχή ότι ένα σώμα που είχε διανύσει πέφτοντας 20 m θα κινείτο δυο φορές γρηγορότερα από ένα σώμα που είχε διανύσει 10 m. Εξάλλου, κανένα από τα όργανα μετρήσεως που υπήρχαν τότε δεν παρείχε την απαραίτητη ακρίβεια για να αποδειχτεί το εσφαλμένο της παραδοχής αυτής. Σήμερα μπορούμε να διαπιστώσουμε πόσο άστοχη ήταν η υπόθεση του Αλβέρτου της Σαξονίας αν λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών που ενυπάρχει στο μοντέλο του. Λύστε το πρόβλημα αυτό και συγκρίνετε γραφικά τη λύση σας με την εξίσωση $s = 4{,}9t^2$. Όπως θα δείτε, το μοντέλο περιγράφει μια κίνηση που αρχίζει πιο αργά και εξελίσσεται πιο γρήγορα απ' ό,τι συμβαίνει στην πραγματικότητα.

13. *Βέλτιστες γωνίες διακλαδώσεως για αιμοφόρα αγγεία και σωλήνες* Όταν σε κάποιο σύστημα ροής ένας μικρότερος αγωγός διακλαδίζεται από έναν μεγαλύτερο, είναι συχνά χρήσιμο να γνωρίζουμε τη βέλτιστη γωνία που πρέπει να σχηματίζουν οι δυο αγωγοί από πλευράς εξοικονόμησης ενέργειας. Για παράδειγμα, μπορεί να μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση των ενεργειακών απωλειών λόγω τριβής στο τμήμα AOB του παρατιθέμενου σχήματος. Στο διάγραμμα αυτό, B είναι ένα σημείο απ' όπου πρέπει να διέλθει ο μικρότερος αγωγός, A είναι ένα σημείο στον μεγάλο αγωγό πριν από το σημείο B, και O είναι το σημείο διακλάδωσης. Ένας νόμος τον οποίο πρώτος διατύπωσε ο Γάλλος φυσιολόγος Jean Poiseuille, λέει ότι η απώλεια ενέργειας λόγω τριβών στη μη τυρβώδη ροή είναι ανάλογη του μήκους της διαδρομής και αντιστρόφως ανάλογη της τέταρτης δύναμης της ακτίνας. Κατά συνέπεια, η απώλεια κατά μήκος του AO είναι $(kd_1)/R^4$ και κατά μήκος του OB είναι $(kd_2)/r^4$, όπου k είναι μια σταθερά, d_1 είναι το μήκος της διαδρομής AO, d_2 είναι το μήκος του OB, R είναι η ακτίνα του μεγαλύτερου αγωγού, και r είναι η ακτίνα του μικρότερου αγωγού. Η γωνία θ πρέπει να επιλεχθεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των δύο αυτών απωλειών:

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}.$$



Στο μοντέλο μας, υποθέτουμε ότι τα $AC = a$ και $BC = b$ είναι καθορισμένα. Έτσι, έχουμε τις σχέσεις

$$d_1 + d_2\cos\theta = a, \qquad d_2\sin\theta = b,$$

οπότε

$$d_2 = b\csc\theta$$

$$d_1 = a - d_2\cos\theta = a - b\cot\theta.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνολική απώλεια L συναρτήσει του θ:

$$L = k\left(\frac{a - b\cot\theta}{R^4} + \frac{b\csc\theta}{r^4}\right).$$

(α) Δείξτε ότι η κρίσιμη τιμή του θ για την οποία το $dL/d\theta$ μηδενίζεται είναι

$$\theta_c = \cos^{-1}\frac{r^4}{R^4}.$$

(β) Αν ο λόγος ακτίνων των αγωγών είναι $r/R = 5/6$, εκτιμήστε με ακρίβεια μιας μοίρας τη βέλτιστη γωνία διακλάδωσης που βρήκατε στο (α).

Η μαθηματική ανάλυση που παρουσιάσαμε εδώ περιγράφει επίσης τις γωνίες διακλάδωσης αρτηριών στο σώμα ενός ζώου. (Δείτε το βιβλίο *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., του E. Batschelet (New York: Springer-Verlag, 1976).)

14. *Ομαδικές εξετάσεις αίματος* Κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκόσμιου Πολέμου, ήταν συχνά απαραίτητο να γίνουν άμεσα εξετάσεις αίματος σε μεγάλους αριθμούς στρατιωτών. Υπάρχουν δύο καθιερωμένοι τρόποι εξέτασης αίματος ενός πληθυσμού N ατόμων. Στη μέθοδο 1, το κάθε άτομο εξετάζεται χωριστά. Στη μέθοδο 2, τα δείγματα αίματος x ατόμων αναμειγνύονται σε ένα μεγάλο ενιαίο δείγμα. Αν η εξέταση του συνολικού δείγματος, π.χ. για κάποιον συγκεκριμένο ιό, αποβεί αρνητική, τότε το ίδιο θα ισχύει για όλα τα επιμέρους δείγματα των x ατόμων. Αν η εξέταση αποβεί θετική, τότε καθένα από τα x άτομα πρέπει να εξεταστεί χωριστά, οπότε απαιτούνται συνολικά $x + 1$ εξετάσεις. Αν χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο και εφαρμόσουμε θεωρία πιθανοτήτων, μπορεί να αποδειχθεί ότι, κατά μέσον όρο, ο ολικός αριθμός εξετάσεων y θα είναι

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right).$$

Για $q = 0{,}99$ και $N = 1000$, βρείτε μια ακέραια τιμή του x που ελαχιστοποιεί το y. Βρείτε επίσης την ακέραια τιμή του x που μεγιστοποιεί το y. (Αυτό το δεύτερο αποτέλεσμα δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον.) Η συγκεκριμένη μέθοδος ομαδικής εξέτασης χρησιμοποιήθηκε στις ΗΠΑ κατά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο και εξοικονόμησε 80% του μόχθου και του χρόνου που θα απαιτούσε μια εξέταση καθενός στρατιώτη χωριστά, αλλά όχι με την τιμή του q που δίδεται εδώ.

15. *Μεταφορά διαμέσου κυτταρικής μεμβράνης* Υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, το αποτέλεσμα της κίνησης μιας διαλυμένης ουσίας διαμέσου μιας κυτταρικής μεμβράνης περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y).$$

Στην εξίσωση αυτή, y είναι η συγκέντρωση της ουσίας μέσα στο κύτταρο και dy/dt είναι ο ρυθμός μεταβολής του y με τον χρόνο. Τα k, A, V, και c συμβολίζουν σταθερές, όπου το k καλείται *συντελεστής διαπερατότητας* (και χαρακτηρίζει τη μεμβράνη), A είναι το επιφανειακό εμβαδόν της μεμβράνης, V είναι ο όγκος του κυττάρου, και c η συγκέντρωση της ουσίας στο εξωτερικό του κυττάρου. Η εξίσωση λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συγκεντρώσεως στο εσωτερικό του κυττάρου είναι ανάλογος της διαφοράς της από τη συγκέντρωση στο εξωτερικό.

(α) Λύστε την εξίσωση για το $y(t)$, συμβολίζοντας με y_0 την αρχική συγκέντρωση $y(0)$.

(β) Βρείτε τη συγκέντρωση στάσιμης κατάστασης, $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Το πρόβλημα αυτό βασίστηκε στο βιβλίο *Some Mathematical Models in Biology*, με εκδοτική επιτροπή τους R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman, και R. F. Baum, rev. ed., December 1967, PB-202 364, pp. 101-103· διανομέας N.T.I.S., U.S. Department of Commerce.)

16. *Μάθετε γράφοντας: Άθροισμα τόξων εφαπτομένης* Παραστήστε γραφικά την $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ για $-5 \le x \le 5$. Εξηγήστε τη γραφική παράσταση που βλέπετε, κάνοντας χρήση μεθόδων του απειροστικού λογισμού. Τι είδους συμπεριφορά θα αναμένατε να έχει η f πέραν του διαστήματος $[-5, 5]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

17. *Μάθετε γράφοντας: Ημίτονο εις το ημίτονο* Παραστήστε γραφικά την $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ στο διάστημα $[0, 3\pi]$. Εξηγήστε τη γραφική παράσταση που βλέπετε.

18. *Αλλαγή της βάσεως λογαρίθμου*

(α) Βρείτε το $\lim \log_a 2$ καθώς $a \to 0^+, 1^-, 1^+$ και ∞.

(β) Σχεδιάστε την $y = \log_a 2$ συναρτήσει του a στο διάστημα $0 < a \le 4$.

7 Τεχνικές ολοκλήρωσης, ο κανόνας του l'Hôpital και γενικευμένα ολοκληρώματα

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Μέχρι τώρα είδαμε με ποιον τρόπο προκύπτουν τα ολοκληρώματα στην περιγραφή πραγματικών φαινομένων και στη μέτρηση ποσοτήτων του κόσμου που μας περιβάλλει, και ξέρουμε θεωρητικά πώς να τα υπολογίζουμε μέσω αντιπαραγώγων. Όσο όμως εξελίσσονται περισσότερο τα μοντέλα μας στην περιγραφή του φυσικού κόσμου, τόσο πιο περίπλοκα και δύσκολα στον υπολογισμό τους γίνονται τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πώς να μετατρέπουμε τα περίπλοκα αυτά ολοκληρώματα σε άλλα, απλούστερης μορφής, τα οποία μπορούμε να χειριστούμε. Ένας από τους στόχους του κεφαλαίου τούτου είναι να δείξει πώς φέρνουμε ένα άγνωστο ολοκλήρωμα σε κατάλληλη μορφή, από την οποία ο υπολογισμός του είναι εύκολος, απευθείας ή με χρήση πινάκων ολοκλήρωσης ή με υπολογιστή.

Ήδη, μας είναι γνωστές δύο τέτοιες τεχνικές: η εφαρμογή αλγεβρικών χειρισμών (π.χ. συμπλήρωση τετραγώνου) και η αντικατάσταση. Τις τεχνικές αυτές θα τις αναπτύξουμε περισσότερο στο παρόν κεφάλαιο, αλλά θα εισαγάγουμε και μια νέα ισχυρή τεχνική που ακούει στο όνομα ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Θα δείξουμε επίσης πώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε όλες τις ρητές συναρτήσεις. Τέλος, θα επεκταθούμε σε ολοκληρώματα με απειριζόμενο το ένα ή αμφότερα τα όριά τους, ή σε ολοκληρώματα όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση παύει να είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης. Λίγο προτού γίνει αυτό, θα παρουσιάσουμε τον κανόνα του l'Hôpital για τον υπολογισμό ορίων κλασμάτων με αριθμητές και παρονομαστές που τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Ο κανόνας του l'Hôpital ανακαλύφθηκε στην πραγματικότητα από τον Johann Bernoulli αλλά κατέληξε να αποδοθεί στον l'Hôpital αφότου ο τελευταίος τον έκανε ευρέως γνωστό σε ένα βιβλίο του.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Johann Bernoulli
(1667-1748)

7.1 Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης

Αλγεβρικές διαδικασίες

Καθώς είδαμε στην Ενότητα 4.1, υπολογίζουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα βρίσκοντας μια αντιπαράγωγο της ολοκληρωτέας συνάρτησης και προσθέτοντας σε αυτήν μια αυθαίρετη σταθερά. Στον Πίνακα 7.1 παρατίθενται οι κυριότεροι τύποι ολοκληρωμάτων τους οποίους έχουμε ώς τώρα υπολογίσει. Στο τέλος του βιβλίου δίδεται λεπτομερέστερος πίνακας τον οποίο θα αναλύσουμε στην Ενότητα 7.5.

25. (α) Ως προς τον άξονα x: $V = \frac{2\pi}{15}$· ως προς τον άξονα y: $V = \frac{\pi}{6}$

(β) Ως προς τον άξονα x: $V = \frac{2\pi}{15}$· ως προς τον άξονα y: $V = \frac{\pi}{6}$

27. (α) $\frac{5\pi}{3}$ (β) $\frac{4\pi}{3}$ (γ) 2π (δ) $\frac{2\pi}{3}$

29. (α) $\frac{4\pi}{15}$ (β) $\frac{7\pi}{30}$

31. (α) $\frac{24\pi}{5}$ (β) $\frac{48\pi}{5}$

33. (α) $\frac{9\pi}{16}$ (β) $\frac{9\pi}{16}$

35. Κυκλικοί δίσκοι: 2 ολοκληρώματα· κυκλικοί δακτύλιοι: 2 ολοκληρώματα· φλοιοί: 1 ολοκλήρωμα

Ενότητα 5.3, σελ. 406-407

1. 12 **3.** $\frac{53}{6}$

5. $\frac{123}{32}$ **7.** $\frac{99}{8}$

9. 2 **11.** $2\pi a$

13. 7 **15.** $\frac{21}{2}$

17. Ναι, $f(x) = \pm x + C$ όπου C είναι τυχών πραγματικός αριθμός.

19. (α) $y = \sqrt{x}$ από (1, 1) έως (4, 2)

(β) Μόνο μία. Γνωρίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης και την τιμή της συνάρτησης σε μία θέση x.

21. (α) $\int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ (γ) $\approx 6{,}13$

23. (α) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 y}\, dy$ (γ) $\approx 3{,}82$

25. (α) $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (y + 1)^2}\, dy$ (γ) $\approx 9{,}29$

27. (α) $\int_{0}^{\pi/6} \sec x\, dx$ (γ) $\approx 0{,}55$

29. 21.07 cm

Ενότητα 5.4, σελ. 414-418

1. 960 J **3.** 780 J

5. 23.480 J **9.** 400 N/m

11. 4 cm, 0,08 J

13. (α) 1.207.300 N/m (β) 600 J, 181 J

15. (α) 2.116.800 J (β) 1 h και 44 min

(γ) $W = \int_0^{10} 9.800(12y)\, dy = 529.200$ J $\Rightarrow t = W/340 =$ 1556 sec $\approx$ 26 min

(δ) 9.780 N/m³: (α) 2.112.480 J (β) 1 h και 44 min
9.832 N/m³: (α) 2.123.712 J (β) 1 h και 44 min

17. 38.484.510 J **19.** 9.208.978 J

21. (α) 5.432.425 J (β) 6.000.720 J

23. 15.073.100,75 J **27.** $\approx$ 115 J

29. $\approx$ 88 J **31.** $\approx$ 147,2 J

33. (α) $r(y) = 18 - \sqrt{15 - (y - 99)^2}$ για $99 \le y \le 114$ m

(β) $\Delta V \approx \pi[18 - \sqrt{225 - (y - 99)}]^2\, \Delta y$

(γ) $W \approx 8{,}06 \cdot 10^7$ J

35. 0,58 J **37.** $5{,}144 \times 10^{10}$ J

Ενότητα 5.5, σελ. 423-425

1. 33.075 N **3.** 55.125 N

5. (α) 182.933,3 N (β) 187.661,2 N

7. 5.810 N **9.** 6.533,3 N

11. (α) 14.559,5 N (β) 3 m

13. (α) $(x/2)^2 + (y/5)^2 = 1$

(β) $L(y) = {}^4/_5\sqrt{25 - y^2}$

(γ) $2{,}586 \cdot 10^7$ N

15. (α) $\frac{wb}{2}$ (β) $\left(\frac{wb}{2}\right)ab$

17. (α) 1587,6 N (β) 19 cm

(γ) Όχι

19. 20,3 N **21.** 29 m³

Ενότητα 5.6, σελ. 434-436

1. 2 m **3.** $\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}\right)$

5. $M_0 = 8, M = 8, \bar{x} = 1$

7. $M_0 = \frac{15}{2}, M = \frac{9}{2}, \bar{x} = \frac{5}{3}$

9. $M_0 = \frac{73}{6}, M = 5, \bar{x} = \frac{73}{30}$ **11.** $M_0 = 3, M = 3, \bar{x} = 1$

13. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{12}{5}$ **15.** $\bar{x} = 1, \bar{y} = -\frac{3}{5}$

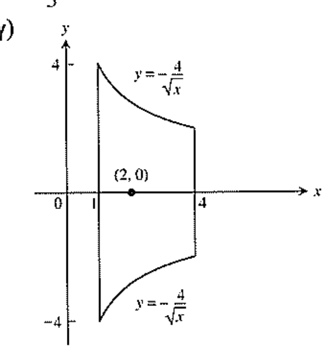
17. $\bar{x} = \frac{16}{105}, \bar{y} = \frac{8}{15}$ **19.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

21. $\bar{x} = 1, \bar{y} = -\frac{2}{5}$ **23.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4 - \pi}$

25. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{1}{2}$

27. (α) $\frac{224\pi}{3}$ (β) $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0,$

(γ)



31. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{3}$ **33.** $\bar{x} = \frac{a}{3}, \bar{y} = \frac{b}{3}$

35. $\frac{13\delta}{6}$ **37.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 5, σελ. 437-439

1. $\frac{9\pi}{280}$ **3.** π^2

5. $\frac{72\pi}{35}$

7. (α) 2π (β) π (γ) $\frac{12\pi}{5}$ (δ) $\frac{26\pi}{5}$

9. (α) 8π (β) $\frac{1088\pi}{15}$ (γ) $\frac{512\pi}{15}$

11. $\frac{\pi(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$

13. (α) $\frac{16\pi}{15}$ (β) $\frac{8\pi}{5}$ (γ) $\frac{8\pi}{3}$ (δ) $\frac{32\pi}{5}$

15. $\frac{28\pi}{3}$ **17.** $\frac{10}{3}$

19. $\frac{285}{8}$ **21.** 10

23. $\frac{9\pi}{2}$ **25.** 4640 J

27. 10 J, 30 J **29.** $\approx$ 606.131 J

31. 26.505π J, 245 sec **33.** 1411,2 N

35. 12.413,3 N **37.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{8}{5}$

39. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{12}{5}$ **41.** $\bar{x} = \frac{9}{5}, \bar{y} = \frac{11}{10}$

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 5, σελ. 439-440

1. $f(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{\pi}}$

3. $f(x) = \sqrt{C^2 - 1}\, x + a$, όπου $C \ge 1$

5. $\approx$ 8,93 m

9. Το κεντροειδές βρίσκεται στο σημείο $\left(0, \frac{n}{2n + 1}\right)$.

Η οριακή θέση του κεντροειδούς είναι $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

13. (α) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{3\pi(a + b)}$

(β) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2b}{\pi}$ που είναι το κεντροειδές ενός τεταρτοκυκλίου ακτίνας a.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ενότητα 6.1, σελ. 448-450

1. $\frac{1}{x}$ **3.** $-\frac{1}{x}$

5. $\frac{3}{x}$ **7.** $2(\ln t) + (\ln t)^2$

9. $x^3 \ln x$ **11.** $\frac{-\ln t}{t^2}$

13. $1 - \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$ **15.** $\frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$

17. $\sec\theta$ **19.** $\frac{2}{t(1 - \ln t)^2}$

21. $\frac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$ **23.** $2x \ln|x| - x \ln\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

25. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ **27.** $\ln|y^2 - 25| + C$

29. $\ln 3$ **31.** $(\ln 2)^2$

33. $\frac{1}{\ln 4}$ **35.** $\ln|6 + 3\tan t| + C$

37. $\ln 2$ **39.** $\ln 27$

41. $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

43. $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{x(x + 1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}\right) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}$

45. $\sqrt{\theta + 3}\,(\sin\theta)\left(\frac{1}{2(\theta + 3)} + \cot\theta\right)$

47. $t(t + 1)(t + 2)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t + 2}\right) = 3t^2 + 6t + 2$

49. $\frac{\theta\sin\theta}{\sqrt{\sec\theta}}\left(\frac{1}{\theta} + \cot\theta - \frac{1}{2}\tan\theta\right)$

51. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} - \frac{2x}{x^2 + 1}\right)$

53. $y = x + \ln|x| + 2$ **55.** $\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right) + C$

57. $\frac{3\ln 2}{2}$ **59.** $(\ln 10)\ln|\ln x| + C$

61. $\frac{1}{\theta\ln 2}$ **63.** $\frac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$

65. $\sin(\log_7\theta) + \frac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

67. (α) Μέγιστο (max) = 0 για $x = 0$,

ελάχιστο (min) = $-\ln 2$ για $x = \frac{\pi}{3}$

(β) Μέγιστο (max) = 1 για $x = 1$,

ελάχιστο (min) = $\cos(\ln 2)$ για $x = \frac{1}{2}$ και για $x = 2$

69. $\ln 16$ **71.** $4\pi\ln 4$

73. $\pi\ln 16$ **75.** (β) 0,00469

Ενότητα 6.2, σελ. 458-461

1. $-5e^{-5x}$ **3.** $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2x\right)e^{(4\sqrt{x} + x^2)}$

5. x^2e^x **7.** $\frac{1}{\theta} - 1$

9. $\frac{\cos t - \sin t}{\sin t}$ **11.** $\frac{1}{2\theta(1 + \theta^{1/2})}$

13. $\frac{\sin x}{x}$ **15.** $\frac{ye^y\cos x}{1 - ye^y\sin x}$

17. $\frac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3\cos(x + 3y)}$ **19.** $\frac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$

21. $8e^{(x+1)} + C$ **23.** $-2e^{-\sqrt{r}} + C$

25. $-e^{1/x} + C$ **27.** e

29. $\frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t} + C$ **31.** $\ln(1 + e^r) + C$

33. $2^x\ln 2$ **35.** $\pi x^{(\pi - 1)}$

37. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$ **39.** $(1 - e)t^{-e}$

41. $\frac{-2}{(x + 1)(x - 1)}$

43. $(\cot\theta - \tan\theta - 1 - \ln 2)\left(\frac{1}{\ln 7}\right)$

45. $(x + 1)^x\left(\frac{x}{x + 1} + \ln(x + 1)\right)$

47. $(\sin x)^x(\ln\sin x + x\cot x)$

49. $(x^{\ln x})\left(\frac{\ln x^2}{x}\right)$

51. $\frac{1}{\ln 2}$

53. $\frac{2^{\ln 2} - 1}{\ln 2}$

55. $\frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + C$

57. $\frac{1}{\ln 2}$

59. $y = 1 - \cos(e^t - 2)$

61. $y = 2(e^{-x} + x) - 1$

63. Μέγιστο (max): 1 για $x = 0$,
ελάχιστο (min): $2 - 2\ln 2$ για $x = \ln 2$

65. Ολικό μέγιστο $\frac{1}{2e}$ για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

67. Έστω $x = \frac{r}{k} \Rightarrow k = \frac{r}{x}$ και καθώς $k \to \infty, x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{r/x} =$$

$\lim_{r\to 0}((1 + x)^{1/x})^r = (\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x})^r$,
εφόσον η u^r είναι συνεχής. Ωστόσο, $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$ (λόγω του Θεωρήματος 2)· συνεπώς,

$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = e^r$.

77. (α) $y = \frac{1}{e}x$
(β) Διότι η καμπύλη του $\ln x$ κείται χαμηλότερα της ευθείας για κάθε θετικό $x \neq e$
(γ) Πολλαπλασιάζοντας με e, έχουμε $e(\ln x) < x$, ή $\ln x^e < x$.
(δ) Παίρνουμε το εκθετικό κάθε μέλους της ανισότητας του ερωτήματος (γ).
(ε) Θέτουμε $x = \pi$ οπότε προκύπτει ότι $\pi^e < e^\pi$.

79. (α) $L(x) = 1 + (\ln 2)x \approx 0{,}69x + 1$

Ενότητα 6.3, σελ. 467-468

1. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

3. $\frac{1}{|2s + 1|\sqrt{s^2 + s}}$

5. $\frac{-1}{\sqrt{1 - t^2}}$

7. $\frac{1}{(\tan^{-1}x)(1 + x^2)}$

9. $-\frac{-e^{-t}}{\sqrt{1 - (e^{-t})^2}} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}$

11. 0

13. $\sin^{-1} x$

15. $\frac{1}{2}\sin^{-1}(2x) + C$

17. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left|\frac{5x}{\sqrt{2}}\right| + C$

19. $\frac{\pi}{16}$

21. $\frac{3}{2}\sin^{-1} 2(r - 1) + C$

23. $\frac{1}{2}\sin^{-1} y^2 + C$

25. $\frac{\pi}{12}$

27. $\sin^{-1}(x - 2) + C$

29. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y - 1}{2}\right) + C$

31. $\sec^{-1}|x + 1| + C$

33. $e^{\sin^{-1}x} + C$

35. $\ln|\tan^{-1} y| + C$

41. $y = \sin^{-1}(x)$

43. $y = \sec^{-1}(x) + \frac{2\pi}{3}, x > 1$

51. $\frac{\pi^2}{2}$

53. (α) $\frac{\pi^2}{2}$ (β) 2π

Ενότητα 6.4, σελ. 479-482

1. (α) $2y' + 3y = 2(-e^{-x}) + 3e^{-x} = e^{-x}$
(β) $2y' + 3y = 2\left(-e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-(3/2)x}\right) + 3(e^{-x} + e^{-(3/2)x}) = e^{-x}$
(γ) $2y' + 3y = 2\left(-e^{-x} - \frac{3}{2}Ce^{-(3/2)x}\right) + 3(e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}) = e^{-x}$

3. $y' = e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})(x - 2) \Rightarrow y' = e^{-x^2} - 2xy\cdot y(2) = (2 - 2)e^{-2^2} = 0$

5. $\frac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$

7. $e^y - e^x = C$

9. $-x + 2\tan\sqrt{y} = C$

11. $e^{-y} + 2e^{\sqrt{x}} = C$

13. $y = \sin(x^2 + C)$

15. (α) $p = p_0e^{kh}$, $p_0 = 1013\cdot k \approx -0{,}121$
(β) $\approx 2{,}389$ millibar
(γ) $\approx 0{,}977$ km

17. $\approx 585{,}35$ kg

19. $\approx 92{,}1$ sec

21. (α) $\frac{dQ}{dt} = -kQ + r$, όπου k μια θετική σταθερά
(β) $Q(t) = \frac{r}{k} + \left(Q_0 - \frac{r}{k}\right)e^{-kt}$
(γ) $\frac{r}{k}$

23. (α) $A_0e^{0,2}$
(β) 17,33 έτη· 27,47 έτη

25. 0,585 ημέρες

29. (α) 17,5 min (β) 13,26 min

31. -3°C

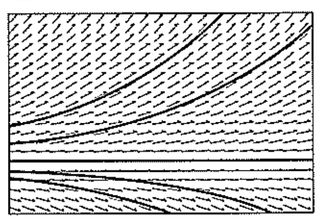
33. Περίπου 6658 έτη

35. Ηλικίας 41 ετών

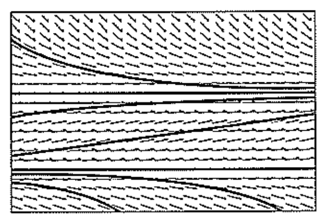
37. (α) 168,5 m (β) 41,13 sec

39. $s(t) = 4{,}91\,(1 - e^{-(22,36/39,92)t})$

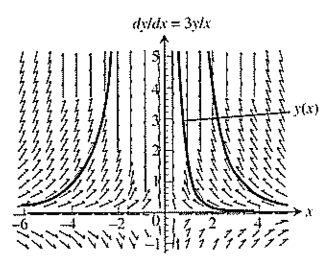
41.



43.



45.



Ενότητα 6.5, σελ. 489-491

1. $y = \frac{e^x + C}{x}, x > 0$

3. $y = \frac{C - \cos x}{x^3}, x > 0$

5. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}, x > 0$

7. $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \frac{t^3}{3(t - 1)^4} - \frac{t}{(t - 1)^4} + \frac{C}{(t - 1)^4}$

13. $r = (\csc\theta)(\ln|\sec\theta| + C), 0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

17. $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x + 1}$

21. $y = y_0e^{kt}$

23. Η (β) είναι σωστή, αλλά η (α) όχι.

25. (α) 1 kg/min
(β) $(100 + t)$ gal
(γ) $4\left(\frac{y}{100 + t}\right)$ kg/min
(δ) $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{4y}{100 + t}$, $y(0) = 5$,

$y = 0{,}2(100 + t) - (15/[1 + (t/100)]^4$

(ε) Συγκέντρωση = $y(25)$ / (ποσότητα άλμης στη δεξαμενή) = 18,86/125 ≈ 0,15 kg/L

27. $y(27{,}8) \approx 14{,}8$ kg, $t \approx 27{,}8$ min

29. $t = \frac{L}{R}\ln 2$ sec

31. (α) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} = \frac{V}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0{,}95\frac{V}{R}$ amp
(β) 86%

Ενότητα 6.6, σελ. 501-503

1. $y_{\text{ακριβής}}(0{,}6) = 1 - e^{-39/50} \approx 0{,}5416$, $y_1 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}392$, $y_3 = 0{,}5622$

3. $y_{\text{ακριβής}}(1{,}5) = 3e^{-39/50} \approx 14{,}2765$, $y_1 = 4{,}2$, $y_2 = 6{,}216$, $y_3 = 9{,}697$

5. $y \approx 2{,}48832$, η ακριβής τιμή είναι e.

7.

x	z	y-προσεγγισ.	y-ακριβής	Σφάλμα
0	1	3	3	0
0,2	4,2	4,608	4,658122	0,050122
0,4	6,81984	7,623475	7,835089	0,211614
0,6	11,89262	13,56369	14,27646	0,712777

9. (α) $P(t) = \frac{150}{1 + 24e^{-0.225t}}$
(β) Περίπου 17,21 εβδομάδες· 21,28 εβδομάδες

11. (α) $y(t) = \frac{8 \times 10^7}{1 + 4e^{-0.71t}} \Rightarrow y(1) \approx 2{,}69671 \times 10^7$ kg
(β) $t \approx 1{,}95253$ έτη

13. (α) $y = 2e^t - 1$
(β) $y(t) = \frac{400}{1 + 199e^{-200t}}$

15. (α) $P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}$
(β) Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $t = \frac{1}{kP_0}$

17. Η μέθοδος Euler δίνει $y \approx 3{,}45835$, ενώ η ακριβής λύση είναι $y = 1 + e \approx 3{,}71828$

19. $y \approx -0{,}2272$, ενώ η ακριβής λύση είναι $\frac{1}{1 - 2\sqrt{5}} \approx -0{,}2880$.

21. (α) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $y(3) = -0{,}2$
(β) $-0{,}1851$, σφάλμα ≈ 0,0149
(γ) $-0{,}1929$, σφάλμα ≈ 0,0071
(δ) $-0{,}1965$, σφάλμα ≈ 0,0035

23. Η ακριβής λύση είναι $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, και άρα $y(3) = -0{,}2$. Για να βρούμε την προσεγγιστική λύση, θέτουμε $z_n = y_{n-1} + 2y_{n-1}^2x_{n-1}\,dx$ και $y_n = y_{n-1} + (y_{n-1}^2(x_{n-1} - 1) + z_n^2(x_n^2 - 1))\,dx$ με αρχικές τιμές $x_0 = 2$ και $y_0 = -\frac{1}{2}$ Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας στα ερωτήματα (α) έως (δ).
(α) $-0{,}2024$, σφάλμα ≈ 0,0024
(β) $-0{,}2005$, σφάλμα ≈ 0,0005
(γ) $-0{,}2001$, σφάλμα ≈ 0,0001
(δ) Κάθε φορά που το βήμα υποδιπλασιάζεται, το σφάλμα περίπου υποτετραπλασιάζεται.

Ενότητα 6.7, σελ. 510-513

1. $\cosh x = \frac{5}{4}$, $\tanh x = -\frac{3}{5}$, $\coth x = -\frac{5}{3}$, $\operatorname{sech} x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{csch} x = -\frac{4}{3}$

3. $\sinh x = \frac{8}{15}$, $\tanh x = \frac{8}{17}$, $\coth x = \frac{17}{8}$, $\operatorname{sech} x = \frac{15}{17}$, $\operatorname{csch} x = \frac{15}{8}$

5. $x + \frac{1}{x}$

7. e^{5x}

9. e^{4x}

13. $2\cosh\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t} + \frac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

17. $\coth z$

19. $(\ln\operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta\tanh\theta)$

21. $\tanh^3 v$

23. 2

25. $\frac{1}{2\sqrt{x(1 + x)}}$

27. $\frac{1}{1 + \theta} - \tanh^{-1}\theta$

29. $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1}\sqrt{t}$

31. $-\operatorname{sech}^{-1} x$

33. $\frac{\ln 2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$

41. $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

43. $12\sinh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) + C$

45. $7\ln(e^{x/7} + e^{-x/7}) + C$

47. $\tanh\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

49. $-2\operatorname{sech}\sqrt{t} + C$

51. $\ln\frac{5}{2}$

53. $\frac{3}{32} + \ln 2$

55. $e - e^{-1}$

57. $\frac{3}{4}$

59. $\frac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$

61. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

63. $\frac{-\ln 3}{2}$

65. $\ln 3$

67. (α) $\sinh^{-1}(\sqrt{3})$ (β) $\ln(\sqrt{3} + 2)$

69. (α) $\coth^{-1}(2) - \coth^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$ (β) $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

71. (α) $-\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(β) $-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\left(\frac{12}{13}\right)}\right) + \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\left(\frac{4}{5}\right)}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

73. (α) 0 (β) 0

75. (β) i. $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$

ii. $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

77. (β) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ (γ) $\approx 54{,}2$ m/sec

79. $y = \operatorname{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$

81. 2π

83. $\frac{6}{5}$

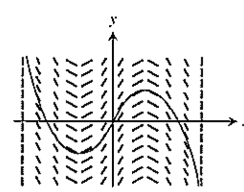
87. (β) Η τομή προκύπτει κοντά στο σημείο (0,042, 0,672)
(γ) $a \approx 0{,}0417525$ (δ) $\approx 47{,}90$ N

Ασκήσεις Κεφαλαίου 6, σελ. 514-518

1. $-2e^{-x/5}$
3. xe^{4x}
5. $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} = 2\cot\theta$
7. $\frac{2}{(\ln 2)x}$
9. $-8^{-t}(\ln 8)$
11. $18x^{2{,}6}$
13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$
15. $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, 0 < u < 1$
17. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}$
19. $\tan^{-1}(t) + \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2t}$
21. $\frac{1-z}{\sqrt{z^2-1}} + \sec^{-1}z, z > 1$
23. $-1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
25. $\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \tan 2x\right)$
27. $5\left[\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+3}\right)$
29. $\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}(\ln\sqrt{\sin\theta} + \theta\cot\theta)$
31. $-\cos e^x + C$
33. $\tan(e^x - 7) + C$
35. $e^{\tan x} + C$
37. $\frac{-\ln 7}{3}$
39. $\ln 8$
41. $\ln\left(\frac{9}{25}\right)$
43. $-[\ln|\cos(\ln v)|] + C$
45. $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$
47. $-\cot(1+\ln r) + C$
49. $\frac{1}{2\ln 3}(3^{x^2}) + C$
51. $3\ln 7$
53. $\frac{15}{16} + \ln 2$
55. $e - 1$
57. $\frac{1}{6}$
59. $\frac{9}{14}$
61. $\frac{1}{3}[(\ln 4)^3 - (\ln 2)^3]$ δηλ. $\frac{7}{3}(\ln 2)^3$
63. $\frac{9\ln 2}{4}$
65. π
67. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
69. $\sec^{-1}|2y| + C$
71. $\frac{\pi}{12}$
73. $\sin^{-1}(x+1) + C$
75. $\frac{\pi}{2}$
77. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{t+1}{3}\right) + C$
79. $\frac{1}{3}$
81. Ολικό μέγιστο $= 0$ για $x = \frac{e}{2}$, ολικό ελάχιστο $= -0{,}5$ για $x = 0{,}5$
83. 1
85. $\frac{1}{e}$ m/sec
87. (α) Ολικό μέγιστο $\frac{2}{e}$ για $x = e^2$,
σημείο καμπής $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$,
κοίλα άνω στο $(e^{8/3}, \infty)$, κοίλα κάτω στο $(0, e^{8/3})$

(β) Ολικό μέγιστο 1 για $x = 0$,
σημεία καμπής $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,
κοίλα άνω στο $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$,
κοίλα κάτω στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(γ) Ολικό μέγιστο 1 για $x = 0$, σημείο καμπής $\left(1, \frac{2}{e}\right)$, κοίλα άνω στο $(1, \infty)$,κοίλα κάτω στο $(-\infty, 1)$
89. 18.935 έτη
91. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ μονάδες σε μήκος επί $\frac{1}{\sqrt{e}}$ μονάδες σε ύψος,
$A = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0{,}43$ μονάδες^2
93. $\ln 5x - \ln 3x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$
95. $20(5 - \sqrt{17})$ m
99. $y = \ln(-e^{-x-2} + 2e^{-2})$
101. $y = \frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1\right)$
103.



105. Θέτουμε $z_n = y_{n-1} + ((2 - y_{n-1})(2x_{n-1} + 3))(0{,}1)$ και $y_n = y_{n-1} + \left(\frac{(2 - y_{n-1})(2x_{n-1} + 3) + (2 - z_n)(2x_n + 3)}{2}\right)(0{,}1)$ με αρχικές τιμές $x_0 = -3$, $y_0 = 1$, και 20 βήματα. Χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή γραφικών ή κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, βρίσκουμε τις τιμές του ακόλουθου πίνακα.

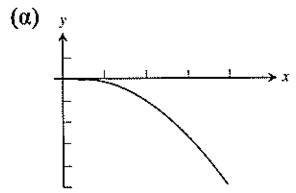
x	y
−3	1
−2,9	0,6680
−2,8	0,2599
−2,7	−0,2294
−2,6	−0,8011
−2,5	−1,4509
−2,4	−2,1687
−2,3	−2,9374
−2,2	−3,7333
−2,1	−4,5268
−2,0	−5,2840

x	y
−1,9	−5,9686
−1,8	−6,5456
−1,7	−6,9831
−1,6	−7,2562
−1,5	−7,3488
−1,4	−7,2553
−1,3	−6,9813
−1,2	−6,5430
−1,1	−5,9655
−1,0	−5,2805

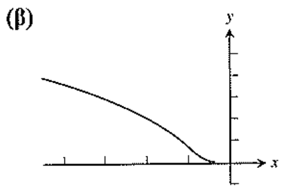
107. Θέτουμε $y_n = y_{n-1} + \left(\frac{x_{n-1}^2 - 2y_{n-1} + 1}{x_{n-1}}\right)(0{,}05)$ με αρχικές τιμές $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, και 60 βήματα.
Χρησιμοποιώντας υπολογιστή γραφικών ή κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, βρίσκουμε $y(4) \approx 4{,}4974$.

109. Θέτουμε $z_n = y_{n-1} - \left(\frac{x_{n-1}^2 + y_{n-1}}{e^{y_{n-1}} + x_{n-1}}\right)(dx)$ και $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_{n-1}^2 + y_{n-1}}{e^{y_{n-1}} + x_{n-1}} + \frac{x_n^2 + z_n}{e^{z_n} + x_n}\right)(dx)$ με τιμές εκκίνησης $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, και βήματα 0,1 και −0,1.
Χρησιμοποιώντας υπολογιστή γραφικών ή κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, παράγουμε τα ακόλουθα γραφήματα::

(α)



(β)



111. y(ακριβής) $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y \approx 0{,}4$; η ακριβής τιμή είναι $\frac{1}{2}$

113. y(ακριβής) $= -e^{(x^2-1)/2}$; $y \approx -3{,}4192$; η ακριβής τιμή είναι $-e^{3/2} \approx -4{,}4817$.

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 6, σελ. 518-520

1. $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{2\ln 2}, 2\cdot 1$
3. $\frac{2}{17}$
9. Κάνοντας χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού παίρνουμε $y' = \sin(x^2) + 3x^2 + 1$. Κατόπιν παραγωγίζουμε και πάλι και επίσης επαληθεύουμε τις αρχικές συνθήκες.
11. $\pi\ln 2$
13. (β) 61°
15. (α) $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$
(β) Λύση σταθερής κατάστασης: $y_\infty = c$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ενότητα 7.1, σελ. 526-528

1. $2\sqrt{8x^2+1} + C$
3. $2(\sin v)^{3/2} + C$
5. $\ln 5$
7. $2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$
9. $-\frac{1}{7}\ln|\sin(3 - 7x)| + C$
11. $-\ln|\csc(e^\theta + 1) + \cot(e^\theta + 1)| + C$
13. $3\ln\left|\sec\frac{t}{3} + \tan\frac{t}{3}\right| + C$
15. $-\ln|\csc(s - \pi) + \cot(s - \pi)| + C$
17. 1
19. $e^{\tan v} + C$
21. $\frac{3^{x+1}}{\ln 3} + C$
23. $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$
25. $3\tan^{-1}3u + C$
27. $\frac{\pi}{18}$
29. $\sin^{-1}s^2 + C$
31. $6\sec^{-1}|5x| + C$
33. $\tan^{-1}e^x + C$
35. $\ln(2 + \sqrt{3})$
37. 2π
39. $\sin^{-1}(t - 2) + C$
41. $\sec^{-1}|x + 1| + C$, για $|x + 1| > 1$
43. $\tan x - 2\ln|\csc x + \cot x| - \cot x - x + C$
45. $x + \sin 2x + C$
47. $x - \ln|x + 1| + C$
49. $7 + \ln 8$
51. $2t^2 - t + 2\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$
53. $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$
55. $\sqrt{2}$
57. $\tan x - \sec x + C$
59. $\ln|1 + \sin\theta| + C$
61. $\cot x + x + \csc x + C$
63. 4
65. $\sqrt{2}$
67. 2
69. $\ln|\sqrt{2} + 1| - \ln|\sqrt{2} - 1|$
71. $4 - \frac{\pi}{2}$
73. $-\ln|\csc(\sin\theta) + \cot(\sin\theta)| + C$
75. $\ln|\sin x| + \ln|\cos x| + C$
77. $12\tan^{-1}(\sqrt{y}) + C$
79. $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right| + C$
81. $\ln|\sec(\tan t)| + C$
83. (α) $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$
(β) $\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta + C$
(γ) $\int\cos^9\theta\,d\theta = \int\cos^8\theta(\cos\theta)\,d\theta = \int(1 - \sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,d\theta$
85. (α) $\int\tan^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \int\tan\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + \ln|\cos\theta| + C$
(β) $\int\tan^5\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\tan^4\theta - \int\tan^3\theta\,d\theta$
(γ) $\int\tan^7\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\tan^6\theta - \int\tan^5\theta\,d\theta$
(δ) $\int\tan^{2k+1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2k}\tan^{2k}\theta - \int\tan^{2k-1}\theta\,d\theta$
87. $2\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})$
89. π^2
91. $\ln(2 + \sqrt{3})$

Ενότητα 7.2, σελ. 534-536

1. $-2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$
3. $t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$
5. $\ln 4 - \frac{3}{4}$