# 4 Ολοκλήρωση

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Έχουμε δει πώς οι πρωτεργάτες του απειροστικού λογισμού οδηγήθηκαν από την ανάγκη υπολογισμού στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής στη διερεύνηση κλίσεων εφαπτόμενων ευθειών κι από εκεί στην παράγωγο, για να καταλήξουν τελικά σε αυτό που ονομάζουμε *διαφορικό* λογισμό. Είχαν, ωστόσο, συναίσθηση ότι οι παράγωγοι μας λένε μόνο τη μισή αλήθεια. Κι αυτό γιατί παράλληλα με τις μεθόδους υπολογισμού τού πώς μεταβάλλονται οι συναρτήσεις μια δεδομένη χρονική στιγμή, χρειαζόταν επίσης μια μέθοδος περιγραφής τού πώς αθροίζονται οι στιγμιαίες αυτές μεταβολές σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα για να μας δώσουν το συνολικό αποτέλεσμα (τη συνάρτηση). Δηλαδή, εξετάζοντας πώς μια συμπεριφορά *μεταβάλλεται*, οι επιστήμονες επιζητούσαν να μάθουν κάτι για την ίδια τη συμπεριφορά αυτή. Παραδείγματος χάριν, από τη γνώση της ταχύτητας ενός κινούμενου σώματος, επιθυμούσαν να προσδιορίσουν τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Έτσι άρχισαν να μελετούν επίσης *εμβαδά επιφανειών* που ορίζονται από καμπύλες, κάτι που οδήγησε τελικά στον δεύτερο κύριο κλάδο του λογισμού, τον ολοκληρωτικό λογισμό.

Όταν είχαν πια αναπτύξει αφενός τον λογισμό της εύρεσης κλίσεων εφαπτομένων και αφετέρου τον λογισμό του υπολογισμού εμβαδών που ορίζονται από καμπύλες —δύο γεωμετρικές λειτουργίες που φαινομενικά δεν είχαν τίποτε κοινό μεταξύ τους— η πρόκληση για τον Νεύτωνα και τον Leibniz ήταν να αποδείξουν ότι αυτό που διαισθητικά υποπτεύονταν ήταν όντως αληθές. Η ανακάλυψη της σύζευξης μεταξύ των δύο κλάδων (που καλείται *θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού*) σήμαινε πλέον ότι ο ενιαίος συνδυασμός διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού θα γινόταν το ισχυρότερο εργαλείο που απέκτησαν ποτέ οι μαθηματικοί για την κατανόηση του κόσμου στον οποίο ζούμε.

## 4.1 Αόριστα ολοκληρώματα, διαφορικές εξισώσεις και μαθηματικά μοντέλα

Εύρεση αντιπαραγώγων: Αόριστα ολοκληρώματα • Προβλήματα αρχικών τιμών • Μαθηματικά μοντέλα

CD-ROM Δικτυότοπος

Η διαδικασία προσδιορισμού της συναρτήσεως $f(x)$ όταν γνωρίζουμε μια τιμή της και την παράγωγό της $f'(x)$ περιλαμβάνει δύο στάδια. Πρώτα βρίσκουμε έναν τύπο που παρέχει όλες τις συναρτήσεις των οποίων η $f$ είναι η παράγωγος. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται *αντιπαράγωγοι* της $f$, και ο τύπος που τις περιέχει όλες λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της $f$. Το επόμενο στάδιο είναι να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή τιμή της $f$ για να επιλέξουμε τη συγκεκριμένη αντιπαράγωγο που θέλουμε από όλες εκείνες που περιγράφονται από το αόριστο ολοκλήρωμα.

Η εύρεση ενός τύπου που περιέχει όλες τις αντιπαραγώγους μιας συναρτήσεως μπορεί να φαίνεται ότι είναι ανέφικτο, ή κάτι που απαιτεί κάποιο μαγικό τέχνασμα, ωστόσο τα πράγματα δεν είναι καθόλου έτσι. Αν μπορούμε να βρούμε έστω και μία αντιπαράγωγο, τότε μπορούμε να τις βρούμε όλες. Και αυτό εξαιτίας των δυο πρώτων πορισμάτων του θεωρήματος μέσης τιμής της Ενότητας 3.2.

## Εύρεση αντιπαραγώγων: Αόριστα ολοκληρώματα

Ξεκινούμε με έναν ορισμό.

**Ορισμός** Αντιπαράγωγος συναρτήσεως

Μια συνάρτηση $F(x)$ είναι **αντιπαράγωγος** της συναρτήσεως $f(x)$ εάν

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x$ στο πεδίο ορισμού της $f$. Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $f$ είναι το **αόριστο ολοκλήρωμα** της $f$ ως προς $x$, και συμβολίζεται ως

$$\int f(x)\,dx$$

Το σύμβολο $\int$ είναι το **σύμβολο ολοκλήρωσης.** Η συνάρτηση $f$ είναι η **ολοκληρωτέα συνάρτηση** του ολοκληρώματος, ενώ $x$ είναι η **μεταβλητή ολοκλήρωσης.**

CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία
Ολοκλήρωμα

Σύμφωνα με το Πόρισμα 2 του θεωρήματος μέσης τιμής (Ενότητα 3.2), εφόσον βρούμε μία αντιπαράγωγο $F$ της συναρτήσεως $f$, οι υπόλοιπες αντιπαράγωγοι προκύπτουν αν προσθέσουμε σε αυτήν μια σταθερά. Δηλώνουμε συμβολικά την πρόταση αυτή ως εξής:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (1)}$$

Η σταθερά $C$ είναι η **σταθερά της ολοκλήρωσης** ή **αυθαίρετη (προσθετική) σταθερά.** Η Εξίσωση (1) διαβάζεται, «Το αόριστο ολοκλήρωμα της $f$ ως προς $x$ ισούται με $F(x) + C$». Μόλις βρούμε την $F(x) + C$, λέμε ότι **ολοκληρώσαμε** την $f$ και **υπολογίσαμε** το ολοκλήρωμα.

**Παράδειγμα 1** Εύρεση ενός αόριστου ολοκληρώματος

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int 2x\,dx$.

**Λύση**

$$\int 2x\,dx = \overbrace{x^2}^{\text{μια αντιπαράγωγος του } 2x} + \underbrace{C}_{\text{η αυθαίρετη σταθερά}}$$

Ο τύπος $x^2 + C$ παράγει όλες τις αντιπαραγώγους της συναρτήσεως $2x$. Οι συναρτήσεις $x^2 + 1$, $x^2 - \pi$, και $x^2 + \sqrt{2}$ είναι όλες αντιπαράγωγοι της συναρτήσεως $2x$, όπως μπορείτε να επαληθεύσετε και μόνοι σας κάνοντας την παραγώγιση.

Πολλά από τα αόριστα ολοκληρώματα που χρησιμοποιούν οι επιστήμονες βρίσκονται αντιστρέφοντας τύπους παραγώγων. Για να δείτε τι εννοούμε κοιτάξτε τον Πίνακα 4.1, ο οποίος παραθέτει μερικούς βασικούς ολοκληρωτικούς τύπους μαζί με τους αντίστοιχους τύπους παραγώγων.

Στην περίπτωση που διερωτάστε γιατί απουσιάζουν απο τον πίνακα τα ολοκληρώματα της εφαπτομένης, συνεφαπτομένης, τέμνουσας, και συντέμνουσας, ο λόγος είναι ότι οι συνήθεις τύποι των ολοκληρωμάτων αυτών περιέχουν λογαρίθμους. Στην Ενότητα 4.5, θα δούμε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις διαθέτουν αντιπαραγώγους, αλλά θα περιμένουμε μέχρι τα Κεφάλαια 6 και 7 για να μάθουμε ποιες είναι αυτές.



**Πίνακας 4.1** Τύποι ολοκλήρωσης

| Αόριστο ολοκλήρωμα | Παράγωγος της αντιπαραγώγου |
|---|---|
| **1.** $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad$ ($n$ ρητός, $\neq -1$) | $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ |
| $\int dx = \int 1\,dx = x + C$ (ειδική περίπτωση) | $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$ |
| **2.** $\int \sin kx\,dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$ | $\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$ |
| **3.** $\int \cos kx\,dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$ | $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$ |
| **4.** $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ | $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ |
| **5.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$ | $\dfrac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$ |
| **6.** $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ | $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ |
| **7.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$ | $\dfrac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$ |

**Παράδειγμα 2** Επιλεγμένα ολοκληρώματα από τον Πίνακα 4.1

(α) $\int x^5\,dx = \dfrac{x^6}{6} + C$ — Τύπος 1 για $n = 5$

(β) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$ — Τύπος 1 για $n = -1/2$

(γ) $\int \sin 2x\,dx = -\dfrac{\cos 2x}{2} + C$ — Τύπος 2 για $k = 2$

(δ) $\int \cos\dfrac{x}{2}\,dx = \int \cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)dx = \dfrac{\sin(1/2)x}{1/2} + C = 2\sin\dfrac{x}{2} + C$ — Τύπος 3 για $k = 1/2$

Η εύρεση ενός τύπου ολοκλήρωσης ενδέχεται να είναι δύσκολη υπόθεση, αλλά η επιβεβαίωση γίνεται σχετικά εύκολα: παραγωγίζουμε απλώς το δεξιό μέλος. Η παράγωγος που παίρνουμε θα πρέπει να είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση.

**Παράδειγμα 3** Έλεγχος τύπου ολοκλήρωσης

*Σωστό:* $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

Αιτιολογικό: Η παράγωγος του δεξιού μέλους ισούται με την ολοκληρωτέα συνάρτηση:

$$\frac{d}{dx}(x\sin x + \cos x + C) = x\cos x + \sin x - \sin x + 0 = x\cos x.$$

*Λάθος:* $\int x\cos x\,dx = x\sin x + C$

Αιτιολογικό: Η παράγωγος του δεξιού μέλους δεν ισούται με την ολοκληρωτέα συνάρτηση:

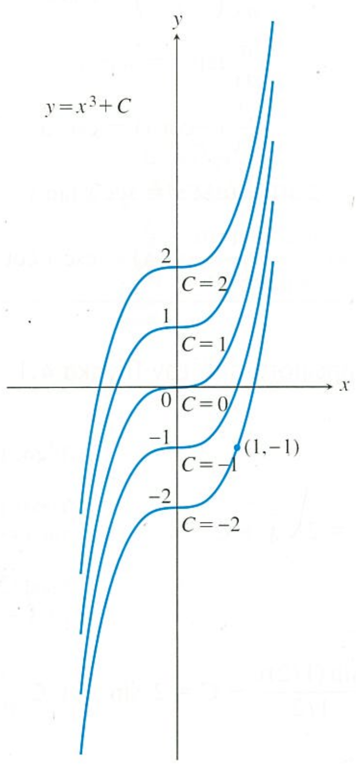
$$\frac{d}{dx}(x \sin x + C) = x \cos x + \sin x + 0 \neq x \cos x .$$

Μην ανησυχείτε αν δεν γνωρίζετε ακόμη πώς να εξαγάγετε τον σωστό τύπο ολοκλήρωσης στο Παράδειγμα 3. Στο Κεφάλαιο 7 θα παρουσιάσουμε μια τεχνική υπολογισμού τέτοιων ολοκληρωμάτων.

## Προβλήματα αρχικών τιμών

Το πρόβλημα εύρεσης μιας συναρτήσεως $y$ του $x$ όταν γνωρίζουμε την παράγωγό της και την τιμή της $y_0$ σε κάποιο σημείο $x_0$ καλείται **πρόβλημα αρχικών τιμών.** Προβλήματα τέτοιου είδους λύνονται σε δύο στάδια, όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 4.

### Παράδειγμα 4 Εύρεση καμπύλης όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση κλίσης της και ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η καμπύλη




**Σχημα 4.1** Οι καμπύλες $y = x^3 + C$ γεμίζουν το επίπεδο χωρίς να επικαλύπτονται. Από αυτές επιλέγουμε στο Παράδειγμα 4 την καμπύλη $y = x^3 - 2$ ως τη μόνη που διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

Να βρεθεί η καμπύλη που έχει κλίση $3x^2$ στο σημείο $(x, y)$ και διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

**Λύση** Στη γλώσσα των μαθηματικών, μας ζητείται ουσιαστικά να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών που ορίζεται ως ακολούθως.

*Η διαφορική εξίσωση :* $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ Η κλίση της καμπύλης είναι $3x^2$.

*Η αρχική συνθήκη:* $y(1) = -1$

1. Επιλύουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int 3x^2\, dx$$

$$y + C_1 = x^3 + C_2$$

$$y = x^3 + C.$$

Συνδιάζουμε σε μία τις σταθερές ολοκλήρωσης και παίρνουμε τη γενική λύση.

Το αποτέλεσμα αυτό μας πληροφορεί ότι το $y$ ισούται με $x^3 + C$ για κάποια τιμή του $C$. Βρίσκουμε την τιμή αυτή από τη συνθήκη $y(1) = -1$.

2. Υπολογισμός του $C$:

$$y = x^3 + C$$

$$-1 = (1)^3 + C \qquad \text{Αρχική συνθήκη } y(1) = -1$$

$$C = -2.$$

Η ζητούμενη καμπύλη είναι η $y = x^3 - 2$ (Σχήμα 4.1).

Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) + C$ της συνάρτησης $f(x)$ δίνει τη **γενική λύση** $y = F(x) + C$ της διαφορικής εξίσωσης $dy/dx = f(x)$. Η γενική λύση περιλαμβάνει όλες τις λύσεις της εξίσωσης (υπάρχουν άπειρες, μία για κάθε τιμή του $C$). **Επιλύουμε** τη διαφορική εξίσωση βρίσκοντας τη γενική της λύση. Κατόπιν λύνουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών βρίσκοντας την **ειδική λύση** που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ (το $y$ παίρνει την τιμή $y_0$ όταν $x = x_0$).



Η επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών αποκτά μεγάλη σημασία στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων, μια διαδικασία μέσω της οποίας οι επιστήμονες και οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για τη μελέτη του πραγματικού κόσμου που μας περιβάλλει.

## Μαθηματικά μοντέλα

**Διαδικασία κατασκευής μοντέλου**

Βήμα 1. Παρατηρούμε τη συμπεριφορά του συστήματος που μας ενδιαφέρει.

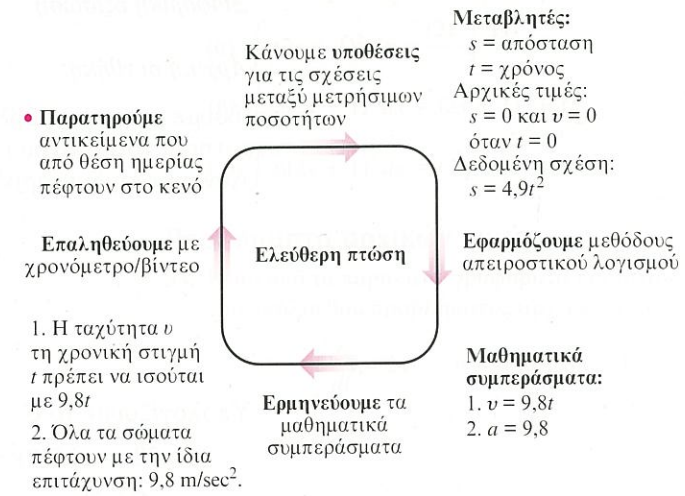
Βήμα 2. Κάνοντας παραδοχές προσπαθούμε να βρούμε ποιες μεταβλητές παίζουν ουσιώδη ρόλο και ποιες είναι οι μεταξύ τους σχέσεις. Κατασκευάζουμε έτσι ένα μοντέλο.

Βήμα 3. Επιλύουμε το μοντέλο εξάγοντας μαθηματικές λύσεις.

Βήμα 4. Ερμηνεύουμε το μοντέλο και επιβεβαιώνουμε ότι είναι συνεπές προς τις παρατηρήσεις μας του πραγματικού κόσμου.

Η διαδικασία κατασκευής ενός μαθηματικού μοντέλου περιλαμβάνει συνήθως τέσσερα στάδια: Πρώτα παρατηρούμε το τμήμα εκείνο του πραγματικού κόσμου που θέλουμε να μελετήσουμε (για παράδειγμα , ένα αντικείμενο που αφήνουμε να πέσει, ή την τραχεία που συστέλλεται όταν βήχουμε) και συγκροτούμε ένα σύστημα μαθηματικών μεταβλητών και σχέσεων οι οποίες προσομοιώνουν («μιμούνται») μερικά από τα σημαντικά χαρακτηριστικά του συστήματος που μας ενδιαφέρει. Δηλαδή φτιάχνουμε μια μαθηματική «μεταφορά» του πραγματικού κόσμου. Κατόπιν εφαρμόζουμε τα μαθηματικά που γνωρίζουμε στις μεταβλητές και στις μεταξύ τους σχέσεις, επιλύοντας έτσι το μοντέλο και συνάγοντας συμπεράσματα για τις μεταβλητές του. Έπειτα μεταφράζουμε τα μαθηματικά συμπεράσματα σε πληροφορίες για το σύστημα που μελετάμε. Τέλος, συγκρίνουμε τις πληροφορίες αυτές με τις παρατηρήσεις μας π΄σνω στο πραγματικό σύστημα για να δούμε αν το μοντέλο μας έχει προβλεπτική αξία. Διερευνούμε επίσης το ενδεχόμενο εφαρμογής του μοντέλου μας και σε άλλα συναφή συστήματα. Τα καλύτερα μοντέλα είναι αυτά που οδηγούν σε συμπεράσματα συνεπή με την παρατήρηση, που έχουν προβλεπτική αξία και ευρείες εφαρμογές, και που δεν είναι δύσκολα στον χειρισμό τους.

Ο κύκλος της μαθηματικής προσομοίωσης («μίμησης»), παραγωγής, αναγωγής, ερμηνείας, και επαλήθευσης φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα για το φαινόμενο της ελεύθερης πτώσης.




### Παράδειγμα 5 Ρίψη πακέτου από ανυψούμενο αερόστατο

Ένα αερόστατο που ανυψώνεται με ταχύτητα 4 m/sec βρίσκεται σε ύψος 30 m πάνω από το έδαφος όταν αφήνει να πέσει ένα πακέτο. Πόσος χρόνος απαιτείται για να φθάσει το πακέτο στο έδαφος;

**Λύση** Έστω $\upsilon(t)$ η ταχύτητα του πακέτου τη στιγμή $t$, και έστω $s(t)$ το ύψος του πάνω από το έδαφος. Η επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στη γήινη επιφάνεια είναι 9,8 m/sec$^2$. Υποθέτοντας ότι δεν δρουν άλλες δυνάμεις στο πακέτο ενώ πέφτει, έχουμε

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -9{,}8$$

Έτσι οδηγούμαστε στο πρόβλημα αρχικών τιμών:

*Διαφορική εξίσωση:* $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}8$ Αρνητικό εφόσον η βαρύτητα δρα στην κατεύθυνση όπου μειώνεται το $s$.

*Αρχική συνθήκη:* $v(0) = 4$,

που είναι και το μαθηματικό μας μοντέλο για την κίνηση του πακέτου. Επιλύουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για να βρούμε την ταχύτητα του πακέτου.

**1.** Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8$$

$$\int \frac{dv}{dt}\,dt = \int -9{,}8\,dt$$

$$v = -9{,}8t + C.$$ Συνδυασμός σταθερών σε μία

Έχοντας βρει τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη για να βρούμε την ειδική λύση για το πρόβλημα που μας απασχολεί.

**2.** Υπολογίζουμε το $C$ :

$$4 = -9{,}8(0) + C$$ Αρχική συνθήκη $v(0) = 4$

$$C = 4.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$v = -9{,}8t + 4.$$

Εφόσον η ταχύτητα είναι η παράγωγος του ύψους και το ύψος του πακέτου είναι 30 m τη στιγμή $t = 0$, όταν αφήνεται να πέσει, έχουμε τώρα ένα δεύτερο πρόβλημα αρχικών τιμών.

*Διαφορική εξίσωση:* $\dfrac{ds}{dt} = -9{,}8\,t + 4$ Θέσαμε $v = ds/dt$ στην τελευταία εξίσωση.

*Αρχική συνθήκη:* $s(0) = 30$

Επιλύουμε αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών για να βρούμε το ύψος συναρτήσει του χρόνου $t$.

Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{ds}{dt} = -9{,}8t + 4$$

$$\int \frac{ds}{dt}\,dt = \int (-9{,}8t + 4)\,dt$$

$$s = -4{,}9t + 4t + C$$

Συνδυασμός των σταθερών σε μία, που δίνει τη γενική λύση.

Υπολογίζουμε το $C$ :

$$30 = -4{,}9(0)^2 + 4(0) + C + 4t + C$$ Αρχική συνθήκη, $s(0) = 30$.

$$C = 30.$$

Το ύψος του πακέτου από το έδαφος τη στιγμή $t$ είναι

$$s = -4{,}9t^2 + 4t + 30.$$

Χρησιμοποιούμε τη λύση: Για να βρούμε πόσο χρόνο χρειάζεται το πακέτο για να φθάσει στο έδαφος, θέτουμε $s$ ίσο με 0 και λύνουμε ως προς $t$ :

$$-4{,}9t^2 + 4t + 30 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{151}}{-4{,}9}$$ Ρίζες του τριωνύμου

$$t \approx -2{,}91, \qquad t \approx 2{,}1.$$

Έτσι το πακέτο θα φθάσει στο έδαφος 2,1 sec από τη στιγμή που θα αφεθεί από το αερόστατο. (Η αρνητική ρίζα δεν έχει φυσικό νόημα.)



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.1

## Εύρεση αντιπαραγώγων

Στις Ασκήσεις 1-8, βρείτε την αντιπαράγωγο κάθε συναρτήσεως, κάνοντας νοητά τις πράξεις όπου μπορείτε. Ελέγξτε τις απαντήσεις σας παραγωγίζοντας.

**1.** **(α)** $6x$ **(β)** $x^7$ **(γ)** $x^7 - 6x + 8$

**2.** **(α)** $-3x^{-4}$ **(β)** $x^{-4}$ **(γ)** $x^{-4} + 2x + 3$

**3.** **(α)** $-\dfrac{2}{x^3}$ **(β)** $\dfrac{1}{2x^3}$ **(γ)** $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$

**4.** **(α)** $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ **(β)** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **(γ)** $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

**5.** **(α)** $\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ **(β)** $\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$ **(γ)** $-\dfrac{1}{3}x^{-4/3}$

**6.** **(α)** $-\pi \sin \pi x$ **(β)** $3 \sin x$ **(γ)** $\sin \pi x - 3 \sin 3x$

**7.** **(α)** $\sec^2 x$ **(β)** $\dfrac{2}{3}\sec^2 \dfrac{x}{3}$ **(γ)** $-\sec^2 \dfrac{3x}{2}$

**8.** **(α)** $\sec x \tan x$ **(β)** $4 \sec 3x \tan 3x$ **(γ)** $\sec \dfrac{\pi x}{2} \tan \dfrac{\pi x}{2}$

## Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 9-26. Ελέγξτε τις απαντήσεις σας παραγωγίζοντας.

**9.** $\int (x + 1)\,dx$

**10.** $\int \left(3t^2 + \dfrac{t}{2}\right) dt$

**11.** $\int (2x^3 - 5x + 7)\,dx$

**12.** $\int \left(\dfrac{1}{x^2} - x^2 - \dfrac{1}{3}\right) dx$

**13.** $\int x^{-1/3}\,dx$

**14.** $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$

**15.** $\int \left(8y - \dfrac{2}{y^{1/4}}\right) dy$

**16.** $\int \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

**17.** $\int \left(\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{y^{5/4}}\right) dy$

**18.** $\int 2x(1 - x^{-3})\,dx$

**19.** $\int \dfrac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\,dt$

**20.** $\int (-2 \cos t)\,dt$

**21.** $\int 7 \sin \dfrac{\theta}{3}\,d\theta$

**22.** $\int (-3 \csc^2 x)\,dx$

**23.** $\int (1 + \tan^2 \theta)\,d\theta$ (Υπόδειξη: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

**24.** $\int \cot^2 x\,dx$ (Υπόδειξη: $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$)

**25.** $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\,d\theta$

**26.** $\int \dfrac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta}\,d\theta$

## Επαλήθευση τύπων ολοκλήρωσης

Επαληθεύστε τους τύπους ολοκλήρωσης που δίδονται στις Ασκήσεις 27-30, εκτελώντας την παραγώγιση. Στην Ενότητα 4.2, θα δούμε πώς προκύπτουν τέτοιοι τύποι.

**27.** $\int (7x - 2)^3\,dx = \dfrac{(7x - 2)^4}{28} + C$

**28.** $\int (3x + 5)^{-2}\,dx = -\dfrac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$

**29.** $\int \csc^2\left(\dfrac{x - 1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\dfrac{x - 1}{3}\right) + C$

**30.** $\int \dfrac{1}{(x + 1)^2}\,dx = -\dfrac{1}{x + 1} + C$

**31.** Σωστό ή λάθος; Απαντήστε για κάθε παρατιθέμενο τύπο, αιτιολογώντας συνοπτικά την απάντησή σας.

**(α)** $\int x \sin x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \sin x + C$

**(β)** $\int x \sin x\,dx = -x \cos x + C$

**(γ)** $\int x \sin x\,dx = -x \cos x + \sin x + C$

**32.** Σωστό ή λάθος; Απαντήστε για κάθε παρατιθέμενο τύπο, αιτιολογώντας συνοπτικά την απάντησή σας.

**(α)** $\int (2x + 1)^2\,dx = \dfrac{(2x + 1)^3}{3} + C$

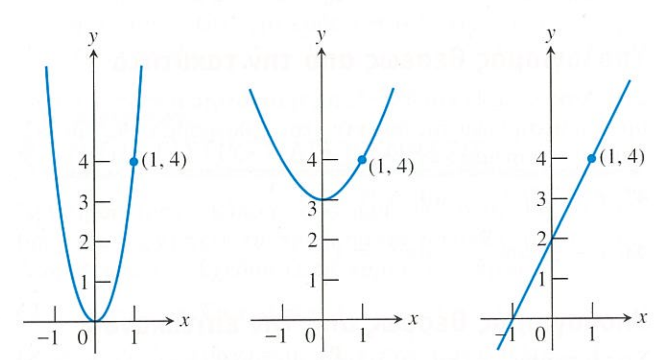
**(β)** $\int 3(2x + 1)^2\,dx = (2x + 1)^3 + C$

**(γ)** $\int 6(2x + 1)^2\,dx = (2x + 1)^3 + C$

## Προβλήματα αρχικών τιμών

**33.** Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα παριστάνει τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών;

$$\frac{dy}{dt} = 2x, \quad y = 4, \text{ όταν } x = 1$$

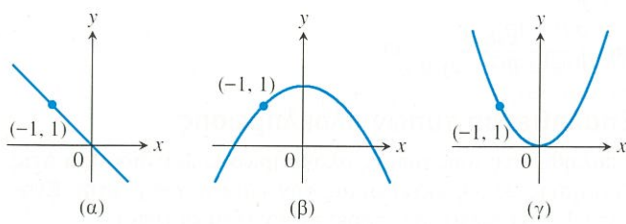



(α) (β) (γ)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**34.** Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα παριστάνει τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών;

$$dx/dy = -x, \quad y = 1 \text{ όταν } x = -1.$$




(α) (β) (γ)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Επιλύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών στις Ασκήσεις 35-46.

**35.** $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

**36.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \ x > 0, \ y(2) = 1$

**37.** $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

**38.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \ y(4) = 0$

**39.** $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

**40.** $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$

**41.** $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

**42.** $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

**43.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

**44.** $\dfrac{d^3r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3} \cdot \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

**45.** $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6 \cdot \quad y''(0) = -8, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 5,$

**46.** $y(4) = -\sin t + \cos t \cdot \quad y'''(0) = 7, \ y''(0) = y'(0) = -1,$ $y(0) = 0$

## Υπολογισμός θέσεως από την ταχύτητα

Στις Ασκήσεις 47 και 48 δίδεται η ταχύτητα $v = ds/dt$ και η αρχική θέση σώματος που κινείται ευθύγραμμα. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη στιγμή $t$.

**47.** $v = 9{,}8t + 5, \quad s(0) = 10$

**48.** $v = \dfrac{2}{\pi} \cos \dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

## Υπολογισμός θέσεως από την επιτάχυνση

Στις Ασκήσεις 49 και 50 δίδεται η επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$, η αρχική ταχύτητα, και η αρχική θέση σώματος που κινείται ευθύγραμμα. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη στιγμή $t$.

**49.** $a = 32 \cdot \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

**50.** $a = -4 \sin 2t \cdot \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

## Εύρεση καμπυλών

**51.** Βρείτε την καμπύλη $y = f(x)$ του επιπέδου $xy$ η οποία διέρχεται από το σημείο (9, 4) και σε κάθε σημείο της έχει κλίση $3\sqrt{x}$.

**52.** **(α)** Βρείτε την καμπύλη $y = f(x)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

**i.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

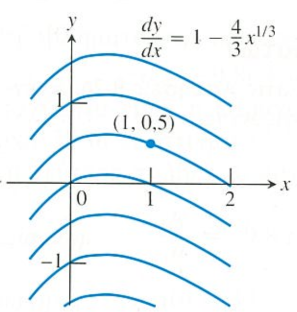
**ii.** Το γράφημα της καμπύλης διέρχεται από το σημείο (0, 1) έχοντας οριζόντια εφαπτομένη.

**(β)** Πόσες καμπύλες τέτοιου είδους υπάρχουν; Πώς το ξέρετε;

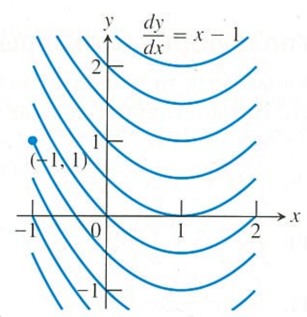
## Καμπύλες λύσεων (ολοκληρωτικές καμπύλες)

Στις Ασκήσεις 53-56 δείχνονται καμπύλες λύσεων διαφορικών εξισώσεων. Σε κάθε άσκηση, βρείτε μια εξίσωση για την καμπύλη που διέρχεται από το αναγραφόμενο σημείο.

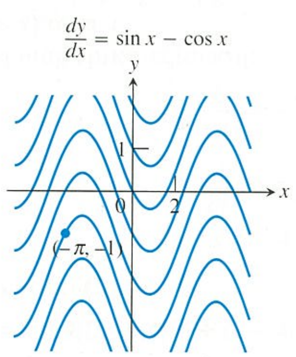
**53.**



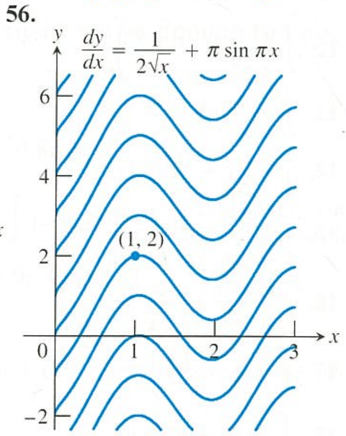

**54.**




**55.**




**56.**




## Εφαρμογές

**57.** *Πτώση στη Σελήνη* Στη σεληνιακή επιφάνεια, η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι 1,6 m/sec². Αν αφήσουμε μια πέτρα να πέσει σε χαράδρα, με τι ταχύτητα θα κινείται ακριβώς πριν από τη σύγκρουση με το σεληνιακό έδαφος, 30 sec αργότερα;

**58.** *Εκτόξευση* Ένας πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με σταθερή επιτάχυνση 20 m/sec². Με τι ταχύτητα θα κινείται 1 min αργότερα;

**59.** *Φρενάροντας εγκαίρως* Οδηγείτε σε αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα 100 km/h (28 m/sec) όταν βλέπετε μπροστά σας ένα ατύχημα και πατάτε απότομα φρένο. Πόση σταθερή επιβράδυνση απαιτείται για να ακινητοποιήσετε το όχημά σας σε 80 m; Για να το βρείτε, εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα.

Βήμα 1: Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k \quad$ ($k$ σταθερά)

Αρχικές συνθήκες: $\dfrac{ds}{dt} = 28$ και $s = 0$ όταν $t = 0$.

Ο χρόνος και η απόσταση μετρώνται από τη στιγμή που πατάτε φρένο.

Βήμα 2: Βρείτε τη στιγμή $t$ όπου $ds/dt = 0$. (Η απάντησή σας θα περιέχει τη σταθερά $k$.)

Βήμα 3: Βρείτε την τιμή $k$ για την οποία $s = 80$ για τη χρονική στιγμή $t$ που βρήκατε στο Βήμα 2.

**60.** *Φρενάροντας με δίκυκλο* Ένας οδηγός δίκυκλης μηχανής, για να θεωρηθεί ικανός να οδηγεί με ασφάλεια,, θα πρέπει να μπορεί να ακινητοποιήσει το δίκυκλό του σε απόσταση 15 m από τη στιγμή που πατά φρένο, κινούμενος με ταχύτητα 45 km/h (12,5 m/sec). Πόση σταθερή επιβράδυνση απαιτείται για να γίνει κάτι τέτοιο;

**61.** *Ευθύγραμμη κίνηση* Ένα σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, και γνωρίζουμε ότι $ds/dt = 4$ και $s = 0$ όταν $t = 1$. Βρείτε

**(α)** την ταχύτητα $v = ds/dt$ συναρτήσει του $t$

**(β)** τη θέση $s$ συναρτήσει του $t$.

T **62.** *Το σφυρί και το πούπουλο* Όταν ο αστροναύτης David Scott του πληρώματος του *Apollo 15* άφησε ένα σφυρί και ένα πούπουλο να πέσουν στη σεληνιακή επιφάνεια για να δείξει ότι όλα τα σώματα πέφτουν στο κενό με την ίδια (σταθερή) επιτάχυνση, τα άφησε από ύψος 1,2 m από το έδαφος. Το πείραμα έδειξε ότι το σφυρί και το πούπουλο πέφτουν βραδύτερα απ' ό,τι στη Γη, όπου θα χρειαζόταν μόλις μισό δευτερόλεπτο για να διανύσουν τα 1,2 m (σε συνθήκες κενού πάντα). Πόσος χρόνος χρειάστηκε για να διανύσουν τα 1,2 m στη Σελήνη τα δύο σώματα; Για να το βρείτε, λύστε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για το $s$ συναρτήσει του $t$. Κατόπιν, βρείτε την τιμή του $t$ για την οποία το $s$ μηδενίζεται.

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -1{,}6 \text{ m/sec}^2$

Αρχικές συνθήκες: $\dfrac{ds}{dt} = 0$ και $s = 1{,}2$ για $t = 0$

**63.** *Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση* Η εξίσωση της θέσης $s$ ενός σώματος που κινείται σε ευθεία με σταθερή επιτάχυνση $a$ είναι

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0, \tag{2}$$

όπου $v_0$ και $s_0$ είναι η ταχύτητα και η θέση του σώματος, αντίστοιχα, για $t = 0$. Αποδείξτε την εξίσωση αυτή επιλύοντας το πρόβλημα αρχικών τιμών

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

Αρχικές συνθήκες: $\dfrac{ds}{dt} = v_0$ και $s = s_0$ όταν $t = 0$.

**64.** *Μάθετε γράφοντας: Ελεύθερη πτώση κοντά στην επιφάνεια πλανήτη* Για ελεύθερη πτώση κοντά στην επιφάνεια ενός πλανήτη όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει σταθερό μέτρο $g$ μονάδες μήκους/sec², η Εξίσωση (2) της Άσκησης 63 παίρνει τη μορφή

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \tag{3}$$

όπου $s$ είναι το ύψος του σώματος από την πλανητική επιφάνεια. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι η επιτάχυνση δρα προς τα κάτω, στην κατεύθυνση δηλαδή όπου το $s$ μειώνεται. Η αρχική ταχύτητα $v_0$ είναι θετική αν το σώμα ανυψώνεται για $t = 0$ και αρνητική αν πέφτει.

Αντί να κάνετε χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα της Άσκησης 63, μπορείτε να οδηγηθείτε στην Εξίσωση (3) απευθείας, επιλύοντας το κατάλληλο πρόβλημα αρχικών τιμών. Διατυπώστε και λύστε το πρόβλημα αυτό, εξηγώντας πώς διαμορφώνεται η λύση σε κάθε στάδιο.

## Θεωρία και παραδείγματα

**65.** *Υπολογισμός μετατόπισης από μια αντιπαράγωγο της ταχύτητας*

**(α)** Έστω ότι η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται επί του άξονα $s$ είναι

$$\frac{ds}{dt} = v = 9{,}8t - 3.$$

**(i)** Βρείτε πόσο μετατοπίστηκε το σώμα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = 5$ για $t = 0$.

**(ii)** Βρείτε πόσο μετατοπίστηκε το σώμα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = -2$ για $t = 0$.

**(iii)** Τώρα βρείτε πόσο μετατοπίστηκε το σώμα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = s_0$ για $t = 0$.

**(β)** Έστω ότι η θέση $s$ ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου $t$. Αληθεύει ότι αν γνωρίζουμε την αντιπαράγωγο της συναρτήσεως ταχύτητας $ds/dt$ μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση του σώματος από $t = a$ έως $t = b$ ακόμη και αν δεν ξέρουμε την ακριβή θέση του σώματος οποιαδήποτε από τις στιγμές αυτές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**66.** *Μοναδικότητα λύσεων* Αν οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $y = F(x)$ και $y = G(x)$ αποτελούν αμφότερες λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

ορισμένου σε ένα διάστημα $I$, τότε θα ισχύει απαραίτητα $F(x) = G(x)$ για κάθε $x$ στο $I$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να λύσετε τα προβλήματα αρχικών τιμών στις Ασκήσεις 67-72. Σχεδιάστε τις καμπύλες λύσεων.

**67.** $y' = \cos^2 x + \sin x, \ y(\pi) = 1$

**68.** $y' = 2e^{-x}, \quad y(\ln 2) = 0$ **69.** $y' = \dfrac{1}{x} + x, \quad y(1) = -1$

**70.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

**71.** $y'' = 3e^{x/2} + 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4$

**72.** $y'' = \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

## 4.2 Κανόνες ολοκλήρωσης· ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Αλγεβρικοί κανόνες αντιπαραγώγων • Ολοκληρώματα των $\sin^2 x$ και $\cos^2 x$ • Ολοκλήρωμα ρητής δύναμης • Αντικατάσταση: Ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης «από την ανάποδη»

Ακριβώς όπως συμβαίνει με τα όρια και τις παραγώγους, έτσι και οι αντιπαράγωγοι και τα αόριστα ολοκληρώματα υπακούουν σε αλγεβρικούς κανόνες. Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε και θα εφαρμόσουμε τους κανόνες αυτούς για να βρούμε τις αντιπαραγώγους μιας πλειάδας συναρτήσεων.

### Αλγεβρικοί κανόνες αντιπαραγώγων

Από τη μελέτη μας της παραγώγου γνωρίζουμε τα ακόλουθα.

1. Μια συνάρτηση είναι αντιπαράγωγος του σταθερού πολλαπλασίου $kf$ της συνάρτησης $f$ αν και μόνο αν ισούται με $k$ επί μια αντιπαράγωγο της $f$.
2. Ειδικότερα, μια συνάρτηση είναι αντιπαράγωγος της $-f$ αν και μόνο αν ισούται με μια αντίθετη αντιπαράγωγο της $f$.
3. Μια συνάρτηση είναι αντιπαράγωγος του αθροίσματος ή της διαφοράς $f \pm g$ αν και μόνο αν ισούται με το άθροισμα ή τη διαφορά μιας αντιπαραγώγου της $f$ και μιας αντιπαραγώγου της $g$.

Αν εκφράσουμε με σύμβολα ολοκλήρωσης τις παραπάνω παρατηρήσεις, προκύπτουν οι ακόλουθοι αριθμητικοί κανόνες για την αόριστη ολοκλήρωση (Πίνακας 4.2).

**CD-ROM**
**Δικτυότοπος**
**Βιογραφικά στοιχεία**
Jakob Bernoulli
(1654-1705)

**Πίνακας 4.2** Κανόνες αόριστης ολοκλήρωσης

1. *Ολοκλήρωμα σταθερού πολλαπλασίου:* $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
   (Δεν ισχύει αν το $k$ εξαρτάται από το $x$.)
2. *Ολοκλήρωμα αρνητικών συναρτήσεων:* $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$
   (Ουσιαστικά, ο Κανόνας 1 για $k = -1$)
3. *Ολοκλήρωμα αθροίσματος και διαφοράς:* $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

**Παράδειγμα 1** Επανορίζοντας τη σταθερά ολοκλήρωσης

$$\begin{aligned}\int 5\sec x\,\tan x\,dx &= 5\int \sec x\,\tan x\,dx && \text{Πίνακας 4.2, Κανόνας 1}\\ &= 5(\sec x + C) && \text{Πίνακας 4.1, Τύπος 6}\\ &= 5\sec x + 5C && \text{Πρώτη μορφή}\\ &= 5\sec x + C' && \text{Οικονομικότερη μορφή, όπου } C' \text{ είναι το } 5C\\ &= 5\sec x + C && \text{Συνήθης μορφή χωρίς τονούμενα σύμβολα.}\end{aligned}$$

Εφόσον το πενταπλάσιο μιας αυθαίρετης σταθεράς είναι μια αυθαίρετη σταθερά, επανορίζουμε τη σταθερά $C'$.



Τι έχουμε να πούμε για τις τρεις διαφορετικές μορφές λύσεων στο Παράδειγμα 1; Η κάθε μορφή δίδει όλες τις αντιπαραγώγους της $f(x) = 5\sec x\tan x$, άρα κάθε απάντηση είναι σωστή, αλλά η λιγότερο πολύπλοκη από τις τρεις, και συνεπώς η συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη, είναι η τελευταία

$$\int 5\sec x\tan x\,dx = 5\sec x + C\,.$$

Ο τύπος ολοκλήρωσης αθροίσματος και διαφοράς μας επιτρέπει να ολοκληρώνουμε πολύπλοκες εκφράσεις όρο προς όρο. Στο τέλος κάθε τέτοιου υπολογισμού, συνδυάζουμε τις επιμέρους σταθερές ολοκλήρωσης σε μία ενιαία αυθαίρετη σταθερά.

**Παράδειγμα 2** Ολοκλήρωση όρο προς όρο

Υπολογίστε το

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx\,.$$

**Λύση** Διακρίνουμε ότι η ποσότητα $(x^3/3) - x^2 + 5x$ είναι μια αντιπαράγωγος της ολοκληρωτέας συνάρτησης $x^2 - 2x + 5$, οπότε υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{αντιπαράγωγος}} + \underbrace{C}_{\text{αυθαίρετη σταθερά}}.$$

Αν δεν αναγνωρίσουμε αμέσως την αντιπαράγωγο, τότε την αναπαράγουμε όρο προς όρο βάσει του ολοκληρώματος αθροίσματος και διαφοράς:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx\\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3\,.\end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι πιο περίπλοκος απ' όσο χρειάζεται. Αν συνδυάσουμε τις $C_1$, $C_2$, και $C_3$ σε μια μόνο σταθερά $C = C_1 + C_2 + C_3$, ο τελευταίος τύπος παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

που *εξακολουθεί* να μας δίδει όλες τις δυνατές αντιπαραγώγους. Προτείνουμε λοιπόν να συνδυάζετε κατευθείαν τις επιμέρους σταθερές σε μία, όταν ολοκληρώνετε όρο προς όρο. Δηλαδή να γράφετε

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx\\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\,.\end{aligned}$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρίσκετε την απλούστερη δυνατή αντιπαράγωγο κάθε όρου και να προσθέτετε τη σταθερά ολοκλήρωσης στο τέλος.

### Ολοκληρώματα των $\sin^2 x$ και $\cos^2 x$

Μερικές φορές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικές ταυτότητες για να μετασχηματίσουμε ολοκληρώματα που δεν γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε σε άλλα ολοκληρώματα των οποίων τον υπολογισμό είμαστε σε θέση να εκτελέσουμε. Οι τύποι ολοκλήρωσης των συναρτήσεων $\sin^2 x$ και $\cos^2 x$ απαντούν συχνά σε τέτοιες εφαρμογές.

**Παράδειγμα 3** Ολοκλήρωση των $\sin^2 x$ και $\cos^2 x$

(α)
$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(β)
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$
Όπως στο (α), αλλά με αντίθετο πρόσημο

**CD-ROM**
**Δικτυότοπος**
**Βιογραφικά στοιχεία**
Ιπποκράτης ο Χίος (περίπου 440 π.Χ.)

### Ολοκλήρωμα ρητής δύναμης

Αν $u$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του $x$ και $n$ είναι ρητός αριθμός διάφορος του $-1$, τότε ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης μας λέει ότι
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}.$$

Ειδωμένη από άλλη οπτική γωνία, η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι η $u^{n+1}/(n+1)$ είναι μια αντιπαράγωγος της συναρτήσεως $u^n(du/dx)$. Κατά συνέπεια,
$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής γράφεται συνήθως σε απλούστερη «διαφορική» μορφή,
$$\int u^n\,du,$$
που προκύπτει αν θεωρήσουμε τα $dx$ ως διαφορικά που απλοποιούνται. Έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο κανόνα.

Στην πραγματικότητα, η Εξίσωση (1) αληθεύει για κάθε πραγματικό εκθέτη $n \neq -1$, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6.

Αν $u$ είναι τυχούσα διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε
$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1,\ n \text{ ρητός}). \qquad (1)$$

Στην απόδειξη της Εξίσωσης (1), θεωρήσαμε ότι η $u$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής $x$, αλλά η ίδια η μεταβλητή αυτή δεν εμφανίζεται στον τελικό τύπο. Έτσι θα μπορούσαμε να είχαμε συμβολίσει την ανεξάρτητη μεταβλητή με $\theta$, $t$, $y$, ή οτιδήποτε άλλο. Η Εξίσωση (1) λέει ότι όταν φέρνουμε ένα ολοκλήρωμα στη μορφή
$$\int u^n\,du, \qquad (n \neq -1),$$
όπου η $u$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση με διαφορικό $du$, τότε το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με $[u^{n+1}/(n+1)] + C$.



**Παράδειγμα 4** Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα δύναμης

$$\int \sqrt{1+y^2}\cdot 2y\,dy = \int u^{1/2}\,du \qquad \text{Έστω } u = 1+y^2,\ du = 2y\,dy.$$
$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C \qquad \text{Ολοκληρώνουμε, χρησιμοποιώντας την Εξ. (1) με } n = 1/2.$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C \qquad \text{Απλούστερη μορφή.}$$
$$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C \qquad \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } 1+y^2.$$

**Παράδειγμα 5** Τροποποίηση της ολοκληρωτέας συνάρτησης κατά έναν συντελεστή

$$\int \sqrt{4t-1}\,dt = \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{4}\,du \qquad \text{Έστω } u = 4t-1,\ du = 4\,dt,\ (1/4)\,du = dt.$$
$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du \qquad \text{Με το } 1/4 \text{ ως συντελεστή, το ολοκλήρωμα παίρνει τώρα τη γνώριμη μορφή.}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \qquad \text{Ολοκληρώνουμε, εφαρμόζοντας την Εξ. (1) με } n = 1/2.$$
$$= \frac{1}{6}u^{3/2} + C \qquad \text{Απλούστερη μορφή}$$
$$= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C \qquad \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } 4t-1.$$

### Αντικατάσταση: Ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης ...«από την ανάποδη»

Οι αντικαταστάσεις στα Παραδείγματα 4 και 5 δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις του ακόλουθου γενικού κανόνα.

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \qquad \text{1. Αντικαθιστούμε } u = g(x),\ du = g'(x)\,dx.$$
$$= F(u) + C \qquad \text{2. Βρίσκουμε μια (οποιαδήποτε) αντιπαράγωγο } F(u) \text{ της } f(u).$$
$$= F(g(x)) + C \qquad \text{3. Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } g(x).$$

Πρόκειται για τα τρία βήματα της ολοκλήρωσης με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Η μέθοδος δουλεύει διότι η $F(g(x))$ είναι μια αντιπαράγωγος της $f(g(x))\cdot g'(x)$ εφόσον η $F$ είναι μια αντιπαράγωγος της $f$:
$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{Κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης}$$
$$= f(g(x))\cdot g'(x). \qquad \text{Εφόσον } F' = f$$

#### Μέθοδος αντικατάστασης

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx,$$
όπου οι $f$ και $g'$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βήμα 1. Αντικαθιστούμε $u = g(x)$ και $du = g'(x)\,dx$, οπότε παίρνουμε το ολοκλήρωμα
$$\int f(u)\,du.$$

Βήμα 2. Ολοκληρώνουμε ως προς $u$.

Βήμα 3. Στο αποτέλεσμα που βρήκαμε, κάνουμε την αντίστροφη αντικατάσταση, δηλαδή όπου $u$ θέτουμε το $g(x)$.

**Παράδειγμα 6** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντικατάστασης

$$\int \cos(7\theta+5)\,d\theta = \int \cos u\cdot\frac{1}{7}\,du \qquad \text{Έστω } u = 7\theta+5,\ du = 7\,d\theta,\ (1/7)\,du = d\theta.$$
$$= \frac{1}{7}\int \cos u\,du \qquad \text{Με το } (1/7) \text{ ως συντελεστή, το ολοκλήρωμα παίρνει τώρα τη γνώριμη μορφή.}$$
$$= \frac{1}{7}\sin u + C \qquad \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } u.$$
$$= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C \qquad \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } 7\theta+5.$$

**Παράδειγμα 7** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντικατάστασης

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3)\,dx &= \int \sin(x^3)\cdot x^2\,dx && \text{Έστω } u = x^3,\ du = 3x^2\,dx,\ (1/3)\,du = x^2\,dx.\\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,du\\
&= \frac{1}{3}\int \sin u\,du && \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } u.\\
&= \frac{1}{3}(-\cos u) + C && \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } x^3.\\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C
\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 8** Χρήση αντικατάστασης και ταυτότητας

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx.$$

**Λύση**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx &= \int \sec^2 2x\,dx && \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x\\
&= \int \sec^2 u\cdot\frac{1}{2}\,du && u = 2x,\ du = 2\,dx,\ dx = (1/2)\,du\\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du\\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u\\
&= \frac{1}{2}\tan 2x + C && u = 2x
\end{aligned}$$

Η επιτυχία της μεθόδου έγκειται στην εύρεση μιας κατάλληλης αντικατάστασης η οποία θα μετασχηματίσει το ολοκλήρωμα που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα σε ένα άλλο που μπορούμε. Αν η πρώτη αντικατάσταση αποτύχει, μπορούμε τουλάχιστον να απλοποιήσουμε το ολοκλήρωμα κάνοντας μια-δυο περαιτέρω αντικαταστάσεις (όπως θα κάνετε και εσείς στις Ασκήσεις 33 και 34). Η άλλη επιλογή είναι να ξαναπροσπαθήσουμε από την αρχή να βρούμε μια αντικατάσταση που λύνει απευθείας το ολοκλήρωμα. Μερικές φορές και οι δύο αυτές επιλογές μπορεί να αποδίδουν εξίσου καλά, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα 9** Χρήση διαφορετικών αντικαταστάσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}.$$

**Λύση** Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ως διερευνητικό εργαλείο: Αντικαθιστούμε το πλέον προβληματικό τμήμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης και ελέγχουμε αν αυτό απλοποίησε την κατάσταση ή όχι. Στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να δοκιμάσουμε την αντικατάσταση $u = z^2 + 1$ ή, ακόμα τολμηρότερα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε με $u$ ολόκληρη την κυβική ρίζα. Ιδού τι συμβαίνει σε κάθε περίπτωση.



**Λύση 1** Κάνουμε την αντικατάσταση $u = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} && \text{Έστω } u = z^2+1,\ du = 2z\,dz.\\
&= \int u^{-1/3}\,du && \text{Μορφή } \textstyle\int u^n\,du.\\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } u.\\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C\\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } z^2+1.
\end{aligned}$$

**Λύση 2** Αντί της παραπάνω, αντικαθιστούμε $u = \sqrt[3]{z^2+1}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{3u^2\,du}{u} && \text{Έστω } u = \sqrt[3]{z^2+1},\ u^3 = z^2+1,\ 3u^2\,du = 2z\,dz.\\
&= 3\int u\,du\\
&= 3\cdot\frac{u^2}{2} + C && \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } u.\\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } (z^2+1)^{1/3}.
\end{aligned}$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.2

## Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 1-10, χρησιμοποιήστε τις αναγραφόμενες αντικαταστάσεις ώστε να φέρετε τα ολοκληρώματα σε μορφή που μπορείτε να υπολογίσετε.

**1.** $\int x\sin(2x^2)\,dx,\quad u = 2x^2$

**2.** $\int \left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}\,dt,\quad u = 1-\cos\frac{t}{2}$

**3.** $\int 28(7x-2)^{-5}\,dx,\quad u = 7x-2$

**4.** $\int x^3(x^4-1)^2\,dx,\quad u = x^4-1$

**5.** $\int \frac{9r^2\,dr}{\sqrt{1-r^3}},\quad u = 1-r^3$

**6.** $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy,\quad u = y^4+4y^2+1$

**7.** $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx,\quad u = x^{3/2}-1$

**8.** $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx,\quad u = -\frac{1}{x}$

**9.** $\int \csc^2 2\theta\cot 2\theta\,d\theta$

**(α)** Αντικαταστήστε $u = \cot 2\theta$

**(β)** Αντικαταστήστε $u = \csc 2\theta$

**10.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

**(α)** Αντικαταστήστε $u = 5x + 8$

**(β)** Αντικαταστήστε $u = \sqrt{5x+8}$

Στις Ασκήσεις 11-32, υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

**11.** $\int \sqrt{3-2s}\,ds$

**12.** $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,ds$

**13.** $\int \frac{3\,dx}{(2-x)^2}$

**14.** $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$

**15.** $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\,dy$

**16.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

**17.** $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$

**18.** $\int \cos(3z+4)\,dz$

**19.** $\int \sec^2(3x+2)\,dx$

**20.** $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,dx$

**21.** $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

**22.** $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

**23.** $\int x^{1/2}\sin(x^{3/2}+1)\,dx$

**24.** $\int \sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv$

**25.** $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\,dt$

**26.** $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}\,dt$

**27.** $\int \sqrt{\cot y}\,\csc^2 y\,dy$

**28.** $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$

**29.** $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\,dt$

**30.** $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,d\theta$

**31.** $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\,d\theta$

**32.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

## Σταδιακή απλοποίηση ολοκληρωμάτων

Αν δεν σας είναι προφανές ποια αντικατάσταση πρέπει να κάνετε, προσπαθήστε να απλοποιήσετε το ολοκλήρωμα σταδιακά επιχειρώντας μια πρώτη αντικατάσταση, έπειτα μια δεύτερη, κ.ο.κ. Για να δείτε τι εννοούμε, επιχειρήστε τις προτεινόμενες ακολουθίες αντικαταστάσεων των Ασκήσεων 33 και 34.

**33.** $\displaystyle\int \frac{18\tan^2 x\ \sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,dx$

(α) $u = \tan x$, κατόπιν $v = u^3$, και τέλος $w = 2 + v$

(β) $u = \tan^3 x$, κατόπιν $v = 2 + u$

(γ) $u = 2 + \tan^3 x$

**34.** $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\ \sin(x-1)\cos(x-1)\,dx$

(α) $u = x - 1$, κατόπιν $v = \sin u$, και τέλος $w = 1 + v^2$

(β) $u = \sin(x-1)$, κατόπιν $v = 1 + u^2$

(γ) $u = 1 + \sin^2(x-1)$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 35 και 36.

**35.** $\displaystyle\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

**36.** $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\ \cos^3\sqrt{\theta}}}\,d\theta$

## Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών στις Ασκήσεις 37-42.

**37.** $\dfrac{ds}{dt} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

**38.** $\dfrac{dy}{dx} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

**39.** $\dfrac{ds}{dt} = 8\sin^2\left(t + \dfrac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

**40.** $\dfrac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right), \quad r(0) = \dfrac{\pi}{8}$

**41.** $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -4\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$

**42.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x\ \tan 2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$

**43.** *Κίνηση σωματιδίου* Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που ταλαντώνεται μπρος-πίσω σε μια ευθεία είναι $v = ds/dt = 6\sin 2t$ m/sec για τυχόν $t$. Αν $s = 0$ όταν $t = 0$, βρείτε την τιμή του $s$ όταν $t = \pi/2$ sec.

**44.** *Κίνηση σωματιδίου* Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που ταλαντώνεται μπρος-πίσω σε μια ευθεία είναι $a = d^2s/dt^2 = \pi^2\cos\pi t$ m/sec$^2$ για τυχόν $t$. Αν $s = 0$ και $v = 8$ m/sec όταν $t = 0$, βρείτε το $s$ όταν $t = 1$ sec.

**45.** *Χρήση διαφορετικών αντικαταστάσεων* Απ' ό,τι φαίνεται μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ποσότητα $2\sin x\cos x$ ως προς $x$ με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

(α) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du \qquad u = \sin x$
$\displaystyle\qquad = u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1$

(β) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx = \int -2u\,du \qquad u = \cos x$
$\displaystyle\qquad = -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$

(γ) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx = \int \sin 2x\,dx \qquad 2\sin x\cos x = \sin 2x$
$\displaystyle\qquad = -\frac{\cos 2x}{2} + C_3.$

Είναι άραγε σωστά και τα τρία αποτελέσματα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**46.** *Χρήση διαφορετικών αντικαταστάσεων* Η αντικατάσταση $u = \tan x$ μας δίνει

$$\int \sec^2 x\ \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C.$$

Η αντικατάσταση $u = \sec x$ δίνει

$$\int \sec^2 x\tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C.$$

Είναι άραγε σωστά και τα δύο αποτελέσματα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

# 4.3 Εκτίμηση ποσοτήτων με χρήση πεπερασμένων αθροισμάτων

Εμβαδόν και καρδιακός ρυθμός άντλησης • Διανυθείσα απόσταση • Μετατόπιση έναντι διανυθείσας απόστασης • Όγκος σφαίρας • Μέση τιμή μη αρνητικής συναρτήσεως • Συμπέρασμα

CD-ROM Δικτυότοπος

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε τρόπους προσεγγιστικού υπολογισμού ποσοτήτων μέσω πεπερασμένων αθροισμάτων.

## Εμβαδόν και καρδιακός ρυθμός άντλησης

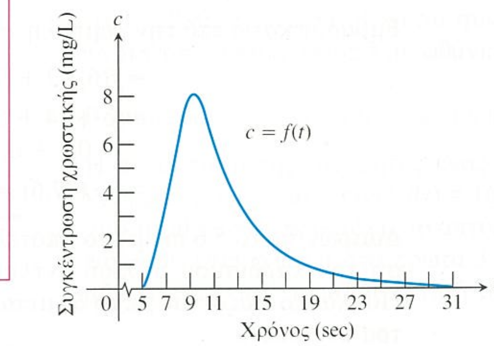
Ο αριθμός των λίτρων αίματος που αντλεί η καρδιά σας σε δεδομένο χρονικό διάστημα καλείται *καρδιακός ρυθμός άντλησης*. Για ένα άτομο που ξεκουράζεται, ο ρυθμός αυτός είναι 5 ή 6 L ανά λεπτό. Κατά τη διάρκεια επίπονης σωματικής δραστηριότητας, ο ρυθμός μπορεί να φθάσει και τα 30 L ανά λεπτό. Επίσης επηρεάζεται αισθητά από το αν το άτομο είναι υγιές ή έχει κάποια ασθένεια. Πώς μπορεί ο γιατρός να μετρήσει τον καρδιακό ρυθμό άντλησης ενός ασθενή χωρίς να χρειαστεί να διακόψει τη ροή του αίματος;



**Πίνακας 4.3** Μετρήσεις συγκεντρώσεως χρωστικής

| Δευτερόλεπτα μετά την έγχυση | Συγκέντρωση χρωστικής (η ανακύκλωση λήφθηκε υπ' όψιν) |
|---|---|
| $t$ | $c$ |
| 5 | 0 |
| 7 | 3,8 |
| 9 | 8,0 |
| 11 | 6,1 |
| 13 | 3,6 |
| 15 | 2,3 |
| 17 | 1,45 |
| 19 | 0,91 |
| 21 | 0,57 |
| 23 | 0,36 |
| 25 | 0,23 |
| 27 | 0,14 |
| 29 | 0,09 |
| 31 | 0 |

Μια υπάρχουσα τεχνική είναι να εγχύσει κάποια χρωστική ουσία σε μια κύρια αρτηρία κοντά στην καρδιά. Κινούμενη μαζί με το αίμα, η χρωστική θα εισρεύσει στη δεξιά κοιλία της καρδιάς απ' όπου εξωθείται στους πνεύμονες κι από κει στην αριστερή καρδιακή κοιλία, για να εγκαταλείψει τελικά την καρδιά μέσω της αορτής. Στο σημείο αυτό λοιπόν (στην αορτή) μπορούμε να μετράμε τη συγκέντρωση της χρωστικής κάθε λίγα δευτερόλεπτα, καθώς ρέει το αίμα. Οι πειραματικές μετρήσεις του Πίνακα 4.3 και η αντίστοιχη γραφική παράσταση στο Σχήμα 4.2 δείχνουν τη συμπεριφορά της καρδιάς ενός υγιούς αναπαυόμενου ατόμου στον οποίο εγχέονται 5,6 mg χρωστικής.




**Σχημα 4.2** Η συγκέντρωση χρωστικής του Πίνακα 4.3. Στο σχήμα που βλέπετε έχουμε τοποθετήσει τα πειραματικά σημεία και στη συνέχεια προσαρμόσαμε σε αυτά μια λεία καμπύλη. Ο χρόνος μετριέται με $t = 0$, από τη στιγμή της έγχυσης. Η συγκέντρωση της χρωστικής είναι μηδέν αρχικά, όταν ακόμα το αίμα που περιέχει τη χρωστική κινείται προς και από τους πνεύμονες. Έπειτα ανέρχεται σε ένα μέγιστο για $t = 9$ sec και εξασθενεί βαθμιαία οπότε και μηδενίζεται για $t = 31$ sec.

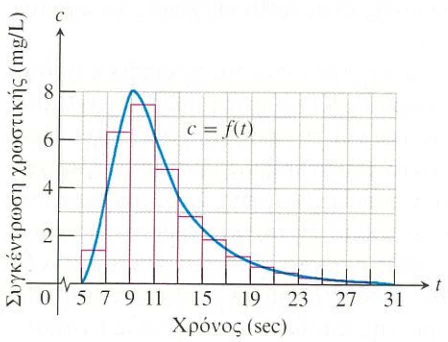
Η γραφική παράσταση δείχνει τη συγκέντρωση της χρωστικής (σε χιλιοστόγραμμα ανά λίτρο αίματος) έναντι του χρόνου (σε δευτερόλεπτα). Πώς μπορούμε να εξαγάγουμε από το γράφημα αυτό την πληροφορία για τον καρδιακό ρυθμό άντλησης (σε λίτρα αίματος ανά δευτερόλεπτο); Πρέπει να διαιρέσουμε τον συνολικό *αριθμό των χιλιοστόγραμμων χρωστικής* με το *εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη συγκεντρώσεως*. Μπορείτε να πειστείτε ότι κάτι τέτοιο είναι εύλογο ακόμα και εξετάζοντας τις διαστάσεις (μονάδες) του αποτελέσματος:

$$\frac{\text{mg χρωστικής}}{\text{μονάδες εμβαδού κάτω από την καμπύλη}} = \frac{\text{mg χρωστικής}}{\dfrac{\text{mg χρωστικής}}{\text{L αίματος}}\cdot \text{sec}} = \frac{\text{mg χρωστικής}}{\text{sec}}\cdot\frac{\text{L αίματος}}{\text{mg χρωστικής}} = \frac{\text{L αίματος}}{\text{sec}}.$$

Επομένως, είστε τώρα έτοιμοι να κάνετε τον υπολογισμό που κάνει και ο καρδιολόγος στο εργαστήριό του.

**Παράδειγμα 1** Υπολογισμός καρδιακού ρυθμού άντλησης από τη συγκέντρωση χρωστικής ουσίας

Υπολογίστε τον καρδιακό ρυθμό άντλησης του ατόμου στο οποίο αναφέρονται οι μετρήσεις του Πίνακα 4.3 και του Σχήματος 4.2. Εκφράστε την απάντησή σας σε λίτρα ανά λεπτό.




**Σχημα 4.3** Η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη συγκεντρώσεως του Σχήματος 4.2 προσεγγίζεται με ορθογώνια. Το τμήμα από $t = 29$ έως $t = 31$ το αγνοούμε, αφού η συνεισφορά του στο συνολικό εμβαδόν είναι αμελητέα.

Λύση Όπως είδαμε, μπορούμε να εξαγάγουμε τον καρδιακό ρυθμό άντλησης διαιρώντας την ποσότητα της χρωστικής (5,6 mg στην προκειμένη περίπτωση) με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη του Σχήματος 4.2. Τώρα πρέπει να βρούμε το εμβαδόν. Καμία από τις σχέσεις που ξέρουμε δεν μπορεί να εφαρμοστεί για αυτήν την ακανόνιστου σχήματος επιφάνεια, αλλά μπορούμε να έχουμε μια καλή εκτίμηση προσεγγίζοντας την επιφάνεια με μια ακολουθία ορθογωνίων παραλληλογράμμων, των οποίων τα εμβαδά αθροίζουμε (Σχήμα 4.3). Κάθε τέτοιο ορθογώνιο παραλείπει ένα μέρος της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη αλλά περικλείει ένα μέρος της επιφάνειας πάνω από την καμπύλη, οπότε η απώλεια εξισορροπείται. Στο Σχήμα 4.3, κάθε ορθογώνιο έχει βάση μήκους 2 μονάδων και ύψος ίσο με το ύψος της καμπύλης στο μέσον της βάσης. Το ύψος του ορθογωνίου αποτελεί έτσι έναν μέσο όρο της τιμής της συνάρτησης στο χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί στο ορθογώνιο. Πολλαπλασιάζουμε το ύψος κάθε ορθογωνίου με τη βάση του για να βρούμε το εμβαδόν του, οπότε παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned}
\text{Εμβαδόν κάτω από την καμπύλη} &\approx \text{άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων} \\
&\approx f(6)\cdot 2 + f(8)\cdot 2 + f(10)\cdot 2 + \cdots + f(28)\cdot 2 \\
&\approx 2\cdot(1{,}4 + 6{,}3 + 7{,}5 + 4{,}8 + 2{,}8 + 1{,}9 + 1{,}1 \\
&\quad + 0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) \\
&= 2\cdot(27{,}6) = 55{,}2\ (\text{mg/L})\cdot\text{sec}.
\end{aligned}$$

Διαιρώντας το 5,6 mg με το αποτέλεσμα αυτό παίρνουμε μια εκτίμηση του καρδιακού ρυθμού άντλησης σε λίτρα ανά δευτερόλεπτο. Πολλαπλασιάζοντας με το 60 μετατρέπουμε την εκτίμησή μας σε λίτρα ανά λεπτό:

$$\frac{5{,}6\ \text{mg}}{55{,}2\ \text{mg}\cdot\text{sec}/\text{L}} \cdot \frac{60\ \text{sec}}{1\ \text{min}} \approx 6{,}09\ \text{L/min}.$$

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ** *Χρήση υπολογιστή για υπολογισμό αθροισμάτων*
Αν το πρόγραμμα γραφικών που χρησιμοποιείτε έχει τη δυνατότητα υπολογισμού αθροισμάτων, θα σας φανεί χρήσιμο στην παρούσα ενότητα. Όπως θα δούμε αργότερα, τέτοιου είδους αθροίσεις έχουν πολλές εφαρμογές, για παράδειγμα όταν χρειαζόμαστε μια προσεγγιστική τιμή για ένα ορισμένο ολοκλήρωμα.

## Διανυθείσα απόσταση

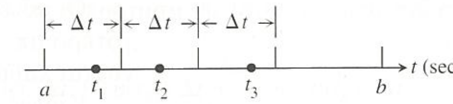
Έστω ότι γνωρίζουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας $v = ds/dt = f(t)$ m/sec ενός αυτοκινήτου που κινείται σε αυτοκινητόδρομο, και θέλουμε να μάθουμε πόση απόσταση θα διανύσει στο χρονικό διάστημα $a \leq t \leq b$. Αν γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο $F$ της $f$, μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις θέσεως του αυτοκινήτου $s = F(t) + C$ και να υπολογίσουμε τη διανυθείσα απόσταση ως τη διαφορά μεταξύ των θέσεων τις στιγμές $t = a$ και $t = b$ (όπως κάναμε στην Ενότητα 4.1, Άσκηση 65).

Αν δεν γνωρίζουμε κάποια αντιπαράγωγο της $v = f(t)$, μπορούμε να την προσεγγίσουμε με ένα άθροισμα ως ακολούθως. Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε μικρά χρονικά διαστήματα *σε κάθε ένα εκ των οποίων η $v$ είναι σχετικά σταθερή*. Εφόσον η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του οχήματος, προσεγγίζουμε τη διανυθείσα απόσταση σε κάθε χρονικό διάστημα με τον τύπο

$$\text{Απόσταση} = \text{ρυθμός} \times \text{χρόνος} = f(t)\cdot\Delta t$$

και αθροίζουμε στο διάστημα $[a, b]$. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θεωρήστε ότι ένα διαμερισμένο διάστημα είναι το εξής






όπου όλα τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο μήκος $\Delta t$. Έστω $t_1$ ένα σημείο στο πρώτο υποδιάστημα. Αν το υποδιάστημα αυτό είναι σχετικά μικρό ώστε κατά τη διάρκειά του ο ρυθμός να είναι πρακτικά σταθερός, το όχημα θα διανύσει περίπου $f(t_1)\ \Delta t$ m στο πρώτο υποδιάστημα. Αν $t_2$ ένα σημείο στο δεύτερο υποδιάστημα, το όχημα θα διανύσει επιπλέον $f(t_2)\ \Delta t$ m στο υποδιάστημα αυτό, κ.ο.κ. Το άθροισμα των γινομένων αυτών προσεγγίζει τη συνολική απόσταση $D$ που διανύεται από τη στιγμή $t = a$ έως την $t = b$. Αν έχουμε διαμερίσει σε $n$ υποδιαστήματα, τότε

$$D \approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t\,.$$

Ας επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην κίνηση του βλήματος του Παραδείγματος 5 της Ενότητας 3.2. Το βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Μετά από $t$ sec η ταχύτητά του είναι $v = f(t) = 160 - 9{,}8t$. Σε 3 sec ανέρχεται συνολικά 435,9 m, οπότε αφού εκτοξεύτηκε από αρχικό ύψος 3 m, φθάνει τελικά στο ύψος των 438,9 m.

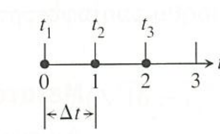
**CD-ROM**
**Δικτυότοπος**
**Βιογραφικά στοιχεία**
Arthur Cayley
(1821-1895)

### Παράδειγμα 2 Εκτίμηση του ύψους βλήματος

Η συνάρτηση της ταχύτητας ενός βλήματος που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω είναι $f(t) = 160 - 9{,}8t$. Χρησιμοποιήστε την τεχνική άθροισης που μόλις αναπτύξαμε για να εκτιμήσετε το πόσο ψηλά θα έχει φθάσει στα πρώτα 3 sec. Πόσο καλά προσεγγίζουν τα αθροίσματά σας την ακριβή τιμή των 435,9 m;

Λύση Θα διερευνήσουμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε για διαφορετικό πλήθος διαστημάτων και διαφορετικά σημεία αποτίμησης.

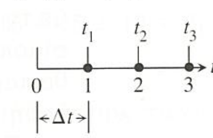
*Τρία υποδιαστήματα μήκους 1, με την $f$ να υπολογίζεται στα αριστερά άκρα:*




Με την $f$ να υπολογίζεται στα σημεία $t = 0$, 1, και 2, έχουμε

$$\begin{aligned}
D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t && \text{Εξ. (1)} \\
&\approx [160 - 9{,}8(0)](1) + [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) \\
&\approx 450{,}6.
\end{aligned}$$

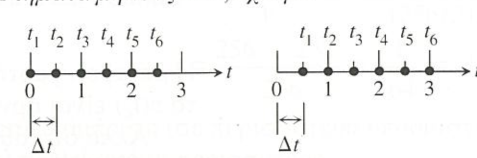
*Τρία υποδιαστήματα μήκους 1, με την $f$ να υπολογίζεται στα δεξιά άκρα:*




Με την $f$ να υπολογίζεται στα σημεία $t = 1$, 2, και 3, έχουμε

$$\begin{aligned}
D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t && \text{Εξ. (1)} \\
&\approx [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) + [160 - 9{,}8(3)](1) \\
&\approx 421{,}2.
\end{aligned}$$

*Με έξι υποδιαστήματα μήκους 1/2, έχουμε*




Με υπολογισμό στα αριστερά άκρα: $D \approx 443{,}25$.
Με υπολογισμό στα δεξιά άκρα: $D \approx 428{,}55$.

Οι τελευταίες εκτιμήσεις των έξι υποδιαστημάτων διαφέρουν λιγότερο απ' ό,τι οι εκτιμήσεις των τριών. Τα αποτελέσματα βελτιώνονται καθώς τα υποδιαστήματα μικραίνουν.

Καθώς βλέπουμε στον Πίνακα 4.4, τα αθροίσματα αριστερού άκρου προσεγγίζουν την ακριβή τιμή 435,9 «από πάνω», ενώ τα αθροίσματα δεξιού άκρου προσεγγίζουν την ακριβή τιμή «από κάτω». Η ακριβής τιμή κείται κάπου μεταξύ των «πάνω» και «κάτω» αθροισμάτων αυτών. Η πλησιέστερη στην πραγματική τιμή εκτίμηση του Πίνακα απέχει από αυτήν μόλις κατά 0,23 m, που αντιστοιχεί σε μικρό ποσοστιαίο σφάλμα.

Μέτρο σφάλματος = |πραγματική τιμή − υπολογισθείσα τιμή|

$$\text{Ποσοστιαίο σφάλμα} = \frac{0{,}23}{435{,}9} \approx 0{,}05\%.$$

Θα μπορούσαμε λοιπόν να προβλέψουμε με ασφάλεια βάσει των τελευταίων στοιχείων του πίνακα, ότι το βλήμα ανήλθε περίπου 436 m κατά τα πρώτα 3 sec της κίνησής του.

**Πίνακας 4.4** Εκτιμήσεις διανυθείσας απόστασης

| Αριθμός υποδιαστημάτων | Μήκος κάθε υποδιαστήματος | Άθροιση στο αριστερό άκρο | Άθροιση στο δεξιό άκρο |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 450,6 | 421,2 |
| 6 | 0,5 | 443,25 | 428,55 |
| 12 | 0,25 | 439,58 | 432,23 |
| 24 | 0,125 | 437,74 | 434,06 |
| 48 | 0,0625 | 436,82 | 434,98 |
| 96 | 0,03125 | 436,36 | 435,44 |
| 192 | 0,015625 | 436,13 | 435,67 |

## Μετατόπιση έναντι διανυθείσας απόστασης

Αν ένα σώμα με συνάρτηση θέσεως $s(t)$ κινείται ευθύγραμμα χωρίς να αλλάζει κατεύθυνση, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική απόσταση που διανύει από τη στιγμή $t = a$ έως την $t = b$ αθροίζοντας τις αποστάσεις που διανύει σε μικρά διαστήματα, όπως στο Παράδειγμα 2. Αν το σώμα αλλάζει κατεύθυνση κατά την κίνησή του, τότε θα πρέπει να κάνουμε χρήση του *μέτρου της ταχύτητάς του* $|v(t)|$, που είναι η απόλυτη τιμή της συναρτήσεως της ταχύτητας, $v(t)$, προκειμένου να βρούμε τη συνολική διανυθείσα απόσταση. Αν όμως, αντί του μέτρου, χρησιμοποιήσουμε και πάλι την ταχύτητα, όπως στο Παράδειγμα 2, τότε θα πάρουμε ως αποτέλεσμα τη **μετατόπιση** του σώματος, $s(b) - s(a)$, δηλαδή τη διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής του θέσεως.

Για να πειστείτε γι' αυτό, διαμερίστε το χρονικό διάστημα $[a, b]$ σε αρκούντως μικρά υποδιαστήματα $\Delta t$ τέτοια ώστε να μην μεταβάλλεται αισθητά η ταχύτητα του σώματος μεταξύ $t_{k-1}$ και $t_k$. Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα $v(t_k)$ θα προσεγγίζει αξιόπιστα την ταχύτητα σε όλο το εκάστοτε υποδιάστημα. Κατα συνέπεια, η μεταβολή της συντεταγμένης θέσεως του σώματος στο χρονικό υποδιάστημα θα ισούται κατά προσέγγιση με

$$v(t_k)\,\Delta t.$$

Η μεταβολή αυτή είναι θετική αν το $v(t_k)$ είναι θετικό και αρνητική αν το $v(t_k)$ είναι αρνητικό.

Αλλά σε κάθε περίπτωση, η διανυθείσα απόσταση στο υποδιάστημα αυτό θα είναι περίπου

$$|v(t_k)|\,\Delta t.$$



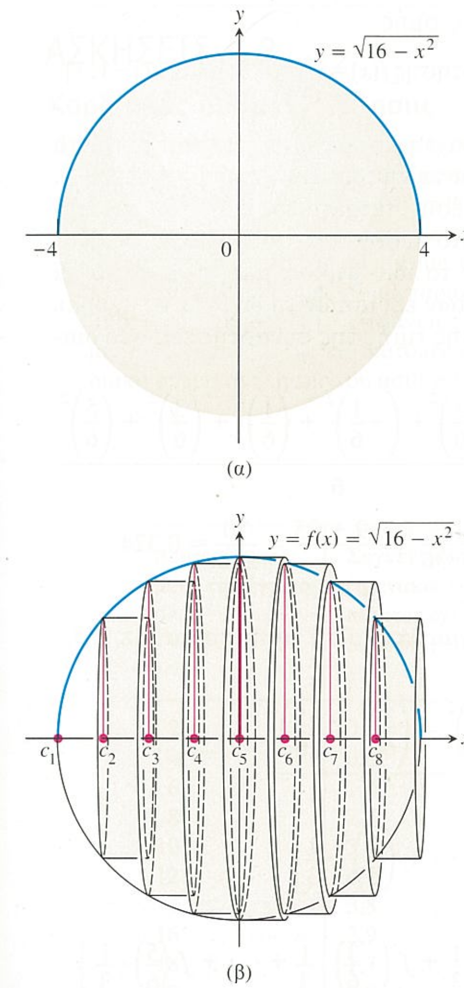
Η **συνολική διανυθείσα απόσταση** θα ισούται κατά προσέγγιση με το άθροισμα

$$|v(t_1)|\,\Delta t + |v(t_2)|\,\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\,\Delta t. \tag{2}$$

CD-ROM Δικτυότοπος

## Όγκος σφαίρας

Προσέξτε τη μαθηματική ομοιότητα μεταξύ των Παραδειγμάτων 1 και 2. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα και εκτιμούμε τη ζητούμενη ποσότητα αθροίζοντας γινόμενα τιμών της συναρτήσεως επί μήκη διαστημάτων. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε και όγκους.




**Σχημα 4.4** (α) Το ημικύκλιο $y = \sqrt{16 - x^2}$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x$ ορίζοντας μια σφαίρα. (β) Η σφαίρα προσεγγίζεται από ένα σύνολο κυλίνδρων που έχουν ως βάση τις διατομές της σφαίρας

### Παράδειγμα 3 Εκτίμηση του όγκου σφαίρας

Εκτιμήστε τον όγκο σφαίρας ακτίνας 4.

*Λύση* Φανταζόμαστε τη σφαίρα σαν η επιφάνειά της να προέκυψε από περιστροφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ ως προς τον άξονα $x$ (Σχήμα 4.4α). Διαμερίζουμε το διάστημα $-4 \le x \le 4$ σε $n$ υποδιαστήματα ίσου μήκους $\Delta x = 8/n$. Κατόπιν «τεμαχίζουμε» τη σφαίρα με επίπεδα κάθετα στον άξονα $x$ στα σημεία διαμέρισης, «κόβοντάς» την σε $n$ παράλληλες φέτες πάχους $\Delta x$. Για μεγάλο $n$, κάθε φέτα μπορεί να προσεγγιστεί από έναν κύλινδρο, που μας είναι πιο οικείος από γεωμετρική άποψη και έχει γνωστό όγκο $\pi r^2 h$. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, οι κύλινδροι είναι πλαγιασμένοι και το ύψος τους $h$ ισούται με $\Delta x$, ενώ η ακτίνα τους $r$ εξαρτάται από την θέση μας στον άξονα $x$. Ας διαμερίσουμε σε $n = 8$ κυλίνδρους, παίρνοντας ως ακτίνα του καθενός την τιμή $f(c_i) = \sqrt{16 - c_i^2}$ στο αριστερό άκρο $x = c_i$ του υποδιαστήματος (Σχήμα 4.4β). (Ο κύλινδρος στο $x = -4$ είναι «εκφυλισμένος» διότι η διατομή του είναι μηδενικού εμβαδού.) Τώρα είμαστε σε θέση να προσεγγίσουμε τον όγκο της σφαίρας αθροίζοντας τους κυλινδρικούς όγκους,

$$\pi r^2 h = \pi\left(\sqrt{16 - c_i^2}\right)^2 \Delta x.$$

Το άθροισμα των οκτώ κυλινδρικών όγκων είναι

$$\begin{aligned}
S_8 &= \pi\left[\sqrt{16 - c_1^2}\right]^2 \Delta x + \pi\left[\sqrt{16 - c_2^2}\right]^2 \Delta x + \pi\left[\sqrt{16 - c_3^2}\right]^2 \Delta x \\
&\quad + \cdots + \pi\left[\sqrt{16 - c_8^2}\right]^2 \Delta x \qquad \Delta x = 8/n = 1 \\
&= \pi\,[(16 - (-4)^2) + (16 - (-3)^2) + (16 - (-2)^2) + \cdots + (16 - (3)^2)] \\
&= \pi\,[0 + 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7] \\
&= 84\,\pi.
\end{aligned}$$

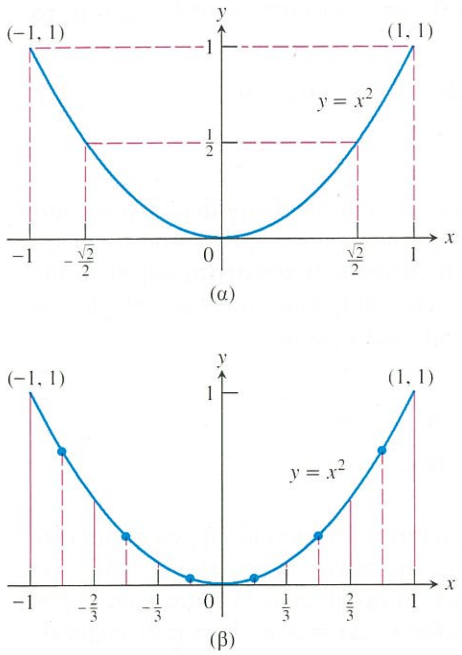
Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αρκετά καλή συμφωνία με τον πραγματικό όγκο της σφαίρας,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{256\pi}{3}.$$

Η διαφορά μεταξύ $S_8$ και $V$ είναι ένα μικρό ποσοστό του $V$:

$$\begin{aligned}
\text{Ποσοστιαίο σφάλμα} &= \frac{|V - S_8|}{V} = \frac{(256/3)\pi - 84\pi}{(256/3)\pi} \\
&= \frac{256 - 252}{256} = \frac{1}{64} = 1{,}6\%.
\end{aligned}$$

Με «πυκνότερη» διαμέριση (σε περισσότερα υποδιαστήματα), η προσέγγιση θα βελτιωθεί ακόμη περισσότερο.




**Σχημα 4.5** (α) Γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. (β) Τιμές της $f$ ανά τακτά διαστήματα.

## Μέση τιμή μη αρνητικής συναρτήσεως

Για να βρούμε τον μέσο όρο ενός πεπερασμένου συνόλου αριθμών, τους αθροίζουμε και κατόπιν διαιρούμε με το πλήθος τους. Αλλά πώς μπορούμε να βρούμε τον μέσο όρο ενός άπειρου πλήθους αριθμών; Για παράδειγμα, ποια είναι η μέση τιμή της συναρτήσεως $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[-1, 1]$; Για να δούμε τι νόημα έχει ο «συνεχής» αυτός μέσος όρος, ας φανταστούμε ότι εκτελούμε μια «δειγματοληψία» επί των τιμών της συνάρτησης. Επιλέγουμε λοιπόν τυχαία $x$ μεταξύ του $-1$ και του 1, τα υψώνουμε στο τετράγωνο, και υπολογίζουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων. Περιμένουμε ότι όσο μεγαλύτερο δείγμα παίρνουμε, τόσο ο μέσος όρος που υπολογίζουμε προσεγγίζει κάποιον αριθμό, τον οποίο εύλογα καλούμε *μέση τιμή της $f$ στο* $[-1, 1]$.

Η γραφική παράσταση στο Σχήμα 4.5α υποδεικνύει ότι το μέσο τετράγωνο που ζητούμε θα είναι μικρότερο του 1/2, γιατί οι αριθμοί με τετράγωνα μικρότερα από 1/2 καλύπτουν περισσότερο από το 70% του διαστήματος $[-1, 1]$. Αν είχαμε έναν υπολογιστή που παράγει τυχαίους αριθμούς, θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε το δειγματοληπτικό αυτό πείραμα, αλλά είναι πολύ ευκολότερο να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της συναρτήσεως με ένα πεπερασμένο άθροισμα.

### Παράδειγμα 4 Εκτίμηση μέσης τιμής

Εκτιμήστε τη μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

*Λύση* Εποπτεύουμε το γράφημα της $y = x^2$ και διαμερίζουμε το διάστημα $[-1, 1]$ σε 6 υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = 1/3$ (Σχήμα 4.5β).

Μια εύλογη εκτίμηση του μέσου τετραγώνου σε κάθε υποδιάστημα είναι το τετράγωνο του $y$ στο μέσον του υποδιαστήματος. Και εφόσον τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο μήκος, μπορούμε κατά τη συνήθη να βρούμε τον μέσο όρο των έξι αυτών τιμών, για να έχουμε έτσι μια τελική εκτίμηση της μέσης τιμής της συναρτήσεως στο διάστημα $[-1, 1]$.

$$\text{Μέση τιμή} \approx \frac{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2}{6}$$

$$\approx \frac{1}{6} \cdot \frac{25 + 9 + 1 + 1 + 9 + 25}{36} = \frac{70}{216} \approx 0{,}324$$

Θα δείξουμε αργότερα ότι η πραγματική μέση τιμή ισούται με 1/3.

Προσέξτε ότι

$$\frac{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{\text{μήκος του } [-1, 1]} \cdot \left[f\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(-\frac{3}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + \cdots + f\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{\text{μήκος του } [-1, 1]} \cdot \left[\begin{array}{c}\text{άθροισμα γινομένων των τιμών της συναρτήσεως} \\ \text{επί τα μήκη των υποδιαστημάτων}\end{array}\right]$$

Για άλλη μια φορά λοιπόν κάναμε μια εκτίμηση πολλαπλασιάζοντας τιμές της συναρτήσεως επί τα μήκη υποδιαστημάτων και αθροίζοντας για όλα τα υποδιαστήματα.



## Συμπέρασμα

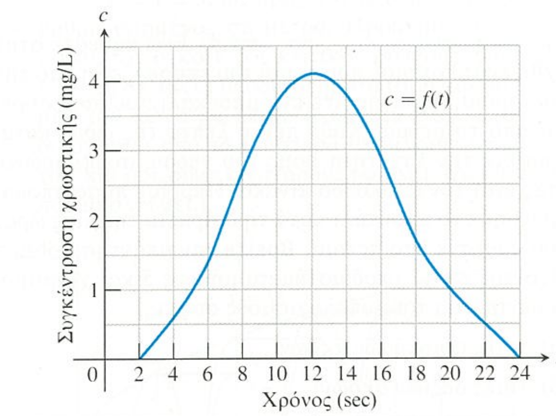
Σε όλα τα παραδείγματα της ενότητας αυτής αθροίσαμε γινόμενα τιμών μιας συναρτήσεως επί τα μήκη διαστημάτων για να λάβουμε προσεγγίσεις ικανοποιητικές για το εκάστοτε πρακτικό πρόβλημα. Περισσότερα παραδείγματα θα βρείτε στις ασκήσεις.

Οι προσεγγιστικοί υπολογισμοί της απόστασης στο Παράδειγμα 2 βελτιώθηκαν καθώς τα σχετικά υποδιαστήματα έγιναν μικρότερα και περισσότερα. Αυτό μπορούσαμε να το συμπεράνουμε διότι γνωρίζαμε ήδη την ακριβή λύση από τη μελέτη των αντιπαραγώγων της Ενότητας 3.2. Αν λοιπόν είχαμε πυκνώσει ακόμη περισσότερο τη διαμέριση που κάναμε, άραγε θα προσέγγιζε οριακά το άθροισμά μας την ακριβή λύση; Ή μήπως η διαφαινόμενη σχέση μεταξύ των αθροισμάτων και των αντιπαραγώγων είναι συμπτωματική; Θα μπορούσαμε άραγε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του Παραδείγματος 1, τον όγκο του Παραδείγματος 3, ή τη μέση τιμή του Παραδείγματος 4, με αντιπαραγώγους; Όπως θα δούμε, οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά είναι «Ναι, το άθροισμα προσεγγίζει οριακά την ακριβή τιμή»· «Όχι, αυτό δεν είναι σύμπτωση»· και «Ναι, ο υπολογισμός μπορεί να γίνει και με αντιπαραγώγους».

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.3

## Καρδιακός ρυθμός άντλησης

**1.** Ο παρατιθέμενος πίνακας περιέχει τιμές της συγκεντρώσεως μιας χρωστικής ουσίας που εγχέεται στο αίμα για μέτρηση του καρδιακού ρυθμού άντλησης όπως στο Παράδειγμα 1. Στην περίπτωση αυτή εγχύθηκαν 5 mg χρωστικής αντί για τα 5,6 mg του παραδείγματος. Με διαμέριση σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα εκτιμήστε το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη συγκέντρωσης και κατόπιν εκτιμήστε τον καρδιακό ρυθμό άντλησης του ασθενούς.




| **Δευτερόλεπτα μετά την έγχυση** $t$ | **Συγκέντρωση χρωστικής (η ανακύκλωση του αίματος έχει ληφθεί υπ' όψιν)** $c$ |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 4 | 0,6 |
| 6 | 1,4 |
| 8 | 2,7 |
| 10 | 3,7 |
| 12 | 4,1 |
| 14 | 3,8 |
| 16 | 2,9 |
| 18 | 1,7 |
| 20 | 1,0 |
| 22 | 0,5 |
| 24 | 0 |

**2.** Ο παρατιθέμενος πίνακας περιέχει τιμές της συγκεντρώσεως μιας χρωστικής ουσίας που εγχέεται στο αίμα για μέτρηση του καρδιακού ρυθμού άντλησης όπως στο Παράδειγμα 1. Στην περίπτωση αυτή εγχύθηκαν 10 mg χρωστικής. Απεικονίστε τα δεδομένα ως σημεία σε διάγραμμα και ενώστε τα με μια λεία καμπύ-

| **Δευτερόλεπτα μετά την έγχυση** $t$ | **Συγκέντρωση χρωστικής (έχοντας λάβει υπ' όψιν την ανακύκλωση του αίματος)** $c$ | **Δευτερόλεπτα μετά την έγχυση** $t$ | **Συγκέντρωση χρωστικής (έχοντας λάβει υπ' όψιν την ανακύκλωση του αίματος)** $c$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 16 | 7,9 |
| 2 | 0 | 18 | 7,8 |
| 4 | 0,1 | 20 | 6,1 |
| 6 | 0,6 | 22 | 4,7 |
| 8 | 2,0 | 24 | 3,5 |
| 10 | 4,2 | 26 | 2,1 |
| 12 | 6,3 | 28 | 0,7 |
| 14 | 7,5 | 30 | 0 |

λη. Εκτιμήστε το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη συγκέντρωσης και με το αποτέλεσμα αυτό εκτιμήστε τον καρδιακό ρυθμό άντλησης του ασθενούς.

## Απόσταση

**3.** *Διανυθείσα απόσταση* Ο παρατιθέμενος πίνακας δείχνει την ταχύτητα μιας πρότυπης μηχανής τρένου που κινείται σε σιδηροτροχιά επί 10 sec. Εκτιμήστε την απόσταση που διένυσε, διαιρώντας σε 10 υποδιαστήματα μήκους 1 και χρησιμοποιώντας για τους υπολογισμούς σας τις

(α) τιμές αριστερών άκρων

(β) τιμές δεξιών άκρων.

| Χρόνος (sec) | Ταχύτητα (cm/sec) | Χρόνος (sec) | Ταχύτητα (cm/sec) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 11 |
| 1 | 12 | 7 | 6 |
| 2 | 22 | 8 | 2 |
| 3 | 10 | 9 | 6 |
| 4 | 5 | 10 | 0 |
| 5 | 13 | | |

**4.** *Διανυθείσα απόσταση κατά μήκος ποταμού* Ενώ κάθεστε στην όχθη ενός ποταμού που η ροή του επηρεάζεται από την παλίρροια, παρατηρείτε ένα μπουκάλι που παρασύρεται από το ρεύμα. Κάθε πέντε λεπτά της ώρας καταγράφετε την ταχύτητα ροής του νερού, συμπληρώνοντας έτσι τον ακόλουθο πίνακα. Περίπου πόσο απομακρύνθηκε το μπουκάλι κατά τη διάρκεια της μιας ώρας που κάθεστε στο ποτάμι; Βρείτε την απάντηση διαμερίζοντας σε 12 υποδιαστήματα μήκους 5 και χρησιμοποιώντας για τους υπολογισμούς σας τις

(α) τιμές αριστερών άκρων

(β) τιμές δεξιών άκρων.

| Χρόνος (min) | Ταχύτητα (m/sec) | Χρόνος (min) | Ταχύτητα (m/sec) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 35 | 1,2 |
| 5 | 1,2 | 40 | 1,0 |
| 10 | 1,7 | 45 | 1,8 |
| 15 | 2,0 | 50 | 1,5 |
| 20 | 1,8 | 55 | 1,2 |
| 25 | 1,6 | 60 | 0 |
| 30 | 1,4 | | |

**5.** *Οδική απόσταση* Είστε συνοδηγός σε ένα αυτοκίνητο που το ταχύμετρό του λειτουργεί αλλά το οδόμετρό του έχει χαλάσει. Θέλετε να μετρήσετε το μήκος μιας χωμάτινης διαδρομής με στροφές, οπότε καταγράφετε την ταχύτητα του οχήματος ανά διαστήματα των 10 sec, συμπληρώνοντας έτσι τον ακόλουθο πίνακα. Εκτιμήστε το μήκος της διαδρομής χρησιμοποιώντας για τους υπολογισμούς σας τις

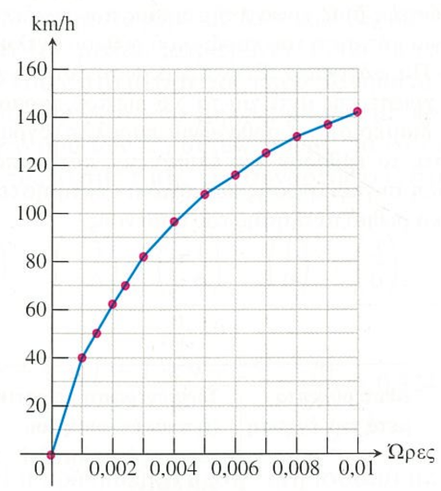
(α) τιμές αριστερών άκρων

(β) τιμές δεξιών άκρων.

| Χρόνος (sec) | Ταχύτητα (σε m/sec) (36 km/h=10 m/sec) | Χρόνος (sec) | Ταχύτητα (σε m/sec) (36 km/h=10 m/sec) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 70 | 4 |
| 10 | 13 | 80 | 6 |
| 20 | 4 | 90 | 10 |
| 30 | 10 | 100 | 13 |
| 40 | 9 | 110 | 9 |
| 50 | 13 | 120 | 10 |
| 60 | 10 | | |

**6.** *Υπολογισμός απόστασης από μετρήσεις ταχύτητας* Ο πίνακας που ακολουθεί παραθέτει μετρήσεις της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου που επιταχύνει από 0 σε 142 km/h σε 36 sec (δηλ. σε 10 χιλιοστά της ώρας).

| Χρόνος (h) | Ταχύτητα (km/h) | Χρόνος (h) | Ταχύτητα (km/h) |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0,006 | 116 |
| 0,001 | 40 | 0,007 | 125 |
| 0,002 | 62 | 0,008 | 132 |
| 0,003 | 82 | 0,009 | 137 |
| 0,004 | 96 | 0,010 | 142 |
| 0,005 | 108 | | |




(α) Διαμερίζοντας το διάγραμμα σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, εκτιμήστε πόση απόσταση διένυσε το αυτοκίνητο τα 36 sec που χρειάστηκε μέχρι να φθάσει την ταχύτητα των 142 km/h.

(β) Σε πόσα περίπου δευτερόλεπτα διένυσε το ήμισυ της συνολικής απόστασης; Με πόση ταχύτητα κινούνταν τη στιγμή εκείνη;

## Όγκος

CD-ROM Δικτυότοπος

**7.** *Όγκος σφαίρας (Συνέχεια του Παραδείγματος 3)* Υποθέστε ότι προσεγγίζουμε τον όγκο $V$ της σφαίρας στο Παράδειγμα 3 διαμερίζοντας το διάστημα $-4 \le x \le 4$ σε τέσσερα υποδιαστήματα μήκους 2 και χρησιμοποιώντας κυλίνδρους των οποίων τις διατομές υπολογίζουμε βασιζόμενοι στο αριστερό άκρο κάθε υποδιαστήματος. (Όπως και στο Παράδειγμα 3, ο αριστερότερος κύλινδρος θα έχει μηδενική ακτίνα.)



(α) Βρείτε το άθροισμα $S_4$ των κυλινδρικών όγκων.

(β) Εκφράστε την ποσότητα $|V - S_4|$ ως ποσοστό επί τοις 100 του $V$ με προσέγγιση πλησιέστερης εκατοστιαίας μονάδας.

CD-ROM Δικτυότοπος

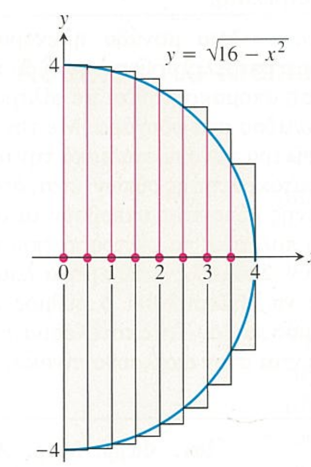
**8.** *Όγκος σφαίρας* Προκειμένου να εκτιμήσετε τον όγκο $V$ σφαίρας ακτίνας 5, διαμερίζετε τη διάμετρό της σε πέντε υποδιαστήματα μήκους 2. Κατόπιν «κόβετε» τη σφαίρα με επίπεδα κάθετα στη διάμετρό της και διερχόμενα από το αριστερό άκρο κάθε υποδιαστήματος, και αθροίζετε τους όγκους των κυλίνδρων ύψους 2.

(α) Βρείτε το άθροισμα $S_5$ των κυλινδρικών όγκων.

(β) Εκφράστε την ποσότητα $|V - S_5|$ ως ποσοστό επί τοις 100 του $V$ με προσέγγιση πλησιέστερης εκατοστιαίας μονάδας.

CD-ROM Δικτυότοπος

**9.** *Όγκος ημισφαιρίου* Πρόκειται να εκτιμήσετε τον όγκο $V$ ημισφαιρίου ακτίνας 4, προσανατολισμένου έτσι ώστε ο άξονας $x$ να είναι ο άξονας συμμετρίας του ημισφαιρίου. Διαμερίστε το $[0, 4]$ σε οκτώ υποδιαστήματα ίσου μήκους και προσεγγίστε τον όγκο με κυλίνδρους. Για τον υπολογισμό σας χρησιμοποιήστε τις κυκλικές διατομές του ημισφαιρίου που είναι κάθετες στον άξονα $x$ και διέρχονται από τα αριστερά άκρα κάθε υποδιαστήματος. (Δείτε το σχήμα που ακολουθεί.)




(α) *Μάθετε γράφοντας* Βρείτε το άθροισμα $S_8$ των κυλινδρικών όγκων. Αναμένετε το $S_8$ να προσεγγίζει «από πάνω» (δηλ. από μεγαλύτερες τιμές) ή «από κάτω» (από μικρότερες τιμές) τον όγκο $V$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Εκφράστε την ποσότητα $|V - S_8|$ ως ποσοστό επί τοις 100 του $V$ με προσέγγιση πλησιέστερης εκατοστιαίας μονάδας.

**10.** *Όγκος ημισφαιρίου* Επαναλάβετε την Άσκηση 9 χρησιμοποιώντας κυλίνδρους με διατομές που διέρχονται από το *δεξιό άκρο* κάθε υποδιαστήματος.

**11.** *Όγκος νερού σε δεξαμενή* Σε μια ημισφαιρική δεξαμενή ακτίνας 8 m εισρέει νερό μέχρι βάθος 4 m.

(α) Εκτιμήστε τον όγκο του νερού $S$ προσεγγίζοντας τον υδάτινο όγκο με οκτώ περιγεγραμμένους στερεούς κυλίνδρους.

(β) Όπως θα δείτε στην Ενότητα 4.5, Άσκηση 43, ο υδάτινος όγκος είναι $V = 320\pi/3$ m$^3$. Βρείτε το σφάλμα $|V - S|$ ως ποσοστό επί τοις 100 του $V$ με προσέγγιση πλησιέστερης εκατοστιαίας μονάδας.

**12.** *Όγκος νερού σε πισίνα* Μία ορθογώνια πισίνα έχει διαστάσεις 9 m επί 15 m. Στον πίνακα φαίνεται το ύψος $h(x)$ του νερού ανά διαστήματα των 1,5 m από το ένα άκρο της πισίνας μέχρι το άλλο. Εκτιμήστε τον όγκο του νερού στην πισίνα χρησιμοποιώντας για τους υπολογισμούς σας τις

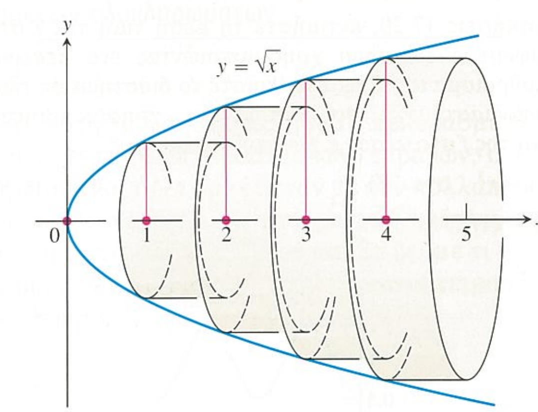
(α) τιμές αριστερών άκρων για το $h$

(β) τιμές δεξιών άκρων για το $h$.

| Θέση $x$ m | Βάθος $h(x)$ m | Θέση $x$ m | Βάθος $h(x)$ m |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,8 | 9 | 3,5 |
| 1,5 | 2,5 | 10,5 | 3,6 |
| 3 | 2,8 | 12 | 3,7 |
| 4,5 | 3 | 13,5 | 3,9 |
| 6 | 3,2 | 15 | 4 |
| 7,5 | 3,4 | | |

CD-ROM Δικτυότοπος

**13.** *Όγκος κωνικού ρύγχους πυραύλου* Το κωνικό ρύγχος πυραύλου είναι ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής που παράγεται περιστρέφοντας την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 5$, ως προς τον άξονα $x$, ο οποίος είναι βαθμονομημένος σε μέτρα. Προκειμένου να εκτιμήσουμε τον όγκο $V$ του κωνικού ρύγχους, διαμερίζουμε το $[0, 5]$ σε πέντε υποδιαστήματα ίσου μήκους, «κόβουμε» τον κώνο με επίπεδα κάθετα στον άξονα $x$ που διέρχονται από τα αριστερά άκρα κάθε υποδιαστήματος, και ορίζουμε κυλίνδρους ύψους 1. (Δείτε το σχήμα που ακολουθεί.)




(α) *Μάθετε γράφοντας* Βρείτε το άθροισμα $S_5$ των κυλινδρικών όγκων. Αναμένετε το $S_5$ να προσεγγίζει «από πάνω» (δηλ. από μεγαλύτερες τιμές) ή «από κάτω» (από μικρότερες τιμές) τον όγκο $V$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Όπως θα δείτε στην Ενότητα 4.5, Άσκηση 44, ο όγκος του κωνικού ρύγχους είναι $V = 25\pi/2$ m$^3$. Εκφράστε την ποσότητα $|V - S_5|$ ως ποσοστό επί τοις 100 του $V$, με προσέγγιση πλησιέστερης εκατοστιαίας μονάδας.

**14.** *Όγκος κωνικού ρύγχους πυραύλου* Επαναλάβετε την Άσκηση 13 χρησιμοποιώντας κυλίνδρους με διατομές του διέρχονται από τα *δεξιά άκρα* κάθε υποδιαστήματος.

## Ταχύτητα και απόσταση

**15.** *Ελεύθερη πτώση με αντίσταση από τον αέρα* Από ένα αιωρούμενο ελικόπτερο αφήνεται να πέσει ένα δέμα. Καθώς το δέμα πέφτει η ταχύτητά του αυξάνεται συνεχώς, αλλά η επιτάχυνσή του (ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας) μειώνεται με τον χρόνο ως συνέπεια της αντίστασης του αέρα. Η επιτάχυνση του δέματος καταγράφεται κάθε δευτερόλεπτο (σε m/sec²) για τα πρώτα 5 sec της πτώσης, και τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα που ακολουθεί:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 9,8 | 5,9 | 3,6 | 2,2 | 1,3 | 0,8 |

**(α)** Κάντε μια «υπερεκτίμηση» της ταχύτητας τη στιγμή $t = 5$.

**(β)** Κάντε μια «υποεκτίμηση» της ταχύτητας τη στιγμή $t = 5$.

**(γ)** Κάντε μια «υπερεκτίμηση» της απόστασης που έχει διανύσει το δέμα τη στιγμή $t = 3$.

**16.** *Διανυθείσα απόσταση βλήματος* Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το επίπεδο της θάλασσας με αρχική ταχύτητα 120 m/sec.

**(α)** Δεδομένου ότι η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η βαρύτητα, κάντε μια «υπερεκτίμηση» της ταχύτητάς του μετά από 5 sec κίνησης. Δίδεται η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8$ m/sec².

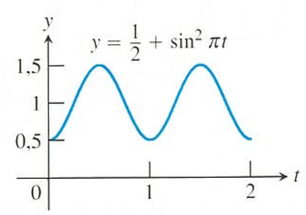
**(β)** Κάντε μια «υποεκτίμηση» για το ύψος του σώματος μετά από 5 sec.

## Μέση τιμή συνάρτησης

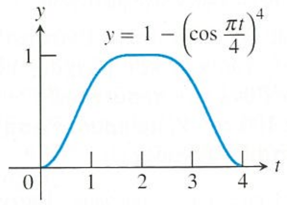
Στις Ασκήσεις 17-20, εκτιμήστε τη μέση τιμή της $f$ στο αναγραφόμενο διάστημα χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο άθροισμα ως εξής: Διαμερίστε το διάστημα σε τέσσερα υποδιαστήματα ίσου μήκους και χρησιμοποιήστε την τιμή της $f$ στο μέσον κάθε υποδιαστήματος.

**17.** $f(x) = x^3$ στο $[0, 2]$ **18.** $f(x) = 1/x$ στο $[1, 9]$

**19.** $f(t) = (1/2) + \sin^2 \pi t$ στο $[0, 2]$




**20.** $f(t) = 1 - \left(\cos \frac{\pi t}{4}\right)^4$ στο $[0, 2]$




## Έλεγχος ρυπάνσεως

**21.** *Ρύπανση υδάτων* Από ένα πετρελαιοφόρο που υπέστη ρήγμα διαρρέει πετρέλαιο στη θάλασσα. Όπως φαίνεται από την ολοένα αυξανόμενη διαρροή (δείτε τον ακόλουθο πίνακα), το ρήγμα διαρκώς μεγαλώνει.

| Χρόνος (h) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Διαρροή (L/h) | 50 | 70 | 97 | 136 | 190 |

| Χρόνος (h) | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Διαρροή (L/h) | 265 | 369 | 516 | 720 |

**(α)** Κάντε μια «υπερεκτίμηση» και μια «υποεκτίμηση» της συνολικής ποσότητας πετρελαίου που διέρρευσε σε 5 ώρες.

**(β)** Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για χρονικό διάστημα 8 ωρών.

**(γ)** Το πετρελαιοφόρο εξακολουθεί να χάνει πετρέλαιο με ρυθμό 720 L/h μετά τις πρώτες 8 ώρες. Αν το πλοίο αρχικά περιείχε 25.000 λίτρα καυσίμου, περίπου πόσες ακόμη ώρες θα περάσουν στην καλύτερη (βραδύτερη) και στη χειρότερη (ταχύτερη) περίπτωση μέχρι να διαρρεύσει στη θάλασσα όλο το πετρέλαιο;

**22.** *Αέρια ρύπανση* Μια μονάδα ηλεκτροπαραγωγής λειτουργεί με πετρέλαιο. Οι ρύποι που προκύπτουν κατά την καύση απομακρύνονται με φίλτρα που είναι τοποθετημένα μέσα στα φουγάρα. Με την πάροδο του χρόνου, τα φίλτρα χάνουν σταδιακά την αρχική τους δυνατότητα κατακράτησης ρύπων· έτσι, όταν τα επίπεδα εκπεμπόμενης ρύπανσης υπερβούν τα όρια που έχει θεσπίσει η πολιτεία, τα φίλτρα πρέπει πλέον να αντικατασταθούν. Στο τέλος κάθε μήνα λαμβάνονται μετρήσεις για να εξακριβωθεί ο ρυθμός εκπομπής ρύπων στην ατμόσφαιρα. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα.

| Μήνας | Ιαν. | Φεβρ. | Μάρ. | Απρ. | Μάι. | Ιούν. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ρυθμός εκπομπής ρύπων (τόνοι/ημέρα) | 0,20 | 0,25 | 0,27 | 0,34 | 0,45 | 0,52 |

| Μήνας | Ιούλ. | Αύγ. | Σεπτ. | Οκτ. | Νοέμ. | Δεκ. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ρυθμός εκπομπής ρύπων (τόνοι/ημέρα) | 0,63 | 0,70 | 0,81 | 0,85 | 0,89 | 0,95 |

**(α)** Αν ο μήνας έχει 30 ημέρες και τα καινούρια φίλτρα επιτρέπουν εκπομπές 0,05 τόνων/ημέρα, κάντε μια «υπερεκτίμηση» της συνολικής ποσότητας αέριων ρύπων που εκλύονται κατά το τέλος του Ιουνίου. Επίσης, κάντε μια «υποεκτίμηση».

**(β)** Στην καλύτερη περίπτωση, πότε περίπου θα έχει εκλυθεί ποσότητα 125 τόνων αέριων ρύπων στην ατμόσφαιρα;



## Εμβαδόν

**23.** *Εμβαδόν κύκλου* Σε κύκλο μοναδιαίας ακτίνας εγγράψτε ένα πολύγωνο με $n$ πλευρές και υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από το πολύγωνο για τις ακόλουθες τιμές του $n$:

**(α)** 4 (τετράγωνο) **(β)** 8 (οκτάγωνο) **(γ)** 16

**(δ)** Συγκρίνετε τα εμβαδά που βρήκατε στα (α), (β), και (γ) με τον εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

**24.** (*Συνέχεια της Άσκησης 23*)

**(α)** Σε κύκλο μοναδιαίας ακτίνας εγγράψτε ένα πολύγωνο με $n$ πλευρές. Κατόπιν υπολογίστε το εμβαδόν ενός από τα $n$ ίσα τρίγωνα που σχηματίζονται από δύο γειτονικές ακτίνες και μία πλευρά του πολυγώνου.

**(β)** Υπολογίστε το όριο του εμβαδού της επιφάνειας που περικλείεται από το εγγεγραμμένο πολύγωνο καθώς $n \to \infty$.

**(γ)** Επαναλάβετε τους υπολογισμούς των (α) και (β) για κύκλο ακτίνας $r$.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 25-28, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα παρακάτω.

**(α)** Παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις στο αναγραφόμενο διάστημα.

**(β)** Διαμερίστε το διάστημα σε $n = 100$, 200, και 1000 υποδιαστήματα ίσου μήκους και υπολογίστε τη συνάρτηση στο μέσο κάθε τέτοιου υποδιαστήματος.

**(γ)** Υπολογίστε τη μέση τιμή των τιμών της συναρτήσεως που προκύψαν στο ερώτημα (β).

**(δ)** Λύστε ως προς $x$ την εξίσωση $f(x) =$ (μέση τιμή), χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή που υπολογίσατε στο (γ) για $n = 1000$.

**25.** $f(x) = \sin x$ στο $[0, \pi]$

**26.** $f(x) = \sin^2 x$ στο $[0, \pi]$

**27.** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ στο $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

**28.** $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ στο $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

# 4.4 Αθροίσματα Riemann και ορισμένα ολοκληρώματα

Αθροίσματα Riemann • Ορολογία και συμβολισμός ολοκλήρωσης • Εμβαδόν χωρίου κάτω από το γράφημα μη αρνητικής συναρτήσεως • Μέση τιμή τυχούσας συνεχούς συναρτήσεως • Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

Στην προηγούμενη ενότητα, χρησιμοποιήσαμε πεπερασμένα αθροίσματα για να κάνουμε εκτιμήσεις αποστάσεων, εμβαδών, όγκων, και μέσων τιμών. Οι προσθετέοι όροι προέκυψαν με τον πολλαπλασιασμό επιλεγμένων τιμών συναρτήσεων με μήκη υποδιαστημάτων. Στην παρούσα ενότητα, θα πάμε ένα βήμα πιο πέρα και θα δούμε τι συμβαίνει στο όριο όπου το μήκος των υποδιαστημάτων γίνεται απειροστά μικρό και το πλήθος τους άπειρο.

## Αθροίσματα Riemann

CD-ROM Δικτυότοπος

*Ο συμβολισμός σίγμα* μας επιτρέπει να εκφράσουμε ένα μεγάλο άθροισμα σε συμπαγή μορφή:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n .$$

Το ελληνικό κεφαλαίο γράμμα Σ (σίγμα) δηλώνει «άθροισμα». Οι τιμές του δείκτη $k$ κάτω και πάνω από το Σ, αντίστοιχα, δηλώνουν τον πρώτο και τον τελευταίο όρο του αθροίσματος. Στην περίπτωση που το σύμβολο του απείρου ∞ εμφανίζεται πάνω από το Σ, σημαίνει ότι η άθροιση συνεχίζεται επ' άπειρον.

**Παράδειγμα 1** Χρήση του συμβολισμού σίγμα

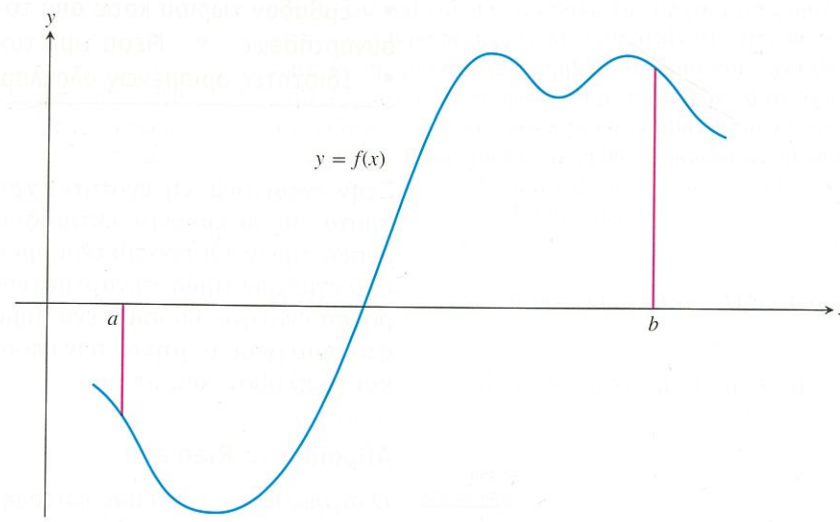
| Συμβολισμός αθροίσματος | Αναλυτική γραφή, ένας όρος για κάθε τιμή του $k$ | Η τιμή του αθροίσματος |
|---|---|---|
| $\sum_{k=1}^{5} k$ | $1+2+3+4+5$ | $15$ |
| $\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$ | $(-1)^1(1)+(-1)^2(2)+(-1)^3(3)$ | $-1+2-3=-2$ |
| $\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$ | $\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}$ | $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ |
| $\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$ | $\frac{4^2}{4-1}+\frac{5^2}{5-1}$ | $\frac{16}{3}+\frac{25}{4}=\frac{139}{12}$ |

Το κάτω όριο του αθροίσματος δεν είναι υποχρεωτικά μονάδα· μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος.

**CD-ROM**
**Δικτυότοπος**
Βιογραφικά στοιχεία
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Τα αθροίσματα που μας ενδιαφέρουν καλούνται *αθροίσματα Riemann,* προς τιμήν του Georg Friedrich Bernhard Riemann. Τα αθροίσματα Riemann κατασκευάζονται με συγκεκριμένο τρόπο, τον οποίο θα περιγράψουμε παρακάτω από μια γενικότερη θεώρηση που δεν περιορίζεται σε μη αρνητικές συναρτήσεις.

Ξεκινούμε με μια τυχούσα συνεχή συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Η συνάρτηση αυτή ενδέχεται να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές (Σχήμα 4.6).




**Σχημα 4.6** Μια τυχούσα συνάρτηση $y = f(x)$, συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Κατόπιν διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε $n$ υποδιαστήματα επιλέγοντας $n-1$ σημεία, έστω $x_1, x_2 \cdots, x_{n-1}$, μεταξύ των $a$ και $b$, με μοναδικό περιορισμό ότι

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

Για λόγους συνέπειας στον συμβολισμό, δηλώνουμε το $a$ με $x_0$ και το $b$ με $x_n$. Το σύνολο

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

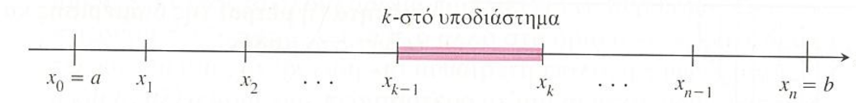
καλείται **διαμέριση** του $[a, b]$.



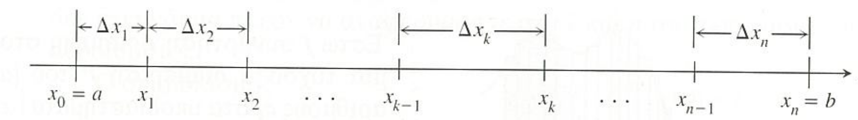
Η διαμέριση $P$ ορίζει $n$ κλειστά **υποδιαστήματα**

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n].$$

Το τυχόν κλειστό υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ καλείται ***k*-στό υποδιάστημα** του $P$.

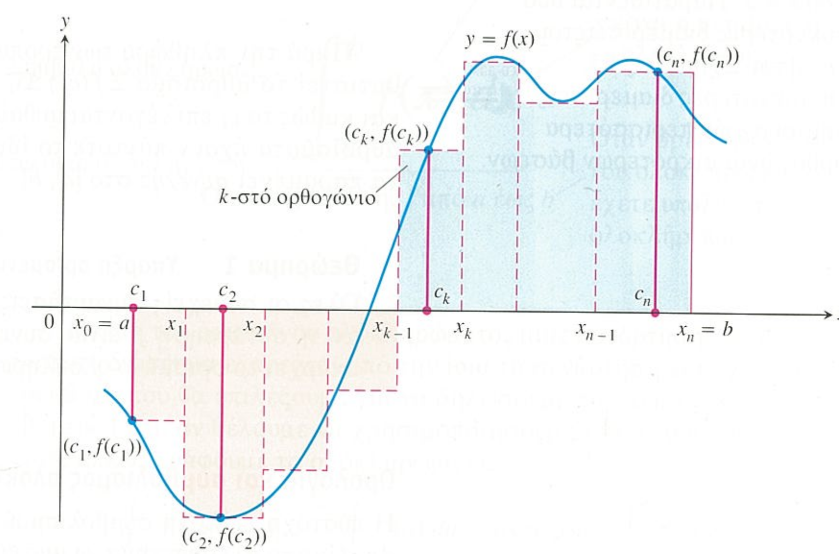



Το εύρος του $k$-στού υποδιαστήματος είναι $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.




Από κάθε υποδιάστημα, επιλέγουμε κάποιον αριθμό· έστω λοιπόν $c_k$ ο αριθμός που επιλέξαμε από το $k$-στό υποδιάστημα.

Σε κάθε υποδιάστημα ορθώνουμε ένα κατακόρυφο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που η μια βάση του βρίσκεται στον άξονα $x$ και η άλλη περιέχει το σημείο $(c_k, f(c_k))$ της καμπύλης. Τα ορθογώνια αυτά κείνται λοιπόν είτε πάνω είτε κάτω από τον άξονα $x$ (Σχήμα 4.7).




**Σχημα 4.7** Τα ορθογώνια προσεγγίζουν το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ και τον άξονα $x$.

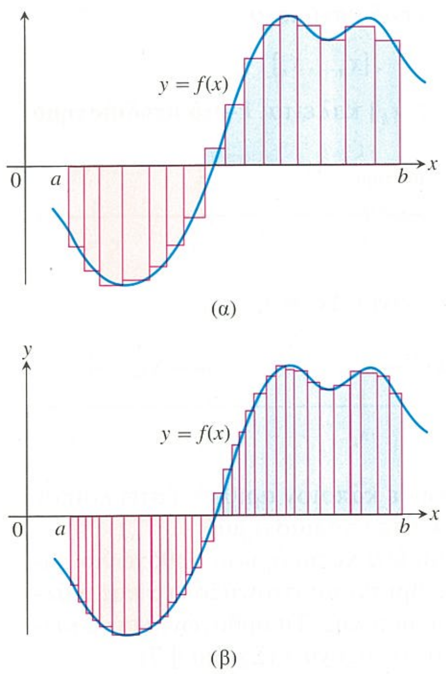
Σε κάθε υποδιάστημα, σχηματίζουμε το γινόμενο $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Το γινόμενο αυτό μπορεί να είναι θετικό, μηδέν, ή αρνητικό, αναλόγως του $f(c_k)$.

Τέλος, θεωρούμε το άθροισμα των γινομένων:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k .$$

Το άθροισμα αυτό, που εξαρτάται από τη διαμέριση $P$ και την επιλογή των αριθμών $c_k$, είναι ένα **άθροισμα Riemann της $f$ στο διάστημα $[a, b]$.**

Καθώς πυκνώνουμε τις διαμερίσεις του $[a, b]$, αναμένουμε ότι τα ορθογώνια που ορίζονται από τις διαμερίσεις θα προσεγγίζουν όλο και περισσότερο το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα $x$ και από




**ΣΧΗΜΑ 4.8** Παρατίθενται δύο πυκνότερες διαμερίσεις του $[a, b]$ του Σχήματος 4.7. Οι πυκνότερες διαμερίσεις δημιουργούν περισσότερα ορθογώνια μικρότερων βάσεων.

το γράφημα της $f$ (Σχήμα 4.8). Αναμένουμε, δηλαδή, ότι τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann θα συγκλίνουν σε μια οριακή τιμή. Το Θεώρημα 1 που ακολουθεί επιβεβαιώνει την υποψία μας αυτή, αρκεί τα μήκη των υποδιαστημάτων να τείνουν στο μηδέν. Η συνθήκη αυτή πληρούται αν το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος, που καλείται **λεπτότητα** (ή **μέτρο**) της διαμέρισης και δηλώνεται με το σύμβολο $\| P \|$, τείνει στο μηδέν.

**Ορισμός** Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως όριο των αθροισμάτων Riemann

Έστω $f$ συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Για μια τυχούσα διαμέριση $P$ του $[a, b]$, επιλέγουμε τυχαία τους αριθμούς $c_k$ στα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$.

Αν υπάρχει αριθμός $I$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = I$$

ανεξάρτητα του τρόπου επιλογής των $P$ και $c_k$, τότε η $f$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$ και το $I$ είναι το **ορισμένο ολοκλήρωμα** της $f$ στο $[a, b]$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Παρά την πληθώρα των τρόπων με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί το άθροισμα $\Sigma f(c_k)\,\Delta x_k$ καθώς αυξάνονται οι διαμερίσεις και καθώς τα $c_k$ επιλέγονται αυθαίρετα στην εκάστοτε διαμέριση, τα αθροίσματα έχουν πάντοτε το ίδιο όριο καθώς $\| P \| \to 0$, αρκεί η $f$ να παραμένει *συνεχής* στο $[a, b]$.

**Θεώρημα 1** Ύπαρξη ορισμένων ολοκληρωμάτων

Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Δηλαδή, αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμά της στο $[a, b]$.

## Ορολογία και συμβολισμός ολοκλήρωσης

Η εύστοχη επιλογή συμβολισμού του Leibniz για την παράγωγο, $dy/dx$, είχε το πλεονέκτημα να μας κάνει να βλέπουμε την παράγωγο σαν ένα κλάσμα, παρόλο που τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής τείνουν στο μηδέν. Αν και στην πραγματικότητα οι παράγωγοι δεν είναι ακριβώς κλάσματα, *συμπεριφέρονται* ως τέτοια. Μια από τις περιπτώσεις στις οποίες ο συμβολισμός επιτυγχάνει στο να καταστήσει ένα «βαθύτερο» αποτέλεσμα σχεδόν προφανές, είναι ο κανόνας της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ο συμβολισμός του Leibniz για το ορισμένο ολοκλήρωμα ήταν εξίσου εύστοχος με αυτόν της παραγώγου. Για να δηλώσει την παράγωγο, ο Leibniz μεταβαίνει από το ελληνικό σύμβολο («Δ» για τη «διαφορά») στο αντίστοιχο λατινικό ("d" για «διαφορικό», "differential") όταν λαμβάνεται το όριο,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Με το ίδιο σκεπτικό, για να δηλώσει το ορισμένο ολοκλήρωμα, τα ελληνικά σύμβολα «μετατρέπονται» σε λατινικά όταν λαμβάνεται το όριο,



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Προσέξτε ότι το $\Delta x$ τείνει ξανά στο μηδέν, οπότε μετατρέπεται στο διαφορικό $dx$. Το ελληνικό γράμμα $\Sigma$ έχει μετατραπεί σε ένα επιμήκες S, κι έτσι το ολοκλήρωμα παραμένει ένα άθροισμα. Τα $c_k$ συνωστίζονται τόσο κοντά το ένα στο άλλο στο όριο $n \to \infty$, ώστε δεν αποτελούν πια μια χονδροειδή και αυθαίρετη επιλογή τιμών $x$ μεταξύ των $a$ και $b$, αλλά μοιάζουν περισσότερο με μια συνεχή, αδιάσπαστη δειγματοληψία τιμών $x$ από το $a$ ώς το $b$. Είναι σαν να αθροίζαμε *όλα* τα γινόμενα της μορφής $f(x)\,dx$ καθώς το $x$ κινείται από το $a$ στο $b$, οπότε δεν έχει νόημα πλέον να αναφερόμαστε στα $k$ και $n$ του πεπερασμένου αθροίσματος.

Ο συμβολισμός

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

διαβάζεται ως «το ολοκλήρωμα από $a$ έως $b$ της $f$ του $x$ ντε $x$» ή ως «το ολοκλήρωμα ως προς $x$ από $a$ έως $b$ της $f$ του $x$. Τα επιμέρους στοιχεία έχουν τις εξής ονομασίες:

**Άνω όριο** ολοκλήρωσης

Η **ολοκληρωτέα συνάρτηση.**

$x$ είναι η **μεταβλητή ολοκλήρωσης.**

**Σύμβολο ολοκλήρωσης**

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Ολοκλήρωμα της } f \text{ από } a \text{ έως } b}$$

**Κάτω όριο** ολοκλήρωσης

**Ολοκλήρωμα** της $f$ από $a$ έως $b$

Όταν βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος, έχετε **υπολογίσει** το ολοκλήρωμα.

Η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης σε οποιοδήποτε διάστημα εξαρτάται από την ίδια τη συνάρτηση και όχι από το σύμβολο που θα επιλέξουμε για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή. Έτσι, αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το $t$ ή το $u$ αντί του $x$, τότε απλώς γράφουμε το ολοκλήρωμα ως

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f(u)\,du \qquad \text{αντί του} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ανεξαρτήτως του πώς εμείς παριστούμε το ολοκλήρωμα, αυτό παραμένει ο ίδιος *αριθμός*, που ορίζεται ως το όριο των αθροισμάτων Riemann. Εφόσον δεν έχει σημασία ποιο σύμβολο επιλέγουμε για τη μεταβλητή που διατρέχει το διάστημα από $a$ έως $b$, η μεταβλητή της ολοκλήρωσης καλείται **βωβή** (ή **πλασματική**).

**Παράδειγμα 2** Χρήση του συμβολισμού

Το διάστημα $[-1, 3]$ διαμερίζεται σε $n$ υποδιαστήματα ίσου μήκους $\Delta x = 4/n$. Έστω $m_k$ το μέσον του $k$-στού υποδιαστήματος. Εκφράστε το όριο

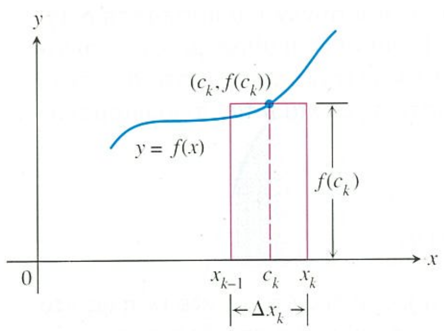
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3(m_k)^2 - 2m_k + 5\right)\Delta x$$

σε μορφή ολοκληρώματος.

Λύση Εφόσον τα μέσα $m_k$ ανήκουν στα υποδιαστήματα της διαμέρισης, η έκφραση αυτή όντως αποτελεί ένα όριο αθροισμάτων Riemann. (Τα επιλεγέντα σημεία δεν οφείλουν να είναι τα μέσα των υποδιαστημάτων· θα μπορούσαν να επιλεχθούν με αυθαίρετο τρόπο.) Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ και το διάστημα ολοκλήρωσης $[-1, 3]$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (3(m_k)^2 - 2m_k + 5)\,\Delta x = \int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 5)\,dx .$$

## Εμβαδόν χωρίου κάτω από το γράφημα μη αρνητικής συνάρτησης




**Σχημα 4.9** Κάθε όρος στο άθροισμα Riemann $\Sigma f(c_k)\,\Delta x_k$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης $f$ θα ισούται είτε με μηδέν, είτε με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Στο Παράδειγμα 1 της Ενότητας 4.3, είδαμε ότι μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το γράφημα μιας μη αρνητικής συνάρτησης $y = f(x)$ και από τον άξονα $x$, αν αθροίσουμε τα εμβαδά πεπερασμένου πλήθους ορθογωνίων ύψους ίσου με το ύψος της καμπύλης ακριβώς στο μέσον του εκάστοτε υποδιαστήματος. Τώρα γνωρίζουμε γιατί ισχύει η προσέγγιση αυτή. Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $y = f(x)$ είναι μη αρνητική σε όλο το διάστημα $[a, b]$, τότε κάθε μη μηδενικός όρος $f(c_k)\,\Delta x_k$ ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που εκτείνεται από τον άξονα $x$ έως την καμπύλη $y = f(x)$. (Δείτε το Σχήμα 4.9.)

Το άθροισμα Riemann

$$\sum f(c_k)\,\Delta x_k ,$$

που είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών, αποτελεί μια εκτίμηση του εμβαδού του χωρίου μεταξύ της καμπύλης και του άξονα $x$ με όρια $a$ και $b$. Και αφού τα ορθογώνια προσεγγίζουν όλο και καλύτερα το εμβαδόν του χωρίου αυτού καθώς χρησιμοποιούμε διαμερίσεις ολοένα και μικρότερης λεπτότητας, ονομάζουμε την οριακή τιμή του αθροίσματος «εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη».

**Ορισμός** **Εμβαδόν χωρίου κάτω από καμπύλη (ως ορισμένο ολοκλήρωμα)**

Αν η $y = f(x)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε **το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από $a$ έως $b$** είναι το ολοκλήρωμα της $f$ από $a$ έως $b$,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Ο ορισμός αυτός λειτουργεί αμφίδρομα: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα για τον υπολογισμό εμβαδών *αλλά* και εμβαδά για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

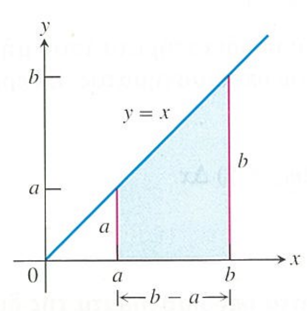
### Παράδειγμα 3 Εμβαδόν χωρίου κάτω από την καμπύλη $f(x) = x$

Υπολογίστε το

$$\int_a^b x\,dx, \quad 0 < a < b .$$

Λύση Γραμμοσκιάζουμε το χωρίο κάτω από την καμπύλη $y = x$, $a \le x \le b$ (Σχήμα 4.10) και διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για ένα τραπέζιο ύψους $(b - a)$ και βάσεων $a$ και $b$. Η τιμή του ολοκληρώματος είναι το εμβαδόν του τραπεζίου:

$$\int_a^b x\,dx = (b - a)\cdot\frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} .$$




**Σχημα 4.10** Το χωρίο του Παραδείγματος 3.



Συνεπώς,

$$\int_1^{\sqrt{5}} x\,dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} = 2$$

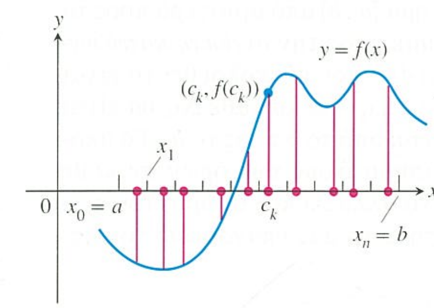
κ.ο.κ.

Προσέξτε ότι η ποσότητα $x^2/2$ είναι μια αντιπαράγωγος του $x$, πράγμα που επιβεβαιώνει περισσότερο τη σύνδεση μεταξύ αντιπαραγώγων και αθροισμάτων.

## Μέση τιμή τυχούσας συνεχούς συναρτήσεως

Στην Ενότητα 4.3, Παράδειγμα 4, ασχοληθήκαμε με τη μέση τιμή μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων. Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε τη μέση τιμή χωρίς την απαίτηση μη αρνητικότητας της $f$. Στην Ενότητα 4.5 θα δείξουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση παίρνει τη μέση τιμή της τουλάχιστον μία φορά.

Θα ξεκινήσουμε από την απλή αριθμητική έννοια του μέσου $n$ αριθμών ως το άθροισμά τους διαιρεμένο με το πλήθος τους $n$. Για μια συνεχή συνάρτηση $f$ σε κλειστό διάστημα $[a, b]$, το πλήθος τιμών απειρίζεται, αλλά μπορούμε να πάρουμε ένα δείγμα με κάποιον συστηματικό τρόπο. Διαμερίζουμε το $[a, b]$ σε $n$ υποδιαστήματα ίσου μήκους (μήκος $\Delta x = (b - a)/n$) και υπολογίζουμε την $f$ σε σημείο $c_k$ κάθε υποδιαστήματος (Σχήμα 4.11). Ο μέσος των $n$ τιμών του δείγματος θα ισούται με




**Σχημα 4.11** Μια δειγματοληψία τιμών της συναρτήσεως στο διάστημα $[a, b]$.

$$\begin{aligned}\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \text{Το άθροισμα σε συμβολισμό σίγμα}\\ &= \frac{\Delta x}{b - a}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n}\\ &= \frac{1}{b - a}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x}_{\text{άθροισμα Riemann της } f \text{ στο } [a,\, b]}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, ο μέσος όρος των τιμών του δείγματος ισούται πάντοτε με $1/(b - a)$ επί ένα άθροισμα Riemann της $f$ στο $[a, b]$. Καθώς αυξάνουμε το μέγεθος του δείγματος και η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, ο μέσος όρος θα πλησιάζει στην τιμή $(1/(b - a))\int_a^b f(x)\,dx$. Από το αξιοσημείωτο αυτό γεγονός οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός** **Μέση τιμή**

Αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η **μέση τιμή** της στο $[a, b]$ ισούται με

$$\text{av}\,(f) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

CD-ROM Δικτυότοπος

### Παράδειγμα 4 Εύρεση μέσης τιμής

Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ στο $[-2, 2]$.

Λύση Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ έχει ως γράφημα το άνω ημικύκλιο ακτίνας 2 με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του ημικυκλίου και του άξονα $x$ από $-2$ έως 2 μπορεί να υπολογιστεί από τον γεωμετρικό τύπο

$$\text{Εμβαδόν} = \frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi(2)^2 = 2\pi .$$

Επειδή το εμβαδόν αυτό ισούται επίσης με το ολοκλήρωμα της $f$ από $-2$ έως 2, θα ισχύει

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi.$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της $f$ είναι

$$\text{av}(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

## Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

Στον ορισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ ως όριο αθροισμάτων της μορφής $\Sigma f(c_k)\,\Delta x_k$, διατρέξαμε το διάστημα $[a\,,b]$ από αριστερά προς τα δεξιά. Τι θα συνέβαινε αν ολοκληρώναμε προς την *αντίθετη κατεύθυνση*; Το ολοκλήρωμα γίνεται τότε $\int_b^a f(x)\,dx$ – που εξακολουθεί να είναι ένα όριο αθροισμάτων της μορφής $\Sigma f(c_k)\,\Delta x_k$ – αλλά κάθε $\Delta x_k$ θα είναι αρνητικό, αφού οι τιμές του $x$ *ελαττώνονται* από το $b$ προς το $a$. Το αποτέλεσμα θα είναι να αλλάξουν τα πρόσημα όλων των όρων σε κάθε άθροισμα Riemann, και συνακόλουθα, να αλλάξει και το όριο του ορισμένου ολοκληρώματος. Η παρατήρηση αυτή μάς υπαγορεύει τον κανόνα

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Εφόσον ο αρχικός ορισμός δεν περιελάμβανε αυτού του είδους την «ανάστροφη» ολοκλήρωση, μπορούμε να θεωρήσουμε τον κανόνα αυτόν ως μια λογική επέκταση του αρχικού ορισμού του ολοκληρώματος.

Παρόλο που από τεχνικής πλευράς το $[a\,,a]$ δεν είναι διάστημα, αποτελεί άλλη μια λογική επέκταση του αρχικού ορισμού να γράψουμε $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Αυτοί είναι οι δυο πρώτοι κανόνες του Πίνακα 4.5. Οι υπόλοιποι είναι κανόνες που ισχύουν για τα αθροίσματα Riemann, και, κατ' επέκταση, για τα ορισμένα ολοκληρώματα.

**Πίνακας 4.5** Κανόνες ορισμένων ολοκληρωμάτων

| | | |
|---|---|---|
| 1. *Σειρά ολοκλήρωσης:* | $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ | Ορισμός |
| 2. *Μηδενισμός:* | $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ | Ορισμός |
| 3. *Σταθερό πολλαπλάσιο:* | $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ | Τυχών αριθμός $k$ |
| | $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ | $k=-1$ |
| 4. *Άθροισμα και διαφορά:* | $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ | |
| 5. *Αθροιστικότητα:* | $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ | |

6. *Ανισότητα max-min:* Αν $\max f$ και $\min f$ είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή, αντίστοιχα, της $f$ στο διάστημα $[a\,,b]$, τότε

$$\min f\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f\cdot(b-a).$$

7. *Φράγματα:* $f(x)\ge g(x)$ στο $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

$f(x)\ge 0$ στο $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (ειδική περίπτωση)



### Παράδειγμα 5 Χρήση των κανόνων ορισμένων ολοκληρωμάτων

Έστω ότι

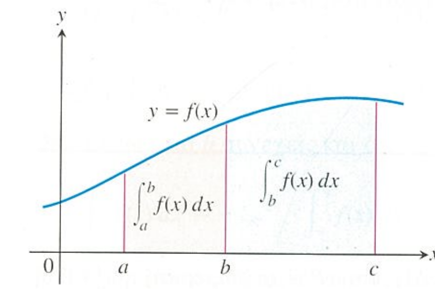
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5,\quad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2,\quad \text{και}\quad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7.$$

Τότε

1. $\displaystyle\int_4^1 f(x)\,dx = -\int_1^4 f(x)\,dx = -(-2) = 2$ Κανόνας 1

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}[2f(x)+3h(x)]\,dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,dx$ Κανόνες 3 και 4
$\displaystyle\qquad = 2(5)+3(7) = 31$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = 5+(-2) = 3.$ Κανόνας 5




**Σχημα 4.12** Κανόνας 5:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Απόδειξη του Κανόνα 3** Ο Κανόνας 3 λέει ότι το ολοκλήρωμα του γινομένου μιας σταθεράς $k$ επί μια συνάρτηση ισούται με το γινόμενο της σταθεράς $k$ επί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Αυτό αληθεύει διότι

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\,\Delta x_i\\ &= \lim_{\|P\|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\\ &= k\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Το Σχήμα 4.12 «αποδεικνύει» τον Κανόνα 5 για θετική συνάρτηση, αλλά ο κανόνας ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

**Απόδειξη του Κανόνα 6** Ο Κανόνας 6 λέει ότι το ολοκλήρωμα της $f$ στο $[a\,,b]$ δεν είναι ποτέ μικρότερο του γινομένου της ελάχιστης τιμής της $f$ επί το μήκος του διαστήματος, και ποτέ μεγαλύτερο του γινομένου της μέγιστης τιμής της $f$ επί το μήκος του διαστήματος. Ο λόγος είναι ότι για κάθε διαμέριση του $[a\,,b]$ και για κάθε επιλογή των $c_k$, έχουμε

$$\begin{aligned}\min f\cdot(b-a) &= \min f\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \textstyle\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a\\ &= \sum_{k=1}^{n}\min f\cdot\Delta x_k\\ &\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k && \min f\le f(c_k)\\ &\le \sum_{k=1}^{n}\max f\cdot\Delta x_k && f(c_k)\le\max f\\ &= \max f\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\\ &= \max f\cdot(b-a).\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, όλα τα αθροίσματα Riemann της $f$ στο $[a\,,b]$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\min f\cdot(b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \le \max f\cdot(b-a).$$

Κατά συνέπεια η ανισότητα αυτή ικανοποιείται και από το όριο των αθροισμάτων, δηλαδή από το ολοκλήρωμα.

### Παράδειγμα 6 Φράγμα ολοκληρώματος

Δείξτε ότι η τιμή του $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ είναι μικρότερη του 3/2.

Λύση Σύμφωνα με την ανισότητα max-min για ορισμένα ολοκληρώματα (Κανόνας 6), η ποσότητα $\min f \cdot (b - a)$ είναι ένα *κάτω φράγμα* της τιμής του $\int_a^b f(x)\, dx$, ενώ η ποσότητα $\max f \cdot (b - a)$ είναι ένα *άνω φράγμα*. Η μέγιστη τιμή της $\sqrt{1 + \cos x}$ στο [0, 1] είναι $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, άρα

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx \leq \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$

Εφόσον το $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ έχει ως άνω φράγμα τον αριθμό $\sqrt{2}$ (δηλαδή 1,414 . . .), το ολοκλήρωμα είναι μικρότερο του 3/2.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.4

## Συμβολισμός σίγμα

Γράψτε τα αθροίσματα στις Ασκήσεις 1-6 χωρίς τον συμβολισμό σίγμα. Κατόπιν υπολογίστε τα.

**1.** $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$  **2.** $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

**3.** $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$  **4.** $\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

**5.** $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$  **6.** $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cos k\pi$

## Ορθογώνια για αθροίσματα Riemann

Στις Ασκήσεις 7-10, παραστήστε γραφικά κάθε συνάρτηση $f(x)$ στο αναγραφόμενο διάστημα. Διαμερίστε το διάστημα σε τέσσερα υποδιαστήματα ίσου μήκους. Κατόπιν προσθέστε στο σχήμα τα ορθογώνια που αντιστοιχούν στο άθροισμα Riemann $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\, \Delta x_k$, δεδομένου ότι το $c_k$ είναι (α) αριστερό άκρο, (β) δεξιό άκρο, και (γ) μέσον του $k$-στού υποδιαστήματος. (Για κάθε είδος ορθογωνίων κάντε διαφορετικό σχήμα.)

**7.** $f(x) = x^2 - 1$, [0, 2]

**8.** $f(x) = -x^2$, [0, 1]

**9.** $f(x) = \sin x$, $[-\pi, \pi]$

**10.** $f(x) = \sin x + 1$, $[-\pi, \pi]$

## Γράφοντας όρια με μορφή ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 11-16, εκφράστε τα όρια με μορφή ορισμένων ολοκληρωμάτων.

**11.** $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2\, \Delta x_k$, όπου $P$ είναι διαμέριση του [0, 2]

**12.** $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2c_k^3\, \Delta x_k$, όπου $P$ είναι διαμέριση του [−1, 0]

**13.** $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\, \Delta x_k$, όπου $P$ είναι διαμέριση του [−7, 5]

**14.** $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k}\, \Delta x_k$, όπου $P$ είναι διαμέριση του [2, 3]

**15.** $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\, \Delta x_k$, όπου $P$ είναι διαμέριση του [0, 1]

**16.** $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\, \Delta x_k$, όπου $P$ είναι διαμέριση του $[-\pi/4, 0]$

## Υπολογισμός ολοκληρωμάτων από εμβαδά

Στις Ασκήσεις 17-22, παραστήστε γραφικά τις ολοκληρωτέες ποσότητες και χρησιμοποιήστε εμβαδά για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

**17.** $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$  **18.** $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$

**19.** $\int_{-2}^{1} |x|\, dx$  **20.** $\int_{-1}^{1} (2 - |x|)\, dx$

**21.** $\int_0^b x\, dx$, $b > 0$  **22.** $\int_a^b 2s\, ds$, $0 < a < b$

## Μέση τιμή

Στις Ασκήσεις 23-26, βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησης στο δοθέν διάστημα, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική μέθοδο του Παραδείγματος 4.



**23.** $f(x) = 1 - x$ στο [0, 1]

**24.** $f(x) = |x|$ στο [−1, 1]

**25.** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ στο [0, 1].

**26.** $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ στο [1, 2].

## Χρήση ιδιοτήτων και γνωστών ολοκληρωμάτων για τον υπολογισμό άγνωστων ολοκληρωμάτων

**27.** Υποθέστε ότι οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς και ότι

$$\int_1^2 f(x)\, dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)\, dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)\, dx = 8.$$

Εφαρμόστε τους κανόνες του Πίνακα 4.5 για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

**(α)** $\int_2^2 g(x)\, dx$  **(β)** $\int_5^1 g(x)\, dx$

**(γ)** $\int_1^2 3f(x)\, dx$  **(δ)** $\int_2^5 f(x)\, dx$

**(ε)** $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\, dx$  **(στ)** $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\, dx$

**28.** Έστω $f$ και $h$ συνεχείς και ότι

$$\int_1^9 f(x)\, dx = -1, \quad \int_7^9 f(x)\, dx = 5, \quad \int_7^9 h(x)\, dx = 4.$$

Εφαρμόστε τους κανόνες του Πίνακα 4.5 για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

**(α)** $\int_1^9 -2f(x)\, dx$  **(β)** $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\, dx$

**(γ)** $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\, dx$  **(δ)** $\int_9^1 f(x)\, dx$

**(ε)** $\int_1^7 f(x)\, dx$  **(στ)** $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\, dx$

**29.** Έστω ότι $\int_1^2 f(x)\, dx = 5$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

**(α)** $\int_1^2 f(u)\, du$  **(β)** $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\, dz$

**(γ)** $\int_2^1 f(t)\, dt$  **(δ)** $\int_1^2 [-f(x)]\, dx$

**30.** Έστω ότι $\int_{-3}^{0} g(t)\, dt = \sqrt{2}$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

**(α)** $\int_0^{-3} g(t)\, dt$  **(β)** $\int_{-3}^{0} g(u)\, du$

**(γ)** $\int_{-3}^{0} [-g(x)]\, dx$  **(δ)** $\int_{-3}^{0} \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\, dr$

**31.** Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής και ότι $\int_0^3 f(z)\, dz = 3$ και $\int_0^4 f(z)\, dz = 7$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

**(α)** $\int_3^4 f(z)\, dz$  **(β)** $\int_4^3 f(t)\, dt$

**32.** Έστω ότι η $h$ είναι συνεχής και ότι $\int_{-1}^{1} h(r)\, dr = 0$ και $\int_{-1}^{3} h(r)\, dr = 6$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

**(α)** $\int_1^3 h(r)\, dr$  **(β)** $-\int_3^1 h(u)\, du$

## Θεωρία και παραδείγματα

**33.** *Μεγιστοποίηση ολοκληρώματος* Για ποιες τιμές των $a$ και $b$ μεγιστοποιείται η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_a^b (x - x^2)\, dx;$$

**34.** *Ελαχιστοποίηση ολοκληρώματος* Για ποιες τιμές των $a$ και $b$ ελαχιστοποιείται η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\, dx;$$

**35.** *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε γιατί ο κανόνας

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a)$$

ισχύει για *κάθε* σταθερά $k$.

**36.** *Ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων* Εφαρμόστε την ανισότητα max-min για να δείξετε ότι αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$f(x) \geq 0 \text{ στο } [a, b] \Rightarrow \int f(x)\, dx \geq 0 .$$

**37.** *Άνω και κάτω φράγματα* Εφαρμόστε την ανισότητα max-min για να βρείτε άνω και κάτω φράγματα της τιμής του

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

**38.** *Άνω και κάτω φράγματα* (*Συνέχεια της Άσκησης 37*) Εφαρμόστε την ανισότητα max-min για να βρείτε άνω και κάτω φράγματα των

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^2}\, dx \quad \text{και} \quad \int_{0,5}^{1} \frac{1}{1 + x^2}\, dx .$$

Προσθέστε τα ολοκληρώματα αυτά για να καταλήξετε σε μια εκτίμηση της τιμής του

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

**39.** *Μέση ταχύτητα ταξιδιού* Αν οδηγείτε με μέση ταχύτητα 30 km/h για μια διαδρομή 150 km και μετά, επιστρέφοντας, διανύσετε τα ίδια 150 km με μέση ταχύτητα 50 km/h, τότε ποια είναι η μέση ταχύτητά σας για τη συνολική διαδρομή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (*Πηγή*: David H. Pleacher, *The Mathematics Teacher*, Vol. 85, No. 6 (September 1992), pp. 445-446.)

**40.** *Μέσος ρυθμός παροχής νερού* Ένα φράγμα αποδεσμεύει αρχικά 1000 $m^3$ νερού με ρυθμό 10 $m^3$/min και κατόπιν άλλα 1000 $m^3$ με ρυθμό 20 $m^3$/min. Ποιος ήταν ο μέσος ρυθμός παροχής νερού από το φράγμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

### Εύρεση αθροισμάτων Riemann

Αν διαθέτετε σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας που μπορεί να σχεδιάσει τα ορθογώνια των αθροισμάτων Riemann, τότε χρησιμοποιήστε το για να σχεδιάσετε τα ορθογώνια των αθροισμάτων Riemann τα οποία συγκλίνουν στα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 41-46. Διαμερίστε σε $n = 4$, 10, 20, και 50 υποδιαστήματα ίσου μήκους σε κάθε περίπτωση.

41. $\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

42. $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$

43. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 0$

44. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = 1$

45. $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$

46. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ (Το ολοκλήρωμα ισούται με ln 2.)

# 4.5 Θεώρημα μέσης τιμής και θεμελιώδες θεώρημα

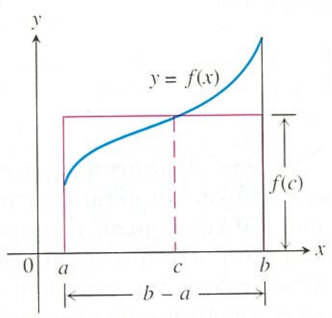
Θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα • Θεμελιώδες Θεώρημα, Μέρος 1 • Μια γεωμετρική ερμηνεία • Θεμελιώδες Θεώρημα, Μέρος 2 • Συσχέτιση με εμβαδόν επιφανείας

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Sir Isaac Newton
(1642-1727)

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε δύο από τα σημαντικότερα θεωρήματα του ολοκληρωτικού λογισμού. Το θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα παίρνει τη μέση τιμή της τουλάχιστον μια φορά στο διάστημα αυτό. Το θεμελιώδες θεώρημα συνδέει την ολοκλήρωση με την παραγώγιση και απαρτίζεται από δύο μέρη. Η διατύπωσή του από τους Leibniz και Νεύτωνα (ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλο) έθεσε σε κίνηση τις μαθηματικές εκείνες εξελίξεις που πυροδότησαν τις επιστημονικές επαναστάσεις των επόμενων 200 ετών, και αποτελεί τη σπουδαιότερη υπολογιστική ανακάλυψη στην ιστορία της ανθρωπότητας.

### Θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα

Στην προηγούμενη ενότητα, ορίσαμε τη μέση τιμή μιας συνεχούς συναρτήσεως στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ ως το πηλίκο του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ διά το μήκος $b - a$ του διαστήματος. Το θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα μας λέει ότι η συνάρτηση θα πάρει την τιμή αυτή *τουλάχιστον* μια φορά στο διάστημα ορισμού της. Δεν πρόκειται για απλή σύμπτωση. Κοιτάξτε τη γραφική παράσταση του Σχήματος 4.13 και φανταστείτε δύο ορθογώνια με βάσεις $(b - a)$ και ύψη που κυμαίνονται από το ελάχιστο της $f$ (ορθογώνιο με εμβαδόν μικρότερο από την τιμή του ολοκληρώματος) έως το μέγιστο της $f$ (ορθογώνιο με εμβαδόν μεγαλύτερο από την τιμή του ολοκληρώματος). Κάπου στο ενδιάμεσο θα υπάρχει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν ακριβώς ίσο με το ολοκλήρωμα, και η άνω πλευρά του θα τέμνει το γράφημα της $f$ αν η $f$ είναι συνεχής.




**Σχήμα 4.13** Η τιμή $f(c)$ στο θεώρημα μέσης τιμής είναι, ουσιαστικά, το μέσο ύψος της $f$ στο $[a, b]$. Για $f \geq 0$, το εμβαδόν του σκιασμένου ορθογωνίου ισούται με το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη της $f$ από $a$ έως $b$

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Θεώρημα 2 Το θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα**

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε σε κάποιο σημείο $c$ στο $[a, b]$, θα ισχύει

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$



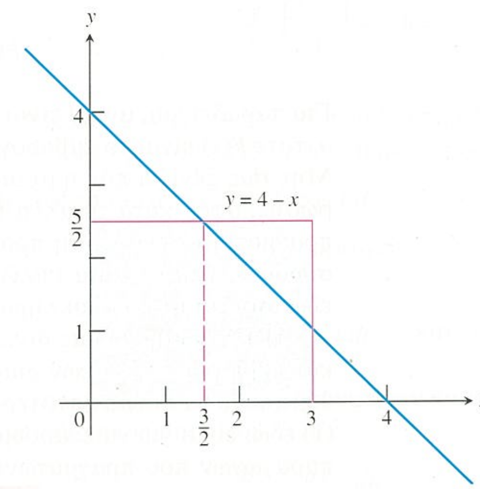
**Παράδειγμα 1** Εφαρμογή του Θεωρήματος 2

Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x) = 4 - x$ στο $[0, 3]$. Επίσης, βρείτε σε ποιο σημείο του πεδίου ορισμού της παίρνει η $f$ την τιμή αυτή.

Λύση

$$\begin{aligned}
\text{av}(f) &= \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{3 - 0}\int_0^3 (4 - x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(4(3 - 0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) \qquad \text{Ενότητα 4.4, Παράδειγμα 3.} \\
&= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Η μέση τιμή της $f(x) = 4 - x$ στο διάστημα $[0, 3]$ είναι $5/2$. Η συνάρτηση παίρνει την τιμή αυτή όταν $4 - x = 5/2$, δηλαδή για $x = 3/2$. (Σχήμα 4.14).




**Σχήμα 4.14** Το ορθογώνιο βάσεως $[0, 3]$ και ύψους $5/2$ (που είναι η μέση τιμή της $f(x) = 4 - x$) έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της $f$ και τον άξονα $x$ από 0 έως 3. (Παράδειγμα 1)

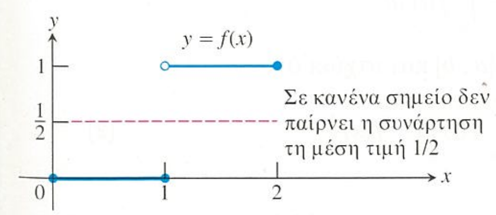
CD-ROM
Δικτυότοπος

Στο Παράδειγμα 1, εντοπίσαμε το σημείο όπου η $f$ παίρνει τη μέση τιμή της θέτοντας $f(x)$ ίσον με την υπολογισθείσα τιμή και λύνοντας ως προς $x$. Αποδείξαμε έτσι ότι στο Παράδειγμα 1 το Θεώρημα 2 ισχύει, όμως δεν αποδείξαμε την ισχύ του θεωρήματος στη γενική περίπτωση. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2, μας χρειάζεται ένα γενικότερο επιχείρημα.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 2** Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας max-min (Πίνακας 4.5, Κανόνας 6) με $(b - a)$, παίρνουμε

$$\min f \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max f.$$

Εφόσον η $f$ είναι συνεχής, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (Ενότητα 1.4) μας λέει ότι η $f$ θα πρέπει να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $\min f$ και $\max f$. Άρα θα πρέπει να πάρει και την τιμή $(1/(b - a))\int_a^b f(x)\,dx$ σε κάποιο σημείο $c$ στο $[a, b]$.




**Σχήμα 4.15** Μια ασυνεχής συνάρτηση μπορεί να μην παίρνει ποτέ τη μέση τιμή της.

Η συνέχεια της $f$ είναι ουσιώδους σημασίας. Μια ασυνεχής συνάρτηση μπορεί κάλλιστα να «παρακάμπτει» τη μέση τιμή της (Σχήμα 4.15).

Τι άλλο μπορούμε να διδαχθούμε από το Θεώρημα 2; Ιδού ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 2** Μέση τιμή μηδέν

Δείξτε ότι αν η $f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, $a \neq b$, και αν

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

τότε θα ισχύει $f(x) = 0$ τουλάχιστον μια φορά στο διάστημα $[a, b]$.

Λύση Η μέση τιμή της $f$ στο $[a, b]$ είναι

$$\text{av}\,(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, η $f$ θα παίρνει την τιμή αυτή σε κάποιο σημείο $c$ στο $[a, b]$.

### Θεμελιώδες θεώρημα, Μέρος 1

Αν η $f(t)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα από τυχόντα σταθερό αριθμό $a$ έως τον αριθμό $x$ ορίζει μια συνάρτηση $F$ που η τιμή της στο $x$ ισούται με

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Για παράδειγμα, αν η $f$ είναι μη αρνητική και το $x$ κείται στα δεξιά του $a$, τότε $F(x)$ είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη από το $a$ έως το $x$. Μην σας ξενίζει που η μεταβλητή $x$ εμφανίζεται ως όριο της ολοκλήρωσης, αφού κατά τα άλλα η $F$ συμπεριφέρεται σαν μια οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Για κάθε τιμή εισόδου $x$, υπάρχει μια καλώς ορισμένη αριθμητική τιμή εξόδου, που εδώ ισούται με το ολοκλήρωμα της $f$ από $a$ έως $x$.

Η Εξίσωση (1) μας δίνει έναν τρόπο ορισμού νέων συναρτήσεων και περιγραφής λύσεων διαφορικών εξισώσεων (περισσότερα για το θέμα αυτό θα πούμε αργότερα). Ο λόγος που αναφέρουμε την Εξίσωση (1) εδώ, είναι για να εξάρουμε τη σύνδεση μεταξύ ολοκληρωμάτων και παραγώγων που πραγματώνει η εξίσωση αυτή. Για τυχούσα συνεχή συνάρτηση $f$, η $F$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση του $x$ με παράγωγο την ίδια την $f$. Για κάθε $x$, ισχύει

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Η έννοια αυτή είναι τόσο σημαντική που αποτελεί το πρώτο μέρος αυτού που ονομάζουμε θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.

**Θεώρημα 3** **Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, Μέρος 1**

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

έχει παράγωγο για κάθε $x$ στο $[a, b]$ και ισχύει ότι

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Πρόκειται για ένα συμπέρασμα όμορφο αλλά απρόσμενο, που έχει δύναμη και βάθος, τόσο ώστε η Εξίσωση (2) να μπορεί να θεωρηθεί μια από τις σημαντικότερες εξισώσεις στα μαθηματικά. Το θεώρημα αυτό μας λέει πρώτον, ότι η διαφορική εξίσωση $dF/dx = f$ έχει λύση για κάθε συνεχή συνάρτηση $f$. Δεύτερον, ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f$ είναι η παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης, δηλαδή της $\int_a^x f(t)\,dt$. Τρίτον, ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει αντιπαράγωγο. Και τέταρτον, ότι οι λειτουργίες της ολοκλήρωσης και της παραγώγισης είναι αντίστροφες η μία της άλλης.



CD-ROM
Δικτυότοπος

**Παράδειγμα 3** Εφαρμογή του θεμελιώδους θεωρήματος

Βρείτε τις τιμές των

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος.

Λύση

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt = \cos x \qquad \text{Εξ. 2 με } f(t) = \cos t$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{Εξ. 2 με } f(t) = 1/(1+t^2)$$

**Παράδειγμα 4** Εφαρμογή του θεμελιώδους θεωρήματος σε συνδυασμό με τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

Βρείτε το $dy/dx$ αν $y = \int_1^{x^2} \cos t\,dt$.

Λύση Το άνω όριο ολοκλήρωσης δεν είναι $x$ αλλά $x^2$. Με άλλα λόγια, η $y$ είναι η σύνθεση των

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \quad \text{και} \quad u = x^2.$$

Συνεπώς πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης για την εύρεση του $dy/dx$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos u\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos(x^2)\cdot 2x\\ &= 2x\cos x^2\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 5** Μεταβλητά κάτω όρια ολοκλήρωσης

Βρείτε το $dy/dx$.

**(α)** $y = \displaystyle\int_x^5 3t\,\sin t\,dt$ **(β)** $y = \displaystyle\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+t^2}\,dt$

Λύση Ο Κανόνας 1 της Ενότητας 4.4 μας επιτρέπει να φέρουμε τα ολοκληρώματα στην επιθυμητή μορφή προκειμένου να εφαρμόσουμε το θεώρημα.

**(α)**
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^5 3t\,\sin t\,dt &= \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\,\sin t\,dt\right) \qquad \text{Κανόνας 1}\\ &= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\,\sin t\,dt\\ &= -3x\,\sin x\end{aligned}$$

(β) $$\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{2+t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_{4}^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\,dt\right)$$ Κανόνας 1

$$= -\frac{d}{dx}\int_{4}^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2+(1+3x^2)^2}\frac{d}{dx}(1+3x^2)$$ Εξ. (2) και κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

$$= -\frac{2x}{1+2x^2+3x^4}$$ Απαλοιφή του 3 από αριθμητή και παρονομαστή

**Παράδειγμα 6** Εύρεση συναρτήσεως όταν γνωρίζουμε μία της τιμή και την παράγωγό της

Βρείτε μια συνάρτηση $y = f(x)$ με παράγωγο

$$\frac{dy}{dx} = \tan x$$

και τιμή $f(3) = 5$.

Λύση Το θεμελιώδες θεώρημα επιτρέπει εύκολα την κατασκευή μιας συναρτήσεως με παράγωγο ίση με $\tan x$:

$$y = \int_3^x \tan t\, dt.$$

Εφόσον $y(3) = 0$, αρκεί να προσθέσουμε το 5 στη συνάρτηση αυτή για να πάρουμε μια συνάρτηση με παράγωγο $\tan x$ και τιμή 5 στο $x = 3$:

$$f(x) = \int_3^x \tan t\, dt + 5.$$

Παρόλο που η λύση στο πρόβλημα του Παραδείγματος 6 ικανοποιεί τις δύο απαιτούμενες συνθήκες, γεννάται το ερώτημα κατά πόσο είναι εύχρηστη η μορφή της. Μέχρι πριν από λίγα χρόνια, η μορφή αυτή θα ήταν προβληματική στον αριθμητικό υπολογισμό της λύσης. Πράγματι, έχει επενδυθεί μεγάλη προσπάθεια ανά τους αιώνες για να βρεθούν λύσεις που δεν περιέχουν ολοκληρώματα, σε τέτοιου είδους προβλήματα. Μερικούς τέτοιους τρόπους επίλυσης θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 6, όπου θα μάθουμε (για παράδειγμα) πώς να γράφουμε τη λύση του Παραδείγματος 6 ως

$$y = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5.$$

Τώρα που οι υπολογιστές αλλά και πολλές αριθμομηχανές είναι σε θέση να υπολογίζουν ολοκληρώματα, η μορφή της λύσης στο Παράδειγμα 6 όχι μόνο είναι εύχρηστη, αλλά και μερικές φορές προτιμητέα. Σίγουρα, πάντως, είναι η ευκολότερη λύση που μπορούμε να βρούμε, και κατά συνέπεια η πλέον διαθέσιμη.

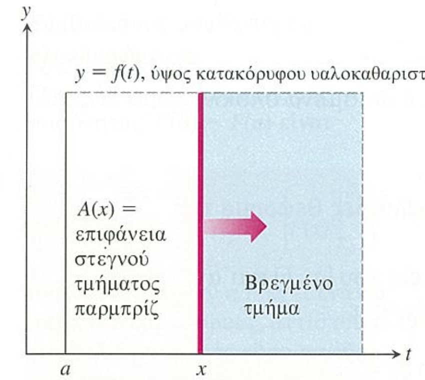
## Μια γεωμετρική ερμηνεία

Αν οι τιμές της $f$ είναι θετικές, η εξίσωση

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

έχει μια όμορφη γεωμετρική ερμηνεία: Το ολοκλήρωμα της $f$ από $a$ έως $x$ ισούται με το εμβαδόν $A(x)$ του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της $f$ και από τον άξονα $x$ από $a$ έως $x$. Φανταστείτε την επιφάνεια που σαρώνει ένας υαλοκαθαριστήρας στο παρμπρίζ ενός λεωφορείου. Τη στιγμή που ο υαλοκαθαριστήρας περνά από το σημείο $x$,






**ΣΧΗΜΑ 4.16** Ο ρυθμός σάρωσης του παρμπρίζ ενός λεωφορείου από τον υαλοκαθαριστήρα καθώς διέρχεται από το σημείο $x$ ισούται με το ύψος του υαλοκαθαριστήρα. Δηλαδή, $dA/dx = f(x)$.

ο ρυθμός σάρωσης της επιφάνειας ισούται ακριβώς με το ύψος του κατακόρυφου υαλοκαθαριστήρα $f(x)$ (Σχήμα 4.16).

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3** Αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3 εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου απευθείας για τη συνάρτηση $F(x)$. Αυτό σημαίνει ότι γράφουμε το πηλίκο διαφορών

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{3}$$

και δείχνουμε ότι το όριό του καθώς $h \to 0$ ισούται με $f(x)$.

Όταν αντικαταστήσουμε τα $F(x + h)$ και $F(x)$ με τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ο αριθμητής στην Εξίσωση (3) γίνεται

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Ο Κανόνας 5 του Πίνακα 4.5 μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε το δεξιό μέλος γράφοντας

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

οπότε η Εξίσωση (3) γίνεται

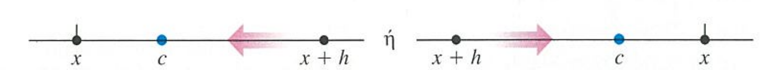
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)]$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{4}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα (Θεώρημα 2), η τιμή της τελευταίας έκφρασης στην Εξίσωση (4) είναι μία από τις τιμές που θα πάρει η $f$ στο διάστημα μεταξύ $x$ και $x + h$. Με άλλα λόγια, για κάποιο $c$ στο διάστημα αυτό, θα έχουμε

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c). \tag{5}$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πληροφορηθούμε τη συμπεριφορά του γινομένου $(1/h)$ επί το ολοκλήρωμα καθώς $h \to 0$ από τη συμπεριφορά της τιμής $f(c)$ καθώς $h \to 0$.

Τι παθαίνει λοιπόν η τιμή $f(c)$ καθώς $h \to 0$; Καθώς $h \to 0$, το άκρο του διαστήματος $x + h$ πλησιάζει στο $x$, «συμπαρασύροντας» μαζί του το $c$ σαν μια χάντρα σε σπάγγο:




Δηλαδή το $c$ πλησιάζει στο $x$, και, εφόσον η $f$ είναι συνεχής στο $x$, η $f(c)$ πλησιάζει στην $f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x). \tag{6}$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$ Ορισμός παραγώγου

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$ Εξ. (4)

$$= \lim_{h\to 0} f(c)$$ Εξ. (5)

$$= f(x).$$ Εξ. (6)

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη.

CD-ROM
Δικτυότοπος

## Θεμελιώδες θεώρημα, Μέρος 2

Το δεύτερο μέρος του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα απευθείας από αντιπαραγώγους.

**Θεώρημα 3 (συνέχεια)** **Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, Μέρος 2**

Αν η $f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$ και αν η $F$ είναι μία αντιπαράγωγος της $f$ στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Η πρόταση αυτή καλείται επίσης **θεώρημα υπολογισμού ολοκληρωμάτων.**

**Απόδειξη** Το Μέρος 1 του θεμελιώδους θεωρήματος μας πληροφορεί ότι υπάρχει μια αντιπαράγωγος της $f$, συγκεκριμένα η

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Συνεπώς, αν $F$ είναι μια *τυχούσα* αντιπαράγωγος της $f$, τότε $F(x) = G(x) + C$ για κάποια σταθερά $C$ (βάσει του Πορίσματος 2 του θεωρήματος μέσης τιμής για παραγώγους, Ενότητα 3.2).

Υπολογίζουμε το $F(b) - F(a)$, ως εξής:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Ας μας συγχωρηθεί η επανάληψη: Όσα κι αν πούμε είναι λίγα για την τεράστια δύναμη που κρύβει μέσα της η απλή εξίσωση

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι οποιοδήποτε ορισμένο ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης μπορεί να υπολογιστεί χωρίς να πάρουμε όρια, χωρίς να υπολογίσουμε αθροίσματα Riemann, και συχνά χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια, αρκεί να μπορούμε να βρούμε μια αντιπαράγωγο της $f$. Αν μπορείτε να διανοηθείτε τι συνέβαινε πριν από το θεώρημα αυτό (και πριν την έλευση υπολογιστικών μηχανών), όταν ο μόνος τρόπος να λυθούν προβλήματα πραγματικών εφαρμογών ήταν να γίνουν προσεγγίσεις μέσω ανιαρών και επίπονων αθροισμάτων, τότε ίσως μπορέσετε να καταλάβετε για τι θαύμα μιλάμε. Αν υπάρχει λοιπόν μία εξίσωση που αξίζει [από κοινού με την Εξίσωση (2)] το όνομα θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, σίγουρα η εξίσωση αυτή είναι η παραπάνω.

### Πώς υπολογίζουμε το $\int_a^b f(x)\,dx$

Βήμα 1. Βρίσκουμε μια αντιπαράγωγο $F$ της $f$. Οποιαδήποτε αντιπαράγωγος μας κάνει, επιλέγουμε λοιπόν την απλούστερη δυνατή.

Βήμα 2. Υπολογίζουμε την ποσότητα $F(b) - F(a)$.

Η ποσότητα αυτή ισούται με $\int_a^b f(x)\,dx$.

### Παράδειγμα 7 Υπολογισμός ολοκληρώματος

Βρείτε την τιμή του $\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)\,dx$ με χρήση αντιπαραγώγων.



**Συμβολισμός υπολογισμού ολοκληρώματος**

Ο συνήθης συμβολισμός της ποσότητας $F(b) - F(a)$ είναι

$$F(x)\Big]_a^b \quad \text{ή} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b,$$

αναλόγως του εάν η $F$ έχει έναν ή περισσότερους όρους, αντίστοιχα. Ο συμβολισμός αυτός είναι σαφής, περιεκτικός και εύχρηστος.

Λύση

Μία αντιπαράγωγος της $x^3 + 1$ είναι η $(x^4/4) + x$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} (x^3 + 1)\,dx &= \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3} \\ &= \left(\frac{81}{4} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) \\ &= 24. \end{aligned}$$

## Συσχέτιση με εμβαδόν επιφανείας

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε εμβαδά κάνοντας χρήση των αντιπαραγώγων, αλλά με προσοχή, ώστε να διακρίνουμε μεταξύ του καθαρού εμβαδού (όπου κάθε εμβαδόν οριζόμενο από καμπύλη που κείται κάτω από τον άξονα $x$ λογίζεται αρνητικό) και του συνολικού εμβαδού. Εφεξής, όποτε λέμε «εμβαδόν» θα εννοούμε *συνολικό εμβαδόν*.

### Παράδειγμα 8 Εύρεση εμβαδού κάνοντας χρήση αντιπαραγώγων

Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που οριοθετείται από τον άξονα $x$ και από το γράφημα της $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \le x \le 2$.

Λύση Πρώτα βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της $f$. Εφόσον

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2),$$

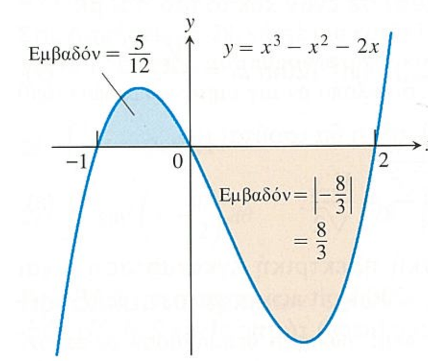
τα σημεία μηδενισμού θα είναι $x = 0, -1$, και $2$ (Σχήμα 4.17). Τα σημεία αυτά διαμερίζουν το $[-1, 2]$ σε δύο υποδιαστήματα: $[-1, 0]$, όπου $f \ge 0$, και $[0, 2]$, όπου $f \le 0$. Ολοκληρώνουμε την $f$ σε κάθε υποδιάστημα και αθροίζουμε τις απόλυτες τιμές των αποτελεσμάτων των δύο ολοκληρώσεων.

*Ολοκλήρωμα στο* $[-1, 0]$: $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$

*Ολοκλήρωμα στο* $[0, 2]$: $\displaystyle\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$

*Περικλειόμενο εμβαδόν*:

Συνολικό περικλειόμενο εμβαδόν: $\displaystyle = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$




**Σχημα 4.17** Το χωρίο μεταξύ της καμπύλης $y = x^3 - x^2 - 2x$ και του άξονα $x$. (Παράδειγμα 8)

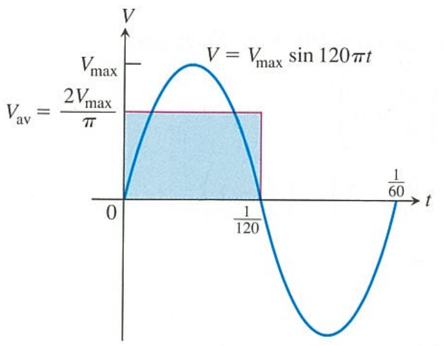
### Πώς βρίσκουμε το συνολικό εμβαδόν

Για την αναλυτική εύρεση του συνολικού εμβαδού μεταξύ του γραφήματος της $y = f(x)$ και του άξονα $x$ στο διάστημα $[a, b]$, εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1. Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε υποδιαστήματα που ορίζονται από τα σημεία μηδενισμού της $f$.

Βήμα 2. Ολοκληρώνουμε την $f$ σε κάθε υποδιάστημα.

Βήμα 3. Αθροίζουμε τις απόλυτες τιμές των ολοκληρωμάτων.




**Σχημα 4.18** Γραφική παράσταση της τάσης $V = V_{\max} \sin 120\pi t$ σε έναν πλήρη κύκλο. Η μέση τιμή της τάσης σε μισό κύκλο ισούται με $2V_{\max}/\pi$. Η μέση τιμή της τάσης σε έναν πλήρη κύκλο είναι μηδέν. (Παράδειγμα 9)

### Παράδειγμα 9 Οικιακή ηλεκτρική κατανάλωση

Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο της τάσης στην ηλεκτρική εγκατάσταση του σπιτιού μας, χρησιμοποιώντας την ημιτονοειδή συνάρτηση

$$V = V_{\max} \sin 120\pi t,$$

η οποία εκφράζει την τάση $V$ σε Volt συναρτήσει του χρόνου $t$ σε sec. Η συνάρτηση αυτή διατρέχει 60 κύκλους ανά δευτερόλεπτο (δηλαδή η συχνότητά της είναι 60 Hz). Η θετική σταθερά $V_{\max}$ είναι το **πλάτος τάσης**.

Η μέση τιμή της τάσης $V$ στον μισό κύκλο από 0 έως 1/120 sec (δείτε το Σχήμα 4.18) είναι

$$\begin{aligned} V_{av} &= \frac{1}{(1/120) - 0} \int_0^{1/120} V_{\max} \sin 120\pi t \, dt \\ &= 120 V_{\max} \left[ -\frac{1}{120\pi} \cos 120\pi t \right]_0^{1/120} \\ &= \frac{V_{\max}}{\pi} [-\cos \pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{\max}}{\pi}. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της τάσης σε έναν πλήρη κύκλο, όπως μπορούμε να δούμε από το Σχήμα 4.18, είναι μηδέν. (Δείτε επίσης την Άσκηση 52.) Αν μετρούσαμε την τάση αυτή με ένα σύνηθες γαλβανόμετρο κινητού πηνίου, η ένδειξή του θα ήταν μηδέν.

Για να μετρήσουμε την τάση, χρησιμοποιούμε ένα όργανο που μετρά την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της τάσεως, δηλαδή την ποσότητα [Σ.τ.Μ. στα ελληνικά λέμε «ενεργό τάση»]

$$V_{rms} = \sqrt{(V^2)_{av}}.$$

Ο δείκτης "rms" σχηματίζεται από τα αρχικά των λέξεων "root mean square" που σημαίνουν «ρίζα μέσου τετραγώνου». Εφόσον η μέση τιμή του $V^2 = (V_{\max})^2 \sin^2 120\pi t$ σε έναν κύκλο ισούται με

$$(V^2)_{av} = \frac{1}{(1/60) - 0} \int_0^{1/60} (V_{\max})^2 \sin^2 120\pi t \, dt = \frac{(V_{\max})^2}{2}, \qquad (7)$$

[Άσκηση 52, μέρος (γ)], η ενεργός τάση θα ισούται με

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(V_{\max})^2}{2}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}. \qquad (8)$$

Οι τιμές αναφοράς για την οικιακή ηλεκτρική εγκατάσταση είναι πάντα οι ενεργές. Έτσι, λέγοντας «230 Volt ac» σημαίνει ότι η ενεργός (rms) τιμή της εναλλασσόμενης («ac») τάσης είναι 230. Το πλάτος της τάσης,

$$V_{\max} = \sqrt{2}\, V_{rms} = \sqrt{2} \cdot 230 \approx 325 \text{ Volt}$$

που προκύπτει από την Εξίσωση (8), είναι αισθητά μεγαλύτερο.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.5

### Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 1-14.

**1.** $\int_{-2}^{0} (2x + 5)\, dx$

**2.** $\int_0^4 \left(3x - \frac{x^3}{4}\right) dx$

**3.** $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x})\, dx$

**4.** $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2}\, dx$

**5.** $\int_0^{\pi} (1 + \cos x)\, dx$

**6.** $\int_0^{\pi/3} 2 \sec^2 x \, dx$



**7.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc \theta \cot \theta \, d\theta$

**8.** $\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt$

**9.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8y^2 + \sin y)\, dy$

**10.** $\int_{-1}^{1} (r + 1)^2\, dr$

**11.** $\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du$

**12.** $\int_4^9 \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{u}}\, du$

**13.** $\int_{-4}^{4} |x|\, dx$

**14.** $\int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos x + |\cos x|)\, dx$

### Παράγωγοι ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 15-18, βρείτε τις παραγώγους

**(α)** υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα και παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα

**(β)** παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα απευθείας.

**15.** $\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t \, dt$

**16.** $\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} 3t^2\, dt$

**17.** $\frac{d}{dt} \int_0^{t^4} \sqrt{u}\, du$

**18.** $\frac{d}{d\theta} \int_0^{\tan \theta} \sec^2 y \, dy$

Στις Ασκήσεις 19-24, βρείτε το $dy/dx$.

**19.** $y = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$

**20.** $y = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$

**21.** $y = \int_{\sqrt{x}}^{0} \sin(t^2)\, dt$

**22.** $y = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t}\, dt$

**23.** $y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

**24.** $y = \int_{\tan x}^{0} \frac{dt}{1 + t^2}$

### Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χρήση αντικαταστάσεων

Στις Ασκήσεις 25-28, κάντε μια κατάλληλη αντικατάσταση για να βρείτε μια αντιπαράγωγο και κατόπιν εφαρμόστε το θεμελιώδες θεώρημα για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

**25.** $\int_0^1 (1 - 2x)^3\, dx$

**26.** $\int_0^1 t\sqrt{t^2 + 1}\, dt$

**27.** $\int_0^{\pi} \sin^2\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) d\theta$

**28.** $\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}\, dx$

### Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 29-32.

**29.** $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

**30.** $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

**31.** $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \sin x, \quad y(0) = -1$

**32.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \cos \sqrt{x + 1}, \quad y\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$

### Εμβαδόν

Στις Ασκήσεις 33-36, βρείτε το συνολικό εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα $x$.

**33.** $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \le x \le 2$

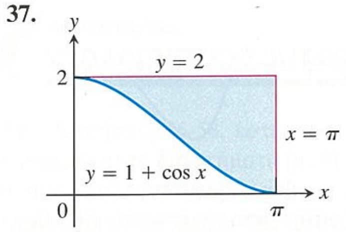
**34.** $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 2$

**35.** $y = x^3 - 4x, \quad -2 \le x \le 2$

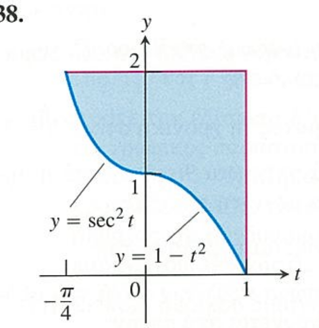
**36.** $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \le x \le 8$

Βρείτε τα εμβαδά των σκιασμένων περιοχών στις Ασκήσεις 37 και 38.

**37.**




**38.**




### Εφαρμογές

**39.** *Υπολογισμός κόστους από το οριακό κόστος* Το οριακό κόστος εκτύπωσης μιας αφίσας όταν έχουν ήδη τυπωθεί $x$ τέτοια αντίτυπα, ισούται με

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ευρώ. Βρείτε τις ποσότητες

**(α)** $c(100) - c(1)$, το κόστος εκτύπωσης των (αριθμημένων) πόστερ 2-100 (δηλαδή από το 2ο έως και το 100στό κομμάτι).

**(β)** $c(400) - c(100)$, το κόστος εκτύπωσης των (αριθμημένων) πόστερ 101-400.

**40.** *Υπολογισμός εσόδων από τα οριακά έσοδα* Ας υποθέσουμε ότι τα οριακά έσοδα μιας επιχείρησης από την κατασκευή και πώληση μίξερ κουζίνας ισούται με

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x + 1)^2,$$

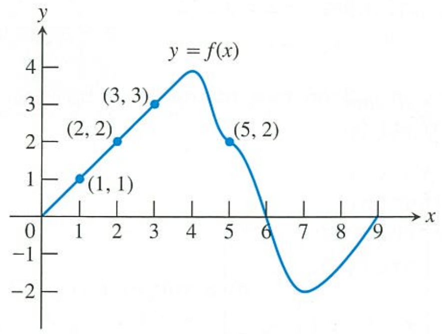
όπου το $r$ μετριέται σε χιλιάδες ευρώ και το $x$ σε χιλιάδες τεμάχια. Πόσα έσοδα θα αναμένει η επιχείρηση παράγοντας $x = 3$ χιλιάδες μίξερ; Για να το βρείτε, ολοκληρώστε τα οριακά έσοδα από $x = 0$ έως $x = 3$.

### Τι μπορούμε να μάθουμε για την κίνηση σώματος από γραφικές παραστάσεις

**41.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι $f$ είναι η διαφορίσιμη συνάρτηση που φαίνεται στο επόμενο γράφημα και ότι η θέση τη στιγμή $t$ (sec) ενός σώματος που κινείται επί του άξονα $s$ δίδεται από τη συνάρτηση

$$s(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

σε m. Βάσει του γραφήματος, απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.




**(α)** Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 5$;

**(β)** Είναι θετική ή αρνητική η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 5$;

**(γ)** Ποια η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3$;

**(δ)** Σε ποια στιγμή κατά τα πρώτα 9 sec αποκτά η συνάρτηση θέσεως $s$ τη μέγιστη τιμή της;

**(ε)** Πότε περίπου μηδενίζεται η επιτάχυνση;

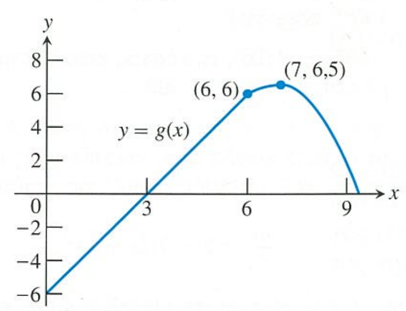
**(στ)** Πότε πλησιάζει το σώμα προς την αρχή των αξόνων και πότε απομακρύνεται από αυτήν;

**(ζ)** Σε ποια πλευρά της αρχής βρίσκεται το σώμα τη στιγμή $t = 9$;

**42.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι $g$ είναι η διαφορίσιμη συνάρτηση που φαίνεται στο παρατιθέμενο γράφημα και ότι η θέση τη στιγμή $t$ (sec) ενός σώματος που κινείται επί του άξονα $s$ δίδεται από τη συνάρτηση

$$s(t) = \int_0^t g(x)\,dx$$

σε m. Βάσει του γραφήματος, απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.




**(α)** Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3$;

**(β)** Είναι θετική ή αρνητική η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3$;

**(γ)** Ποια η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3$;

**(δ)** Πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων το σώμα;

**(ε)** Πότε μηδενίζεται η επιτάχυνση;

**(στ)** Πότε πλησιάζει το σώμα προς την αρχή και πότε απομακρύνεται από αυτήν;

**(ζ)** Σε ποια πλευρά της αρχής βρίσκεται το σώμα τη στιγμή $t = 9$;

## Υπολογισμός όγκων της Ενότητας 4.3

**43.** (*Συνέχεια από την Ενότητα 4.3, Άσκηση 11*) Τα αθροίσματα που προσεγγίζουν τον όγκο του νερού στην Άσκηση 11, Ενότητα 4.3, δεν είναι παρά τα αθροίσματα Riemann κάποιου ολοκληρώματος. Τίνος ολοκληρώματος; Υπολογίστε το για να βρείτε τον όγκο.

**44.** (*Συνέχεια από την Ενότητα 4.3, Άσκηση 13*) Το άθροισμα που προσεγγίζει τον όγκο του κωνικού ρύγχους στην Άσκηση 13, Ενότητα 4.3, δεν είναι παρά το άθροισμα Riemann κάποιου ολοκληρώματος. Τίνος ολοκληρώματος; Υπολογίστε το για να βρείτε τον όγκο.

## Θεωρία και παραδείγματα

**45.** Έστω ότι $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$. Βρείτε την $f(x)$.

**46.** Βρείτε την $f(4)$ αν $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos \pi x$.

**47.** *Γραμμικοποίηση* Βρείτε τη γραμμικοποίηση της

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t}\,dt$$

στο $x = 1$.

**48.** *Γραμμικοποίηση* Βρείτε τη γραμμικοποίηση της

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1)\,dt$$

στο $x = -1$.

**49.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η $f$ έχει θετική παράγωγο για κάθε τιμή του $x$ και ότι $f(1) = 0$. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν αληθεύουν για τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt;$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**(α)** Η $g$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του $x$.

**(β)** Η $g$ είναι συνεχής συνάρτηση του $x$.

**(γ)** Η γραφική παράσταση της $g$ έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $x = 1$.

**(δ)** Η $g$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$.

**(ε)** Η $g$ εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$.

**(στ)** Η γραφική παράσταση της $g$ έχει σημείο καμπής στο $x = 1$.

**(ζ)** Η γραφική παράσταση της $dg/dx$ τέμνει τον άξονα $x$ στο $x = 1$.

**50.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η $f$ έχει αρνητική παράγωγο για κάθε τιμή του $x$ και ότι $f(1) = 0$. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν αληθεύουν για τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt;$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**(α)** Η $h$ είναι διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση του $x$.

**(β)** Η $h$ και η $dh/dx$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

**(γ)** Η γραφική παράσταση της $h$ έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $x = 1$.

**(δ)** Η $h$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$.

**(ε)** Η $h$ εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$.

**(στ)** Η γραφική παράσταση της $h$ έχει σημείο καμπής στο $x = 1$.



**(ζ)** Η γραφική παράσταση της $dh/dx$ τέμνει τον άξονα $x$ στο $x = 1$.

**51.** *Ο τύπος του Αρχιμήδη για το εμβαδόν παραβολής* Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), εφευρέτης, μηχανικός, φυσικός, και ο μεγαλύτερος μαθηματικός των κλασικών χρόνων στον Δυτικό κόσμο, ανακάλυψε ότι το εμβαδόν κάτω από παραβολικό τόξο ισούται με το γινόμενο των δύο τρίτων της βάσης επί το ύψος του τόξου.

**(α)** Χρησιμοποιήστε το κατάλληλο ολοκλήρωμα για να βρείτε το εμβαδόν κάτω από το παραβολικό τόξο

$$y = 6 - x - x^2, \qquad -3 \le x \le 2.$$

**(β)** Βρείτε το ύψος του τόξου.

**(γ)** Δείξτε ότι το εμβαδόν ισούται με το γινόμενο των δύο τρίτων της βάσης $b$ επί το ύψος $h$.

**(δ)** Σχεδιάστε το παραβολικό τόξο $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \le x \le b/2$, για $h$ και $b$ θετικά. Κατόπιν, με μεθόδους απειροστικού λογισμού βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το παραβολικό τόξο και τον άξονα $x$.

**52.** (*Συνέχεια του Παραδ. 9*) *Οικιακή ηλεκτρική κατανάλωση*

**(α)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} V_{max}\sin 120\pi t\,dt$$

για να δείξετε ότι η μέση τιμή του $V = V_{max}\sin 120\pi t$ στη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου μηδενίζεται.

**(β)** Το κύκλωμα της ηλεκτρικής σας κουζίνας παρουσιάζει ενεργό (rms) τάση 240 Volt. Πόση είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η στιγμιαία τάση;

**(γ)** Δείξτε ότι

$$\int_0^{1/60} (V_{max})^2 \sin^2 120\pi t\,dt = \frac{(V_{max})^2}{120}.$$

T **53.** *Το θεμελιώδες θεώρημα* Αν η $f$ είναι συνεχής, τότε θα περιμένουμε ότι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

ισούται με $f(x)$, όπως συμβαίνει στην απόδειξη του Μέρους 1 του θεμελιώδους θεωρήματος. Για παράδειγμα, αν $f(t) = \cos t$, τότε

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos t\,dt = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}. \tag{9}$$

Το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (9) είναι το πηλίκο διαφορών για την παράγωγο του ημιτόνου, του οποίου το όριο καθώς $h \to 0$ είναι $\cos x$.

Παραστήστε γραφικά το $\cos x$ για $-\pi \le x \le 2\pi$. Έπειτα, με διαφορετικό χρώμα αν είναι δυνατόν, σχεδιάστε το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (9) συναρτήσει του $x$ για $h = 2$, 1, 0,5, και 0,1. Παρατηρήστε πώς συγκλίνουν οι καμπύλες αυτές στο γράφημα του συνημιτόνου καθώς $h \to 0$.

T **54.** Επαναλάβετε την Άσκηση 53 για $f(t) = 3t^2$. Ποια είναι η τιμή του

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} 3t^2\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h};$$

Παραστήστε γραφικά την $f(x) = 3x^2$ για $-1 \le x \le 1$. Κατόπιν σχεδιάστε το πηλίκο διαφορών $((x+h)^3 - x^3)/h$ συναρτήσει του $x$ για $h = 1$, 0,5, 0,2 και 0,1. Παρατηρήστε πώς συγκλίνουν οι καμπύλες αυτές στο γράφημα του $3x^2$ καθώς $h \to 0$.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 55-58, έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για τις συναρτήσεις $f$ και τα διαστήματα $[a, b]$. Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα ακόλουθα βήματα και να απαντήσετε στα ερωτήματα που διατυπώνονται.

**(α)** Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα τις συναρτήσεις $f$ και $F$ στο διάστημα $[a, b]$.

**(β)** Λύστε την εξίσωση $F'(x) = 0$. Τι παρατηρείτε για τις γραφικές παραστάσεις της $f$ και $F$ στα σημεία όπου $F'(x) = 0$; Μήπως η παρατήρησή σας αυτή προκύπτει από το Μέρος 1 του θεμελιώδους θεωρήματος σε συνδυασμό με τη γνώση της πρώτης παραγώγου; Εξηγήστε.

**(γ)** Σε ποια περίπου διαστήματα είναι αύξουσα και σε ποια φθίνουσα η συνάρτηση $F$; Τι μπορείτε να πείτε για την $f$ στα διαστήματα αυτά;

**(δ)** Υπολογίστε την παράγωγο $f'$ και παραστήστε την γραφικά σε κοινό σχήμα με την $F$. Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της $F$ στα σημεία όπου $f'(x) = 0$; Μήπως η παρατήρησή σας αυτή προκύπτει από το Μέρος 1 του θεμελιώδους θεωρήματος; Εξηγήστε.

**55.** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, $[0, 4]$

**56.** $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12$, $\left[0, 9/2\right]$

**57.** $f(x) = \sin 2x \cos \dfrac{x}{3}$, $[0, 2\pi]$

**58.** $f(x) = x\cos \pi x$, $[0, 2\pi]$

Στις Ασκήσεις 59-64, έστω $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ για τα $a$, $u$ και $f$. Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα ακόλουθα βήματα και να απαντήσετε στα ερωτήματα που διατυπώνονται.

**(α)** Βρείτε το πεδίο ορισμού της $F$.

**(β)** Υπολογίστε την $F'(x)$ και προσδιορίστε τα σημεία μηδενισμού της. Σε ποια διαστήματα είναι αύξουσα και σε ποια φθίνουσα η συνάρτηση $F$;

**(γ)** Υπολογίστε την $F''(x)$ και προσδιορίστε το σημείο μηδενισμού της. Εντοπίστε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της $F$.

**(δ)** Με τις πληροφορίες που αποκομίσατε απαντώντας στα (α) έως (γ), σχεδιάστε με το χέρι την $y = F(x)$ στο πεδίο ορισμού της. Κατόπιν παραστήστε γραφικά την $F(x)$ στον υπολογιστή σας για να επιβεβαιώσετε το σχήμα που κάνατε.

**59.** $a = 1$, $u(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

**60.** $a = 0$, $u(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

**61.** $a = 0,\quad u(x) = 1 - x,\quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

**62.** $a = 0,\quad u(x) = 1 - x^2,\quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

**63.** Υπολογίστε αναλυτικά την ποσότητα $(d/dx)\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ και ελέγξτε το αποτέλεσμά σας με τη χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας.

**64.** Υπολογίστε αναλυτικά την ποσότητα $(d^2/dx^2)\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ και ελέγξτε το αποτέλεσμά σας με τη χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας.

# 4.6 Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων με αντικατάσταση

Τύπος αντικατάστασης • Εμβαδά μεταξύ καμπυλών • Τι συμβαίνει όταν αλλάζουν οι τύποι των συνοριακών καμπυλών του χωρίου ολοκλήρωσης

Υπάρχουν δύο μέθοδοι υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων, και αμφότερες αποδεικνύονται εξίσου χρήσιμες. Η πρώτη είναι να βρούμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα με αντικατάσταση, και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε μία από τις προκύπτουσες αντιπαραγώγους για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος. Η δεύτερη μέθοδος θα μας απασχολήσει στην παρούσα παράγραφο

## Τύπος αντικατάστασης

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Isaac Barrow
(1630-1677)

**Η μέθοδος της αντικατάστασης σε ορισμένα ολοκληρώματα**

Ο ΤΥΠΟΣ

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad (1)$$

ΠΩΣ ΕΦΑΡΜΟΖΕΤΑΙ

Αντικαθιστούμε $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, και ολοκληρώνουμε από $g(a)$ έως $g(b)$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο κάνοντας την ίδια αντικατάσταση που θα κάναμε αν θέλαμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Κατόπιν ολοκληρώνουμε ως προς $u$ με κάτω όριο την τιμή του $u$ για $x = a$ και άνω όριο την τιμή του $u$ για $x = b$.

Για να πεισθείτε πλήρως για την ορθότητα της Εξίσωσης (1), έστω $F$ μια αντιπαράγωγος της $f$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx &= F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} && \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)\\
&= F(g(b)) - F(g(a))\\
&= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)}\\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du. && \text{Θεμελιώδες θεώρημα, Μέρος 2}
\end{aligned}$$



**Παράδειγμα 1** Εφαρμογή του τύπου αντικατάστασης

Κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (1), υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx.$$

Λύση Μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα καθώς και τα όρια ολοκλήρωσης βάσει της Εξίσωσης (1).

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx\\
&= \int_0^2 \sqrt{u}\,du && \text{Έστω } u = x^3+1,\ du = 3x^2dx. \text{ Για } x=-1,\ u=(-1)^3+1=0. \text{ Για } x=1,\ u=(1)^3+1=2.\\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2 && \text{Υπολογίζουμε το νέο ορισμένο ολοκλήρωμα.}\\
&= \frac{2}{3}[2^{3/2} - 0^{3/2}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Αντί του τύπου αντικατάστασης, θα μπορούσαμε βεβαίως να χρησιμοποιήσουμε αντιπαραγώγους, στο πνεύμα του θεμελιώδους θεωρήματος.

**Παράδειγμα 2** Υπολογισμός ολοκληρώματος χωρίς χρήση του τύπου αντικατάστασης

Υπολογίστε το

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

μετασχηματίζοντας το ολοκλήρωμα σαν να ήταν αόριστο, εκτελώντας την ολοκλήρωση, και τέλος χρησιμοποιώντας τα αρχικά άνω και κάτω όρια του $x$.

Λύση

$$\begin{aligned}
\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,du && \text{Έστω } u = x^3+1,\ du = 3x^2\,dx.\\
&= \frac{2}{3}u^{3/2} + C && \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } u.\\
&= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C && \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } x^3+1.\\
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1} && \text{Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με τα όρια ολοκλήρωσης του } x.\\
&= \frac{2}{3}[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}]\\
&= \frac{2}{3}[2^{3/2} - 0^{3/2}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Ποια μέθοδος είναι καλύτερη, να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα, να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση και να ξανα-μετασχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα αρχικά όρια ολοκλήρωσης, ή να υπολογίσουμε το μετασχηματισμένο ολοκλήρωμα με μετασχηματισμένα όρια; Για την ολοκληρωτέα συνάρτηση $3x^2\sqrt{x^3+1}$, η χρήση του τύπου αντικατάστασης που κάναμε στο Παράδειγμα 1 φαίνεται ευκολότερη, αλλά αυτό δεν ισχύει πάντοτε. Γενικά, είναι καλύτερο να γνωρίζετε και τις δύο μεθόδους και να χρησιμοποιείτε τη μία ή την άλλη κατά περίπτωση.

Ακολουθεί ένα Παράδειγμα όπου υπολογίσαμε το μετασχηματισμένο ολοκλήρωμα με μετασχηματισμένα όρια.

### Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του τύπου αντικατάστασης

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta \, d\theta = \int_1^0 u\cdot(-du)$$

Έστω $u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\, d\theta$, $-du = \csc^2\theta\, d\theta$.
Για $\theta = \pi/4$, $u = \cot(\pi/4) = 1$.
Για $\theta = \pi/2$, $u = \cot(\pi/2) = 0$.

$$= -\int_1^0 u\, du$$

$$= -\frac{u^2}{2}\Big]_1^0$$

$$= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

CD-ROM Δικτυότοπος

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

*Απεικόνιση ολοκληρωμάτων που έχουν «απατηλές» αντιπαραγώγους* Πολλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, όπως η

$$f(x) = e^{-x^2}$$

που έχει πολλές εφαρμογές στη θεωρία πιθανοτήτων, έχουν αντιπαραγώγους που *δεν* μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων. Γνωρίζουμε, βέβαια, ότι υπάρχει η αντιπαράγωγος της $f$, λόγω του Μέρους 1 του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού. Χρησιμοποιήστε τον υπολογιστή σας για να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

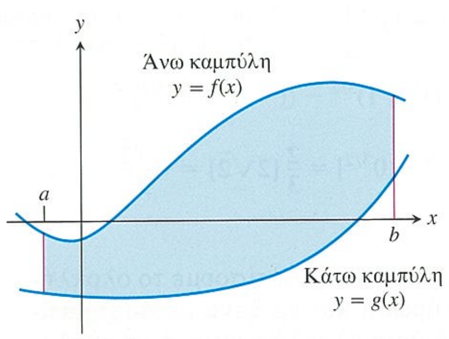
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt .$$

Τι συμπεραίνετε για την $F(x)$; Πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα; Ποια είναι τα ακρότατά της, αν υπάρχουν; Τι μπορείτε να πείτε για τα κοίλα του γραφήματος της $F(x)$;

## Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

Στο σημείο αυτό θα δούμε πώς βρίσκουμε το εμβαδόν χωρίου στο επίπεδο ολοκληρώνοντας τις συναρτήσεις που ορίζουν τα σύνορα του χωρίου.

Έστω ότι ζητούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν χωρίου που φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $y = f(x)$, από κάτω από την $y = g(x)$, και εξ αριστερών και εκ δεξιών αντίστοιχα από τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ (Σχήμα 4.19). Το σχήμα το χωρίου μπορεί κατά τύχη να είναι βολικό, δηλαδή να μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν από γνωστούς τύπους της γεωμετρίας, αλλά στη γενική περίπτωση όπου οι $f$ και $g$ είναι αυθαίρετες συνεχείς συναρτήσεις, μόνο με ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν.



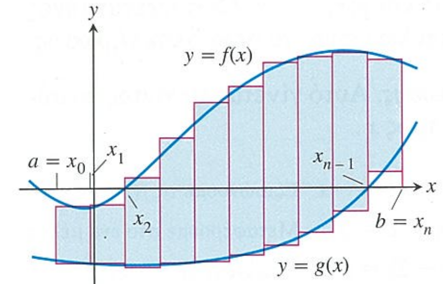

**Σχήμα 4.19** Το χωρίο που περιέχεται μεταξύ των καμπυλών $y = f(x)$ και $y = g(x)$ και των ευθειών $x = a$ και $x = b$.

Για να εξακριβώσουμε ποια μορφή πρέπει να έχει το ολοκλήρωμα, προσεγγίζουμε κατ' αρχάς το χωρίο με $n$ κατακόρυφα ορθογώνια παραλληλόγραμμα μέσω της διαμέρισης $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ (Σχήμα 4.20). Το εμβαδόν του $k$-στού ορθογωνίου (Σχήμα 4.21) ισούται με

$$\Delta A_k = \text{ύψος} \times \text{πλάτος} = [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k .$$

Κατόπιν προσεγγίζουμε το εμβαδόν του χωρίου αθροίζοντας τα εμβαδά των $n$ ορθογωνίων:



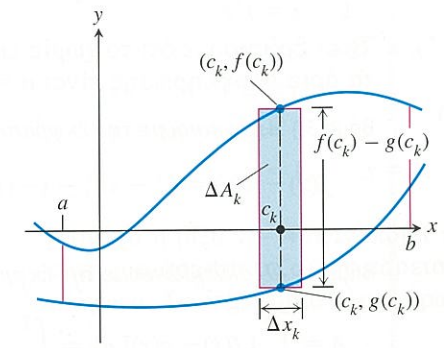



**Σχήμα 4.20** Προσεγγίζουμε το χωρίο με ορθογώνια κάθετα στον άξονα $x$.

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k . \qquad \text{Άθροισμα Riemann}$$

Καθώς $\| P \| \to 0$, το άθροισμα στο δεξιό μέλος πλησιάζει στο όριο $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ εφόσον οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς. Θεωρούμε λοιπόν ότι το εμβαδόν του χωρίου δίδεται από το ολοκλήρωμα αυτό. Με άλλα λόγια,

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx .$$




**Σχήμα 4.21** $\Delta A_k$ = εμβαδόν του $k$-στού ορθογωνίου, $f(c_k) - g(c_k)$ = ύψος, και $\Delta x_k$ = πλάτος.

CD-ROM Δικτυότοπος

**Ορισμός Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών**

Αν οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς και $f(x) \geq g(x)$ παντού στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y = f(x)$ και $y = g(x)$ από $a$ έως $b$ ισούται με το ολοκλήρωμα της $[f - g]$ από $a$ έως $b$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx . \qquad (2)$$

Για να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (2), κινούμαστε ως εξής:

### Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπυλών

Βήμα 1. *Παριστούμε γραφικά τις καμπύλες και σχεδιάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό ορθογώνιο.* Το σχήμα αναδεικνύει ποια καμπύλη είναι η $f$ (δηλ. η άνω καμπύλη) και ποια η $g$ (κάτω καμπύλη). Επίσης μας βοηθά να βρούμε τα όρια της ολοκλήρωσης αν δεν μας είναι ήδη γνωστά.

Βήμα 2. *Βρίσκουμε τα όρια της ολοκλήρωσης.*

Βήμα 3. *Γράφουμε έναν τύπο για την ποσότητα* $f(x) - g(x)$. Αν μπορούμε, τον απλοποιούμε.

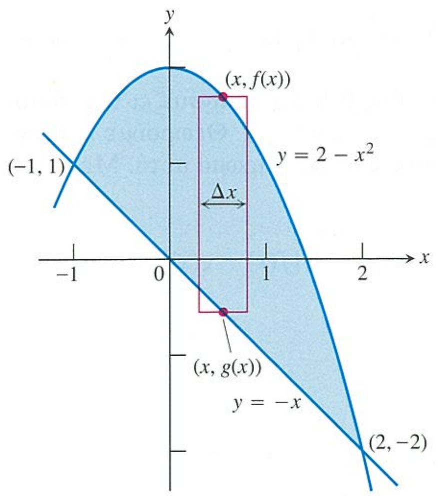
Βήμα 4. *Ολοκληρώνουμε την* $[f(x) - g(x)]$ *από* $a$ *έως* $b$. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι το ζητούμενο εμβαδόν.

### Παράδειγμα 4 Εμβαδόν μεταξύ τεμνόμενων καμπυλών

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 2 - x^2$ και την ευθεία $y = -x$.

**Λύση**

Βήμα 1: *Σχεδιάζουμε τις καμπύλες και ένα κατακόρυφο ορθογώνιο* (Σχήμα 4.22). Από το σχήμα αναγνωρίζουμε ποια είναι η άνω και ποια η




**ΣΧΗΜΑ 4.22** Το χωρίο του Παραδείγματος 4 με ένα αντιπροσωπευτικό προσεγγιστικό ορθογώνιο.

κάτω καμπύλη, οπότε $f(x) = 2 - x^2$ και $g(x) = -x$. Οι συντεταγμένες $x$ των σημείων τομής των δυο καμπυλών είναι τα όρια ολοκλήρωσης.

Βήμα 2: *Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης.* Αυτό γίνεται λύνοντας το σύστημα $y = 2 - x^2$ και $y = -x$ ως προς $x$.

$$
\begin{aligned}
2 - x^2 &= -x && \text{Εξισώνουμε τις } f(x) \text{ και } g(x). \\
x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Μεταφέρουμε στο ένα μέλος.} \\
(x+1)(x-2) &= 0 && \text{Παραγοντοποιούμε.} \\
x = -1, \quad x &= 2. && \text{Επιλύουμε.}
\end{aligned}
$$

Έτσι βρίσκουμε ότι το χωρίο εκτείνεται από $x = -1$ έως $x = 2$. Άρα τα όρια ολοκλήρωσης είναι $a = -1$, $b = 2$.

Βήμα 3: *Απλοποιούμε την έκφραση* $f(x) - g(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= (2 - x^2) - (-x) = 2 - x^2 + x \\
&= 2 + x - x^2 \qquad \text{Η αναδιάταξη αυτή είναι απλώς θέμα γούστου}
\end{aligned}
$$

Βήμα 4: *Ολοκληρώνουμε την έκφραση* $[f(x) - g(x)]$ *από* $a$ *έως* $b$.

$$
\begin{aligned}
A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\
&= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

## Τι συμβαίνει όταν αλλάζουν οι τύποι των συνοριακών καμπυλών του χωρίου ολοκλήρωσης

Αν ο τύπος μιας συνοριακής καμπύλης αλλάζει σε ένα ή περισσότερα σημεία, διαμερίζουμε το χωρίο σε μικρότερα χωρία («υποχωρία») που αντιστοιχούν στις αλλαγές αυτές και εφαρμόζουμε την Εξίσωση (2) χωριστά σε κάθε υποχωρίο.

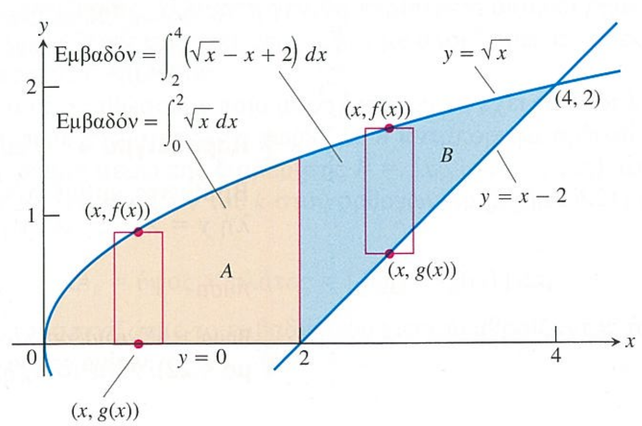
**CD-ROM**
**Δικτυότοπος**
Βιογραφικά στοιχεία
Richard Dedekind
(1831-1916)

**Παράδειγμα 5** Πώς αλλάζει η μορφή του ολοκληρώματος όταν αλλάξει ο τύπος της συνοριακής καμπύλης

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από πάνω από την $y = \sqrt{x}$, και από κάτω από τον άξονα $x$ και την ευθεία $y = x - 2$.

Λύση

Βήμα 1: Η γραφική παράσταση (Σχήμα 4.23) δείχνει ότι το άνω σύνορο του χωρίου είναι η καμπύλη $f(x) = \sqrt{x}$. Το κάτω σύνορο είναι η καμπύλη $g(x) = 0$ για $0 \le x \le 2$ και μετά αλλάζει και γίνεται $g(x) =$




**ΣΧΗΜΑ 4.23** Όταν αλλάζει ο τύπος της συνοριακής καμπύλης του χωρίου, αλλάζει και η μορφή του ολοκληρώματος που δίνει το εμβαδόν του χωρίου. (Παράδειγμα 5)



$x - 2$ για $2 \le x \le 4$ (το σημείο αλλαγής είναι το $x = 2$). Στο σημείο $x = 2$ λοιπόν διαμερίζουμε το χωρίο στα υποχωρία $A$ και $B$ για καθένα από τα οποία σχεδιάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό προσεγγιστικό ορθογώνιο.

Βήμα 2: Τα όρια της ολοκλήρωσης για το υποχωρίο $A$ είναι $a = 0$ και $b = 2$. Το αριστερό όριο του υποχωρίου $B$ είναι $a = 2$. Για να βρούμε το δεξιό όριο, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $y = \sqrt{x}$ και $y = x - 2$ ως προς $x$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x - 2 && \text{Εξισώνουμε τις } f(x) \text{ και } g(x). \\
x &= (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 && \text{Υψώνουμε στο τετράγωνο.} \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{Αναδιατάσσουμε.} \\
(x-1)(x-4) &= 0 && \text{Παραγοντοποιούμε.} \\
x = 1, \quad x &= 4. && \text{Επιλύουμε.}
\end{aligned}
$$

Μονάχα η ρίζα $x = 4$ ικανοποιεί την εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$. Η $x = 1$ είναι μια άσχετη ρίζα που παρεισέφρυσε λόγω της ύψωσης στο τετράγωνο. Το δεξιό όριο ολοκλήρωσης είναι λοιπόν $b = 4$.

Βήμα 3: Για $0 \le x \le 2$: $\quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

Για $2 \le x \le 4$: $\quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2$

Βήμα 4: Αθροίζουμε τα εμβαδά των υποχωρίων $A$ και $B$ για να βρούμε το ολικό εμβαδόν:

$$
\begin{aligned}
\text{Συνολικό εμβαδόν: } & \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\, dx}_{\text{εμβαδόν του } A} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx}_{\text{εμβαδόν του } B} \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 \\
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right) \\
&= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

*Η τομή δύο καμπυλών* Σε τεχνικές εφαρμογές, μια από τις δυσκολότερες και κοπιαστικότερες διαδικασίες της ολοκλήρωσης είναι η εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης. Για να γίνει αυτό συνήθως απαιτείται η εύρεση των σημείων μηδενισμού μιας συναρτήσεως ή τα σημεία τομής δύο καμπυλών.

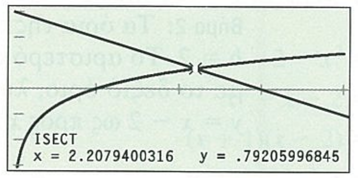
Για να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ με υπολογιστή, εισαγάγετε ως δεδομένα τις συναρτήσεις

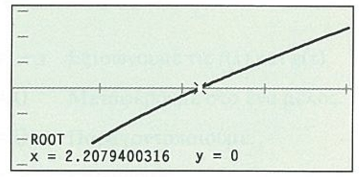
$$y_1 = f(x) \qquad \text{και} \qquad y_2 = g(x)$$

σε κάποιο πρόγραμμα γραφικής σχεδίασης για να βρείτε τα σημεία τομής. Εναλλακτικά, μπορείτε να λύσετε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$ με μια ρουτίνα εύρεσης ριζών. Πειραματιστείτε και με τις δύο διαδικασίες, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x \qquad \text{και} \qquad g(x) = 3 - x.$$

Όταν τα σημεία τομής δεν φαίνονται καθαρά ή υποψιάζεστε ότι υπάρχει μια πιο περίπλοκη συμπεριφορά, αυτό σημαίνει ότι απαιτείται περαιτέρω χρήση των υπολογιστικών εργαλείων ή των μεθόδων του απειροστικού λογισμού.




(α) Φαίνονται οι τεμνόμενες καμπύλες $y_1 = \ln x$ και $y_2 = 3 - x$. Χρησιμοποιήσαμε μια ενσωματωμένη στο πρόγραμμα λειτουργία για να βρεθεί το σημείο τομής.
(β) Χρήση ενσωματωμένης λειτουργίας εύρεσης ριζών για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - 3 + x$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.6

Χρησιμοποιήστε τον τύπο αντικατάστασης για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 1-16.

**1.** (α) $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$
(β) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

**2.** (α) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$
(β) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$

**3.** (α) $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$
(β) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$

**4.** (α) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$
(β) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

**5.** (α) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$
(β) $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$

**6.** (α) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
(β) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

**7.** (α) $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$
(β) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$

**8.** (α) $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$
(β) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

**9.** (α) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$ (β) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$

**10.** (α) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$
(β) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$

**11.** $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$ **12.** $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$

**13.** $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta\,d\theta$ **14.** $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

**15.** $\int_0^{\pi/4} (1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

**16.** $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

### Προβλήματα αρχικών τιμών

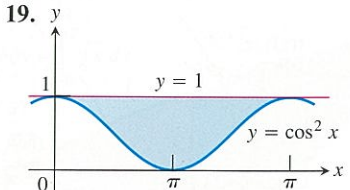
Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών στις Ασκήσεις 17-18.

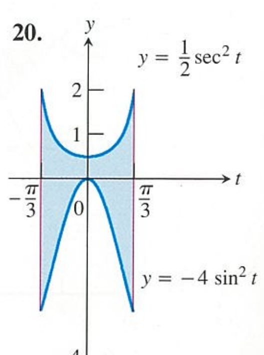
**17.** $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}\sec^2\frac{\pi}{t}, \quad y(4) = \frac{2}{\pi}$

**18.** $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sin^2\sqrt{t}\cos\sqrt{t}, \quad y\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = 0$

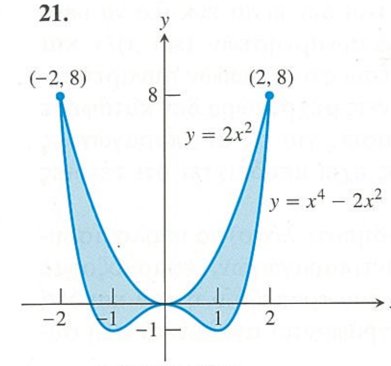
### Εμβαδόν

Βρείτε τα εμβαδά των σκιασμένων περιοχών στις Ασκήσεις 19-24.

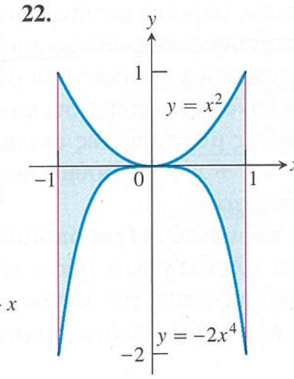
**19.**


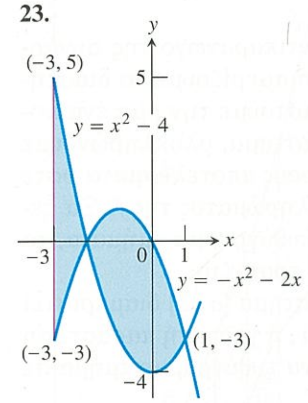

**20.**


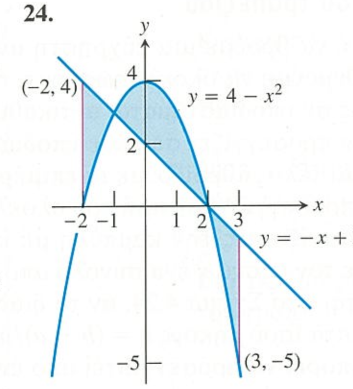



**21.**



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

**22.**



**23.**



**24.**



Στις Ασκήσεις 25-28, παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση στο παρατιθέμενο διάστημα. Κατόπιν
(α) ολοκληρώστε τη συνάρτηση στο διάστημα αυτό
(β) βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα και τον άξονα $x$.

**25.** $y = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3]$
**26.** $y = -x^2 + 5x - 4, \quad [0, 2]$
**27.** $y = 2x - x^2, \quad [0, 3]$
**28.** $y = x^2 - 4x, \quad [0, 5]$

Βρείτε τα εμβαδά των χωρίων που περικλείονται από τις ευθείες και τις καμπύλες των Ασκήσεων 29-38.

**29.** $y = x^2 - 2$ και $y = 2$
**30.** $y = -x^2 - 2x$ και $y = x$
**31.** $y = x^2$ και $y = -x^2 + 4x$
**32.** $y = 7 - 2x^2$ και $y = x^2 + 4$
**33.** $y = x^4 - 4x^2 + 4$ και $y = x^2$
**34.** $y = |x^2 - 4|$ και $y = (x^2/2) + 4$
**35.** $y = 2\sin x$ και $y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \pi$
**36.** $y = 8\cos x$ και $y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$
**37.** $y = \sin(\pi x/2)$ και $y = x$
**38.** $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$, και $x = \pi/4$
**39.** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από την ευθεία $y = x$, την ευθεία $x = 2$, την καμπύλη $y = 1/x^2$, και τον άξονα $x$.
**40.** Βρείτε το εμβαδόν του τριγωνικού χωρίου του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται εξ αριστερών από τον άξονα $y$ και εκ δεξιών από τις καμπύλες $y = \sin x$ και $y = \cos x$.
**41.** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 3 - x^2$ και την ευθεία $y = -1$.
**42.** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται ως εξής: αριστερά από τον άξονα $y$, κάτω από την ευθεία $y = x/4$, άνω αριστερά από την καμπύλη $y = 1 + \sqrt{x}$, και άνω δεξιά από την καμπύλη $y = 2/\sqrt{x}$.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 43-46, καλείστε να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από καμπύλες στο επίπεδο, των οποίων όμως δεν μπορείτε να βρείτε τα σημεία τομής με απλές αλγεβρικές μεθόδους. Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα εξής:

(α) Παραστήστε γραφικά σε ενιαίο σχήμα τις καμπύλες για να δείτε το γενικό τους σχήμα και πόσα σημεία τομής παρουσιάζουν.
(β) Βρείτε τα σημεία τομής των καμπυλών επιλύοντας αριθμητικά την κατάλληλη εξίσωση.
(γ) Ολοκληρώστε την ποσότητα $|f(x) - g(x)|$ μεταξύ των διαδοχικών σημείων τομής.
(δ) Αθροίστε τα ολοκληρώματα που βρήκατε στο (γ).

**43.** $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$
**44.** $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$
**45.** $f(x) = x + \sin(2x), \quad g(x) = x^3$
**46.** $f(x) = x^2\cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

## 4.7 Αριθμητική ολοκλήρωση

CD-ROM Δικτυότοπος

Η προσέγγιση του τραπεζίου • Σφάλμα στην προσέγγιση του τραπεζίου • Προσεγγίσεις με παραβολικά τόξα • Σφάλμα στον κανόνα του Simpson • Ποιος κανόνας δίδει καλύτερα αποτελέσματα; • Σφάλματα στρογγυλοποίησης

Όπως έχουμε δει προηγουμένως, η ιδανική μέθοδος υπολογισμού ενός ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι να βρούμε τον τύπο $F(x)$ μιας αντιπαραγώγου της $f(x)$ και να υπολογίσουμε την ποσότητα

$F(\beta) - F(\alpha)$. Ωστόσο, μερικές αντιπαράγωγοι δεν είναι εύκολο να υπολογιστούν, ενώ άλλες, όπως αυτές των συναρτήσεων $(\sin x)/x$ και $\sqrt{1+x^4}$, δεν μπορούν να εκφραστούν μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων. Με αυτό δεν εννοούμε απλώς ότι κανείς μέχρι τώρα δεν κατάφερε να βρει στοιχειώδεις μαθηματικές εκφράσεις για τις αντιπαραγώγους των $(\sin x)/x$ και $\sqrt{1+x^4}$. Εννοούμε πως έχει αποδειχτεί ότι τέτοιες εκφράσεις δεν υπάρχουν.

Όταν λοιπόν αδυνατούμε (για οποιονδήποτε λόγο) να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μέσω αντιπαραγώγων, εφαρμόζουμε αριθμητικές μεθόδους όπως τον κανόνα του τραπεζίου ή τον κανόνα του Simpson. Οι δύο αυτοί κανόνες περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια.

## Η προσέγγιση του τραπεζίου

Όταν αδυνατούμε να βρούμε μια εύχρηστη αντιπαράγωγο της συνάρτησης $f$ που επιθυμούμε να ολοκληρώσουμε, διαμερίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης σε υποδιαστήματα, αντικαθιστούμε την $f$ με ένα πολυώνυμο που την προσεγγίζει σε κάθε υποδιάστημα, ολοκληρώνουμε τα πολυώνυμα, και τέλος αθροίζουμε τα επιμέρους αποτελέσματα ώστε να πάρουμε μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος της $f$. Θα ξεκινήσουμε προσεγγίζοντας την καμπύλη με ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία ορίζουν με τον άξονα $x$ ένα σύνολο από τραπέζια.

Το μήκος $h = (b-a)/n$ καλείται **βήμα**. Συνηθίζεται η χρήση του $h$ αντί του $\Delta x$.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.24, αν το διάστημα $[a, b]$ διαμεριστεί σε $n$ υποδιαστήματα ίσου μήκους $h = (b-a)/n$, η γραφική παράσταση της $f$ στο $[a, b]$ μπορεί να προσεγγιστεί από ένα ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε υποδιάστημα.

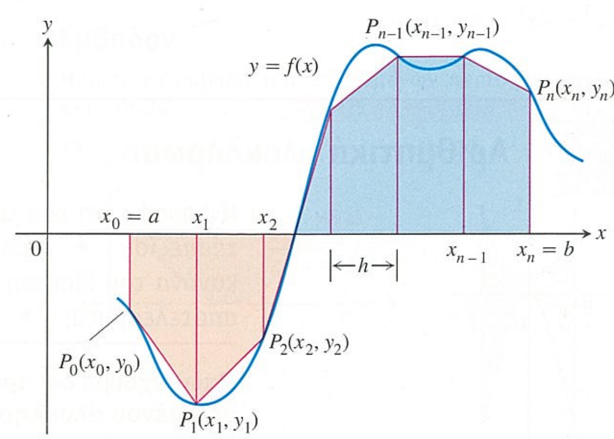
Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα $x$ προσεγγίζεται τότε από ένα σύνολο τραπεζίων· το εμβαδόν κάθε τραπεζίου ισούται με το οριζόντιο «ύψος» του επί τον μέσο όρο των δυο κατακόρυφων «βάσεων». Αθροίζουμε τα εμβαδά των τραπεζίων λογίζοντας για θετικό κάθε εμβαδόν υποχωρίου πάνω από τον άξονα $x$, και για αρνητικό κάθε εμβαδόν υποχωρίου κάτω από τον άξονα $x$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\ &= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n), \end{aligned}$$

όπου

$$y_0 = f(a), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots, \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \quad y_n = f(b).$$

Ο κανόνας του τραπεζίου λέει: Η ποσότητα $T$ προσεγγίζει το ολοκλήρωμα της $f$ από $a$ έως $b$.




**Σχημα 4.24** Ο κανόνας του τραπεζίου προσεγγίζει μικρά τμήματα της καμπύλης $y = f(x)$ με ευθύγραμμα τμήματα. Για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα της $f$ από $a$ έως $b$, αθροίζουμε τα προσημασμένα εμβαδά των τραπεζίων που σχηματίζονται αν από τα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος φέρουμε καθέτους στον άξονα $x$.



CD-ROM Δικτυότοπος

### Ο κανόνας του τραπεζίου

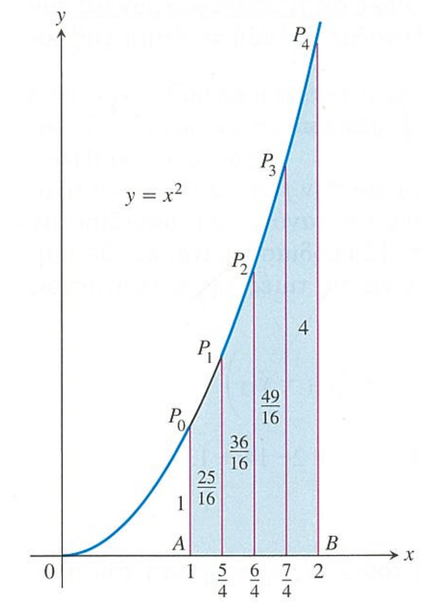
Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ με την ποσότητα

$$T = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Οι αριθμοί $y$ είναι οι τιμές της $f$ στα σημεία διαμερίσεως

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \; \ldots, \; x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad x_n = b,$$

όπου $h = (b-a)/n$.




**Σχημα 4.25** Η προσέγγιση του τραπεζίου για το εμβαδόν που περικλείεται από τον άξονα $x$ και την καμπύλη $y = x^2$ από $x = 1$ έως $x = 2$ δίνει μια ελάχιστα μεγαλύτερη τιμή από το ακριβές εμβαδόν του χωρίου.

### Παράδειγμα 1 Εφαρμογή του κανόνα του τραπεζίου

Εφαρμόστε τον κανόνα του τραπεζίου με $n = 4$ για να εκτιμήσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2\,dx$. Συγκρίνετε την εκτίμησή σας με την ακριβή τιμή.

*Λύση* Διαμερίζουμε το $[1, 2]$ σε τέσσερα υποδιαστήματα ίσου μήκους (Σχήμα 4.25). Κατόπιν υπολογίζουμε τις τιμές της $y = x^2$ σε κάθε σημείο διαμέρισης (Πίνακας 4.6).

Για τις τιμές αυτές των $y$, $n = 4$, και $h = (2-1)/4 = 1/4$, ο κανόνας του τραπεζίου μάς δίνει

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right) \\ &= \frac{75}{32} = 2{,}34375. \end{aligned}$$

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η προσέγγιση του τραπεζίου μας δίδει μια κατά μισό τοις εκατό μεγαλύτερη τιμή από την πραγματική που είναι $7/3$. Συγκεκριμένα, το ποσοστιαίο σφάλμα ισούται με $(2{,}34375 - 7/3)/(7/3) \approx 0{,}00446$, δηλαδή $0{,}446\%$.

**Πίνακας 4.6**

| $x$ | $y = x^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| $\frac{5}{4}$ | $\frac{25}{16}$ |
| $\frac{6}{4}$ | $\frac{36}{16}$ |
| $\frac{7}{4}$ | $\frac{49}{16}$ |
| 2 | 4 |

Θα μπορούσαμε να είχαμε προβλέψει ότι ο κανόνας του τραπεζίου θα έδιδε κατά τι μεγαλύτερη τιμή από την πραγματική στο Παράδειγμα 1, αν εξετάζαμε τη γεωμετρία της γραφικής παράστασης του Σχήματος 4.25. Εφόσον η παραβολή στρέφει τα κοίλα *άνω*, τα ευθύγραμμα τμήματα που την προσεγγίζουν θα κείνται πάνω από αυτήν, προσδίδοντας σε κάθε τραπέζιο ελαφρώς μεγαλύτερο εμβαδόν απ' ό,τι το αντίστοιχο χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη και τον άξονα $x$. Στο Σχήμα 4.24, φαίνεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα κείνται *κάτω* από την καμπύλη στα διαστήματα όπου αυτή στρέφει τα κοίλα *κάτω*, και άρα τότε ο κανόνας του τραπεζίου «υποεκτιμά» το ολοκλήρωμα. Βέβαια όταν η καμπύλη κείται κάτω από τον άξονα $x$ η ερμηνεία του ολοκληρώματος ως εμβαδού αλλάζει, όμως παραμένει αληθές ότι αν το χωρίο περιλαμβάνει μεγαλύτερες τιμές $y$ σε σχέση με το τραπέζιο, θα έχει *αλγεβρικά* μεγαλύτερη επιφάνεια από αυτό. Άρα μπορούμε σε κάθε περίπτωση να ισχυριστούμε ότι η ποσότητα $T$ «υπερεκτιμά» το ολοκλήρωμα όποτε η καμπύλη είναι κοίλη άνω, ενώ το «υποεκτιμά» όποτε η καμπύλη είναι κοίλη κάτω.

### Παράδειγμα 2 Μέσος όρος θερμοκρασιών

Ένας παρατηρητής μετρά την εξωτερική θερμοκρασία κάθε ώρα από το μεσημέρι μέχρι τα μεσάνυχτα, καταγράφοντας τις θερμοκρασίες στον ακόλουθο πίνακα.

| Χρόνος | Μ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | Μ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Θερμ. | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 21 | 20 | 20 | 18 | 18 | 17 | 14 | 13 |

Πόση ήταν η μέση θερμοκρασία για τη 12ωρη περίοδο των μετρήσεων;

**Λύση** Ζητούμε τη μέση τιμή μιας συνεχούς συναρτήσεως (θερμοκρασία) της οποίας τις τιμές γνωρίζουμε σε διάκριτους χρόνους που απέχουν μία μονάδα μεταξύ τους. Ζητούμε δηλαδή την τιμή της ποσότητας

$$\operatorname{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

ενώ δεν έχουμε αναλυτική έκφραση για την $f(x)$. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί από τον κανόνα του τραπεζίου, αν διαμερίσουμε το 12ωρο διάστημα σε 12 υποδιαστήματα, και θεωρήσουμε τις θερμοκρασίες του πίνακα ως τις τιμές της συναρτήσεως στα σημεία διαμέρισης (με $h = 1$).

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{11} + y_{12}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(17 + 2\cdot 18 + 2\cdot 19 + \cdots + 2\cdot 14 + 13\right) \\ &= 221 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την τιμή του $T$ ως προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$, έχουμε

$$\operatorname{av}(f) \approx \frac{1}{b-a}\cdot T = \frac{1}{12}\cdot 221 \approx 18{,}42$$

Στρογγυλοποιούμε (άλλωστε στις μετρήσεις δεν αναφέρεται δεκαδική θερμοκρασία) παίρνοντας ως μέση θερμοκρασία τους 18 βαθμούς.

CD-ROM Δικτυότοπος

## Σφάλμα στην προσέγγιση του τραπεζίου

Από τα σχήματα προκύπτει ότι το μέγεθος του σφάλματος, που είναι

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T$$

στην προσέγγιση του τραπεζίου, θα ελαττωθεί καθώς το **βήμα** $h$ ελαττώνεται, διότι τα τραπέζια προσαρμόζονται καλύτερα στην καμπύλη όσο το πλήθος τους αυξάνεται. Ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού μάς πείθει ότι έτσι έχουν τα πράγματα αν η $f$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

**Εκτίμηση σφάλματος για τον κανόνα του τραπεζίου**

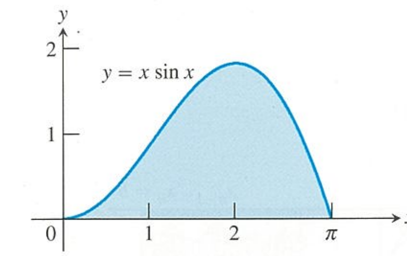
Αν η $f''$ είναι συνεχής και $M$ είναι τυχόν άνω φράγμα των τιμών της $|f''|$ στο $[a, b]$, τότε

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2 M, \tag{1}$$

όπου $h = (b-a)/n$.



Αν και η θεωρία μάς υπόσχεται ότι θα υπάρχει πάντα μια ελάχιστη «τιμή ασφαλείας» $M$, στην πράξη δεν μπορούμε σχεδόν ποτέ να τη βρούμε. Απλώς βρίσκουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή και από κει εκτιμούμε το σφάλμα $|E_T|$. Αυτό μπορεί να φαίνεται κάπως πρόχειρο, όμως αποδίδει. Για να ελαττώσουμε το $|E_T|$ για δεδομένο $M$, κρατάμε μικρό το βήμα $h$.




**Σχημα 4.26** Γραφική παράσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης του Παραδείγματος 3.

### Παράδειγμα 3 Άνω φράγμα για το σφάλμα στον κανόνα του τραπεζίου

Βρείτε ένα άνω φράγμα του σφάλματος που προκύπτει κατά την προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

μέσω του κανόνα του τραπεζίου με $n = 10$ βήματα (Σχήμα 4.26).

**Λύση** Με $a = 0$, $b = \pi$, και $h = (b-a)/n = \pi/10$, η Εξίσωση (1) δίνει

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2 M = \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 M = \frac{\pi^3}{1200}M.$$

Ως $M$ μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε άνω φράγμα της απόλυτης τιμής της δεύτερης παραγώγου της $f(x) = x\sin x$ στο $[0, \pi]$. Με έναν υπολογισμό ρουτίνας βρίσκουμε

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x,$$

οπότε

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2\cos x - x\sin x| \\ &\le 2|\cos x| + |x|\,|\sin x| \\ &\le 2\cdot 1 + \pi\cdot 1 = 2 + \pi. \end{aligned}$$

Τριγωνική ανισότητα: $|a+b| \le |a| + |b|$

Τα $|\cos x|$ και $|\sin x|$ δεν υπερβαίνουν ποτέ το 1, και $0 \le x \le \pi$.

Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $M = 2 + \pi$. Συνεπώς,

$$|E_T| \le \frac{\pi^3}{1200}M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0{,}133.$$

Στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω για να είμαστε βέβαιοι

Έτσι, το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει την τιμή 0,133.

Αν επιθυμούσαμε μεγαλύτερη ακρίβεια, θα θεωρούσαμε μεγαλύτερο πλήθος τραπεζίων. Με $n = 100$ βήματα, για παράδειγμα, $h = \pi/100$, οπότε

$$|E_T| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{100}\right)^2 M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{120.000} < 0{,}00133 = 1{,}33 \times 10^{-3}.$$

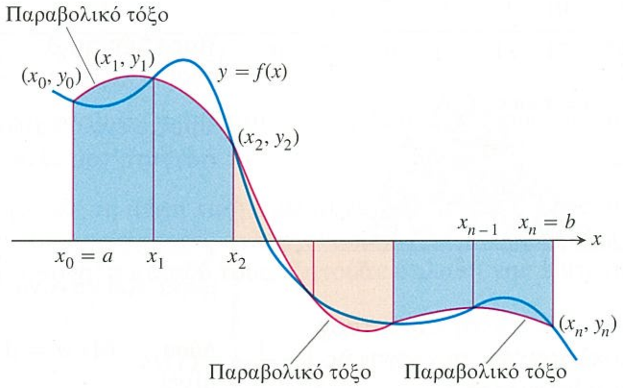
## Προσεγγίσεις με παραβολικά τόξα

Τόσο τα αθροίσματα Riemann όσο και ο κανόνας του τραπεζίου αποτελούν ικανοποιητικές προσεγγίσεις του ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα. Ο κανόνας του τραπεζίου πάντως προσεγγίζει καλύτερα το ολοκλήρωμα για μικρές τιμές του $n$, πράγμα που σημαίνει ότι είναι ταχύτερος αλγόριθμος για αριθμητική ολοκλήρωση.

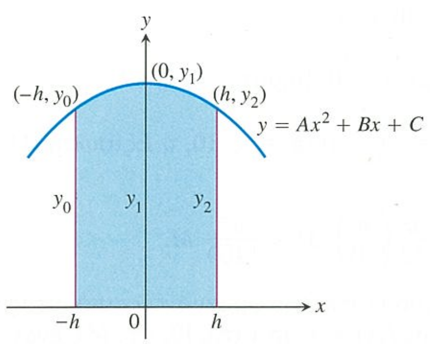
CD-ROM Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Thomas Simpson (1720-1761)

Το μόνο μειονέκτημα του κανόνα του τραπεζίου είναι ότι προσεγγίζει καμπύλα τόξα με ευθύγραμμα τμήματα. Θα περίμενε κανείς ότι ένας αλγόριθμος που προσεγγίζει μια καμπύλη με *καμπύλα* τμήματα θα υπερτερούσε σε αυτό το σημείο και άρα θα απέβαινε ακόμη ταχύτερος σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Και όντως έτσι έχουν τα πράγματα. Ένα τέτοιος κανόνας που χρησιμοποιεί παραβολικά τόξα είναι ο *κανό-*

*νας του Simpson.* Ο κανόνας αυτός επιχειρεί τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ προσεγγίζοντας την $f$ μέσω πολυωνύμων δευτέρου βαθμού αντί για πρώτου. Δηλαδή προσεγγίζει τη γραφική παράσταση με παραβολικά τόξα αντί για ευθύγραμμα τμήματα (Σχήμα 4.27).




**Σχημα 4.27** Ο κανόνας του Simpson προσεγγίζει μικρά τμήματα μιας καμπύλης με παραβολικά τόξα.




**Σχημα 4.28** Ολοκληρώνοντας από $-h$ έως $h$, βρίσκουμε ότι το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας ισούται με

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Το ολοκλήρωμα του πολυωνύμου δευτέρου βαθμού $y = Ax^2 + Bx + C$ (Σχήμα 4.28) από $x = -h$ έως $x = h$ ισούται με

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{2}$$

(Παράρτημα 4). Ουσιαστικά, ο κανόνας του Simpson έγκειται στη διαμέριση του τμήματος $[a, b]$ σε έναν άρτιο αριθμό υποδιαστημάτων ίσου μήκους $h$, στην εφαρμογή της Εξίσωσης (2) σε διαδοχικά ζεύγη υποδιαστημάτων, και στην άθροιση των επιμέρους αποτελεσμάτων.

CD-ROM Δικτυότοπος

**Κανόνας του Simpson**

Υπολογίζουμε προσεγγιστικά το $\int_a^b f(x)\,dx$, μέσω της έκφρασης

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right).$$

Οι αριθμοί $y$ είναι οι τιμές της $f$ στα σημεία διαμέρισης

$$x_0 = a,\quad x_1 = a + h,\quad x_2 = a + 2h,\quad \ldots,\quad x_{n-1} = a + (n-1)h,\quad x_n = b.$$

Ο αριθμός $n$ είναι άρτιος, και ισχύει $h = (b - a)/n$.

**Πίνακας 4.7**

| $x$ | $y = 5x^4$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{16}$ |
| $1$ | $5$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{405}{16}$ |
| $2$ | $80$ |

**Παράδειγμα 4** Εφαρμογή του κανόνα του Simpson

Εφαρμόστε τον κανόνα του Simpson με $n = 4$ για να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5x^4\,dx$.

Λύση Διαμερίζουμε το [0, 2] σε τέσσερα υποδιαστήματα και υπολογίζουμε τις τιμές $y = 5x^4$ στα σημεία διαμέρισης (Πίνακας 4.7). Κατόπιν εφαρμόζουμε τον κανόνα του Simpson με $n = 4$ και $h = 1/2$:

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$



$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2\,(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right)$$

$$= 32 + \frac{1}{12}.$$

Η εκτίμησή μας διαφέρει από την ακριβή τιμή (32) μόνο κατά 1/12, που σημαίνει ποσοστιαίο σφάλμα λιγότερο των τριών δεκάτων της ποσοστιαίας μονάδας, και μάλιστα με μόνο τέσσερα υποδιαστήματα.

## Σφάλμα στον κανόνα του Simpson

Το σφάλμα που οφείλεται στην προσέγγιση κατά Simpson,

$$E_S = \int_a^b f(x)\,dx - S,$$

ελαττώνεται καθώς το μέγεθος του βήματος μικραίνει, κάτι που είναι αναμενόμενο και από την εμπειρία μας με τον κανόνα του τραπεζίου. Η διαφορά είναι ότι η ανισότητα που μας εγγυάται την ύπαρξη φραγμού στο σφάλμα του κανόνα του Simpson, προϋποθέτει ότι η $f$ έχει συνεχή τέταρτη παράγωγο (εν συγκρίσει με την απαίτηση για συνέχεια της δεύτερης παραγώγου στον κανόνα του τραπεζίου). Αποδεικνύεται με χρήση προχωρημένου απειροστικού λογισμού ότι το σφάλμα έχει ως εξής.

CD-ROM Δικτυότοπος

**Εκτίμηση του σφάλματος στον κανόνα του Simpson**

Αν η $f^{(4)}$ είναι συνεχής και $M$ είναι ένα άνω φράγμα των τιμών της $|f^{(4)}|$ στο $[a, b]$, τότε

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180}\,h^4 M, \tag{3}$$

όπου $h = (b - a)/n$.

Όπως και στον κανόνα του τραπεζίου, έτσι και εδώ δεν μπορούμε σχεδόν ποτέ να βρούμε τη μικρότερη τιμή του $M$ που υπάρχει. Οπότε αρκούμαστε να βρούμε το μικρότερο άνω φράγμα του $M$ που μας είναι δυνατόν.

**Παράδειγμα 5** Άνω φράγμα για το σφάλμα στον κανόνα του Simpson

Πόσο σφάλμα δίδει η Εξίσωση (3) για την προσέγγιση κατά Simpson του Παραδείγματος 4;

Λύση Προκειμένου να εκτιμήσουμε το σφάλμα, βρίσκουμε κατ' αρχάς ένα άνω φράγμα $M$ της απόλυτης τιμής της τέταρτης παραγώγου της $f(x) = 5x^4$ στο διάστημα $0 \le x \le 2$. Εφόσον η τέταρτη παράγωγος παίρνει τη σταθερή τιμή $f^{(4)}(x) = 120$, μπορούμε ασφαλώς να θέσουμε $M = 120$. Για $b - a = 2$ και $h = 1/2$, η Εξίσωση (3) δίδει

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180}\,h^4 M = \frac{2}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 (120) = \frac{1}{12}.$$

## Ποιος κανόνας δίδει καλύτερα αποτελέσματα;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό έγκειται στους τύπους σφάλματος

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}\,h^2 M, \qquad |E_S| \le \frac{b-a}{180}\,h^4 M.$$

**Ο κανόνας του τραπεζίου σε αντιδιαστολή με τον κανόνα του Simpson**

Εφόσον ο κανόνας του Simpson είναι ο ακριβέστερος από τους δύο, γιατί κάνουμε τον κόπο να ασχοληθούμε με τον κανόνα του τραπεζίου; Υπάρχουν δύο λόγοι. Πρώτον, σε μερικές εφαρμογές ο κανόνας του τραπεζίου μας δίδει πολύ απλούστερες εκφράσεις. Δεύτερον, ο κανόνας του τραπεζίου αποτελεί τη βάση της *ολοκλήρωσης κατά Rhomberg*, μιας από τις πλέον ικανοποιητικές αριθμητικές μεθόδους που παρέχει μεγάλη ακρίβεια υπολογισμού.

Το σύμβολο $M$, σημαίνει βεβαίως διαφορετικά πράγματα στις δύο περιπτώσεις, αφού ισούται με ένα άνω φράγμα της $|f''|$ στην πρώτη περίπτωση και με ένα άνω φράγμα της $|f^{(4)}|$ στη δεύτερη. Αλλά υπάρχουν και άλλοι όροι. Ο παράγοντας $(b-a)/180$ στον τύπο του Simpson ισούται με ένα δέκατο πέμπτο του $(b-a)/12$ στον τύπο του τραπεζίου. Ακόμη μεγαλύτερη σημασία έχει ο παράγοντας $h^4$ στον τύπο του Simpson, έναντι $h^2$ στον τύπο του τραπεζίου. Αν το $h$ ισούται με ένα δέκατο, τότε το $h^2$ είναι ένα εκατοστό αλλά το $h^4$ είναι μόλις ένα δεκάκις χιλιοστό. Αν και τα δύο $M$ ισούνται με 1, για παράδειγμα, και $b-a=1$, τότε, για $h=1/10$, έχουμε

$$|E_T| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{1200},$$

ενώ

$$|E_S| \le \frac{1}{180}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 = \frac{1}{1.800.000} = \frac{1}{1500}\cdot\frac{1}{1200}.$$

Έτσι, με τον ίδιο κόπο όσον αφορά τους αριθμητικούς υπολογισμούς, παίρνουμε μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Simpson, τουλάχιστον σε αυτή την περίπτωση.

Πάντως, τον καθοριστικό ρόλο έχουν οι παράγοντες $h^2$ και $h^4$. Αν το $h$ είναι μικρότερο της μονάδας, τότε το $h^4$ θα είναι αισθητά μικρότερο του $h^2$. Από την άλλη, αν το $h$ ισούται με 1, δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των $h^2$ και $h^4$. Αν το $h$ είναι μεγαλύτερο του 1, το $h^4$ μπορεί να είναι αισθητά μεγαλύτερο του $h^2$. Στις τελευταίες δύο περιπτώσεις, οι τύποι σφάλματος δεν μας είναι και πολύ χρήσιμοι. Θα πρέπει τότε να μελετήσουμε τη γεωμετρία της καμπύλης $y=f(x)$ για να δούμε αν είναι τα τραπέζια ή τα παραβολικά τόξα (ή και κανένα από τα δύο), που προσεγγίζουν ικανοποιητικά το ολοκλήρωμα.

**Παράδειγμα 6** Σύγκριση μεταξύ του κανόνα του τραπεζίου και του κανόνα του Simpson

Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, η τιμή του $\ln 2$ μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

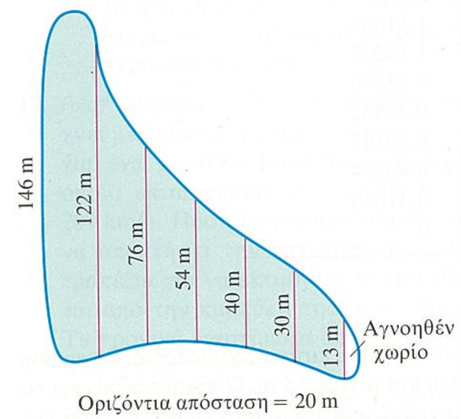
Ο Πίνακας 4.8 παραθέτει τις τιμές των προσεγγίσεων του τραπεζίου ($T$) και του Simpson ($S$) για διάφορες προσεγγίσεις του ολοκληρώματος $\int_1^2 (1/x)\,dx$ με διαδοχικά αυξανόμενες τιμές του $n$. Αξίζει να προσεχθεί πόσο ακριβέστερο αποτέλεσμα δίδει ο κανόνας του Simpson σε σχέση με τον κανόνα του τραπεζίου. Ειδικότερα, παρατηρήστε πώς διπλασιάζοντας το $n$ (οπότε υποδιπλασιάζεται το $h$), το σφάλμα του $T$ διαιρείται με το *τετράγωνο* του 2, ενώ το σφάλμα του $S$ διαιρείται με το 2 *εις την τετάρτη*.

**Πίνακας 4.8** Προσεγγίσεις του $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$ μέσω του κανόνα του τραπεζίου ($T_n$) και του κανόνα του Simpson ($S_n$).

| $n$ | $T_n$ | \|Σφάλμα\| μικρότερο από ... | $S_n$ | \|Σφάλμα\| μικρότερο από ... |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,6937714032 | 0,0006242227 | 0,6931502307 | 0,0000030502 |
| 20 | 0,6933033818 | 0,0001562013 | 0,6931473747 | 0,0000001942 |
| 30 | 0,6932166154 | 0,0000694349 | 0,6931472190 | 0,0000000385 |
| 40 | 0,6931862400 | 0,0000390595 | 0,6931471927 | 0,0000000122 |
| 50 | 0,6931721793 | 0,0000249988 | 0,6931471856 | 0,0000000050 |
| 100 | 0,6931534305 | 0,0000062500 | 0,6931471809 | 0,0000000004 |



Τα αποτελέσματα είναι εντυπωσιακά καθώς το $h$ γίνεται πολύ μικρό. Η προσέγγιση κατά Simpson για $n=50$ είναι ακριβής μέχρι το έβδομο δεκαδικό ψηφίο, ενώ για $n=100$ η ακρίβεια φθάνει το ένατο ψηφίο (ακρίβεια δισεκατομμυριοστού)!




**Σχημα 4.29** Το έλος του Παραδείγματος 7.

**Παράδειγμα 7** Αποξήρανση έλους

Οι αρχές μιας πόλης προτίθενται να αποξηράνουν και να μπαζώσουν ένα μικρό μολυσμένο έλος (Σχήμα 4.29). Το μέσο βάθος του έλους είναι 5 m. Περίπου πόσα κυβικά μέτρα χώματος θα απαιτηθούν για να μπαζωθεί η περιοχή μετά την αποξήρανση;

*Λύση* Προκειμένου να υπολογίσουμε τον όγκο του έλους, κάνουμε μια εκτίμηση του εμβαδού της επιφάνειάς του το οποίο και πολλαπλασιάζουμε με το 5. Για την εκτίμηση του εμβαδού εφαρμόζουμε τον κανόνα του Simpson με $h=20$ m και $y$ ίσα με τις αποστάσεις από τη μια όχθη του έλους ώς την αντίπερα όχθη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.29.

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right) \\ &= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8100 \end{aligned}$$

Ο όγκος ισούται περίπου με $(8100)(5) = 40.500\ \text{m}^3$.

### Σφάλματα στρογγυλοποίησης

Παρά το ότι η μείωση του βήματος $h$ μειώνει θεωρητικά το σφάλμα στους κανόνες Simpson και τραπεζίου, στην πράξη τα πράγματα μπορεί να μην είναι έτσι. Για πολύ μικρό $h$, π.χ. $h=10^{-5}$, το σφάλμα στρογγυλοποίησης του υπολογιστή σας κατά τον υπολογισμό των $S$ και $T$ μπορεί να συσσωρευθεί σε τέτοιο βαθμό, ώστε οι τύποι σφάλματος να μην έχουν πλέον καμία σχέση με αυτό που πραγματικά συμβαίνει. Έτσι, αν το $h$ γίνει μικρότερο κάποιας οριακής τιμής, το σφάλμα αρχίζει να μεγαλώνει. Στο παρόν σύγγραμμα δεν θα μας απασχολήσουν τέτοια ζητήματα· αν, ωστόσο, παρουσιάζονται στους υπολογισμούς σας προβλήματα στρογγυλοποιήσεων τέτοιου είδους, καλό θα ήταν να συμβουλευτείτε κάποιο κατάλληλο βιβλίο αριθμητικής ανάλυσης για εναλλακτικές μεθόδους υπολογισμού.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.7

CD-ROM Δικτυότοπος

### Εκτίμηση ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 1-10 καλείστε να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα με δύο τρόπους, με τον κανόνα του τραπεζίου και με τον κανόνα του Simpson.

**I.** *Με τον κανόνα του τραπεζίου*

(α) Βρείτε μια κατ' εκτίμηση τιμή του ολοκληρώματος με $n=4$ βήματα, ενώ από την Εξίσωση (1) βρείτε ένα άνω φράγμα του $|E_T|$.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα με απευθείας υπολογισμό και βρείτε το $|E_T|$.

(γ) Χρησιμοποιήστε τον τύπο ($|E_T|$/(ακριβής τιμή)) × 100 για να εκφράσετε το $|E_T|$ ως ποσοστό επί της ακριβούς τιμής του ολοκληρώματος.

**II.** *Με τον κανόνα του Simpson*

(α) Βρείτε μια κατ' εκτίμηση τιμή του ολοκληρώματος με $n=4$ βήματα, ενώ από την Εξίσωση (3) βρείτε ένα άνω φράγμα του $|E_S|$.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα με απευθείας υπολογισμό και βρείτε το $|E_S|$.

(γ) Χρησιμοποιήστε τον τύπο ($|E_S|$/(ακριβής τιμή)) × 100 για να εκφράσετε το $|E_S|$ ως ποσοστό επί της ακριβούς τιμής του ολοκληρώματος.

**1.** $\int_1^2 x\,dx$

**2.** $\int_1^3 (2x-1)\,dx$

**3.** $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$

**4.** $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,dx$

5. $\int_0^2 (t^3 + t)\, dt$

6. $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\, dt$

7. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds$

8. $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\, ds$

9. $\int_0^{\pi} \sin t\, dt$

10. $\int_0^1 \sin \pi t\, dt$

Στις Ασκήσεις 11-14, χρησιμοποιήστε τις αναγραφόμενες στους πίνακες τιμές της ολοκληρωτέας συνάρτησης για να εκτιμήσετε το ολοκλήρωμα με **(α)** τον κανόνα του τραπεζίου και **(β)** τον κανόνα του Simpson με $n = 8$ βήματα. Στρογγυλοποιήστε τις απαντήσεις σας σε πέντε δεκαδικά ψηφία. Κατόπιν **(γ)** βρείτε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος καθώς και το προσεγγιστικό σφάλμα $E_T$ ή $E_S$, αντιστοίχως.

11. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

| $x$ | $x\sqrt{1-x^2}$ |
|---|---|
| 0 | 0,0 |
| 0,125 | 0,12402 |
| 0,25 | 0,24206 |
| 0,375 | 0,34763 |
| 0,5 | 0,43301 |
| 0,625 | 0,48789 |
| 0,75 | 0,49608 |
| 0,875 | 0,42361 |
| 1,0 | 0 |

12. $\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16 + \theta^2}}\, d\theta$

| $\theta$ | $\theta/\sqrt{16+\theta^2}$ |
|---|---|
| 0 | 0,0 |
| 0,375 | 0,09334 |
| 0,75 | 0,18429 |
| 1,125 | 0,27075 |
| 1,5 | 0,35112 |
| 1,875 | 0,42443 |
| 2,25 | 0,49026 |
| 2,625 | 0,58466 |
| 3,0 | 0,6 |

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2 + \sin t)^2}\, dt$

| $t$ | $(3\cos t)/(2+\sin t)^2$ |
|---|---|
| −1,57080 | 0,0 |
| −1,17810 | 0,99138 |
| −0,78540 | 1,26906 |
| −0,39270 | 1,05961 |
| 0 | 0,75 |
| 0,39270 | 0,48821 |
| 0,78540 | 0,28946 |
| 1,17810 | 0,13429 |
| 1,57080 | 0 |

14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y)\sqrt{\cot y}\, dy$

| $y$ | $(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}$ |
|---|---|
| 0,78540 | 2,0 |
| 0,88357 | 1,51606 |
| 0,98175 | 1,18237 |
| 1,07992 | 0,93998 |
| 1,17810 | 0,75402 |
| 1,27627 | 0,60145 |
| 1,37445 | 0,46364 |
| 1,47262 | 0,31688 |
| 1,57080 | 0 |

## Εφαρμογές

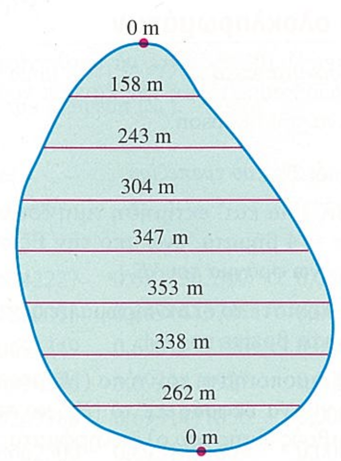
15. *Όγκος νερού σε πισίνα* Μια πισίνα σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος 9 m και μήκος 15 m. Ο πίνακας δείχνει το βάθος $h(x)$ του νερού ανά 1,5 m από τη μια πλευρά της πισίνας έως την άλλη. Εκτιμήστε τον όγκο του νερού της πισίνας εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 10$ στο ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^{15} 9 \cdot h(x)\, dx.$$

| Θέση (m) $x$ | Βάθος (m) $h(x)$ | Θέση (m) $x$ | Βάθος (m) $h(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,8 | 9 | 3,5 |
| 1,5 | 2,5 | 10,5 | 3,6 |
| 3 | 2,8 | 12 | 3,7 |
| 4,5 | 3,0 | 13,5 | 3,9 |
| 6 | 3,2 | 15 | 4,0 |
| 7,5 | 3,4 | | |

16. *Εφοδιασμός λίμνης με ψάρια* Είστε δημοτικός θηροφύλακας και σας έχει ανατεθεί ο εφοδιασμός της μικρής δημοτικής λίμνης με ψάρια προτού αρχίσει η περίοδος που επιτρέπεται το ψάρεμα. Το μέσο βάθος της λίμνης είναι 6 m. Με τη βοήθεια ενός χάρτη, μετράτε αποστάσεις από τη μια όχθη της λίμνης σώς την άλλη ανά 60 m, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.

**(α)** Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του τραπεζίου για να εκτιμήσετε τον όγκο της λίμνης.



Κατακόρυφη απόσταση =60 m



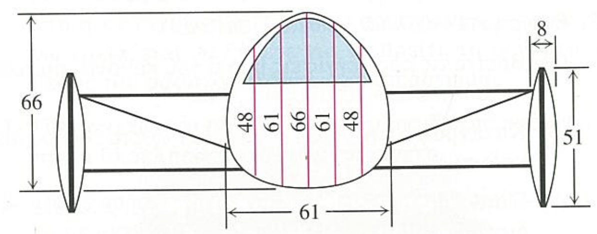
**(β)** Προγραμματίζετε να υπάρχει στην αρχή της αλιευτικής περιόδου 1 ψάρι ανά 25 κυβικά μέτρα νερού. Πρόθεσή σας είναι να έχει απομείνει τουλάχιστον το 25% του αρχικού πληθυσμού στο τέλος της περιόδου. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός αδειών ψαρέματος που μπορεί να εκδώσει η δημοτική αρχή αν γνωρίζετε ότι ο τυπικός ερασιτέχνης ψαράς πιάνει 20 ψάρια κατά μέσον όρο κατά την περίοδο ψαρέματος;

17. *Ford® Mustang Cobra™* Ο παρατιθέμενος πίνακας δείχνει μετρήσεις της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για ένα μοντέλο Ford Mustang Cobra του 1994 το οποίο επιταχύνεται από ηρεμία σε τελική ταχύτητα 209 km/h. Πόση απόσταση διένυσε το Mustang μέχρι να αποκτήσει την ταχύτητα αυτή; (Χρησιμοποιήστε τραπέζια για να εκτιμήστε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη της ταχύτητας, αλλά προσέξτε: Τα χρονικά διαστήματα δεν ισαπέχουν.)

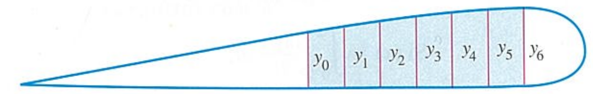
| Μεταβολή ταχύτητας | Χρόνος (sec) |
|---|---|
| Μηδέν έως 48 km/h | 2,2 |
| 64 km/h | 3,2 |
| 80 km/h | 4,5 |
| 97 km/h | 5,9 |
| 113 km/h | 7,8 |
| 129 km/h | 10,2 |
| 145 km/h | 12,7 |
| 161 km/h | 16,0 |
| 177 km/h | 20,6 |
| 193 km/h | 26,2 |
| 209 km/h | 37,1 |

*Πηγή: Περιοδικό Car and Driver,* April 1994.

18. *Οπισθέλκουσα* Η οπισθέλκουσα ενός οχήματος καθορίζεται από το εμβαδόν διατομής του, με συνέπεια οι μηχανικοί να προσπαθούν πάντοτε να ελαχιστοποιήσουν το εμβαδόν αυτό. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του Simpson για να εκτιμήσετε από το διάγραμμα το εμβαδόν διατομής της ατράκτου του ηλιακού αυτοκινήτου Solectria® του James Worden του MIT (οι διαστάσεις είναι σε cm).




19. *Σχεδίαση φτερών* Η σχεδίαση ενός νέου αεροσκάφους προβλέπει μια δεξαμενή καυσίμων σταθερού εμβαδού διατομής σε κάθε φτερό. Φαίνεται ένα σκαρίφημα (σε κλίμακα) του φτερού. Η δεξαμενή πρέπει να έχει χωρητικότητα 2300 kg καυσίμου πυκνότητας 700 kg/m$^3$. Εκτιμήστε το μήκος της δεξαμενής.




$y_0 = 0{,}46$ m $y_1 = 0{,}49$ m $y_2 = 0{,}55$ m $y_3 = 0{,}58$ m
$y_4 = 0{,}61$ m $y_5 = y_6 = 0{,}64$ m Οριζόντια απόσταση $= 0{,}3$ m

20. *Κατανάλωση καυσίμου* Μια ντιζελομηχανή δουλεύει διαρκώς, καταναλώνοντας καύσιμο με σταδιακά μειωνόμενο ρυθμό μέχρι που πρέπει να τεθεί προσωρινά εκτός λειτουργίας για να αντικατασταθούν τα φίλτρα της.

Εφαρμόστε τον κανόνα του τραπεζίου για να εκτιμήσετε την ποσότητα καυσίμου που καταναλώθηκε από τη γεννήτρια στη διάρκεια μιας εβδομάδας.

| Ημέρα | Ρυθμός κατανάλωσης πετρελαίου (λίτρα/ώρα) |
|---|---|
| Κυρ | 0,019 |
| Δευ | 0,020 |
| Τρί | 0,021 |
| Τετ | 0,023 |
| Πέμ | 0,025 |
| Παρ | 0,028 |
| Σάβ | 0,031 |
| Κυρ | 0,035 |

## Θεωρία και παραδείγματα

21. *Πολυώνυμα μικρού βαθμού* Το μέγεθος του σφάλματος στην τραπεζοειδή προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\, dx$ είναι

CD-ROM Δικτυότοπος

$$|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(c)|,$$

όπου $c$ είναι κάποιο σημείο (συνήθως απροσδιόριστο) στο $(a, b)$. Αν η $f$ είναι γραμμική συνάρτηση του $x$, τότε $f''(c) = 0$, άρα $E_T = 0$ και η $T$ είναι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος για τυχούσα τιμή του $h$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, εφόσον αν η $f$ είναι γραμμική, τα ευθύγραμμα τμήματα που προσεγγίζουν το γράφημά της συμπίπτουν ακριβώς με αυτό. Εκείνο που όντως εκπλήσσει αφορά τον κανόνα του Simpson. Το μέγεθος του σφάλματος στον κανόνα του Simpson ισούται με

$$|E_S| = \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(c)|,$$

όπου και πάλι το $c$ ανήκει στο $(a, b)$. Αν η $f$ είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του 4, τότε $f^{(4)} = 0$ ανεξαρτήτως της τιμής του $c$, οπότε $E_S = 0$ και η $S$ είναι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος, ακόμη κι αν θεωρήσουμε δύο μόνο βήματα. Για παράδειγμα, εφαρμόστε τον κανόνα του Simpson με $n = 2$ για να εκτιμήσετε την τιμή του

$$\int_0^2 x^3\,dx.$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος.

**22.** *Εύχρηστες τιμές της συνάρτησης ημιτονικού ολοκληρώματος* Η **συνάρτηση ημιτονικού ολοκληρώματος,**

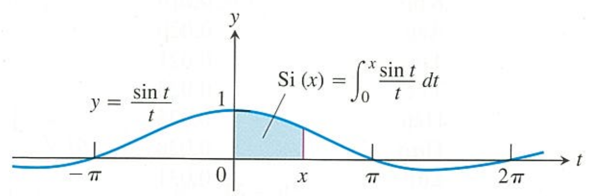
$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

είναι μία από τις πολλές συναρτήσεις που συναντάμε σε εφαρμογές και των οποίων ο τύπος δεν μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω. Δεν υπάρχει δηλαδή στοιχειώδης τύπος για την αντιπαράγωγο του $(\sin t)/t$. Οι τιμές της $\mathrm{Si}\,(x)$, ωστόσο, μπορούν να εκτιμηθούν άμεσα με αριθμητική ολοκλήρωση.

Παρόλο που δεν είναι και τόσο εμφανές, η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

δηλαδή η συνεχής επέκταση της $(\sin t)/t$ στο διάστημα $[0, x]$. Η συνάρτηση έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Η γραφική της παράσταση είναι λεία, και έτσι αναμένουμε να αποδίδει ικανοποιητικά ο κανόνας του Simpson.




(α) Κάνοντας χρήση του ότι $|f^{(4)}| \leq 1$ στο $[0, \pi/2]$, βρείτε ένα άνω φράγμα του σφάλματος που προκύπτει όταν το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

εκτιμηθεί με τον κανόνα του Simpson για $n = 4$.

(β) Εκτιμήστε το $\mathrm{Si}\,(\pi/2)$ με τον κανόνα του Simpson για $n = 4$.

(γ) Εκφράστε το φράγμα του σφάλματος που βρήκατε στο (α) ως ποσοστό επί της τιμής που βρήκατε στο (β).

CD-ROM Δικτυότοπος

**23.** *Η συνάρτηση σφάλματος* Η **συνάρτηση σφάλματος,**

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

που βρίσκει πολλές εφαρμογές στη θεωρία πιθανοτήτων καθώς και στις θεωρίες ροής θερμότητας και μετάδοσης σήματος, πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά εφόσον δεν υπάρχει στοιχειώδης μαθηματική έκφραση για την αντιπαράγωγο της $e^{-t^2}$.

(α) Εφαρμόστε τον κανόνα του Simpson για $n = 10$ προκειμένου να εκτιμήσετε την $\mathrm{erf}\,(1)$.

(β) Στο διάστημα $[0, 1]$ είναι

$$\left|\frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right)\right| \leq 12.$$

Δώστε ένα άνω φράγμα του σφάλματος στην εκτίμηση που κάνατε στο (α).

**24.** *Μάθετε γράφοντας* Προτού κάνουμε τη στρογγυλοποίηση στο Παράδειγμα 2, βρήκαμε ότι η μέση θερμοκρασία ήταν 18,42 βαθμοί όταν προσεγγίσαμε το ολοκλήρωμα, ωστόσο ο μέσος όρος των 13 θερμοκρασιών του πίνακα είναι μόνο 18,15 βαθμοί. Δεδομένου του σχήματος της καμπύλης θερμοκρασιών, εξηγήστε γιατί είναι αναμενόμενο να υπολείπεται ο μέσος όρος των 13 διάκριτων θερμοκρασιακών τιμών σε σχέση με τη μέση τιμή της συνάρτησης της θερμοκρασίας στο πλήρες διάστημα.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Όπως αναφέρθηκε στον αρχή της ενότητας, τα ορισμένα ολοκληρώματα πολλών συνεχών συναρτήσεων δεν μπορούν να υπολογιστούν μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού διότι οι αντιπαράγωγοί τους δεν μπορούν να εκφραστούν με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Η αριθμητική ολοκλήρωση αποτελεί έναν πρακτικό τρόπο για να εκτιμήσουμε τις τιμές αυτών των *μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων*. Αν ο υπολογιστής σας διαθέτει ρουτίνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, τότε προσπαθήστε να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 25-28.

**25.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx$ Η ακριβής τιμή ισούται με $\pi$.

**26.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ Πρόκειται για ολοκλήρωμα που ανέκυψε κατά τις μελέτες του Νεύτωνα

**27.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$

**28.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\,(x^2)\,dx$ Σχετίζεται με την περίθλαση του φωτός.

**29.** Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

(α) Βρείτε τις προσεγγίσεις βάσει του κανόνα του τραπεζίου για $n = 10$, 100, και 1000.

(β) Καταγράψτε τα σφάλματα με όσα περισσότερα δεκαδικά ψηφία μπορείτε.

(γ) Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε πώς μπορεί να ερμηνευθεί η συμπεριφορά αυτή μέσω του φράγματος του σφάλματος $E_T$.

**30.** *(Συνέχεια της Άσκησης 29)* Επαναλάβετε την Άσκηση 29 χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Simpson και το αντίστοιχο $E_S$.

**31.** Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} \sin\,(x^2)\,dx$.

(α) Βρείτε την $f''$ για $f(x) = \sin\,(x^2)$.

(β) Παραστήστε γραφικά την $y = f''(x)$ στην περιοχή $[-1, 1]$ επί $[-3, 3]$.

(γ) Εξηγήστε γιατί η γραφική σας παράσταση στο (β) υποδεικνύει ότι $|f''(x)| \leq 3$ για $-1 \leq x \leq 1$.

(δ) Δείξτε ότι το σφάλμα στον κανόνα του τραπεζίου εκτιμάται εδώ ως

$$|E_T| \leq \frac{h^2}{2}.$$

(ε) Δείξτε ότι το σφάλμα στον κανόνα του τραπεζίου θα είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο (κατ' απόλυτη τιμή) με 0,01 αν $h \leq 0{,}1$.

(στ) Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το $n$ για $h \leq 0{,}1$;

**32.** Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} \sin\,(x^2)\,dx$.

(α) Βρείτε το $f^{(4)}$ για $f(x) = \sin\,(x^2)$. (Αν έχετε πρόσβαση σε πρόγραμμα υπολογιστικής άλγεβρας μπορείτε να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.)

(β) Παραστήστε γραφικά την $y = f^{(4)}(x)$ στην περιοχή $[-1, 1]$ επί $[-30, 10]$.

(γ) Εξηγήστε γιατί η γραφική σας παράσταση στο (β) υποδεικνύει ότι $|f^{(4)}(x)| \leq 30$ για $-1 \leq x \leq 1$.

(δ) Δείξτε ότι το σφάλμα στον κανόνα του Simpson εκτιμάται εδώ ως

$$|E_S| \leq \frac{h^4}{3}.$$

(ε) Δείξτε ότι το σφάλμα στον κανόνα του Simpson θα είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο (κατ' απόλυτη τιμή) με 0,01 αν $h \leq 0{,}4$.

(στ) Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το $n$ για $h \leq 0{,}4$;



## Επαναληπτικές ερωτήσεις

**1.** Μπορεί μια συνάρτηση να διαθέτει περισσότερες από μία αντιπαραγώγους; Αν ναι, πώς συνδέονται μεταξύ τους οι αντιπαράγωγοι αυτές; Εξηγήστε.

**2.** Τι είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα; Πώς υπολογίζεται; Ποιους γενικούς τύπους υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων γνωρίζετε;

**3.** Πώς μπορούμε να λύνουμε μερικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής $dy/dx = f(x)$;

**4.** Εξηγήστε τι είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και πώς επιλύεται. Δώστε ένα παράδειγμα.

**5.** Πώς μπορούμε κάνοντας χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων να μετασχηματίζουμε ένα άγνωστο ολοκλήρωμα σε ένα άλλο του οποίου τον υπολογισμό είμαστε σε θέση να κάνουμε;

**6.** Αν για σώμα που κινείται ευθύγραμμα σας είναι γνωστή η επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου, τι παραπάνω χρειάζεται να ξέρετε για να βρείτε τη συνάρτηση θέσης του σώματος; Δώστε ένα παράδειγμα.

**7.** Πώς σχετίζεται με τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης η ολοκλήρωση με αντικατάσταση;

**8.** Πώς μπορούμε να υπολογίζουμε αόριστα ολοκληρώματα με αντικατάσταση; Δώστε παραδείγματα.

**9.** Πώς προσεγγίζουμε ποσότητες όπως διανυθείσα απόσταση, εμβαδόν, όγκος και μέση τιμή με πεπερασμένα αθροίσματα; Γιατί μας ενδιαφέρει να κάνουμε κάτι τέτοιο;

**10.** Τι είναι ο συμβολισμός σίγμα; Ποια τα πλεονεκτήματα της χρήσης του; Δώστε παραδείγματα.

**11.** Τι είναι ένα άθροισμα Riemann; Γιατί μας ενδιαφέρει;

**12.** Τι καλούμε λεπτότητα μιας διαμέρισης σε ένα κλειστό διάστημα;

**13.** Τι είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως $f$ σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$; Πότε είμαστε βέβαιοι για την ύπαρξή του;

**14.** Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ ορισμένων ολοκληρωμάτων και εμβαδού; Περιγράψτε μερικές άλλες ερμηνείες των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

**15.** Τι είναι η μέση τιμή ολοκληρώσιμης συναρτήσεως σε κλειστό διάστημα; Υποχρεούται η συνάρτηση να αποκτήσει κάποτε τη μέση τιμή της; Εξηγήστε.

**16.** Τι σχέση έχει η μέση τιμή μιας συναρτήσεως με μια δειγματοληψία τιμών της;

**17.** Περιγράψτε τους κανόνες που ισχύουν για τα ορισμένα ολοκληρώματα (Πίνακας 4.5). Δώστε παραδείγματα.

**18.** Τι είναι το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού; Γιατί έχει τόση σημασία; Επεξηγήστε τα δύο μέρη του θεωρήματος με κατάλληλα παραδείγματα.

**19.** Πώς χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα για να βρούμε λύσεις σε προβλήματα αρχικών τιμών του είδους $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, όταν η $f$ είναι συνεχής;

**20.** Πώς υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα με αντικατάσταση; Δώστε παραδείγματα.

**21.** Πώς ορίζουμε και πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων δυο συνεχών συναρτήσεων; Δώστε ένα παράδειγμα.

**22.** Έστω ότι συνεργάζεστε με συμφοιτητές σας για να γράψετε έναν οδηγό αριθμητικής ολοκλήρωσης, και σας έχει ανατεθεί να περιγράψετε τον κανόνα του τραπεζίου.

(α) Πώς θα περιγράφατε τον ίδιο τον κανόνα, τη χρήση του, και τη διαδικασία επίτευξης ικανοποιητικής ακρίβειας;

(β) Το ίδιο ερώτημα για τον κανόνα του Simpson.

**23.** Κάντε μια σύγκριση (πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα) των κανόνων του τραπεζίου και του Simpson.

## Ασκήσεις κεφαλαίου

### Υπολογισμός αόριστων ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 1-20.

1. $\int (x^3 + 5x - 7)\,dx$

2. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t\right) dt$

3. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$

4. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4}\right) dt$

5. $\int \frac{r\,dr}{(r^2 + 5)^2}$

6. $\int \frac{6r^2\,dr}{(r^3 - \sqrt{2})^3}$

7. $\int 3\theta\sqrt{2 - \theta^2}\,d\theta$

8. $\int \frac{\theta^2}{9\sqrt{73 + \theta^3}}\,d\theta$

9. $\int x^3 (1 + x^4)^{-1/4}\,dx$

10. $\int (2 - x)^{3/5}\,dx$

11. $\int \sec^2 \frac{s}{10}\,ds$

12. $\int \csc^2 \pi s\,ds$

13. $\int \csc \sqrt{2}\theta \cot \sqrt{2}\theta\,d\theta$

14. $\int \sec \frac{\theta}{3} \tan \frac{\theta}{3}\,d\theta$

15. $\int \sin^2 \frac{x}{4}\,dx$

16. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

17. $\int 2(\cos x)^{-1/2} \sin x\,dx$

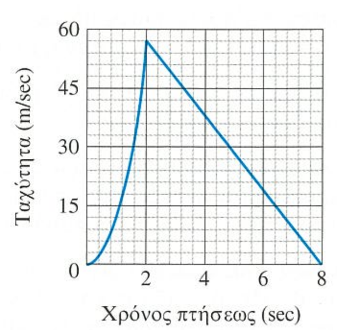
18. $\int (\tan x)^{-3/2} \sec^2 x\,dx$

19. $\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$

20. $\int \frac{(t + 1)^2 - 1}{t^4}\,dt$

### Πεπερασμένα αθροίσματα και εκτιμήσεις

21. *Πτήση πρότυπου πυραύλου* Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας (m/sec) ενός πρότυπου πυραύλου κατά τα πρώτα 8 sec της πτήσης μετά την εκτόξευση. Ο πύραυλος επιτάχυνε κατακόρυφα τα πρώτα 2 sec και κατόπιν συνέχισε να κινείται λόγω αδράνειας μέχρι να φθάσει στο μέγιστο ύψος τη χρονική στιγμή $t = 8$ sec.



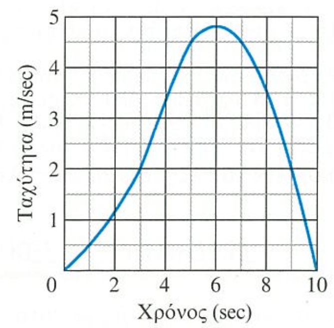

(α) Υποθέτοντας ότι ο πύραυλος εκτοξεύτηκε από την επιφάνεια του εδάφους, σε πόσο περίπου ύψος έφτασε; (Πρόκειται για τον πύραυλο της Ενότητας 2.2, Άσκηση 15, αλλά δεν χρειάζεται να λύσετε την Άσκηση 15 προτού καταπιαστείτε με την παρούσα άσκηση.)

(β) Σχεδιάστε πρόχειρα το ύψος του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου για $0 \le t \le 8$.

22. *Ανάλυση ευθύγραμμης κίνησης*

(α) Στο παρατιθέμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας (m/sec) σώματος που κινείται στον άξονα $s$ από $t = 0$ έως $t = 10$ sec. Περίπου πόση απόσταση διένυσε κατά το διάστημα αυτό των 10 sec;

(β) Σχεδιάστε πρόχειρα τη θέση $s$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου $t$ για $0 \le t \le 10$ αν $s(0) = 0$.




### Ορισμένα ολοκληρώματα

Στις Ασκήσεις 23-26, εκφράστε κάθε όριο ως ορισμένο ολοκλήρωμα. Κατόπιν υπολογίστε το ολοκλήρωμα βρίσκοντας έτσι την τιμή του ορίου. Σε κάθε περίπτωση, $P$ είναι μια διαμέριση του αναγραφόμενου διαστήματος ενώ οι αριθμοί $c_k$ ανήκουν στα υποδιαστήματα της διαμέρισης $P$.

23. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2}\,\Delta x_k$, όπου $P$ μια διαμέριση του $[1, 5]$

24. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k(c_k^2 - 1)^{1/3}\,\Delta x_k$, όπου $P$ μια διαμέριση του $[1, 3]$

25. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right) \Delta x_k$, όπου $P$ μια διαμέριση του $[-\pi, 0]$

26. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sin c_k)(\cos c_k)\,\Delta x_k$, όπου $P$ μια διαμέριση του $[0, \pi/2]$

### Χρήση των κανόνων για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων από ήδη γνωστά μας ολοκληρώματα

27. Αν $\int_{-2}^{2} 3f(x)\,dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 6$, και $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$, υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα.

(α) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

(β) $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

(γ) $\int_{5}^{-2} g(x)\,dx$

(δ) $\int_{-2}^{5} (-\pi g(x))\,dx$

(ε) $\int_{-2}^{5} \left(\frac{f(x) + g(x)}{5}\right) dx$

28. Αν $\int_0^2 f(x)\,dx = \pi$, $\int_0^2 7g(x)\,dx = 7$, και $\int_0^1 g(x)\,dx = 2$, υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα.

(α) $\int_0^2 g(x)\,dx$

(β) $\int_1^2 g(x)\,dx$

(γ) $\int_2^0 f(x)\,dx$

(δ) $\int_0^2 \sqrt{2} f(x)\,dx$



(ε) $\int_0^2 (g(x) - 3f(x))\,dx$

### Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 29-52.

29. $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$

30. $\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)\,ds$

31. $\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,dv$

32. $\int_1^{27} x^{-4/3}\,dx$

33. $\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$

34. $\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{u})^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

35. $\int_0^1 \frac{36\,dx}{(2x + 1)^3}$

36. $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$

37. $\int_{1/8}^{1} x^{-1/3} (1 - x^{2/3})^{3/2}\,dx$

38. $\int_0^{1/2} x^3(1 + 9x^4)^{-3/2}\,dx$

39. $\int_0^{\pi} \sin^2 5r\,dr$

40. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

41. $\int_0^{\pi/3} \sec^2\theta\,d\theta$

42. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 x\,dx$

43. $\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2 \frac{x}{6}\,dx$

44. $\int_0^{\pi} \tan^2 \frac{\theta}{3}\,d\theta$

45. $\int_{-\pi/3}^{0} \sec x \tan x\,dx$

46. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc z \cot z\,dz$

47. $\int_0^{\pi/2} 5(\sin x)^{3/2} \cos x\,dx$

48. $\int_{-1}^{1} 2x \sin (1 - x^2)\,dx$

49. $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x \cos x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}}\,dx$

50. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1 + 7 \tan x)^{2/3}}\,dx$

51. $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2 \sec \theta}}\,d\theta$

52. $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t} \sin \sqrt{t}}\,dt$

### Εμβαδόν

Στις Ασκήσεις 53-56, βρείτε το συνολικό εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ και τον άξονα $x$.

53. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 0 \le x \le 3$

54. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \le x \le 3$

55. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 8$

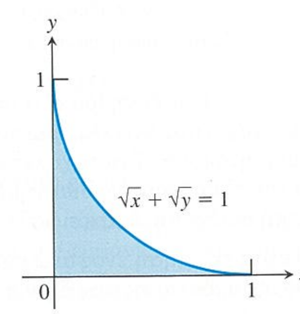
56. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

Στις Ασκήσεις 57-64, βρείτε τα εμβαδά των χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες και τις ευθείες που δίδονται.

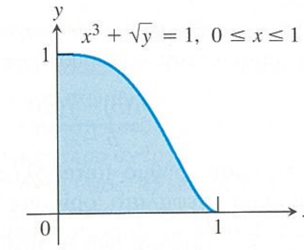
57. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

58. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$

59. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$




60. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0,$ για $0 \le x \le 1$




61. $y = \sin x, \quad y = x, \quad 0 \le x \le \pi/4$

62. $y = |\sin x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

63. $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \pi$

64. $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

65. Βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x^3 - 3x^2$ καθώς και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ και τον άξονα $x$.

66. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτει από το πρώτο τεταρτημόριο η καμπύλη $x^{1/3} + y^{1/3} = 1$.

### Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 67-70.

67. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

68. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

69. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} \cdot \quad r'(1) = 8, \quad r(1) = 0$

70. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t \cdot \quad r''(0) = r'(0) = 0, \quad r(0) = -1$

71. Δείξτε ότι η $y = x^2 + \int_1^x (1/t)\,dt$ αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}, \qquad y'(1) = 3, \qquad y(1) = 1.$$

72. Δείξτε ότι η $y = \int_0^x (1 + 2\sqrt{\sec t})\,dt$ αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x}\,\tan x \cdot \qquad y'(0) = 3, \qquad y(0) = 0.$$

Στις Ασκήσεις 73 και 74, εκφράστε τις λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών συναρτήσει ολοκληρωμάτων.

73. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x}, \qquad y(5) = -3$

74. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \sin^2 x}, \qquad y(-1) = 2$

### Μέσες τιμές

75. Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x) = mx + b$

(α) στο διάστημα $[-1, 1]$

(β) στο διάστημα $[-k, k]$.

76. Βρείτε τη μέση τιμή της

(α) $y = \sqrt{3x}$ στο διάστημα $[0, 3]$

**(β)** $y = \sqrt{ax}$ στο διάστημα $[0, a]$.

**77.** *Μάθετε γράφοντας: Μέσοι και στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής* Έστω $f$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$. Στο Κεφάλαιο 1, ορίσαμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της $f$ στο $[a, b]$ ως
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της $f$ στο $x$ ως $f'(x)$. Στο παρόν κεφάλαιο, ορίσαμε τη μέση τιμή συναρτήσεως. Για να είναι ο καινούριος ορισμός συνεπής με τον παλιό, θα πρέπει να ισχύει
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{μέση τιμή της } f' \text{ στο } [a, b].$$
Αληθεύει η ισότητα αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**78.** *Μάθετε γράφοντας: Μέση τιμή* Αληθεύει ότι η μέση τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε διάστημα μήκους 2 ισούται με το ήμισυ του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο εν λόγω διάστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## Παραγώγιση ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 79-82, βρείτε το $dy/dx$.

**79.** $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$ **80.** $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$

**81.** $y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4}\, dt$ **82.** $y = \int_{\sec x}^2 \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$

## Αριθμητική ολοκλήρωση

**83.** Με απευθείας υπολογισμό από το Παράδειγμα 3, Ενότητα 4.2, βλέπουμε ότι
$$\int_0^\pi 2\sin^2 x\, dx = \pi.$$
Πόσο καλά προσεγγίζεται η τιμή αυτή αν εφαρμόσετε τον κανόνα του τραπεζίου με $n = 6$; Το ίδιο ερώτημα για τον κανόνα του Simpson με $n = 6$.

**84.** *Απόδοση καυσίμου* Ο ενσωματωμένος σε αυτοκίνητο ηλεκτρονικός υπολογιστής εμφανίζει στο καντράν την ένδειξη της κατανάλωσης καυσίμου σε λίτρα ανά ώρα. Κατά τη διάρκεια μιας διαδρομής, ένας από τους επιβάτες κατέγραψε την κατανάλωση καυσίμου ανά 5 min για διάστημα μιας ώρας.

| Χρόνος | L/h | Χρόνος | L/h |
|---|---|---|---|
| 0 | 9,5 | 35 | 9,5 |
| 5 | 9,1 | 40 | 9,1 |
| 10 | 8,7 | 45 | 8,7 |
| 15 | 9,1 | 50 | 9,1 |
| 20 | 9,1 | 55 | 9,1 |
| 25 | 9,5 | 60 | 8,7 |
| 30 | 9,8 | | |

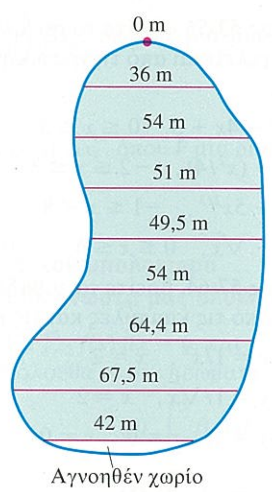
**(α)** Εφαρμόστε τον κανόνα του τραπεζίου για να υπολογίσετε προσεγγιστικά τη συνολική κατανάλωση καυσίμου κατά τη διάρκεια της ώρας.

**(β)** Αν το αυτοκίνητο διένυσε 100 km στην ώρα αυτή, τότε πόση ήταν η απόδοση του καυσίμου (σε km ανά λίτρο) για το χρονικό αυτό διάστημα;

**85.** *Μέση θερμοκρασία* Υπολογίστε τη μέση τιμή της συνάρτησης θερμοκρασίας
$$f(x) = 20{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) - 3{,}8$$
για ένα έτος 365 ημερών. Με τον τρόπο αυτόν μπορείτε να εκτιμήσετε τη μέση ετήσια θερμοκρασία αέρα στο Fairbanks της Αλάσκας. Ο αντίστοιχος υπολογισμός της Εθνικής Μετεωρολογικής Υπηρεσίας των Η.Π.Α., που έγινε παίρνοντας τον αριθμητικό μέσο των μέσων ημερήσιων θερμοκρασιών για ένα έτος, είναι –3,5 °C, αποτέλεσμα λίγο μεγαλύτερο από τη μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)$. Το Σχήμα 2.34 εξηγεί τη διαφορά αυτή.

**86.** *Ειδική θερμότητα αερίου* Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα $C_v$ ισούται με το ποσό της θερμότητας που απαιτείται για να αυξηθεί κατά 1°C η θερμοκρασία δεδομένης μάζας αερίου υπό σταθερό όγκο, και μετριέται σε μονάδες cal/deg-mol (θερμίδες ανά βαθμό ανά γραμμομόριο). Η θερμοχωρητικότητα του οξυγόνου εξαρτάται από τη θερμοκρασία $T$ και ικανοποιεί τη σχέση
$$C_v = 8{,}27 + 10^{-5}(26T - 1{,}87T^2).$$
Βρείτε τη μέση τιμή της $C_v$ για $20° \le T \le 675°$C, καθώς και τη θερμοκρασία που αυτή επιτυγχάνεται.

**87.** *Καινούριος χώρος στάθμευσης* Προκειμένου να ανταποκριθεί στις ανάγκες χώρων για στάθμευση, η δημοτική αρχή της πόλης σας έχει δεσμεύσει την περιοχή που φαίνεται στο σχήμα. Εσείς είστε μηχανικός, υπεύθυνος για το έργο, και σας έχει τεθεί το ερώτημα από το Δημοτικό Συμβούλιο αν η κατασκευή του χώρου στάθμευσης είναι εφικτή με ένα κονδύλι 11.000 €. Το κόστος καθαρισμού της περιοχής είναι 0,10 € ανά τετραγωνικό μέτρο, ενώ ο χώρος στάθμευσης θα στοιχίσει 2,00 € ανά τετραγωνικό μέτρο για να επιστρωθεί. Μπορεί λοιπόν να γίνει το έργο με 11.000 €;




**88.** *Έλκηθρο στο χιόνι* Ένα έλκηθρο στο οποίο προσδίδουμε μια αρχική ταχύτητα κινείται μέχρι που η τριβή στο χιόνι το ακινητοποιεί. Ένα ταχύμετρο καταγράφει την ταχύτητα του έλκηθρου ανά διαστήματα των 3 sec κατά τη συνολική διαδρομή, διάρκειας 27 sec.

**(α)** Δώστε μια εκτίμηση ενός άνω και ενός κάτω φράγματος της απόστασης που διήνυσε το έλκηθρο.



| Χρόνος (sec) | Ταχύτητα (m/sec) |
|---|---|
| 0 | 5,30 |
| 3 | 5,25 |
| 6 | 5,04 |
| 9 | 4,71 |
| 12 | 4,25 |
| 15 | 3,66 |
| 18 | 2,94 |
| 21 | 2,09 |
| 24 | 1,11 |
| 27 | 0 |

**(β)** Εφαρμόστε τον κανόνα του τραπεζίου για να εκτιμήσετε την απόσταση που διανύθηκε.

## Θεωρία και παραδείγματα

**89.** *Μάθετε γράφοντας* Αληθεύει ότι κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ που είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ είναι και η ίδια παράγωγος κάποιας άλλης συνάρτησης στο $[a, b]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**90.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η $F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ συναρτήσει της $F$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

**91.** *Έκφραση λύσεως υπό μορφή ορισμένου ολοκληρώματος* Εκφράστε τη συνάρτηση $y(x)$ όπου
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{και} \quad y(5) = 3$$
υπό μορφή ορισμένου ολοκληρώματος.

**92.** *Μια διαφορική εξίσωση* Δείξτε ότι η

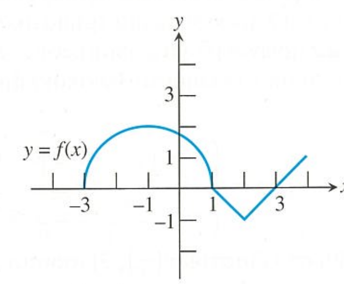
$y = \sin x + \int_x^\pi \cos 2t\, dt + 1$

ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

**i.** $y'' = -\sin x + 2\sin 2x$

**ii.** $y = 1$ και $y' = -2$ για $x = \pi$.

**93.** *Συνάρτηση που ορίζεται από ολοκλήρωμα* Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f$ απαρτίζεται από ένα ημικύκλιο και δύο ευθύγραμμα τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.




**(α)** Βρείτε την τιμή $g(1)$.

**(β)** Βρείτε την τιμή $g(3)$.

**(γ)** Βρείτε την τιμή $g(-1)$.

**(δ)** Βρείτε όλες τις τιμές του $x$ στο ανοιχτό διάστημα $(-3, 4)$ όπου η $g$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο.

**(ε)** Γράψτε μια εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται του γραφήματος της $g$ στο $x = -1$.

**(στ)** Βρείτε τη συντεταγμένη $x$ κάθε σημείου καμπής του γραφήματος της $g$ στο ανοιχτό διάστημα $(-3, 4)$.

**(ζ)** Βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης $g$.

**94.** *Αλεξιπτωτιστές* Δύο αλεξιπτωτιστές Α και Β επιβαίνουν σε ελικόπτερο που αιωρείται σε ύψος 1950 m. Ο Α πηδά και μετά από πτώση 4 sec ανοίγει το αλεξίπτωτό του. Κατόπιν το ελικόπτερο ανέρχεται στα 2150 m και αιωρείται στο νέο αυτό ύψος. 45 sec μετά την έξοδο του Α, πηδά ο Β και πέφτει επί 13 sec προτού ανοίξει το αλεξίπτωτό του. Και οι δύο αλεξιπτωτιστές κατέρχονται με ταχύτητα 4,9 m/sec, αφού ανοίξουν τα αλεξίπτωτά τους. Υποθέτουμε ότι με τα αλεξίπτωτα κλειστά και οι δύο πέφτουν ελεύθερα χωρίς τριβές (δηλαδή με επιτάχυνση $-9{,}8$ m/sec$^2$).

**(α)** Σε τι υψόμετρο άνοιξε το αλεξίπτωτό του ο Α;

**(β)** Σε τι υψόμετρο άνοιξε το αλεξίπτωτό του ο Β;

**(γ)** Ποιος από τους δύο θα προσγειωθεί πρώτος;

## Μέση ημερήσια απογραφή

Η έννοια της μέσης τιμής χρησιμοποιείται στα οικονομικά για τη μελέτη ποσοτήτων όπως η μέση ημερήσια απογραφή. Αν $I(t)$ είναι η ποσότητα των ραδιοφώνων, ελαστικών, υποδημάτων, ή οποιουδήποτε άλλου προϊόντος διαθέτει μια επιχείρηση την ημέρα $t$ (καλούμε τη $I$ **συνάρτηση απογραφής**), τότε η μέση τιμή της $I$ στο διάστημα $[0, T]$ καλείται μέση ημερήσια απογραφή της επιχείρησης για τη χρονική αυτή περίοδο.

$$\textbf{Μέση ημερήσια απογραφή} = \operatorname{av}(I) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\, dt.$$

Αν $h$ είναι το κόστος (σε ευρώ) διατήρησης ενός είδους ανά ημέρα, το γινόμενο $\operatorname{av}(I) \cdot h$ είναι το **μέσο ημερήσιο κόστος διατήρησης** για τη χρονική περίοδο που μας ενδιαφέρει.

**95.** Μια επιχείρηση χονδρικής πώλησης παραλαμβάνει ένα φορτίο 1200 κιβωτίων σοκολάτας κάθε 30 ημέρες. Η εταιρεία πουλά σε λιανοπωλητές με σταθερό ρυθμό, κι έτσι $t$ ημέρες μετά την άφιξη κάθε φορτίου, η συνάρτηση απογραφής της εταιρείας είναι $I(t) = 1200 - 40t$, $0 \le t \le 30$. Πόση είναι η μέση ημερήσια απογραφή για την περίοδο των 30 ημερών; Πόσο είναι το μέσο ημερήσιο κόστος διατήρησης, αν το κόστος διατήρησης ενός κιβωτίου είναι 3 λεπτά την ημέρα;

**96.** Μια εταιρεία παραγωγής μπισκότων, αποθηκεύει τα κιβώτια με το προϊόν σε κλιματιζόμενη αποθήκη μέχρι να αποσταλούν σε πελάτες κάθε 14 ημέρες. Η εταιρεία θέλει να έχει ανά πάσα στιγμή τουλάχιστον 600 κιβώτια διαθέσιμα προκειμένου να ανταποκριθεί σε διακυμάνσεις στη ζήτηση, συνεπώς η τυπική συνάρτηση απογραφής για την περίοδο των 14 ημερών είναι $I(t) = 600 + 600t$, $0 \le t \le 14$. Το ημερήσιο κόστος διατήρησης κάθε κιβωτίου ισούται με 4 λεπτά. Βρείτε τη μέση ημερήσια απογραφή της εταιρείας καθώς και το μέσο ημερήσιο κόστος διατήρησης.

**97.** Μια εταιρεία παραλαμβάνει ένα φορτίο 450 κιβωτίων πλαστικών μπαλών κάθε 30 ημέρες. Η συνάρτηση απογραφής (ποσότητα διαθέσιμων κιβωτίων συναρτήσει των ημερών) είναι $I(t) = 450 - t^2/2$. Βρείτε τη μέση ημερήσια απογραφή. Αν η διατήρηση ενός κιβωτίου κοστίζει στην εταιρεία 2 λεπτά την ημέρα, βρείτε το μέσο ημερήσιο κόστος διατήρησης.

**98.** Μια εταιρεία παραλαμβάνει ένα φορτίο 600 κιβωτίων αθλητικών καλτσών κάθε 60 ημέρες. Ο αριθμός των διαθέσιμων κιβωτίων $t$ ημέρες μετά την παραλαβή είναι $I(t) = 600 - 20\sqrt{15t}$. Βρείτε τη μέση ημερήσια απογραφή. Αν η διατήρηση ενός κιβωτίου κοστίζει στην εταιρεία 1/2 λεπτά την ημέρα, βρείτε το μέσο ημερήσιο κόστος διατήρησης.

# Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

## Θεωρία και παραδείγματα

**1.** **(α)** Αν $\int_0^1 7f(x)\,dx = 7$, αληθεύει ότι $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$;

**(β)** Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ και $f(x) \ge 0$, αληθεύει ότι $\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{4} = 2$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**2.** Έστω ότι $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 3$, $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$.

Ποια ή ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς;

**(α)** $\int_5^2 f(x)\,dx = -3$ **(β)** $\int_{-2}^{5} (f(x) + g(x))\,dx = 9$

**(γ)** $f(x) \le g(x)$ στο διάστημα $-2 \le x \le 5$

**3.** *Πρόβλημα αρχικών τιμών* Δείξτε ότι η

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt$$

αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ και } y = 0 \text{ όταν } x = 0.$$

(*Υπόδειξη:* $\sin(ax - at) = \sin ax \cos at - \cos ax \sin at$.)

**4.** *Αναλογία* Έστω ότι τα $x$ και $y$ συνδέονται μέσω της εξίσωσης

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\,dt.$$

Δείξτε ότι η $d^2y/dx^2$ είναι ανάλογη του $y$ και βρείτε τη σταθερά αναλογίας.

**5.** Βρείτε την τιμή $f(4)$ αν

**(α)** $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\pi x$

**(β)** $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x\cos\pi x.$

**6.** Βρείτε την τιμή $f(\pi/2)$ από τις πληροφορίες που δίδονται ακολούθως.

**i.** Η $f$ είναι θετική και συνεχής.

**ii.** Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από $x = 0$ έως $x = a$ ισούται με

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sin a + \frac{\pi}{2}\cos a.$$

**7.** Το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου $xy$ που περικλείεται από τον άξονα $x$, την καμπύλη $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, και τις ευθείες $x = 1$ και $x = b$ ισούται με $\sqrt{b^2+1} - \sqrt{2}$ για κάθε $b > 1$. Βρείτε την $f(x)$.

**8.** Δείξτε ότι

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du = \int_0^x f(u)(x-u)\,du.$$

(*Υπόδειξη:* Εκφράστε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ως τη διαφορά δύο ολοκληρωμάτων. Κατόπιν δείξτε ότι και τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουν την ίδια παράγωγο ως προς $x$.)

**9.** *Εύρεση καμπύλης* Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης του επιπέδου $xy$ που διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ αν η κλίση της στο $x$ είναι πάντοτε $3x^2 + 2$.

**10.** *Φτυαρίζοντας μπάζα* Βρισκόσαστε σε έναν λάκκο πηγαδιού και φτυαρίζετε χώμα προς τα έξω με αρχική ταχύτητα 9,8 m/sec. Για να προλάβει να περάσει το στόμιο του πηγαδιού, το χώμα θα πρέπει από τη στιγμή που εγκαταλείπει το φτυάρι να ανέλθει 5 m. Είναι αρκετή αυτή η ταχύτητα για να φύγει έξω το χώμα, ή μήπως θα πρέπει να προφυλαχθείτε για να μην προσγειωθεί στο κεφάλι σας;

## Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις

Αν και το κύριο ενδιαφέρον μας αφορά τις συνεχείς συναρτήσεις, σε πολλές εφαρμογές συναντούμε συναρτήσεις που είναι τμηματικά συνεχείς. Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **τμηματικά συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $I$ αν έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο $I$, αν τα όρια

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

υπάρχουν και είναι πεπερασμένα σε κάθε σημείο του $I$, και αν τα κατάλληλα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι πεπερασμένα σε κάθε άκρο του $I$. Όλες οι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Τα σημεία ασυνέχειας διαμερίζουν το $I$ σε ανοιχτά και ημιανοιχτά υποδιαστήματα όπου η $f$ είναι συνεχής, ενώ οι παραπάνω συνθήκες επί των ορίων μάς εγγυώνται ότι η $f$ έχει συνεχή επέκταση στη θήκη (συν. κάλυμμα, εννοεί στα άκρα) κάθε υποδιαστήματος. Για να ολοκληρώσουμε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση, ολοκληρώνουμε τις επιμέρους επεκτάσεις και αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ -1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

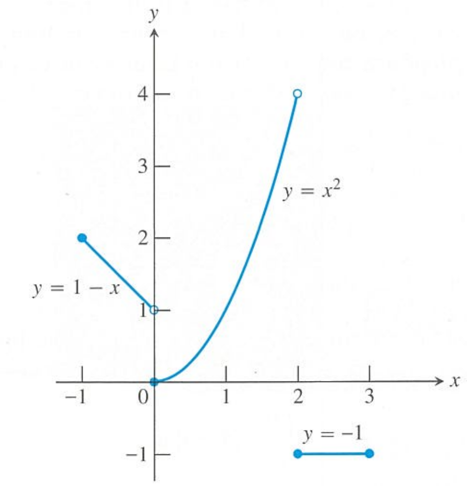
(Σχήμα 4.30) στο διάστημα $[-1, 3]$ ισούται με

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(1-x)\,dx + \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 (-1)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[-x\right]_2^3$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6}.$$






**Σχήμα 4.30** Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις όπως αυτή εδώ ολοκληρώνονται κατά τμήματα.

Το θεμελιώδες θεώρημα ισχύει για τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις με τον περιορισμό ότι η $(d/dx)\int_a^x f(t)\,dt$ αναμένεται να ισούται με $f(x)$ μόνο σε τιμές του $x$ στις οποίες η $f$ είναι συνεχής. Ένας παρόμοιος περιορισμός ισχύει για τον κανόνα του Leibniz που αναφέρουμε παρακάτω.

Παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 11-16 και ολοκληρώστε τις στα πεδία ορισμού τους.

**11.** $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \le x < 0 \\ -4, & 0 \le x \le 3 \end{cases}$

**12.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \le \end{cases}$

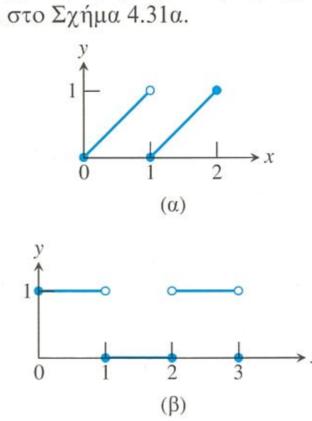
**13.** $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ \sin \pi t, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

**14.** $h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \le z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \le z \le 2 \end{cases}$

**15.** $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

**16.** $h(r) = \begin{cases} r, & -1 \le r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \le r < 1 \\ 1, & 1 \le r \le 2 \end{cases}$

**17.** Βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησης που παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 4.31α.




**Σχήμα 4.31** Γραφικές παραστάσεις για τις Ασκήσεις 17 και 18.

**18.** Βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησης που παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 4.31β.

## Κανόνας του Leibniz

Σε μερικές εφαρμογές συναντούμε συναρτήσεις όπως

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^2} (1 + t)\,dt \quad \text{και} \quad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2\,dt,$$

που ορίζονται από ολοκληρώματα που έχουν μεταβλητά άνω και κάτω όρια ολοκλήρωσης. Το πρώτο από τα παραπάνω μπορεί να υπολογιστεί απευθείας, το δεύτερο όμως όχι. Μπορούμε να βρούμε την παράγωγο και των δύο ολοκληρωμάτων, μέσω ενός τύπου που καλείται **κανόνας του Leibniz**.

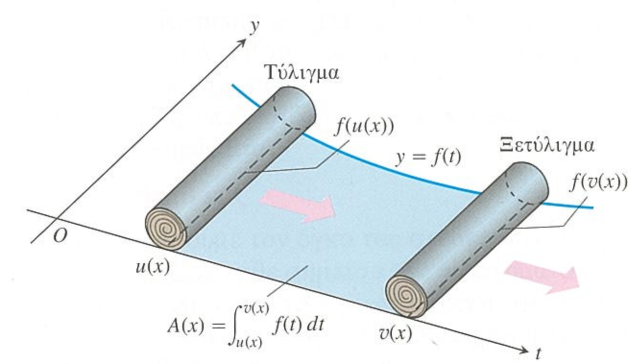
**Κανόνας του Leibniz**

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $u(x)$ και $v(x)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του $x$ στο $[a, b]$, τότε

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Στο Σχήμα 4.32 φαίνεται μια γεωμετρική ερμηνεία του κανόνα του Leibniz. Ένα χαλί μεταβλητού πλάτους $f(t)$ τυλίγεται από αριστερά την ίδια χρονική στιγμή $x$ που ξετυλίγεται από δεξιά. (Εδώ ο χρόνος συμβολίζεται με $x$, όχι με $t$.) Τη χρονική στιγμή $x$, το πάτωμα καλύπτεται από το σημείο $u(x)$ έως το $v(x)$. Ο ρυθμός τυλίγματος του χαλιού $du/dx$ δεν είναι κατ' ανάγκην ίσος με τον ρυθμό ξετυλίγματος $dv/dx$. Έτσι σε τυχούσα χρονική στιγμή $x$, το εμβαδόν της καλυπτόμενης από το χαλί επιφάνειας ισούται με

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$




**Σχήμα 4.32** Τύλιγμα και ξετύλιγμα χαλιού: μια γεωμετρική ερμηνεία του κανόνα του Leibniz:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η καλυπτόμενη από το χαλί επιφάνεια; Τη στιγμή $x$, το εμβαδόν $A(x)$ αυξάνεται κατά το γινόμενο του πλάτους $f(v(x))$ του ξετυλιγόμενου χαλιού επί τον ρυθμό ξετυλίγματος $dv/dx$. Με άλλα λόγια, το $A(x)$ αυξάνεται με ρυθμό

$$f(v(x))\,\frac{dv}{dx}.$$

Την ίδια στιγμή όμως, το $A$ μειώνεται με ρυθμό

$$f(u(x))\,\frac{du}{dx},$$

που είναι το γινόμενο του πλάτους του τυλιγόμενου χαλιού επί τον ρυθμό τυλίγματος $du/dx$. Έτσι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $A$ ισούται με

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\,\frac{dv}{dx} - f(u(x))\,\frac{du}{dx},$$

που είναι ακριβώς ο κανόνας του Leibniz.

Προκειμένου να αποδείξουμε τον κανόνα, έστω $F$ μια αντιπαράγωγος της $f$ στο $[a, b]$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής ως προς $x$ παίρνουμε την εξίσωση που θέλουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left[F(v(x)) - F(u(x))\right]\\ &= F'(v(x))\,\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\,\frac{du}{dx}\\ &= f(v(x))\,\frac{dv}{dx} - f(u(x))\,\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Αργότερα θα δούμε έναν εναλλακτικό τρόπο απόδειξης του κανόνα (Κεφάλαιο 11, Επιπρόσθετη Άσκηση 3).

Εφαρμόστε τον κανόνα του Leibniz για να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 19-21.

**19.** $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\,dt$

**20.** $f(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1 - t^2}\,dt$

**21.** $g(y) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin t^2\,dt$

**22.** Εφαρμόστε τον κανόνα του Leibniz για να βρείτε την τιμή του $x$ που μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{x}^{x+3} t(5 - t)\,dt.$$

Προβλήματα σαν κι αυτό προκύπτουν στη μαθηματική θεωρία των πολιτικών εκλογών. Ενδεικτικά δείτε το άρθρο "The Entry Problem in a Political Race" των Steven J. Brams και Philip D. Straffin Jr., στο βιβλίο *Political Equilibrium*, επιμ. Peter Ordeshook και Kenneth Shepfle (Boston: Kluwer-Nijhoff 1982), pp. 181-195.

# 5 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Πολλές από τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν μπορούν να υπολογιστούν μέσω ολοκληρωμάτων: όγκοι στερεών, μήκη καμπυλών, το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε κάποιο υγρό (π.χ. πετρέλαιο) από το υπέδαφος, οι δυνάμεις που ασκούνται σε υδατοφράκτες, οι συντεταγμένες των σημείων ισορροπίας στερεών αντικειμένων, κ.ά. Όλες αυτές τις ποσότητες τις ορίζουμε ως όρια αθροισμάτων Riemann συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα —με άλλα λόγια, ως ολοκληρώματα— και υπολογίζουμε τα όρια αυτά με τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού.

## 5.1 Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις και περιστροφή γύρω από άξονα

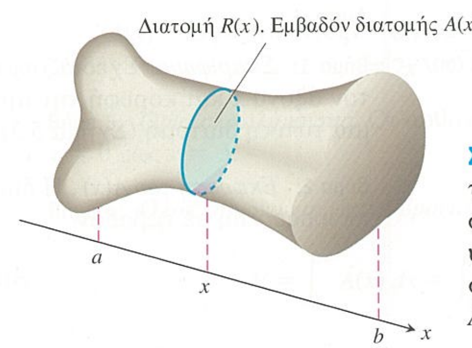
Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις • Στερεά εκ περιστροφής: Κυκλικές διατομές • Στερεά εκ περιστροφής: Δακτυλιοειδείς διατομές

Στην Ενότητα 4.3, Παράδειγμα 3, υπολογίσουμε τον όγκο σφαίρας διαμερίζοντάς την σε λεπτές «φέτες» σχεδόν κυλινδρικού σχήματος και αθροίζοντας τους όγκους των κυλίνδρων, οπότε καταλήξαμε να υπολογίζουμε ένα άθροισμα Riemann. Αν είχαμε τις τωρινές μας γνώσεις στο σημείο εκείνο, θα συνεχίζαμε εκφράζοντας τον όγκο της σφαίρας ως ένα ορισμένο ολοκλήρωμα.

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε τον όγκο μιας μεγάλης ποικιλίας στερεών, με ολοκληρώματα.

### Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις

Έστω ότι ζητούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού του Σχήματος 5.1. Η διατομή του στερεού σε κάθε σημείο $x$ του διαστήματος $[a, b]$ είναι ένα χωρίο $R(x)$ εμβαδού $A(x)$. Αν το $A$ είναι συνεχής συνάρτηση του $x$, μπορούμε να ορίσουμε τον όγκο του στερεού ως ολοκλήρωμα, που υπολογίζεται ως ακολούθως.




**Σχημα 5.1** Αν το εμβαδόν $A(x)$ της διατομής $R(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του $x$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού ολοκληρώνοντας το $A(x)$ από $a$ έως $b$.

$x^3 - 3x$ και $y = 1$ θα έχουν τα ίδια $x$ με τις ρίζες του ερωτήματος (i) ή τις λύσεις του ερωτήματος (iv).

**15.** 1,165561185

**17.** (α) Δύο
(β) 0,35003501505249 και −1,0261731615301

**19.** ±1,3065629648764, ±0,5411961001462

**21.** $x \approx 0{,}45$

**23.** Η ρίζα είναι 1,17951.

**25.** (α) Για $x_0 = -2$ ή $x_0 = -0{,}8$, $x_i \to -1$ καθώς το $i$ αυξάνεται.
(β) Για $x_0 = -0{,}5$ ή $x_0 = 0{,}25$, $x_i \to 0$ καθώς το $i$ αυξάνεται.
(γ) Για $x_0 = 0{,}8$ ή $x_0 = 2$, $x_i \to 1$ καθώς το $i$ αυξάνεται.
(δ) Για $x_0 = -\sqrt{21}/7$ ή $x_0 = \sqrt{21}/7$, η μέθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει. Οι τιμές του $x_i$ παλινδρομούν μεταξύ $-\sqrt{21}/7$ και $\sqrt{21}/7$ καθώς το $i$ αυξάνεται.

**27.** Οι απαντήσεις σας θα ποικίλλουν αναλόγως της ταχύτητας υπολογισμών της συσκευής σας.

**29.** 2,45, 0,000245

## Ασκήσεις Κεφαλαίου 3, σελ. 297-301

**1.** Ολική ελάχιστη τιμή ίση με $\frac{1}{2}$ για $x = 2$

**3.** (α) $[-3, -2]$ και $[1, 2]$ (β) $[-2, 1]$
(γ) Τοπικά μέγιστα για $x = -2$ και $x = 2$· τοπικά ελάχιστα για $x = -3$ και $x = 1$

**5.** Όχι

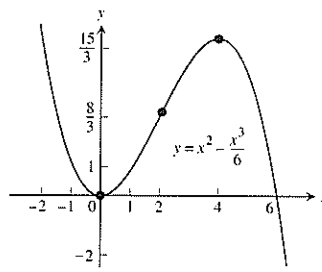
**7.** Δεν υπάρχει ελάχιστο. Ολικό μέγιστο: $f(1) = 16$, κρίσιμα σημεία: $x = 1$ και $\frac{11}{3}$

**11.** Όχι

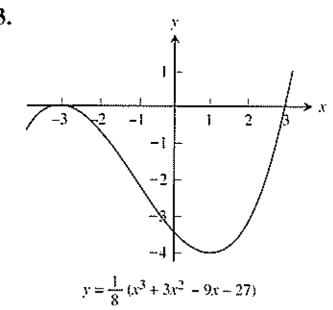
**13.** (β) Μία

**15.** (β) 0,8555996772

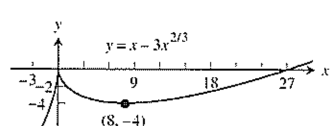
**21.**



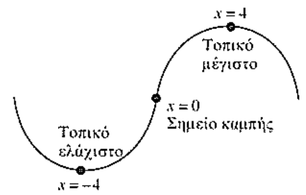

**23.**



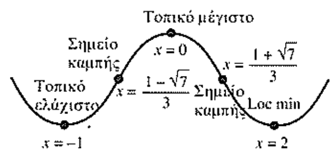

**25.**




**27.** (α) Τοπικό μέγιστο για $x = 4$, τοπικό ελάχιστο για $x = -4$, σημείο καμπής για $x = 0$
(β)




**29.** (α) Τοπικό μέγιστο για $x = 0$, τοπικά ελάχιστα για $x = -1$ και $x = 2$, σημείο καμπής για $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$
(β)




**31.** (α) $t = 0, 6, 12$ (β) $t = 3, 9$
(γ) $6 < t < 12$ (δ) $0 < t < 6$, $12 < t < 14$

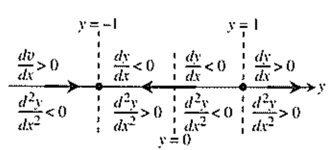
**33.** (α) $v(t) = -3t^2 - 6t + 4$ (β) $a(t) = -6t - 6$
(γ) Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση 3 κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, επιβραδυνόμενο. Τη στιγμή $t = 0{,}528$, περίπου, φτάνει στη θέση 4,128 και αλλάζει κατεύθυνση, κινούμενο πλέον προς την αρνητική κατεύθυνση. Μετά από αυτό, εξακολουθεί να επιταχύνει ενώ κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

**35.** $f(x) = -\frac{1}{4}x^{-4} - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

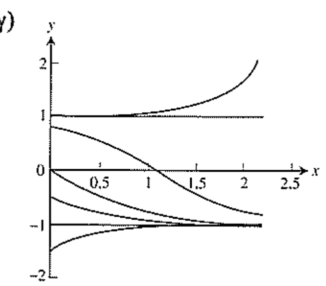
**37.** $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}x^3 + x + C$ για $x > 0$

**39.** $s(t) = 4{,}9t^2 + 5t + 10$

**41.** (α) Το $y = -1$ είναι ευσταθές και το $y = 1$ είναι ασταθές.
(β) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$




(γ)



**43.** $r = 25$ m και $s = 50$ m

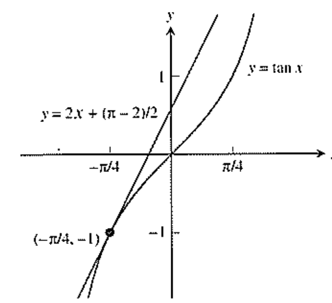
**45.** Ύψος = 2, ακτίνα = $\sqrt{2}$

**47.** $x = 5 - \sqrt{5}$ εκατοντάδες ≈ 276 ελαστικά, $y = 2(5 - \sqrt{5})$ εκατοντάδες ≈ 553 ελαστικά

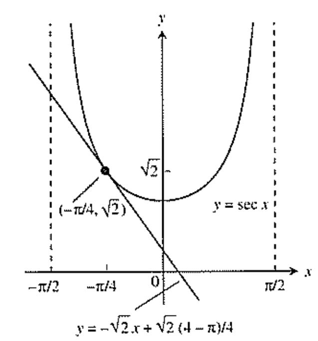
**49.** Διαστάσεις: βάση 6 cm επί 12 cm, ύψος = 2 cm· μέγιστος όγκος = 144 cm³



**51.** (α) $L(x) = 2x + \frac{\pi - 2}{2}$




(β) $L(x) = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{4}$




**53.** $L(x) = 1{,}5x + 0{,}5$ **55.** $dV = \frac{2}{3}\pi r_0 h\, dr$

**57.** (α) 4% (β) 8%
(γ) 12%

**59.** $x_5 = 2{,}195823345$ **61.** $x \approx -0{,}828361$

## Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 3, σελ. 301-303

**1.** Αν $M$ και $m$ είναι οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές, αντίστοιχα, τότε $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in I$. Αν $m = M$ τότε η $f$ είναι σταθερή στο $I$.

**3.** Τα ακρότατα δεν μπορούν να είναι τα άκρα ανοιχτού διαστήματος.

**5.** (α) Τοπικό ελάχιστο για $x = -1$, σημεία καμπής για $x = 0$ και $x = 2$
(β) Τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και τοπικά ελάχιστα για $x = -1$ και $x = 2$, σημεία καμπής για $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

**9.** Όχι. Το Πόρισμα 1 αξιώνει ότι $f'(x) = 0$ για *κάθε* $x$ σε κάποιο διάστημα $I$, όχι $f'(x) = 0$ σε μοναδικό σημείο στο $I$.

**11.** $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$

**13.** Ναι

**15.** Η τρύπα πρέπει να ανοιχτεί στο σημείο όπου $y = \frac{h}{2}$

**17.** $r = \frac{RH}{2(H - R)}$ για $H < 2R$, $r = R$ αν $H = 2R$

**21.** (α) 0,2482 m
(β) 0,00194 sec
(γ) Θα χάνει περίπου 2,79 min/ημέρα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Ενότητα 4.1, σελ. 311-313

**1.** (α) $3x^2$ (β) $\frac{x^8}{8}$ (γ) $\frac{x^8}{8} - 3x^2 + 8x$

**3.** (α) $\frac{1}{x^2}$ (β) $-\frac{1}{4x^2}$ (γ) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2}$

**5.** (α) $x^{2/3}$ (β) $x^{1/3}$ (γ) $x^{-1/3}$

**7.** (α) $\tan x$ (β) $2\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ (γ) $-\frac{2}{3}\tan\left(\frac{3x}{2}\right)$

**9.** $\frac{x^2}{2} + x + C$ **11.** $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

**13.** $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$ **15.** $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

**17.** $\frac{1}{7}y + \frac{4}{y^{1/4}} + C$ **19.** $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

**21.** $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$ **23.** $\tan\theta + C$

**25.** $-\cos\theta + \theta + C$

**31.** (α) Λάθος: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\sin x + C\right) = \frac{2x}{2}\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x$
(β) Λάθος: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\sin x$
(γ) Σωστό: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \sin x + C) = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$

**33.** $b$ **35.** $y = x^2 - 7x + 10$

**37.** $y = 9x^{1/3} + 4$ **39.** $s = \sin t - \cos t$

**41.** $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$ **43.** $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

**45.** $y = x^3 - 4x^2 + 5$ **47.** $s = 4{,}9t^2 + 5t + 10$

**49.** $s = 16t^2 + 20t + 5$ **51.** $y = 2x^{3/2} - 50$

**53.** $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$ **55.** $y = -\sin x - \cos x - 2$

**57.** 48 m/sec **59.** $t = 28/k$, $k = 4{,}9$

**61.** (α) $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ (β) $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

**65.** (α) (i) 33,2 μονάδες διαστήματος, (ii) 33,2 μονάδες διαστήματος, (iii) 33,2 μονάδες διαστήματος
(β) Αληθές

## Ενότητα 4.2, σελ. 319-320

**1.** $-\frac{1}{4}\cos 2x^2 + C$ **3.** $-(7x - 2)^{-4} + C$

**5.** $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

**7.** $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2} - 2) + C$

**9.** (α) $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C$ (β) $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

**11.** $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$ **13.** $\frac{3}{2 - x} + C$

**15.** $-\frac{1}{3}(7 - 3y^2)^{3/2} + C$ **17.** $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{x})^4 + C$

**19.** $\frac{1}{3}\tan(3x + 2) + C$ **21.** $\frac{1}{4}\tan^8\left(\frac{x}{2}\right) + C$

**23.** $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2} + 1) + C$ **25.** $\frac{1}{2\cos(2t + 1)} + C$

27. $-\frac{2}{3}(\cot^3 y)^{1/2} + C$ 29. $2\sin(\sqrt{t} + 3) + C$

31. $-\dfrac{2}{\sin\sqrt{\theta}} + C$

33. (α) $-\dfrac{6}{2 + \tan^3 x} + C$ (β) $-\dfrac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

(γ) $-\dfrac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

35. $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6} + C$ 37. $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

39. $s = 4t - 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + 9$

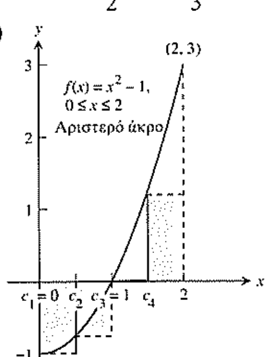
41. $s = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 100t + 143$. 6 m

## Ενότητα 4.3, σελ. 327-331

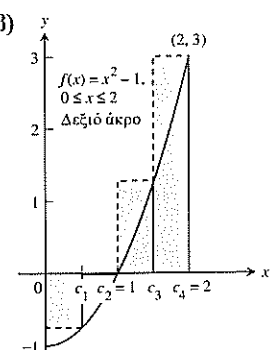
1. $\approx 44{,}8$, 6,7 L/min
3. (α) 87 cm (β) 87 in.
5. (α) 1010 m (β) 1110 m
7. (α) 80 $\pi$ (β) 6%
9. (α) $\frac{93\pi}{2}$, υπερεκτίμηση (β) 9%
11. (α) $118{,}5\pi$ ή $\approx 372{,}28$ m$^3$ (β) σφάλμα $\approx 11\%$
13. (α) $10\pi$, υποεκτίμηση (β) 20%
15. (α) 22,8 m/sec (β) 13,8 m/sec
(γ) 44,8 m
17. $\frac{31}{16}$ 19. 1
21. (α) Υπερεκτίμηση (άνω φράγμα) = 758 L, υποεκτίμηση (κάτω φράγμα) = 543 L
(β) Υπερεκτίμηση (άνω φράγμα) = 2363 L, υποεκτίμηση (κάτω φράγμα) = 1693 L
(γ) $\approx 31{,}4$ h, $\approx 32{,}4$ h
23. (α) 2 (β) $2\sqrt{2} \approx 2{,}828$
(γ) $8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3{,}061$
(δ) Κάθε επιφάνεια έχει μικρότερο εμβαδόν από το εμβαδόν κύκλου, $\pi$. Καθώς το $n$ αυξάνεται, το εμβαδόν του πολυγώνου τείνει στο $\pi$.

## Ενότητα 4.4, σελ. 340-342

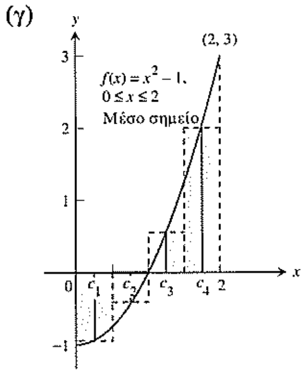
1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$
3. $\cos(1\pi) + \cos(2\pi) + \cos(3\pi) + \cos(4\pi) = 0$
5. $\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$
7. (α)



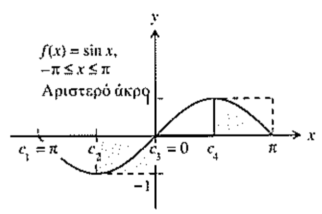

(β)



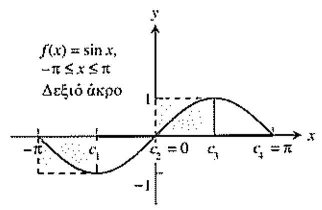

(γ)



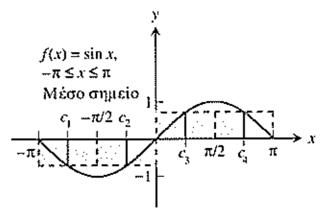

9. (α)




(β)



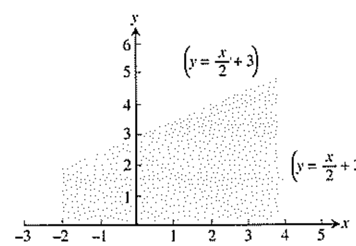

(γ)



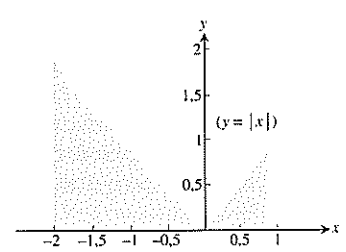

11. $\int_0^2 x^2\,dx$ 13. $\int_{-7}^5 (x^2 - 3x)\,dx$

15. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

17. Εμβαδόν = 21 τετραγωνικές μονάδες

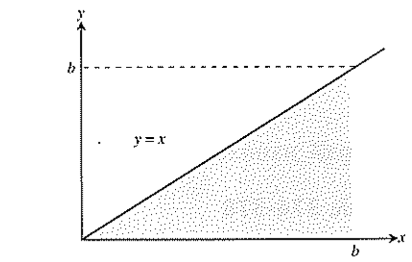



19. Εμβαδόν = 2,5 τετραγωνικές μονάδες






21. Εμβαδόν = $\frac{b^2}{2}$ τετραγωνικές μονάδες




23. $\text{av}(f) = \frac{1}{2}$ 25. $\text{av}(f) = \frac{\pi}{4}$
27. (α) 0 (β) $-8$ (γ) $-12$
(δ) 10 (ε) $-2$ (στ) 16
29. (α) 5 (β) $5\sqrt{3}$
(γ) $-5$ (δ) $-5$
31. (α) 4 (β) $-4$
33. Οι τιμές $a = 0$ και $b = 1$ μεγιστοποιούν το ολοκλήρωμα.
37. Άνω φράγμα = 1, κάτω φράγμα = $\frac{1}{2}$
39. 37,5 km/h

## Ενότητα 4.5, σελ. 350-354

1. 6 3. 1 5. $\pi$
7. 0 9. $\frac{2\pi^3}{3}$
11. $\frac{16\sqrt{2} - 19}{48}$ 13. 16
15. $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ 17. $4t^5$
19. $\sqrt{1 + x^2}$ 21. $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x$
23. 1 25. 0
27. $\frac{\pi}{2} + \sin 2$ 29. $y = \int_2^x \sec t\,dt + 3$
31. $y = \int_0^x \cos^2 t \sin t\,dt - 1$ 33. $\frac{28}{3}$
35. 8 37. $\pi$
39. (α) € 9,00 (β) € 10,00
41. (α) $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t) \Rightarrow v(5) = f(5) = 2$ m/sec
(β) $a = \frac{df}{dt}$ αρνητική εφόσον η κλίση της εφαπτομένης στο $t = 5$ είναι αρνητική.
(γ) $s = \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$ m εφόσον το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την $y = f(x)$, τον άξονα $x$, και το $x = 3$.
(δ) $t = 6$ εφόσον από $t = 6$ έως $t = 9$, το χωρίο κείται κάτω από τον άξονα $x$.
(ε) Για $t = 4$ και $t = 7$ εφόσον στα σημεία αυτά υπάρχουν οριζόντιες εφαπτομένες.
(στ) Πλησιάζει στην αρχή των αξόνων μεταξύ $t = 6$ και $t = 9$ εφόσον η ταχύτητα είναι αρνητική στο διάστημα αυτό. Απομακρύνεται από την αρχή μεταξύ $t = 0$ και $t = 6$ εφόσον η ταχύτητα είναι θετική εκεί.
(ζ) Στη δεξιά της αρχής, δηλ. στη θετική πλευρά, εφόσον το ολοκλήρωμα της $f$ από 0 έως 9 είναι θετικό· κι αυτό διότι το χωρίο θετικού εμβαδού (που κείται πάνω από τον άξονα $x$) είναι μεγαλύτερο από το χωρίο αρνητικού εμβαδού (κάτω από τον άξονα $x$).
43. $\int_4^8 \pi(64 - x^2)\,dx = \frac{320\pi}{3}$
45. $2x - 2$ 47. $-3x + 5$
49. (α) Αληθής. Εφόσον η $f$ είναι συνεχής, η $g$ είναι διαφορίσιμη βάσει του Μέρους 1 του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού.
(β) Αληθής: η $g$ είναι συνεχής εφόσον είναι διαφορίσιμη.
(γ) Αληθής, εφόσον $g'(1) = f(1) = 0$.
(δ) Ψευδής, εφόσον $g''(1) = f'(1) > 0$.
(ε) Αληθής, εφόσον $g'(1) = 0$ και $g''(1) = f'(1) > 0$.
(στ) Ψευδής: $g''(x) = f'(x) > 0$, άρα η $g''$ δεν αλλάζει ποτέ πρόσημο.
(ζ) Αληθής, εφόσον $g'(1) = f(1) = 0$ και η $g'(x) = f(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $x$ (είναι $f'(x) > 0$).
51. (α) $\frac{125}{6}$ (β) $h = \frac{25}{4}$ (δ) $\frac{2}{3}bh$

## Ενότητα 4.6, σελ. 360-361

1. (α) $\frac{14}{3}$ (β) $\frac{2}{3}$
3. (α) 2 (β) 2
5. (α) 0 (β) $\frac{1}{8}$
7. (α) $\frac{1}{6}$
(β) $\frac{1}{2}$
9. (α) 0 (β) 0
11. $2\sqrt{3}$ 13. $\frac{3}{4}$
15. $\frac{1}{5}$
17. $y(t) = \frac{1}{\pi}\left(3 - \tan\frac{\pi}{t}\right)$ 19. $\frac{\pi}{2}$
21. $\frac{128}{15}$ 23. $\frac{38}{3}$
25. (α) 6 (β) $7\frac{1}{3}$
27. (α) 0 (β) $\frac{8}{3}$
29. $\frac{32}{3}$ 31. $\frac{8}{3}$
33. 8 35. 4
37. $\frac{4 - \pi}{\pi}$ 39. 1
41. $\frac{32}{3}$

## Ενότητα 4.7, σελ. 369-373

1. I: (α) 1,5, 0
(β) 1,5, 0
(γ) 0%
II: (α) 1,5, 0
(β) 1,5, 0
(γ) 0%

3. I: (α) 2,75, 0,08
(β) 2,67, 0,08
(γ) $0{,}0312 \approx 3\%$
II: (α) 2,67, 0
(β) 2,67, 0
(γ) 0%

5. I: (α) 6,25, 0,5
(β) 6, 0,25
(γ) $0{,}0417 \approx 4\%$
II: (α) 6, 0
(β) 6, 0
(γ) 0%

7. I: (α) 0,509, 0,03125
(β) 0,5, 0,009
(γ) $0{,}018 \approx 2\%$
II: (α) 0,5004, 0,002604
(β) 0,5, 0,0004
(γ) 0,08%

9. I: (α) 1,8961, 0,161
(β) 2, 0,1039
(γ) $0{,}052 \approx 5\%$
II: (α) 2,00456, 0,0066
(β) 2, 0,00456
(γ) 0,23%

11. (α) 0,31929 (β) 0,32812
(γ) $\frac{1}{3}$, 0,01404, 0,00521

13. (α) 1,95643 (β) 2,00421
(γ) 2, 0,04357, −0,00421

15. 4875 $m^3$

17. Περίπου 3776 m.

19. $\approx 3{,}2$ m

21. 4, 4

23. (α) $x$ 0,8427
(β) $|E_s| \le \approx 6{,}7 \times 10^{-6}$

25. Τυπική απάντηση: 3,1416442

27. Τυπική απάντηση: 1,3707622

29. (α) $T_{10} \approx 1{,}983523538$, $T_{100} \approx 1{,}999835504$, $T_{1000} \approx 1{,}999998355$
(β)

| $n$ | $\lvert E_T \rvert = 2 - T_n$ |
|---|---|
| 10 | $0{,}016476462 = 1{,}6476462 \times 10^{-2}$ |
| 100 | $1{,}64496 \times 10^{-4}$ |
| 1000 | $1{,}645 \times 10^{-6}$ |

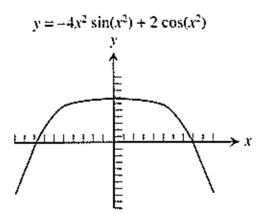
(γ) $|E_{10n}| \approx 10^{-2}|E_n|$

(δ) $b - a = \pi$, $h^2 = \frac{\pi^2}{n^2}$, $M = 1$

$$|E_n| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

$$|E_{10n}| \le \frac{\pi^3}{12(10n)^2} = 10^{-2}|E_n|$$

31. (α) $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$
(β)




(γ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι $-3 \le f''(x) \le 2$ για $-1 \le x \le 1$.

(δ) $|E_T| \le \frac{1-(-1)}{12}(h^2)(3) = \frac{h^2}{2}$

(ε) $|E_T| \le \frac{h^2}{2} \le \frac{0{,}1^2}{2} < 0{,}01$

(στ) $n \ge 20$

## Ασκήσεις Κεφαλαίου 4, σελ. 374-378

1. $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$

3. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$

5. $-\frac{1}{2(r^2+5)} + C$

7. $-(2-\theta^2)^{3/2} + C$

9. $\frac{1}{3}(1+x^4)^{3/4} + C$

11. $10\tan\frac{s}{10} + C$

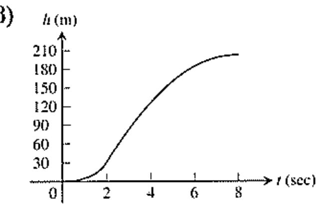
13. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\sqrt{2\theta} + C$

15. $\frac{1}{2}x - \sin\frac{x}{2} + C$

17. $-4(\cos x)^{1/2} + C$

19. $\frac{t^3}{3} + \frac{4}{t} + C$

21. (α) Περίπου 210 m
(β)




23. $\int_1^5 (2x-1)^{-1/2}\,dx = 2$

25. $\int_{-\pi}^{0} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2$

27. (α) 4 (β) 2
(γ) −2 (δ) $-2\pi$
(ε) $\frac{8}{5}$

29. 16

31. 2

33. 1

35. 8

37. $\frac{27\sqrt{3}}{160}$

39. $\frac{\pi}{2}$

41. $\sqrt{3}$

43. $6\sqrt{3} - 2\pi$

45. −1

47. 2

49. 1

51. $\sqrt{2} - 1$

53. $\frac{8}{3}$

55. 62

57. 1

59. $\frac{1}{6}$

61. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

63. 4

65. Ελάχιστο: −4· μέγιστο: 0· εμβαδόν: $\frac{27}{4}$

67. $y = x - \frac{1}{x} - 1$

69. $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

73. $y = \int_5^x \left(\frac{\sin t}{t}\right) dt - 3$

75. (α) $b$ (β) $b$

79. $\sqrt{2 + \cos^3 x}$

81. $\frac{-6}{3+x^4}$

83. $T = \pi$, $S = \pi$

85. −3,8°C

87. Κόστος ≈ € 12.518,10 (κανόνας τραπεζίου), όχι

89. Ναι

91. $y = \int_5^x \frac{\sin t}{t}\,dt + 3$

93. (α) 0 (β) −1
(γ) $-\pi$ (δ) $x = 1$
(ε) $y = 2x + 2 - \pi$ (στ) $x = -1$, $x = 2$
(ζ) $[-2\pi, 0]$

95. 600, € 18,00

97. 300, € 6,00

## Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 4, σελ. 378-380

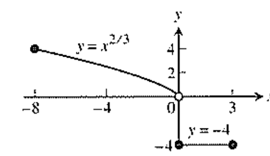
1. (α) Ναι (β) Όχι

5. (α) $\frac{1}{4}$ (β) $\sqrt[3]{12}$

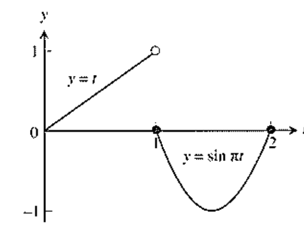
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

9. $y = x^3 + 2x - 4$

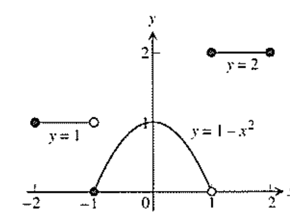
11. $\frac{36}{5}$




13. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$




15. $\frac{13}{3}$




17. $\frac{1}{2}$

19. $\frac{2}{x}$

21. $\frac{\sin 4y}{\sqrt{y}} - \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Ενότητα 5.1, σελ. 388-393

1. (α) $A(x) = \pi(1-x^2)$ (β) $A(x) = 4(1-x^2)$
(γ) $A(x) = 2(1-x^2)$ (δ) $A(x) = \sqrt{3}(1-x^2)$

3. 16

5. $\frac{16}{3}$

7. (α) $2\sqrt{3}$ (β) 8

9. $8\pi$

11. (α) $s^2h$ (β) $s^2h$

13. $\frac{2\pi}{3}$

15. $4 - \pi$

17. $\frac{32\pi}{5}$

19. $36\pi$

21. $\pi$

23. $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$

25. $2\pi$

27. $2\pi$

29. $3\pi$

31. $\pi^2 - 2\pi$

33. $\frac{2\pi}{3}$

35. $\frac{117\pi}{5}$

37. $\pi(\pi - 2)$

39. $\frac{4\pi}{3}$

41. $8\pi$

43. $\frac{7\pi}{6}$

45. (α) $8\pi$ (β) $\frac{32\pi}{5}$
(γ) $\frac{8\pi}{3}$ (δ) $\frac{224\pi}{15}$

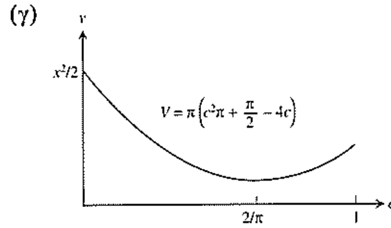
47. (α) $\frac{16\pi}{15}$ (β) $\frac{56\pi}{15}$ (γ) $\frac{64\pi}{15}$

49. $V = 2a^2b\pi^2$

51. (α) $V = \frac{\pi h^2(3a-h)}{3}$ (β) $\frac{1}{120\pi}$ m/sec

55. $V = 3308$ $cm^3$

57. (α) $c = \frac{2}{\pi}$ (β) $c = 0$
(γ)




59. (α) 2,3, 1,6, 1,5, 2,1, 3,2, 4,8, 7,0, 9,3, 10,7, 10,7, 9,3, 6,4, 3,2
(β) $\frac{1}{4\pi}\int_0^6 (C(y))^2\,dy$ (γ) $\approx 34{,}7$ $cm^3$
(δ) $V \approx 34{,}75$ $cm^3$ βάσει του κανόνα του Simpson. Ο κανόνας του Simpson παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ό,τι ο κανόνας του τραπεζίου. Το προσεγγιστικό σφάλμα στον κανόνα Simpson είναι ανάλογο του $h^4 = 0{,}0625$, ενώ το σφάλμα στον κανόνα του τραπεζίου είναι ανάλογο του $h^2 = 0{,}25$ (για $h = 0{,}5$ cm το τετράγωνο του σφάλματος είναι μεγαλύτερο της τέταρτης δύναμης).

## Ενότητα 5.2, σελ. 398-400

1. $6\pi$

3. $2\pi$

5. $\frac{14\pi}{3}$

7. $8\pi$

9. $\frac{5\pi}{6}$

11. $\frac{7\pi}{15}$

13. (β) $4\pi$

15. $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$

17. $\frac{8\pi}{3}$

19. $\frac{4\pi}{3}$

21. $\frac{16\pi}{3}$

23. (α) $\frac{6\pi}{5}$ (β) $\frac{4\pi}{5}$ (γ) $2\pi$ (δ) $2\pi$