14. *Ομαδικές εξετάσεις αίματος* Κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκόσμιου Πολέμου, ήταν συχνά απαραίτητο να γίνουν άμεσα εξετάσεις αίματος σε μεγάλους αριθμούς στρατιωτών. Υπάρχουν δύο καθιερωμένοι τρόποι εξέτασης αίματος ενός πληθυσμού N ατόμων. Στη μέθοδο 1, το κάθε άτομο εξετάζεται χωριστά. Στη μέθοδο 2, τα δείγματα αίματος x ατόμων αναμειγνύονται σε ένα μεγάλο ενιαίο δείγμα. Αν η εξέταση του συνολικού δείγματος, π.χ. για κάποιον συγκεκριμένο ιό, αποβεί αρνητική, τότε το ίδιο θα ισχύει για όλα τα επιμέρους δείγματα των x ατόμων. Αν η εξέταση αποβεί θετική, τότε καθένα από τα x άτομα πρέπει να εξεταστεί χωριστά, οπότε απαιτούνται συνολικά $x + 1$ εξετάσεις. Αν χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο και εφαρμόσουμε θεωρία πιθανοτήτων, μπορεί να αποδειχθεί ότι, κατά μέσον όρο, ο ολικός αριθμός εξετάσεων y θα είναι

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right).$$

Για $q = 0{,}99$ και $N = 1000$, βρείτε μια ακέραια τιμή του x που ελαχιστοποιεί το y. Βρείτε επίσης την ακέραια τιμή του x που μεγιστοποιεί το y. (Αυτό το δεύτερο αποτέλεσμα δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον.) Η συγκεκριμένη μέθοδος ομαδικής εξέτασης χρησιμοποιήθηκε στις ΗΠΑ κατά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο και εξοικονόμησε 80% του μόχθου και του χρόνου που θα απαιτούσε μια εξέταση καθενός στρατιώτη χωριστά, αλλά όχι με την τιμή του q που δίδεται εδώ.

15. *Μεταφορά διαμέσου κυτταρικής μεμβράνης* Υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, το αποτέλεσμα της κίνησης μιας διαλυμένης ουσίας διαμέσου μιας κυτταρικής μεμβράνης περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y).$$

Στην εξίσωση αυτή, y είναι η συγκέντρωση της ουσίας μέσα στο κύτταρο και dy/dt είναι ο ρυθμός μεταβολής του y με τον χρόνο. Τα k, A, V, και c συμβολίζουν σταθερές, όπου το k καλείται *συντελεστής διαπερατότητας* (και χαρακτηρίζει τη μεμβράνη), A είναι το επιφανειακό εμβαδόν της μεμβράνης, V είναι ο όγκος του κυττάρου, και c η συγκέντρωση της ουσίας στο εξωτερικό του κυττάρου. Η εξίσωση λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συγκεντρώσεως στο εσωτερικό του κυττάρου είναι ανάλογος της διαφοράς της από τη συγκέντρωση στο εξωτερικό.

(α) Λύστε την εξίσωση για το $y(t)$, συμβολίζοντας με y_0 την αρχική συγκέντρωση $y(0)$.

(β) Βρείτε τη συγκέντρωση στάσιμης κατάστασης, $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Το πρόβλημα αυτό βασίστηκε στο βιβλίο *Some Mathematical Models in Biology*, με εκδοτική επιτροπή τους R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman, και R. F. Baum, rev. ed., December 1967, PB-202 364, pp. 101-103· διανομέας N.T.I.S., U.S. Department of Commerce.)

16. *Μάθετε γράφοντας: Άθροισμα τόξων εφαπτομένης* Παραστήστε γραφικά την $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ για $-5 \le x \le 5$. Εξηγήστε τη γραφική παράσταση που βλέπετε, κάνοντας χρήση μεθόδων του απειροστικού λογισμού. Τι είδους συμπεριφορά θα αναμένατε να έχει η f πέραν του διαστήματος $[-5, 5]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

17. *Μάθετε γράφοντας: Ημίτονο εις το ημίτονο* Παραστήστε γραφικά την $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ στο διάστημα $[0, 3\pi]$. Εξηγήστε τη γραφική παράσταση που βλέπετε.

18. *Αλλαγή της βάσεως λογαρίθμου*

(α) Βρείτε το $\lim \log_a 2$ καθώς $a \to 0^+, 1^-, 1^+$ και ∞.

(β) Σχεδιάστε την $y = \log_a 2$ συναρτήσει του a στο διάστημα $0 < a \le 4$.

7 Τεχνικές ολοκλήρωσης, ο κανόνας του l'Hôpital και γενικευμένα ολοκληρώματα

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Μέχρι τώρα είδαμε με ποιον τρόπο προκύπτουν τα ολοκληρώματα στην περιγραφή πραγματικών φαινομένων και στη μέτρηση ποσοτήτων του κόσμου που μας περιβάλλει, και ξέρουμε θεωρητικά πώς να τα υπολογίζουμε μέσω αντιπαραγώγων. Όσο όμως εξελίσσονται περισσότερο τα μοντέλα μας στην περιγραφή του φυσικού κόσμου, τόσο πιο περίπλοκα και δύσκολα στον υπολογισμό τους γίνονται τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πώς να μετατρέπουμε τα περίπλοκα αυτά ολοκληρώματα σε άλλα, απλούστερης μορφής, τα οποία μπορούμε να χειριστούμε. Ένας από τους στόχους του κεφαλαίου τούτου είναι να δείξει πώς φέρνουμε ένα άγνωστο ολοκλήρωμα σε κατάλληλη μορφή, από την οποία ο υπολογισμός του είναι εύκολος, απευθείας ή με χρήση πινάκων ολοκλήρωσης ή με υπολογιστή.

Ήδη, μας είναι γνωστές δύο τέτοιες τεχνικές: η εφαρμογή αλγεβρικών χειρισμών (π.χ. συμπλήρωση τετραγώνου) και η αντικατάσταση. Τις τεχνικές αυτές θα τις αναπτύξουμε περισσότερο στο παρόν κεφάλαιο, αλλά θα εισαγάγουμε και μια νέα ισχυρή τεχνική που ακούει στο όνομα ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Θα δείξουμε επίσης πώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε όλες τις ρητές συναρτήσεις. Τέλος, θα επεκταθούμε σε ολοκληρώματα με απειριζόμενο το ένα ή αμφότερα τα όριά τους, ή σε ολοκληρώματα όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση παύει να είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης. Λίγο προτού γίνει αυτό, θα παρουσιάσουμε τον κανόνα του l'Hôpital για τον υπολογισμό ορίων κλασμάτων με αριθμητές και παρονομαστές που τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Ο κανόνας του l'Hôpital ανακαλύφθηκε στην πραγματικότητα από τον Johann Bernoulli αλλά κατέληξε να αποδοθεί στον l'Hôpital αφότου ο τελευταίος τον έκανε ευρέως γνωστό σε ένα βιβλίο του.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Johann Bernoulli
(1667-1748)

7.1 Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης

Αλγεβρικές διαδικασίες

Καθώς είδαμε στην Ενότητα 4.1, υπολογίζουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα βρίσκοντας μια αντιπαράγωγο της ολοκληρωτέας συνάρτησης και προσθέτοντας σε αυτήν μια αυθαίρετη σταθερά. Στον Πίνακα 7.1 παρατίθενται οι κυριότεροι τύποι ολοκληρωμάτων τους οποίους έχουμε ώς τώρα υπολογίσει. Στο τέλος του βιβλίου δίδεται λεπτομερέστερος πίνακας τον οποίο θα αναλύσουμε στην Ενότητα 7.5.

Πίνακας 7.1 Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης

1. $\int du = u + C$
2. $\int k\,du = ku + C$ (τυχών αριθμός k)
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
    $= \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
    $= -\ln|\csc u| + C$
14. $\int e^u\,du = e^u + C$
15. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$
16. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$
21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
22. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (u > a > 0)$

Αλγεβρικές διαδικασίες

Χρειάζεται συχνά να φέρουμε ένα ολοκλήρωμα σε άλλη μορφή προκειμένου να το αντιστοιχίσουμε με ολοκλήρωμα που μας είναι γνωστό.

Παράδειγμα 1 Απλοποίηση με αντικατάσταση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\,dx.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} && u = x^2 - 9x + 1,\ du = (2x-9)\,dx\\ &= \int u^{-1/2}\,du \\ &= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C && \text{Πίνακας 7.1, Τύπος 4, για } n = -1/2\\ &= 2u^{1/2} + C\\ &= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 Συμπλήρωση του τετραγώνου

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}.$$

Λύση Συμπληρώνουμε το τετράγωνο γράφοντας την υπόρριζη ποσότητα στη μορφή

$$\begin{aligned}8x - x^2 &= -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16)\\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x-4)^2.\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}}\\ &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} && a = 4,\ u = (x-4),\ du = dx\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Πίνακας 7.1, Τύπος 18}\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 Ανάπτυξη δύναμης και χρήση τριγωνομετρικής ταυτότητας

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int (\sec x + \tan x)^2\,dx.$$

Λύση Αναπτύσσουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x.$$

Οι δύο πρώτοι όροι στο δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής μας είναι ήδη γνώριμοι· μπορούμε αμέσως να τους ολοκληρώσουμε. Τι γίνεται όμως με τον όρο $\tan^2 x$; Υπάρχει μια ταυτότητα που τον συνδέει με το $\sec^2 x$:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν το $\tan^2 x$ με το $\sec^2 x - 1$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (\sec x + \tan x)^2\,dx &= \int (\sec^2 x + 2\sec x\tan x + \sec^2 x - 1)\,dx\\ &= 2\int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x \tan x\,dx - \int 1\,dx\\ &= 2\tan x + 2\sec x - x + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4 Απαλοιφή τετραγωνικής ρίζας

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx.$$

Λύση Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \qquad \text{δηλαδή} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta.$$

Για $\theta = 2x$, η ταυτότητα αυτή γίνεται

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,dx \qquad \sqrt{u^2} = |u|$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$$

Στο διάστημα $[0, \pi/4]$, $\cos 2x \geq 0$, οπότε $|\cos 2x| = \cos 2x$.

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Παράδειγμα 5 Αναγωγή καταχρηστικού κλάσματος

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x+2}\,dx.$$

Λύση Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι ένα καταχρηστικό κλάσμα (δηλαδή ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή). Για να ολοκληρώσουμε, κάνουμε πρώτα τη διαίρεση, οπότε παίρνουμε ένα πηλίκο συν ένα υπόλοιπο το οποίο τώρα είναι γνήσιο κλάσμα:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 7x & 3x+2 \\ \hline -(3x^2+2x) & x-3 \\ -9x & \\ -(-9x-6) & \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$\frac{3x^2 - 7x}{3x+2} = x - 3 + \frac{6}{3x+2}.$$

Έτσι,

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,dx = \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x+2| + C.$$

Η αναγωγή ενός κλάσματος με εκτέλεση της διαίρεσης (Παράδειγμα 5) δεν οδηγεί πάντοτε σε έκφραση που μπορούμε να ολοκληρώσουμε άμεσα. Θα αντιμετωπίσουμε τέτοιες περιπτώσεις στην Ενότητα 7.3.

Παράδειγμα 6 Χωρισμός ενός κλάσματος σε δύο

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Λύση Χωρίζουμε πρώτα την ολοκληρωτέα ποσότητα σε δύο κλάσματα, παίρνοντας

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, κάνουμε την αντικατάσταση

$$u = 1 - x^2, \qquad du = -2x\,dx, \qquad \text{και} \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,du.$$

$$3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\int \frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα έχει τη γνωστή μας μορφή,

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1}x + C_2.$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτά και ορίζοντας εκ νέου τη σταθερά ολοκλήρωσης $C_1 + C_2$ σε C, παίρνουμε

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1}x + C.$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
George David Birkhoff
(1884-1944)

Παράδειγμα 7 Πολλαπλασιασμός με έκφραση που ισούται με μονάδα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \sec x\,dx.$$

Λύση

$$\int \sec x\,dx = \int (\sec x)(1)\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u} \qquad u = \tan x + \sec x,\ du = (\sec^2 x + \sec x\tan x)\,dx$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Αν στο Παράδειγμα 7 θέσουμε όπου τέμνουσα την συντέμνουσα και όπου εφαπτομένη τη συνεφαπτομένη, καταλήγουμε σε έναν παρόμοιο τύπο για το ολοκλήρωμα της συντέμνουσας (δείτε την Άσκηση 93).

Πίνακας 7.2 Ολοκληρώματα τέμνουσας και συντέμνουσας

1. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
2. $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

Διαδικασία που ακολουθούμε για να αντιστοιχίσουμε ένα ολοκλήρωμα σε κάποιον γνωστό τύπο ολοκλήρωσης

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Απλοποιούμε με αντικατάσταση	$\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$
Συμπληρώνουμε το τετράγωνο	$\sqrt{8x-x^2} = \sqrt{16-(x-4)^2}$
Χρησιμοποιούμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα	$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x$ $= \sec^2 x + 2\sec x \tan x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1$
Απαλείφουμε μια τετραγωνική ρίζα	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\,\lvert\cos 2x\rvert$
Ανάγουμε ένα καταχρηστικό κλάσμα σε απλό	$\dfrac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x+2}$
Χωρίζουμε ένα κλάσμα σε δύο	$\dfrac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
Πολλαπλασιάζουμε με τη μονάδα εκπεφρασμένη σε κατάλληλη μορφή	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ $= \dfrac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.1

Αντικαταστάσεις

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 1-36 κάνοντας μια κατάλληλη αντικατάσταση ώστε να το φέρετε σε γνωστή μορφή.

1. $\displaystyle\int \frac{16x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}$
2. $\displaystyle\int \frac{3\cos x\,dx}{\sqrt{1+3\sin x}}$
3. $\displaystyle\int 3\sqrt{\sin v}\,\cos v\,dv$
4. $\displaystyle\int \cot^3 y\,\csc^2 y\,dy$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{16x\,dx}{8x^2+2}$
6. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\tan z}\,dz$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$
9. $\displaystyle\int \cot(3-7x)\,dx$
10. $\displaystyle\int \csc(\pi x-1)\,dx$
11. $\displaystyle\int e^\theta \csc(e^\theta+1)\,d\theta$
12. $\displaystyle\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x}\,dx$
13. $\displaystyle\int \sec\frac{t}{3}\,dt$
14. $\displaystyle\int x\sec(x^2-5)\,dx$
15. $\displaystyle\int \csc(s-\pi)\,ds$
16. $\displaystyle\int \frac{1}{\theta^2}\csc\frac{1}{\theta}\,d\theta$
17. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2x\,e^{x^2}\,dx$
18. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin y)\,e^{\cos y}\,dy$
19. $\displaystyle\int e^{\tan v}\sec^2 v\,dv$
20. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$
21. $\displaystyle\int 3^{x+1}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{w}}\,dw}{2\sqrt{w}}$
24. $\displaystyle\int 10^{2\theta}\,d\theta$
25. $\displaystyle\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$
26. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{1+(2x+1)^2}$
27. $\displaystyle\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$
29. $\displaystyle\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{1-s^4}}$
30. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$
31. $\displaystyle\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$
32. $\displaystyle\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-9}}$
33. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
34. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}$
35. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x\cos(\ln x)}$
36. $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x+4x\ln^2 x}$

Συμπλήρωση τετραγώνου

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 37-42 συμπληρώνοντας το τετράγωνο και κάνοντας μια αντικατάσταση ώστε να το φέρετε σε γνωστή μορφή.

37. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$
38. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2-6x+10}$

39. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$
40. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$
41. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
42. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 43-46 κάνοντας χρήση των κατάλληλων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και αντικαταστάσεων ώστε να το φέρετε σε γνωστή μορφή.

43. $\displaystyle\int (\sec x+\cot x)^2\,dx$
44. $\displaystyle\int (\csc x-\tan x)^2\,dx$
45. $\displaystyle\int \csc x\,\sin 3x\,dx$
46. $\displaystyle\int (\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x)\,dx$

Καταχρηστικά κλάσματα

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 47-52 με αναγωγή του καταχρηστικού κλάσματος και αντικατάσταση (αν χρειάζεται) ώστε να το φέρετε σε γνωστή μορφή.

47. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$
49. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx$
50. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{4x^2-7}{2x+3}\,dx$
51. $\displaystyle\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4}\,dt$
52. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5}\,d\theta$

Χωρισμός κλάσματος σε δύο

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 53-56 με χωρισμό του κλάσματος σε δύο και αντικατάσταση (αν χρειάζεται) ώστε να το φέρετε σε γνωστή μορφή.

53. $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
54. $\displaystyle\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$
55. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$
56. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2}\,dx$

Πολλαπλασιασμός με τη μονάδα

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 57–62 πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη μοναδιαία έκφραση και αντικαθιστώντας (αν χρειάζεται) ώστε να το φέρετε σε γνωστή μορφή.

57. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$
58. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$
59. $\displaystyle\int \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta$
60. $\displaystyle\int \frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}\,d\theta$
61. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sec x}\,dx$
62. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\csc x}\,dx$

Απαλοιφή τετραγωνικής ρίζας

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 63-70 με απαλοιφή της τετραγωνικής ρίζας.

63. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,dx$
64. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$
65. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2t}\,dt$
66. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1+\cos t}\,dt$
67. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,d\theta$
68. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta$
69. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 y}\,dy$
70. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{\sec^2 y-1}\,dy$

Διάφορα ολοκληρώματα

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα των Ασκήσεων 71-82 χρησιμοποιώντας όποια τεχνική σάς φαίνεται η καταλληλότερη.

71. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\csc x-\cot x)^2\,dx$
72. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sec x+4\cos x)^2\,dx$
73. $\displaystyle\int \cos\theta\csc(\sin\theta)\,d\theta$
74. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)\cot(x+\ln x)\,dx$
75. $\displaystyle\int (\csc x-\sec x)(\sin x+\cos x)\,dx$
76. $\displaystyle\int 3\sinh\left(\frac{x}{2}+\ln 5\right)dx$
77. $\displaystyle\int \frac{6\,dy}{\sqrt{y}(1+y)}$
78. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$
79. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$
80. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$
81. $\displaystyle\int \sec^2 t\tan(\tan t)\,dt$
82. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$

Τριγωνομετρικές δυνάμεις

83. **(α)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^3\theta\,d\theta$. (*Υπόδειξη:* $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$.)
 (β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^5\theta\,d\theta$.
 (γ) Χωρίς να κάνετε πράξεις, εξηγήστε πώς θα υπολογίζατε το ολοκλήρωμα $\int \cos^9\theta\,d\theta$.
84. **(α)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^3\theta\,d\theta$. (*Υπόδειξη:* $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$.)
 (β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^5\theta\,d\theta$.
 (γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^7\theta\,d\theta$.
 (δ) Χωρίς να κάνετε πράξεις, εξηγήστε πώς θα υπολογίζατε το ολοκλήρωμα $\int \sin^{13}\theta\,d\theta$.
85. **(α)** Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \tan^3\theta\,d\theta$ συναρτήσει του $\int \tan\theta\,d\theta$. Κατόπιν υπολογίστε το $\int \tan^3\theta\,d\theta$. (*Υπόδειξη:* $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$.)
 (β) Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \tan^5\theta\,d\theta$ συναρτήσει του $\int \tan^3\theta\,d\theta$.
 (γ) Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \tan^7\theta\,d\theta$ συναρτήσει του $\int \tan^5\theta\,d\theta$.
 (δ) Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \tan^{2k+1}\theta\,d\theta$, όπου k θετικός ακέραιος, συναρτήσει του $\int \tan^{2k-1}\theta\,d\theta$.
86. **(α)** Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \cot^3\theta\,d\theta$ συναρτήσει του $\int \cot\theta\,d\theta$. Κατόπιν υπολογίστε το $\int \cot^3\theta\,d\theta$. (*Υπόδειξη:* $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$.)

(β) Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \cot^5 \theta \, d\theta$ συναρτήσει του $\int \cot^3 \theta \, d\theta$.

(γ) Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \cot^7 \theta \, d\theta$ συναρτήσει του $\int \cot^5 \theta \, d\theta$.

(δ) Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int \cot^{2k+1} \theta \, d\theta$, όπου k θετικός ακέραιος, συναρτήσει του $\int \cot^{2k-1} \theta \, d\theta$.

Θεωρία και παραδείγματα

87. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $y = 2 \cos x$ και από κάτω από την $y = \sec x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.

88. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν της «τριγωνικής» περιοχής που φράσσεται από πάνω και από κάτω από τις καμπύλες $y = \csc x$ και $y = \sin x$, $\pi/6 \leq x \leq \pi/2$, και εξ αριστερών από την ευθεία $x = \pi/6$.

89. *Όγκος* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο της Άσκησης 87 ως προς τον άξονα x.

90. *Όγκος* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο της Άσκησης 88 ως προς τον άξονα x.

91. *Μήκος τόξου* Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \pi/3$.

92. *Μήκος τόξου* Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = \ln(\sec x)$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

93. *Ολοκλήρωμα του csc x* Επαναλάβετε τη διαδικασία του Παραδείγματος 7, για να δείξετε ότι

$$\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$$

94. *Χρήση διαφορετικών αντικαταστάσεων* Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int ((x^2 - 1)(x + 1))^{-2/3} \, dx$$

μπορεί να υπολογιστεί με καθεμία από τις παρακάτω αντικαταστάσεις.

(α) $u = 1/(x + 1)$

(β) $u = ((x - 1)/(x + 1))^k$ για $k = 1, 1/2, 1/3, -1/3, -2/3$, και -1

(γ) $u = \tan^{-1} x$

(δ) $u = \tan^{-1}\sqrt{x}$

(ε) $u = \tan^{-1}((x - 1)/2)$

(στ) $u = \cos^{-1} x$

(ζ) $u = \cosh^{-1} x$

Ποια είναι η τιμή του ολοκληρώματος; (*Πηγή:* "Problems and Solutions," *College Mathematics Journal*, Vol. 21, No. 5 (Nov. 1990), pp. 425–426.)

7.2 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων • Επανειλημμένη χρήση • Επιλύοντας ως προς το άγνωστο ολοκλήρωμα • Πινακοειδής ολοκλήρωση

Εφόσον

$$\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

και

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C,$$

είναι προφανές ότι

$$\int x \cdot x \, dx \neq \int x \, dx \cdot \int x \, dx.$$

Με άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα ενός γινομένου *δεν* ισούται, εν γένει, με το γινόμενο των επιμέρους ολοκληρωμάτων:

$$\int f(x) g(x) \, dx \neq \int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx.$$

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι μια τεχνική απλοποίησης ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int f(x) g(x) \, dx$$

όπου η f μπορεί να παραγωγιστεί επανειλημμένα και η g μπορεί να ολοκληρωθεί επανειλημμένα χωρίς δυσκολία. Το ολοκλήρωμα

$$\int x e^x \, dx$$

ανήκει στην κατηγορία αυτή, αφού η $f(x) = x$ μπορεί να παραγωγιστεί δύο φορές δίνοντας μηδέν και η $g(x) = e^x$ μπορεί να ολοκληρωθεί επανειλημμένα χωρίς πρόβλημα. Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες εφαρμόζεται επίσης σε ολοκληρώματα του είδους

$$\int e^x \sin x \, dx$$

όπου κάθε παράγοντας της ολοκληρωτέας συνάρτησης επανεμφανίζεται μετά από επανειλημμένη παραγώγιση ή ολοκλήρωση.

Στην παρούσα ενότητα περιγράφουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες και δείχνουμε πώς αυτή εφαρμόζεται.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Charles Davies
(1798-1876)

Ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων

Αν οι u και v είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x, ο τύπος της παραγώγου γινομένου μάς πληροφορεί ότι

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη την εξίσωση ως προς x και αναδιατάξουμε, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = \int \left(\frac{d}{dx}(uv) \right) dx - \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx$$

$$= uv - \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx.$$

Αν ξαναγράψουμε την τελευταία εξίσωση σε διαφορικό συμβολισμό, παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο.

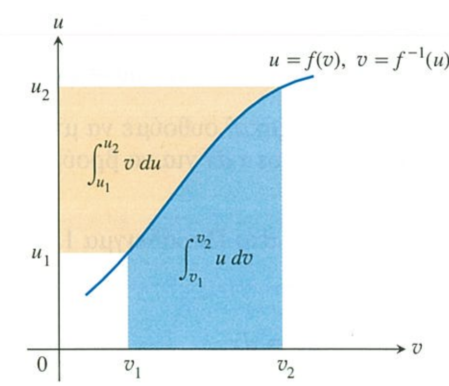
Τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \qquad (1)$$

Ο τύπος αυτός εκφράζει ένα ολοκλήρωμα, $\int u \, dv$, συναρτήσει ενός άλλου ολοκληρώματος, $\int v \, du$. Με κατάλληλη επιλογή των u και v, το δεύτερο ολοκλήρωμα ενδέχεται να είναι απλούστερο στον υπολογισμό του απ' ό,τι το πρώτο. Αυτός είναι ο λόγος της σπουδαιότητας του τύπου. Όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα ένα ολοκλήρωμα, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα άλλο το οποίο ίσως αποδειχτεί ευκολότερο.

Ο ισοδύναμος τύπος για ορισμένα ολοκληρώματα είναι

$$\int_{v_1}^{v_2} u \, dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v \, du. \qquad (2)$$



Σχημα 7.1 Το εμβαδόν του γαλάζιου χωρίου, $\int_{v_1}^{v_2} u \, dv$, ισούται με το εμβαδόν του μεγάλου ορθογώνιου παραλληλογράμμου, $u_2 v_2$, μείον τα εμβαδά του μικρότερου ορθογωνίου, $u_1 v_1$, και του ωχροκάστανου χωρίου, $\int_{u_1}^{u_2} v \, du$. Σε μαθηματικό συμβολισμό, $\int_{v_1}^{v_2} u \, dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v \, du$.

Το Σχήμα 7.1 δείχνει πώς τα διάφορα μέρη του τύπου αυτού μπορούν να θεωρηθούν ως εμβαδά.

Παράδειγμα 1 Χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x\cos x\,dx.$$

Λύση Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

όπου

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx.$$

Για να συμπληρώσουμε τον τύπο, παίρνουμε το διαφορικό του u και βρίσκουμε την απλούστερη αντιπαράγωγο του $\cos x$.

$$du = dx, \qquad v = \sin x$$

Έτσι,

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Ας εξετάσουμε τις επιλογές που έχουμε για τα u και v στο Παράδειγμα 1.

Παράδειγμα 2 Διερεύνηση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Ποιες είναι οι διαθέσιμες επιλογές των u και dv όταν εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο

$$\int x\cos x\,dx = \int u\,dv?$$

Με άλλα λόγια, ποιες επιλογές των συναρτήσεων αυτών οδηγούν σε επιτυχή υπολογισμό του αρχικού ολοκληρώματος;

Λύση Υπάρχουν τέσσερις πιθανές επιλογές.

1. $u = 1$ και $dv = x\cos x\,dx$
2. $u = x$ και $dv = \cos x\,dx$
3. $u = x\cos x$ και $dv = dx$
4. $u = \cos x$ και $dv = x\,dx$

Η Επιλογή 1 δεν είναι κατάλληλη, διότι εξακολουθούμε να μην γνωρίζουμε πώς να ολοκληρώσουμε το $dv = x\cos x\,dx$ για να βρούμε το v.

Η Επιλογή 2 είναι πρόσφορη, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.

Η Επιλογή 3 δίνει

$$u = x\cos x, \qquad dv = dx,$$
$$du = (\cos x - x\sin x)\,dx, \qquad v = x,$$

και το ολοκλήρωμα παίρνει τώρα τη μορφή

$$\int v\,du = \int (x\cos x - x^2\sin x)\,dx.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι δυσκολότερο να υπολογιστεί από το αρχικό.

Η Επιλογή 4 δίνει

Πότε και πώς χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Πότε: Όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με αντικατάσταση, δοκιμάζουμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες.

Πώς: Ξεκινούμε με ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

και καταλήγουμε σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int u\,dv$$

όπου το dv είναι μέρος της ολοκληρωτέας ποσότητας που περιλαμβάνει το dx και ενδεχομένως την $f(x)$ ή την $g(x)$.

Επιλογή των u και dv: Ο τύπος

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

μας δίνει ένα νέο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Θα πρέπει, λοιπόν, να μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος. Αν το νέο ολοκλήρωμα είναι πιο περίπλοκο από το αρχικό, δοκιμάζουμε μια άλλη εκδοχή των u και dv.

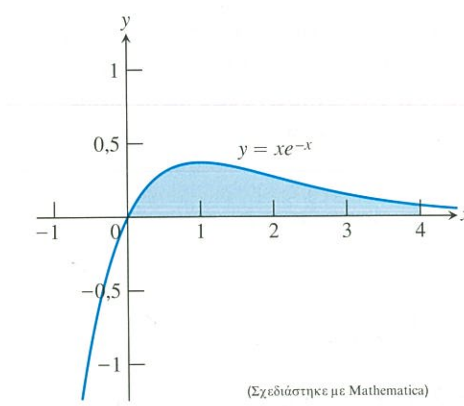
$$u = \cos x, \qquad dv = x\,dx,$$
$$du = -\sin x\,dx, \qquad v = \frac{x^2}{2},$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int v\,du = -\int \frac{x^2}{2}\sin x\,dx.$$

Και αυτό είναι δυσκολότερο στον υπολογισμό του από το αρχικό ολοκλήρωμα.

Όταν ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες, σκοπός μας είναι να μεταβούμε από ένα ολοκλήρωμα $\int u\,dv$ που δεν γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε σε ένα άλλο ολοκλήρωμα $\int v\,du$ του οποίου ο υπολογισμός είναι ευκολότερος. Γενικά, επιλέγουμε πρώτα το dv έτσι ώστε να καλύπτει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο τμήμα της ολοκληρωτέας ποσότητας μπορούμε να ολοκληρώσουμε (συμπεριλαμβάνοντας το dx)· οπότε u είναι ό,τι απομένει. Η μέθοδος δεν αποδίδει βέβαια πάντοτε.



ΣΧΗΜΑ 7.2 Το χωρίο του Παραδείγματος 3.

Παράδειγμα 3 Εύρεση εμβαδού

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την καμπύλη $y = xe^{-x}$ και τον άξονα x από $x = 0$ έως $x = 4$.

Λύση Το χωρίο έχει γραμμοσκιαστεί στο Σχήμα 7.2. Το εμβαδόν του είναι

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ με

$$u = x, \qquad dv = e^{-x}\,dx,$$
$$du = dx, \qquad v = -e^{-x}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx\\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^4\\ &= (-4e^{-4} - e^{-4}) - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4 Ολοκλήρωμα φυσικού λογαρίθμου

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \ln x\,dx.$$

Λύση Εφόσον το $\int \ln x\,dx$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\int \ln x \cdot 1\,dx$, εφαρμόζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ όπου

$u = \ln x$ Απλοποιείται όταν παραγωγιστεί $\qquad dv = dx$ Ολοκληρώνεται εύκολα

$du = \frac{1}{x}\,dx, \qquad v = x.$ Η απλούστερη δυνατή αντιπαράγωγος

Έτσι,

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Επανειλημμένη χρήση

Μερικές φορές είναι απαραίτητο να εφαρμόσουμε τη μέθοδο περισσότερες από μία φορές.

Παράδειγμα 5 Επανειλημμένη χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 e^x\,dx.$$

Λύση Με $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, $du = 2x\,dx$, και $v = e^x$, έχουμε

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Το καινούριο ολοκλήρωμα είναι λιγότερο περίπλοκο από το αρχικό διότι ο εκθέτης του όρου έχει ελαττωθεί κατά ένα. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος, ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες άλλη μία φορά με $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Έτσι $du = dx$, $v = e^x$, και

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

Η τεχνική του Παραδείγματος 5 αποδίδει για κάθε ολοκλήρωμα του τύπου $\int x^n e^x\,dx$ όπου n θετικός ακέραιος, διότι η συνεχής παραγώγιση του x^n θα οδηγήσει τελικά στο μηδέν, ενώ η παραγώγιση του e^x γίνεται εύκολα. Θα πούμε περισσότερα επ' αυτού αργότερα, όταν θα εξετάζουμε την *πινακοειδή ολοκλήρωση*.

Επιλύοντας ως προς το άγνωστο ολοκλήρωμα

Ολοκληρώματα όπως αυτό στο παράδειγμα που ακολουθεί προκύπτουν συχνότατα στους ηλεκτρολόγους μηχανικούς. Για τον υπολογισμό τους εφαρμόζουμε δύο ολοκληρώσεις κατά παράγοντες, και κατόπιν λύνουμε ως προς το άγνωστο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 6 Επιλύοντας ως προς το άγνωστο ολοκλήρωμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int e^x \cos x\,dx.$$

Λύση Θέτουμε $u = e^x$ και $dv = \cos x\,dx$. Θα είναι τότε $du = e^x\,dx$, $v = \sin x$, και

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι παρόμοιο με το πρώτο, αλλά περιέχει το $\sin x$ αντί του $\cos x$. Για να το υπολογίσουμε, εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες, με

$$u = e^x, \quad dv = \sin x\,dx, \quad v = -\cos x, \quad du = e^x\,dx.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,dx &= e^x\sin x - \left(-e^x\cos x - \int (-\cos x)(e^x\,dx)\right) \\ &= e^x \sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx.\end{aligned}$$

Τώρα το άγνωστο ολοκλήρωμα εμφανίζεται σε κάθε μέλος της εξίσωσης. Προσθέτοντας σε κάθε μέλος το ολοκλήρωμα αυτό, παίρνουμε

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x + C.$$

Διαιρώντας με το 2 και ορίζοντας εκ νέου τη σταθερά της ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x\sin x + e^x\cos x}{2} + C.$$

Όταν εφαρμόζουμε επανειλημμένα ολοκλήρωση κατά παράγοντες, όπως στο Παράδειγμα 6, αφού επιλέξουμε τα u και dv, είναι συνήθως προτιμότερο να μην αλλάξουμε την επιλογή αυτή στο δεύτερο στάδιο επίλυσης. Έτσι αποφεύγουμε το ενδεχόμενο να αναιρέσουμε τη δουλειά που ήδη κάναμε. Για παράδειγμα, αν κατά τη δεύτερη ολοκλήρωση είχαμε αλλάξει την επιλογή σε $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$, θα παίρναμε

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,dx &= e^x\sin x - \left(e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx\right) \\ &= \int e^x\cos x\,dx,\end{aligned}$$

αναιρώντας έτσι όποια πρόοδο έχει επιτευχθεί στην πρώτη ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η τεχνική της πινακοειδούς ολοκλήρωσης που εισάγουμε αμέσως τώρα αποτρέπει τέτοια λάθη.

Πινακοειδής ολοκλήρωση

Όπως έχουμε δει, ολοκληρώματα του τύπου $\int f(x)g(x)\,dx$, όπου η f μπορεί να παραγωγιστεί επανειλημμένα μέχρι να μηδενιστεί, και η g μπορεί να ολοκληρωθεί επανειλημμένα χωρίς δυσκολία, θέτουν σοβαρή υποψηφιότητα για υπολογισμό με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Ωστόσο, όταν απαιτούνται πολλές επαναλήψεις της μεθόδου, οι υπολογισμοί μπορεί να γίνουν κοπιώδεις. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένας τρόπος οργάνωσης της μεθόδου ο οποίος μας εξοικονομεί πολύ κόπο. Πρόκειται για την **πινακοειδή ολοκλήρωση,** που εξηγείται στα Παραδείγματα 7 και 8.

Παράδειγμα 7 Χρήση πινακοειδούς ολοκλήρωσης

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2e^x\,dx.$$

Λύση Με $f(x) = x^2$ και $g(x) = e^x$, φτιάχνουμε τον πίνακα:

$f(x)$ και οι παράγωγοί της		$g(x)$ και τα ολοκληρώματά της
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Συνδυάζουμε τα γινόμενα των συναρτήσεων που συνδέονται με βέλος, προσημασμένα κατά το πρόσημο που βρίσκεται πάνω από κάθε βέλος. Έτσι παίρνουμε

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με το Παράδειγμα 5.

Παράδειγμα 8 Χρήση πινακοειδούς ολοκλήρωσης

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x^3 \sin x\,dx.$$

Λύση Με $f(x) = x^3$ και $g(x) = \sin x$, φτιάχνουμε τον πίνακα:

$f(x)$ και οι παράγωγοί της		$g(x)$ και τα ολοκληρώματά της
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

Επιπρόσθετες πινακοειδείς ολοκληρώσεις θα βρείτε στις Επιπρόσθετες Ασκήσεις, στο τέλος του κεφαλαίου.

Και πάλι συνδυάζουμε τα γινόμενα των συναρτήσεων που συνδέουν τα βέλη, προσημασμένα σύμφωνα με τα πρόσημα που βρίσκονται πάνω από τα βέλη, και παίρνουμε

$$\int x^3 \sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.2

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 1-24.

1. $\int x \sin \frac{x}{2}\,dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\,d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\,dt$
4. $\int x^2 \sin x\,dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\,dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$
7. $\int \tan^{-1} y\,dy$
8. $\int \sin^{-1} y\,dy$
9. $\int x \sec^2 x\,dx$
10. $\int 4x \sec^2 2x\,dx$
11. $\int x^3 e^x\,dx$
12. $\int p^4 e^{-p}\,dp$
13. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$
14. $\int (r^2 + r + 1)e^r\,dr$

15. $\int x^5 e^x\,dx$
16. $\int t^2 e^{4t}\,dt$
17. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta\,d\theta$
18. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\,dx$
19. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 t \sec^{-1} t\,dt$
20. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2)\,dx$
21. $\int e^\theta \sin\theta\,d\theta$
22. $\int e^{-y} \cos y\,dy$
23. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$
24. $\int e^{-2x} \sin 2x\,dx$

Αντικατάσταση και ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 25-30 με αντικατάσταση και κατόπιν με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$
26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$
27. $\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x\,dx$
28. $\int \ln(x + x^2)\,dx$
29. $\int \sin(\ln x)\,dx$
30. $\int z(\ln z)^2\,dz$

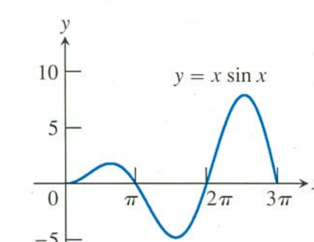
Διαφορικές εξισώσεις

Στις Ασκήσεις 31-34, να λυθεί η διαφορική εξίσωση.

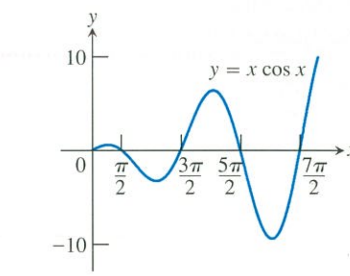
31. $\dfrac{dy}{dx} = x^2e^{4x}$
32. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 \ln x$
33. $\dfrac{dy}{d\theta} = \sin\sqrt{\theta}$
34. $\dfrac{dy}{d\theta} = \theta \sec\theta \tan\theta$

Θεωρία και παραδείγματα

35. *Εύρεση εμβαδού* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x \sin x$ και τον άξονα x (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα) για
   (α) $0 \le x \le \pi$
   (β) $\pi \le x \le 2\pi$
   (γ) $2\pi \le x \le 3\pi$.
   (δ) Ποια χαρακτηριστική τάση βλέπετε να διαμορφώνεται; Πόσο είναι το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του άξονα x για $n\pi \le x \le (n+1)\pi$, όπου n αυθαίρετος μη αρνητικός ακέραιος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



36. *Εύρεση εμβαδού* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x \cos x$ και τον άξονα x (δείτε το ακόλουθο σχήμα) για
   (α) $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$
   (β) $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$
   (γ) $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$.
   (δ) Ποια χαρακτηριστική τάση βλέπετε να διαμορφώνεται; Πόσο είναι το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του άξονα x για
   $$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi,$$
   όπου n αυθαίρετος θετικός ακέραιος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



37. *Εύρεση όγκου* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς την ευθεία $x = \ln 2$ το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τους άξονες συντεταγμένων, την καμπύλη $y = e^x$, και την ευθεία $x = \ln 2$.

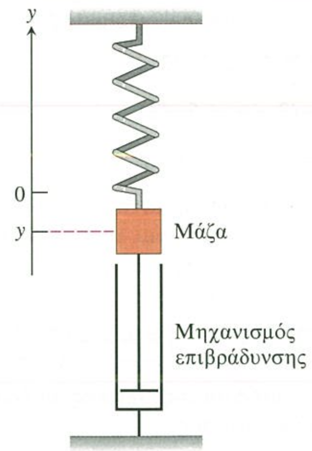
38. *Εύρεση όγκου* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τους άξονες συντεταγμένων, την καμπύλη $y = e^{-x}$, και την ευθεία $x = 1$, ως προς
   (α) τον άξονα y,
   (β) την ευθεία $x = 1$.

39. *Εύρεση όγκου* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τους άξονες συντεταγμένων και την καμπύλη $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$, ως προς
   (α) τον άξονα y,
   (β) την ευθεία $x = \pi/2$.

40. *Εύρεση όγκου* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τον άξονα x και την καμπύλη $y = x \sin x$, $0 \le x \le \pi$, ως προς
   (α) τον άξονα y,
   (β) την ευθεία $x = \pi$.
   (Δείτε τη γραφική παράσταση της Άσκησης 35.)

41. *Μέση τιμή* Μια δύναμη επιβράδυνσης, που συμβολίζεται στο σχήμα από έμβολο που υφίσταται τριβές, επιβραδύνει την κίνηση του ελατηρίου και του προσδεδεμένου σώματος σε αυτό, έτσι ώστε η συνάρτηση θέσεως του σώματος τη στιγμή t να είναι
   $$y = 2e^{-t}\cos t, \qquad t \ge 0.$$

Βρείτε τη μέση τιμή του y στο διάστημα $0 \le t \le 2\pi$.



42. *Μέση τιμή* Στο σύστημα μάζας-ελατηρίου-μηχανισμού επιβράδυνσης της Άσκησης 41, η θέση του σώματος τη στιγμή t είναι

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Βρείτε τη μέση τιμή του y στο διάστημα $0 \le t \le 2\pi$.

Αναγωγικοί τύποι

Στις Ασκήσεις 43-46, εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες για να καταλήξετε σε έναν *αναγωγικό τύπο.*

43. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx$

44. $\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx$

45. $\int x^n e^{ax}\, dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \quad a \ne 0$

46. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

Ολοκλήρωση αντίστροφων συναρτήσεων

47. *Ολοκλήρωση αντίστροφων συναρτήσεων* Υποθέστε ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη.

(α) Δείξτε ότι

$$\int f^{-1}(x)\, dx = \int y f'(y)\, dy.$$

(*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y = f^{-1}(x)$.)

(β) Εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο δεύτερο ολοκλήρωμα του ερωτήματος (α) για να δείξετε ότι

$$\int f^{-1}(x)\, dx = \int y f'(y)\, dy = x f^{-1}(x) - \int f(y)\, dy.$$

48. *Ολοκλήρωση αντίστροφων συναρτήσεων* Υποθέστε ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη. Εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες κατευθείαν για να δείξετε ότι

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right) dx.$$

Στις Ασκήσεις 49-52, υπολογίστε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας

(α) την τεχνική της Άσκησης 47

(β) την τεχνική της Άσκησης 48.

(γ) Δείξτε ότι οι εκφράσεις (για $C = 0$) που πήρατε στα (α) και (β) ταυτίζονται.

49. $\int \sin^{-1} x\, dx$ **50.** $\int \tan^{-1} x\, dx$

51. $\int \cos^{-1} x\, dx$ **52.** $\int \log_2 x\, dx$

7.3 Μερικά κλάσματα

Μερικά κλάσματα • Γενική περιγραφή της μεθόδου • Η μέθοδος Heaviside για γραμμικούς συντελεστές • Άλλοι τρόποι προσδιορισμού συντελεστών

Κατά τη μελέτη μας των πληθυσμιακών μοντέλων στο Παράδειγμα 6 (Ενότητες 6.4 και 6.6), λύσαμε τη λογιστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001P\,(100 - P)$$

ξαναγράφοντάς την στη μορφή

$$\frac{100}{P\,(100 - P)}\, dP = 0{,}1\, dt\,, \quad \text{Χωρισμός μεταβλητών}$$

αναπτύσσοντας το κλάσμα του αριστερού μέλους σε δύο στοιχειώδη

κλάσματα,

$$\frac{100}{P(100 - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P}\,,$$

και ολοκληρώνοντας κάθε μέλος ώστε να βρούμε τη λύση

$$\ln|P| - \ln|100 - P| = 0{,}1t + C.$$

Η τεχνική αυτή είναι η **μέθοδος των μερικών κλασμάτων.** Κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα στοιχειωδών κλασμάτων, που καλούνται **μερικά κλάσματα,** με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων. Κατόπιν μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη ρητή συνάρτηση ολοκληρώνοντας αντ' αυτής το άθροισμα των μερικών κλασμάτων.

Μερικά κλάσματα

Για να προσθέσουμε αλγεβρικά κλάσματα βρίσκουμε έναν κοινό παρονομαστή, αθροίζουμε τα προκύπτοντα (ομώνυμα) κλάσματα, και κατόπιν απλοποιούμε. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} &= \frac{2(x-3)}{(x+1)(x-3)} + \frac{3(x+1)}{(x-3)(x+1)}\\ &= \frac{2x - 6 + 3x + 3}{x^2 - 2x - 3}\\ &= \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}.\end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

αν «αντιστρέψουμε» την πιο πάνω διαδικασία, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx &= \int \frac{2}{x+1}\, dx + \int \frac{3}{x-3}\, dx\\ &= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.\end{aligned}$$

Γενικότερα, σύμφωνα με ένα θεώρημα της προχωρημένης άλγεβρας (στο οποίο θα αναφερθούμε διεξοδικότερα αργότερα) κάθε ρητή συνάρτηση, ανεξαιρέτως πόσο περίπλοκη είναι, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα απλούστερων κλασμάτων (τα οποία μπορούμε να ολοκληρώσουμε με τις ήδη γνωστές μας τεχνικές). Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να βρούμε το απλούστερο αυτό άθροισμα με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων εφαρμοσμένη στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1 Μερικά κλάσματα

Εφαρμόστε τη μέθοδο μερικών κλασμάτων για να υπολογίσετε το

$$\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

Τα A και B καλούνται **απροσδιόριστοι συντελεστές.**

Λύση Παραγοντοποιούμε πρώτα τον παρονομαστή: $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Κατόπιν προσδιορίζουμε τις τιμές των A και B έτσι ώστε

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\,.$$

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και απλοποιούμε:

$$5x - 3 = A(x-3) + B(x+1) \quad \text{Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με } (x+1)(x-3).$$

$$= (A+B)x - 3A + B. \quad \text{Συγκεντρώνουμε τους ομοειδείς όρους.}$$

Εξισώνουμε τώρα τους συντελεστές όμοιων δυνάμεων, παίρνοντας το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

$$A + B = 5$$
$$-3A + B = -3$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές ως σύστημα παίρνουμε $A = 2$ και $B = 3$. Συνεπώς,

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx$$
$$= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.$$

Γενική περιγραφή της μεθόδου

Το κατά πόσον θα καταφέρουμε να γράψουμε μια ρητή συνάρτηση $f(x)/g(x)$ ως άθροισμα μερικών κλασμάτων εξαρτάται από δύο πράγματα:

- *Ο βαθμός του αριθμητή $f(x)$ πρέπει να είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή $g(x)$.* Με άλλα λόγια, το κλάσμα πρέπει να είναι *γνήσιο.* Αν δεν είναι, εκτελούμε τη διαίρεση του $f(x)$ με το $g(x)$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο στον όρο που προκύπτει ως υπόλοιπο της διαίρεσης. Δείτε σχετικά το Παράδειγμα 4 της παρούσας ενότητας.

- *Πρέπει να γνωρίζουμε τους παράγοντες του παρονομαστή $g(x)$.* Θεωρητικά, κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πραγματικών γραμμικών παραγόντων και πραγματικών δευτεροβάθμιων παραγόντων. Στην πράξη, οι παράγοντες μπορεί να είναι δύσκολο να βρεθούν.

Παρακάτω εξηγούμε πώς βρίσκουμε τα μερικά κλάσματα ενός γνήσιου κλάσματος $f(x)/g(x)$ όταν οι παράγοντες του παρονομαστή g μάς είναι γνωστοί.

Μέθοδος των μερικών κλασμάτων ($f(x)/g(x)$ γνήσιο κλάσμα)

Βήμα 1: Έστω $x - r$ ένας γραμμικός παράγοντας του $g(x)$. Έστω επίσης ότι $(x-r)^m$ είναι η μέγιστη δύναμη του $x - r$ που διαιρεί το $g(x)$. Αναθέτουμε στον παράγοντα αυτόν το άθροισμα m μερικών κλασμάτων:

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}.$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή για κάθε διαφορετικό γραμμικό παράγοντα του $g(x)$.

Βήμα 2: Έστω $x^2 + px + q$ ένας δευτεροβάθμιος παράγοντας του $g(x)$. Έστω επίσης ότι $(x^2+px+q)^n$ είναι η μέγιστη δύναμη του παράγοντα που διαιρεί το $g(x)$. Αναθέτουμε στον παράγοντα αυτόν το άθροισμα n μερικών κλασμάτων:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή για κάθε διαφορετικό δευτεροβάθμιο παράγοντα του $g(x)$ που δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γραμμικούς παράγοντες με πραγματικούς συντελεστές.

Βήμα 3: Εξισώνουμε το αρχικό κλάσμα $f(x)/g(x)$ με το άθροισμα όλων αυτών των μερικών κλασμάτων. Στην εξίσωση που προκύπτει κάνουμε όλα τα κλάσματα ομώνυμα ώστε να απαλοιφθούν οι παρονομαστές, και αναδιατάσσουμε τους όρους σε φθίνουσες δυνάμεις του x.

Βήμα 4: Εξισώνουμε τους συντελεστές των όμοιων δυνάμεων του x και επιλύουμε τις προκύπτουσες εξισώσεις ως προς τους απροσδιόριστους συντελεστές.

Παράδειγμα 2 Επαναλαμβανόμενος γραμμικός παράγοντας

Εκφράστε το ακόλουθο κλάσμα ως άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}.$$

Λύση Πρέπει να εκφράσουμε το κλάσμα ως άθροισμα μερικών κλασμάτων με απροσδιόριστους συντελεστές.

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$6x + 7 = A(x+2) + B \quad \text{Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος με } (x+2)^2.$$

$$= Ax + (2A + B) \quad \text{Συγκεντρώνουμε ομοειδείς όρους.}$$

Εξισώνοντας συντελεστές όμοιων δυνάμεων του x παίρνουμε

$$A = 6 \quad \text{και} \quad 2A + B = 12 + B = 7, \quad \text{δηλαδή}$$

$$A = 6 \quad \text{και} \quad B = -5.$$

Συνεπώς,

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}.$$

Παράδειγμα 3 Μερικά κλάσματα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx.$$

Λύση

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}\right) dx \quad \text{Παράδειγμα 2}$$

$$= 6\int \frac{dx}{x+2} - 5\int (x+2)^{-2}\,dx$$

$$= 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + C$$

Παράδειγμα 4 Ολοκλήρωση καταχρηστικού κλάσματος

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx.$$

Λύση Εκτελούμε πρώτα τη διαίρεση με σκοπό να καταλήξουμε σε ένα πολυώνυμο συν ένα γνήσιο κλάσμα.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - x - 3 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 4x^2 - 6x) & 2x \\ \hline 5x - 3 & \end{array}$$

Κατόπιν γράφουμε το καταχρηστικό κλάσμα ως άθροισμα του πολυωνύμου και του γνήσιου κλάσματος.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση του ότι $\int 2x\,dx = x^2$ και του Παραδείγματος 1, παίρνουμε

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \int 2x\,dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$
$$= x^2 + 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C.$$

Παράδειγμα 5 Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών

Βρείτε τη λύση της εξίσωσης $dy/dx = 2xy(y^2 + 1)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0) = 1$.

Λύση Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές, ξαναγράφοντας τη διαφορική εξίσωση ως

$$\frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy = 2x\, dx.$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέλη την εξίσωση, οπότε παίρνουμε

$$\int \frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy = \int 2x\,dx = x^2 + C_1.$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων για να ξαναγράψουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση του αριστερού μέλους.

$$\frac{1}{y(y^2 + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{By + C}{y^2 + 1}$$

Προσέξτε τον αριθμητή του δεύτερου κλάσματος: Όταν οι παράγοντες είναι δευτέρου βαθμού, τότε χρησιμοποιούμε αριθμητές πρωτοβάθμιους, όχι σταθερούς (μηδενικού βαθμού). Κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και απαλείφοντας τους παρονομαστές, οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$1 = A(y^2 + 1) + (By + C)y \quad \text{Πολλαπλασιάζουμε με } y(y^2 + 1).$$
$$= (A + B)y^2 + Cy + A$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοειδών όρων, παίρνουμε $A + B = 0$, $C = 0$, και $A = 1$. Επιλύοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε $A = 1$, $B = -1$, και $C = 0$. Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy - \int \frac{y}{y^2 + 1}\, dy$$
$$= \ln |y| - \frac{1}{2} \ln (y^2 + 1) + C_2.$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται τώρα

$$\ln |y| - \frac{1}{2} \ln (y^2 + 1) = x^2 + C. \quad C = C_1 - C_2$$

Αντικαθιστώντας $x = 0$ και $y = 1$, παίρνουμε

$$0 - \frac{1}{2} \ln 2 = C, \qquad \text{δηλαδή} \qquad C = -\ln \sqrt{2}.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι λοιπόν

$$\ln |y| - \frac{1}{2} \ln (y^2 + 1) = x^2 - \ln \sqrt{2}.$$

Ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού είναι **ανάγωγο** αν δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο γραμμικών παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές.

Παράδειγμα 6 Ολοκλήρωση όταν ο παρονομαστής περιέχει ανάγωγο δευτεροβάθμιο παράγοντα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\, dx$$

με χρήση μερικών κλασμάτων.

Λύση Ο παρονομαστής περιέχει έναν ανάγωγο δευτεροβάθμιο παράγοντα και έναν επαναλαμβανόμενο γραμμικό παράγοντα, οπότε γράφουμε

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2}. \tag{1}$$

Κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και απαλείφοντας τους παρονομαστές, παίρνουμε

$$-2x + 4 = (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1)$$
$$= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2$$
$$+ (A - 2B + C)x + (B - C + D).$$

Εξισώνοντας συντελεστές ομοειδών όρων, παίρνουμε

Συντελεστές του x^3: $0 = A + C$

Συντελεστές του x^2: $0 = -2A + B - C + D$

Συντελεστές του x^1: $-2 = A - 2B + C$

Συντελεστές του x^0: $4 = B - C + D$

Επιλύοντας ταυτόχρονα (ως σύστημα) τις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε για τα A, B, C, και D:

$-4 = -2A, \quad A = 2$ Αφαιρούμε την τέταρτη εξίσωση από τη δεύτερη.

$C = -A = -2$ Από την πρώτη εξίσωση

$B = 1$ $A = 2$ και $C = -2$ στην τρίτη εξίσωση.

$D = 4 - B + C = 1.$ Από την τέταρτη εξίσωση

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στην Εξίσωση (1), παίρνοντας

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση μπορούμε να ολοκληρώσουμε:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx\\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx\\ &= \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.\end{aligned}$$

Η μέθοδος Heaviside για γραμμικούς συντελεστές

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Oliver Heaviside
(1850-1925)

Όταν ο βαθμός του πολυωνύμου $f(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $g(x)$ και

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

είναι ένα γινόμενο n διακεκριμένων γραμμικών παραγόντων, καθένας εκ των οποίων είναι υψωμένος στην πρώτη δύναμη, υπάρχει ένας εύχρηστος και γρήγορος τρόπος να αναπτύξουμε το $f(x)/g(x)$ σε μερικά κλάσματα.

Παράδειγμα 7 Εφαρμογή της μεθόδου Heaviside

Βρείτε τα A, B, και C στο ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}. \qquad (2)$$

Λύση Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε μέλος της Εξίσωσης (2) με $(x-1)$ ώστε

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

και θέσουμε $x = 1$, προκύπτει μια εξίσωση την οποία λύνουμε ως προς A:

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A + 0 + 0,$$

$$A = 1.$$

Έτσι, το A είναι ο αριθμός που θα παίρναμε αν «καλύπταμε» (δηλ. αν ξεχνούσαμε) τον παράγοντα $(x-1)$ στον παρονομαστή του αρχικού κλάσματος

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \qquad (3)$$

και αποτιμούσαμε ό,τι απομένει στο $x = 1$:

$$A = \frac{(1)^2+1}{\boxed{(x-1)}\,(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$

Καλύπτουμε

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε την τιμή του B στην Εξίσωση (2) αν καλύψουμε τον παράγοντα $(x-2)$ στην Εξίσωση (3) και αποτιμήσουμε ό,τι απομένει στο $x = 2$:

$$B = \frac{(2)^2+1}{\boxed{(2-1)}\,(x-2)(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$

Καλύπτουμε

Τέλος, το C βρίσκεται καλύπτοντας το $(x-3)$ στην Εξίσωση (3) και αποτιμώντας στο $x = 3$:

$$C = \frac{(3)^2+1}{(3-1)(2-2)\,\boxed{(x-3)}} = \frac{10}{(2)(-1)} = 5.$$

Καλύπτουμε

Μέθοδος Heaviside

Βήμα 1: *Γράφουμε το πηλίκο με παραγοντοποιημένο τον παρονομαστή* $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}.$$

Βήμα 2: *Καλύπτουμε έναν-έναν τους παράγοντες* $(x - r_i)$ *του* $g(x)$, αντικαθιστώντας κάθε φορά όπου x με r_i. Έτσι προκύπτει ένα A_i για κάθε ρίζα r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}.$$

Βήμα 3: *Γράφουμε το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα του πηλίκου* $f(x)/g(x)$ ως

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}.$$

Παράδειγμα 8 Ολοκλήρωση με τη μέθοδο Heaviside

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx.$$

Λύση Ο βαθμός του $f(x) = x + 4$ είναι μικρότερος του βαθμού του $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$, ενώ παραγοντοποιώντας το $g(x)$ παίρνουμε

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}.$$

Οι ρίζες του $g(x)$ είναι $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, και $r_3 = -5$. Βρίσκουμε λοιπόν

$$A_1 = \frac{0+4}{\boxed{x}\,(0-2)(0+5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

Καλύπτουμε

$$A_2 = \frac{2+4}{2\,\boxed{(x-2)}\,(2+5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

Καλύπτουμε

$$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)\,\boxed{(x+5)}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}.$$

Καλύπτουμε

Συνεπώς,

$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)},$$

και

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C.$$

Άλλοι τρόποι προσδιορισμού συντελεστών

Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού των συντελεστών των μερικών κλασμάτων είναι να παραγωγίσουμε, όπως θα κάνουμε στο αμέσως επόμενο παράδειγμα. Ένας τρίτος πάλι τρόπος είναι να αναθέσουμε επιλεγμένες αριθμητικές τιμές στο x.

Παράδειγμα 9 Χρήση παραγώγισης

Βρείτε τα A, B, και C στο ανάπτυγμα

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

Λύση Κατ' αρχάς απαλείφουμε τους παρονομαστές:

$$x - 1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C.$$

Αντικαθιστώντας $x = -1$ παίρνουμε $C = -2$. Κατόπιν παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς x, παίρνοντας

$$1 = 2A(x+1) + B.$$

Αντικαθιστώντας $x = -1$ παίρνουμε $B = 1$. Κατόπιν παραγωγίζουμε και πάλι παίρνοντας $0 = 2A$, οπότε $A = 0$. Έτσι,

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Σε μερικά προβλήματα, τα A, B, και C βρίσκονται ακόμη ταχύτερα αν δώσουμε μικρές τιμές στο x, όπως $x = 0, \pm 1, \pm 2$, και λύσουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τα A, B, και C.

Παράδειγμα 10 Απόδοση τιμών στο x

Βρείτε τα A, B, και C στο ανάπτυγμα

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Λύση Απαλείφουμε τους παρονομαστές οπότε παίρνουμε

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Θέτουμε διαδοχικά $x = 1, 2, 3$ για να βρούμε τα A, B, και C:

$$\begin{aligned}
x = 1:&\quad (1)^2 + 1 = A(-1)(-2) + B(0) + C(0)\\
&\quad 2 = 2A\\
&\quad A = 1\\
x = 2:&\quad (2)^2 + 1 = A(0) + B(1)(-1) + C(0)\\
&\quad 5 = -B\\
&\quad B = -5\\
x = 3:&\quad (3)^2 + 1 = A(0) + B(0) + C(2)(1)\\
&\quad 10 = 2C\\
&\quad C = 5.
\end{aligned}$$

Συμπέρασμα:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.3

Ανάπτυξη πηλίκων σε μερικά κλάσματα

Αναπτύξτε τα πηλίκα των Ασκήσεων 1-8 σε μερικά κλάσματα.

1. $\dfrac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$
2. $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$
3. $\dfrac{x+4}{(x+1)^2}$
4. $\dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$
5. $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$
6. $\dfrac{z}{z^3-z^2-6z}$
7. $\dfrac{t^2+8}{t^2-5t+6}$
8. $\dfrac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

Μη επαναλαμβανόμενοι γραμμικοί συντελεστές

Στις Ασκήσεις 9-16, εκφράστε τις ολοκληρωτέες ποσότητες ως άθροισμα μερικών κλασμάτων και κατόπιν υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$
11. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$
13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$
14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y}\,dy$
15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$
16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx$

Επαναλαμβανόμενοι γραμμικοί συντελεστές

Στις Ασκήσεις 17-20, εκφράστε τις ολοκληρωτέες ποσότητες ως άθροισμα μερικών κλασμάτων και κατόπιν υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+1}$
18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

Ανάγωγοι δευτεροβάθμιοι παράγοντες

Στις Ασκήσεις 21-28, εκφράστε τις ολοκληρωτέες ποσότητες ως άθροισμα μερικών κλασμάτων και κατόπιν υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$
22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$
23. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$
24. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,ds$
26. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds$
27. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,d\theta$
28. $\displaystyle\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,d\theta$

Καταχρηστικά κλάσματα

Στις Ασκήσεις 29-34, εκτελέστε τη διαίρεση που αναπαριστά η ολοκληρωτέα συνάρτηση, γράψτε το προκύπτον γνήσιο κλάσμα ως άθροισμα μερικών κλασμάτων και κατόπιν υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

29. $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,dy$
34. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}\,dy$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 35-40.

35. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$
36. $\displaystyle\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}\,dt$
37. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$
38. $\displaystyle\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$
39. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

Προβλήματα αρχικών τιμών

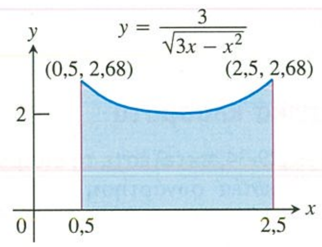
Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών στις Ασκήσεις 41-48.

41. $(t^2-3t+2)\dfrac{dx}{dt} = 1 \quad (t>2),\quad x(3)=0$
42. $(3t^4+4t^2+1)\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3},\quad x(1) = -\pi\sqrt{3}/4$
43. $(t^2+2t)\dfrac{dx}{dt} = 2x+2 \quad (t, x > 0),\quad x(1)=1$
44. $(t+1)\dfrac{dx}{dt} = x^2+1 \quad (t>-1),\quad x(0)=\pi/4$
45. $\dfrac{dy}{dx} = e^x(y^2-y),\quad y(0)=2$
46. $\dfrac{dy}{d\theta} = (y+1)^2\sin\theta \quad y(\pi/2)=0$
47. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2-3x+2},\quad y(3)=0$
48. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2s+2}{t^2+2t},\quad s(1)=1$

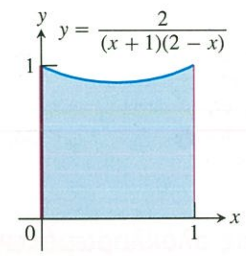
Εφαρμογές και παραδείγματα

Στις Ασκήσεις 49 και 50, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το γραμμοσκιασμένο χωρίο ως προς τον υποδεικνυόμενο άξονα.

49. Περιστροφή ως προς τον άξονα x



50. Περιστροφή ως προς τον άξονα y



51. *Κοινωνική διάχυση* Οι κοινωνιολόγοι χρησιμοποιούν ενίοτε τον όρο «κοινωνική διάχυση» για να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο μια πληροφορία διαδίδεται σε έναν πληθυσμό. Η πληροφορία αυτή μπορεί να είναι κάποια φήμη, μια τρέχουσα μόδα, ή η είδηση για μια νέα τεχνολογική καινοτομία. Σε έναν αρκούντως μεγάλο πληθυσμό, ο αριθμός των ατόμων x που κατέχουν την πληροφορία θεωρείται παραγωγίσιμη συνάρτηση του χρόνου t, και ο ρυθμός διάχυσης, dx/dt, θεωρείται ανάλογος του γινομένου του αριθμού των ατόμων που κατέχουν την πληροφορία επί τον αριθμό αυτών που δεν την κατέχουν. Έτσι, οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

όπου N είναι ο συνολικός πληθυσμός.

Έστω ότι ο χρόνος t μετριέται σε ημέρες, ότι $k = 1/250$, και ότι δύο άτομα διαδίδουν για πρώτη φορά μια φήμη τη στιγμή $t = 0$ σε έναν πληθυσμό $N = 1000$ ανθρώπων.

(α) Βρείτε το x συναρτήσει του t.

(β) Πότε θα έχει ακούσει τη φήμη ο μισός πληθυσμός; (Τότε είναι που θα εξαπλώνεται τάχιστα η φήμη.)

52. *Χημικές αντιδράσεις δεύτερης τάξεως* Πολλές χημικές αντιδράσεις είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο μορίων για τη δημιουργία ενός προϊόντος. Ο ρυθμός με τον οποίο προχωρά η αντίδραση εξαρτάται συνήθως από τις συγκεντρώσεις που έχουν αυτά τα δύο είδη μορίων. Αν a είναι η ποσότητα της ουσίας A και b η ποσότητα της ουσίας B τη χρονική στιγμή $t = 0$, και αν x είναι η ποσότητα του προϊόντος τη χρονική στιγμή t, τότε ο ρυθμός σχηματισμού του x περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

δηλαδή

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)} \frac{dx}{dt} = k,$$

όπου k είναι μια σταθερά της αντίδρασης. Ολοκληρώστε κάθε μέλος της εξίσωσης αυτής για να πάρετε μια σχέση μεταξύ των x και t

(α) αν $a = b$

(β) αν $a \neq b$.

Υποθέστε σε κάθε περίπτωση ότι $x = 0$ για $t = 0$.

7.4 Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Τρεις βασικές αντικαταστάσεις

Οι τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις μάς επιτρέπουν να αντικαθιστούμε τα διώνυμα της μορφής $a^2 + x^2$, $a^2 - x^2$, και $x^2 - a^2$ με απλούς όρους (μονώνυμα) στο τετράγωνο, και με αυτόν τον τρόπο να μετασχηματίζουμε ολοκληρώματα που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες σε ολοκληρώματα που μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε.

Τρεις βασικές αντικαταστάσεις

Οι συνηθέστερες αντικαταστάσεις είναι $x = a \tan\theta$, $x = a \sin\theta$, και $x = a \sec\theta$. Προκύπτουν από τα τρίγωνα αναφοράς του Σχήματος 7.3.

Για $x = a \tan\theta$,

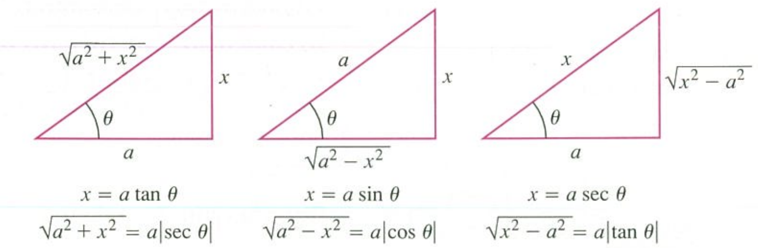
$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2\theta = a^2(1 + \tan^2\theta) = a^2 \sec^2\theta.$$

Για $x = a \sin\theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2\theta = a^2(1 - \sin^2\theta) = a^2 \cos^2\theta.$$

Για $x = a \sec\theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2 \tan^2\theta.$$



ΣΧΗΜΑ 7.3 Τρίγωνα αναφοράς για τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις που μετατρέπουν διώνυμα σε μονώνυμα στο τετράγωνο.

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

1. Η $x = a\tan\theta$ αντικαθιστά το $a^2 + x^2$ με το $a^2\sec^2\theta$.
2. Η $x = a\sin\theta$ αντικαθιστά το $a^2 - x^2$ με το $a^2\cos^2\theta$.
3. Η $x = a\sec\theta$ αντικαθιστά το $x^2 - a^2$ με το $a^2\tan^2\theta$.

Θέλουμε κάθε αντικατάσταση μεταβλητής που χρησιμοποιούμε κατά την ολοκλήρωση να είναι αντιστρέψιμη, έτσι ώστε να μπορούμε να μεταβαίνουμε στην αρχική μεταβλητή μετά το πέρας της ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, αν $x = a\tan\theta$, θέλουμε να μπορούμε μετά την ολοκλήρωση να θέσουμε $\theta = \tan^{-1}(x/a)$. Αν $x = a\sin\theta$, θέλουμε να μπορούμε να θέσουμε $\theta = \sin^{-1}(x/a)$ αφού υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα· το ίδιο και για την αντικατάσταση $x = a\sec\theta$.

Για να έχουμε λοιπόν αντιστρεψιμότητα,

η $x = a\tan\theta$ απαιτεί $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ με $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

η $x = a\sin\theta$ απαιτεί $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ με $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

η $x = a\sec\theta$ απαιτεί $\theta = \sec^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ με $\begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{x}{a} \ge 1 \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi, & \dfrac{x}{a} \le -1. \end{cases}$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
George Berkeley
(1685-1753)

Παράδειγμα 1 Χρήση της αντικατάστασης $x = a\tan\theta$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

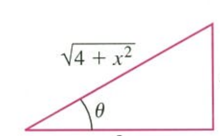
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

Λύση Θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \quad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$
$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} && \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| \\
&= \int \sec\theta\, d\theta && \sec\theta > 0 \text{ για } -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2} \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C && \text{Από το Σχήμα 7.4} \\
&= \ln|\sqrt{4 + x^2} + x| + C'. && \text{Θέτοντας } C' = C - \ln 2
\end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 7.4 Τρίγωνο αναφοράς για $x = 2\tan\theta$ (Παράδειγμα 1):

$$\tan\theta = \frac{x}{2}$$

και

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}.$$

Προσέξτε πώς εκφράσαμε το $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ συναρτήσει του x: Σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο αναφοράς για την αρχική αντικατάσταση $x = 2\tan\theta$ (Σχήμα 7.4) και από το τρίγωνο αυτό εκφράζουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που χρειαζόμαστε ως κατάλληλους λόγους πλευρών.

Παράδειγμα 2 Χρήση της αντικατάστασης $x = a\sin\theta$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

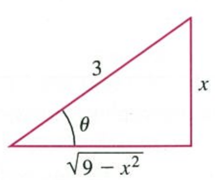
$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}, \qquad -3 < x < 3.$$

Λύση Θέτουμε

$$x = 3\sin\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\,d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$9 - x^2 = 9 - 9\sin^2\theta = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{27\sin^3\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta}{|3\cos\theta|} && \cos\theta > 0 \text{ για } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\\
&= 27\int \sin^3\theta\,d\theta\\
&= 27\int (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta && \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta\\
&= -27\cos\theta + 9\cos^3\theta + C\\
&= -27\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + 9\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^3 + C && \text{Σχήμα 7.5, } a = 3\\
&= -9\sqrt{9-x^2} + \frac{(9-x^2)^{3/2}}{3} + C.
\end{aligned}$$



Σχημα 7.5 Τρίγωνο αναφοράς για $x = 3\sin\theta$ (Παράδειγμα 2):

$$\sin\theta = \frac{x}{3}$$

και

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

Παράδειγμα 3 Χρήση της αντικατάστασης $x = a\sec\theta$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

Λύση Κατ' αρχάς ξαναγράφουμε τη ρίζα ως εξής

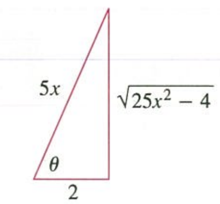
$$\begin{aligned}
\sqrt{25x^2-4} &= \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}\\
&= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}
\end{aligned}$$

έτσι ώστε να φέρουμε την υπόρριζη ποσότητα στη μορφή $x^2 - a^2$. Κατόπιν αντικαθιστούμε

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 &= \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}\\
&= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta && \tan\theta > 0 \text{ για } 0 < \theta < \pi/2
\end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta.$$



Σχημα 7.6 Αν $x = (2/5)\sec\theta$, $0 \le \theta < \pi/2$, τότε $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$, ενώ οι τιμές των υπόλοιπων τριγωνομετρικών συναρτήσεων του θ βρίσκονται από αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο.

Με τις αντικαταστάσεις αυτές, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} &= \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2-(4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta}\\
&= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C\\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C && \text{Σχήμα 7.6}
\end{aligned}$$

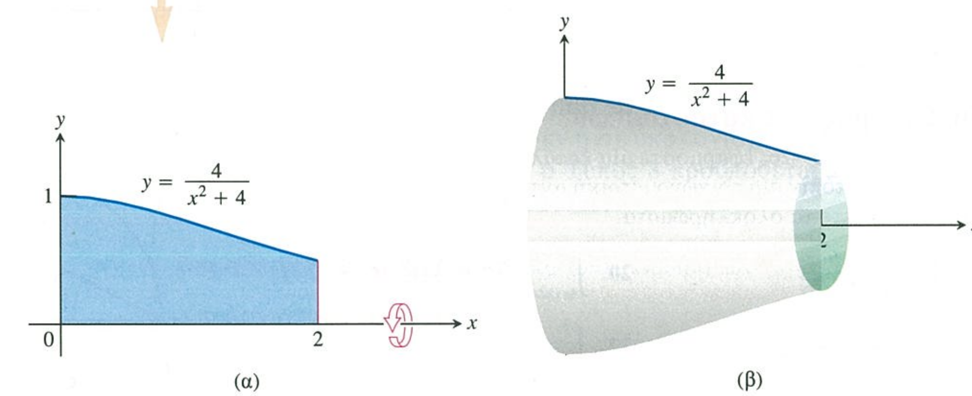
Μερικές φορές μια τριγωνομετρική αντικατάσταση μας βοηθά στον υπολογισμό ολοκληρώματος που περιέχει πολυώνυμο δεύτερου βαθμού υψωμένο σε ρητή δύναμη, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4 Εύρεση του όγκου στερεού εκ περιστροφής

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = 4/(x^2+4)$, τον άξονα x, και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

Λύση Σχεδιάζουμε το χωρίο (Σχήμα 7.7) και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των δίσκων για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$V = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\,dx = 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}. \qquad R(x) = \frac{4}{x^2+4}$$



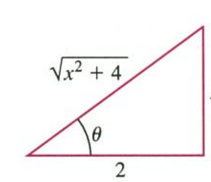
Σχημα 7.7 Το χωρίο (α) και το στερεό (β) του Παραδείγματος 4.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2},$$
$$x^2 + 4 = 4\tan^2\theta + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

(Σχήμα 7.8). Με τις αντικαταστάσεις αυτές, έχουμε

$$\begin{aligned}
V &= 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}\\
&= 16\pi\int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} && \theta = 0 \text{ για } x = 0\text{· } \theta = \pi/4 \text{ για } x = 2\\
&= 16\pi\int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi\int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\,d\theta\\
&= \pi\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \pi\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} && 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta\\
&= \pi\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] \approx 4{,}04.
\end{aligned}$$



Σχημα 7.8 Τρίγωνο αναφοράς του $x = 2\tan\theta$. (Παράδειγμα 4)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.4

Βασικές τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 1-18.

1. $\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$

2. $\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

3. $\int \sqrt{25-t^2}\,dt$

4. $\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x>\frac{7}{2}$

6. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x>\frac{3}{5}$

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$

8. $\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$

9. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

11. $\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

12. $\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$

13. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x>1$

14. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x>1$

15. $\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

16. $\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$

17. $\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$

18. $\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$

Συνδυασμός αντικαταστάσεων

Στις Ασκήσεις 19-26, εφαρμόστε μία κατάλληλη αντικατάσταση και κατόπιν μια τριγωνομετρική αντικατάσταση για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

19. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$

20. $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

21. $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$

22. $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

24. $\int \frac{dx}{1+x^2}$

25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 27-30 ως προς το y συναρτήσει του x.

27. $x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2-4}, \quad x\ge 2, \quad y(2)=0$

28. $\sqrt{x^2-9}\,\frac{dy}{dx}=1, \quad x>3, \quad y(5)=\ln 3$

29. $(x^2+4)\,\frac{dy}{dx}=3, \quad y(2)=0$

30. $(x^2+1)^2\,\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+1}, \quad y(0)=1$

Εφαρμογές

31. *Εύρεση εμβαδού* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τους άξονες συντεταγμένων και την καμπύλη $y=\sqrt{9-x^2}/3$.

32. *Εύρεση όγκου* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x το χωρίο που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τους άξονες συντεταγμένων, την καμπύλη $y=2/(1+x^2)$, και την ευθεία $x=1$.

Η αντικατάσταση $z=\tan(x/2)$

33. Η αντικατάσταση

$$z=\tan\frac{x}{2}$$

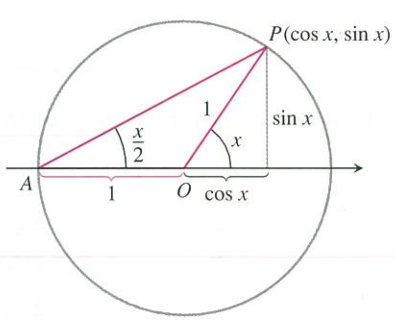
(δείτε το σχήμα) ανάγει το πρόβλημα ολοκλήρωσης κάθε ρητής συνάρτησης των $\sin x$ και $\cos x$ σε πρόβλημα ολοκλήρωσης ρητής συνάρτησης του z. Το τελευταίο μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων. Δείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι αληθής.

(α) $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

(β) $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

(γ) $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$

(δ) $dx=\frac{2\,dz}{1+z^2}$



Στις Ασκήσεις 34-41, εφαρμόστε την αντικατάσταση $z=\tan(x/2)$ και τα αποτελέσματα της Άσκησης 33 για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

34. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

35. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

36. $\int \frac{d\theta}{1-\sin\theta}$

37. $\int \frac{dt}{1+\sin t+\cos t}$

38. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

39. $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$

40. $\int \frac{dt}{\sin t-\cos t}$

41. $\int \frac{\cos t\,dt}{1-\cos t}$

7.5 Πίνακες ολοκληρωμάτων, συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας και ολοκλήρωση με τη μέθοδο Monte Carlo

Πίνακες ολοκληρωμάτων • Ολοκλήρωση με σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας • Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Monte Carlo

Όπως έχουμε δει, οι κύριες τεχνικές ολοκλήρωσης είναι η αντικατάσταση και η ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Με τις τεχνικές αυτές μπορούμε να μετασχηματίζουμε ένα ολοκλήρωμα δίνοντάς του μορφή την οποία μπορούμε είτε να υπολογίσουμε αναλυτικά είτε να εντοπίσουμε σε πίνακα ολοκληρωμάτων. Αν έχουμε πρόσβαση σε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας (π.χ. Mathematica ή Maple), μπορούμε εύκολα να βρούμε την τιμή ενός ολοκληρώματος. Μια άλλη τεχνική προσεγγιστικού υπολογισμού ενός ορισμένου ολοκληρώματος καλείται *μέθοδος Monte Carlo.* Στην παρούσα ενότητα θα διερευνήσουμε όλες αυτές τις μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Πίνακες ολοκληρωμάτων

Ένας περιεκτικός πίνακας ολοκληρωμάτων παρέχεται στο τέλος του βιβλίου, μετά το Ευρετήριο. Οι τύποι ολοκλήρωσης περιέχουν τις σταθερές a, b, c, m, n, κ.ο.κ. Συνήθως οι σταθερές αυτές μπορούν να πάρουν κάθε πραγματική τιμή, όχι απαραιτήτως ακέραια· τυχόν περιορισμοί δηλώνονται μαζί με τους τύπους. Παραδείγματος χάριν, ο Τύπος 5 προϋποθέτει $n\neq -1$, ενώ ο Τύπος 11 προϋποθέτει $n\neq -2$.

Υπονοείται, επίσης, ότι οι σταθερές δεν παίρνουν τιμές που καταλήγουν σε διαίρεση με το μηδέν ή σε υπολογισμό ρίζας αρνητικού αριθμού. Παραδείγματος χάριν, ο Τύπος 8 προϋποθέτει $a\neq 0$, ενώ ο Τύπος 13(α) ισχύει μόνο για b θετικό.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
David Hilbert
(1862-1943)

Παράδειγμα 1 Χρήση πίνακα ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-2x+5}\right)dx.$$

Λύση

$$\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-2x+5}\right)dx=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx \quad (1)$$

Και τα δύο ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (1) μπορούν να υπολογιστούν βάσει του Τύπου 16 του Πίνακα Ολοκληρωμάτων.

$$16.\ \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

Θα θυμάστε μάλλον ότι

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C,$$

αλλά αν η μνήμη σας σάς απατά, μπορείτε να πάρετε το ίδιο αποτέλεσμα θέτοντας $a=1$ στον Τύπο 16.

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος, πρέπει να συμπληρώσουμε το τετράγωνο:

$$x^2-2x+5=x^2-2x+1+4=(x-1)^2+4.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-2x+5} &= \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \int \frac{du}{u^2+4} && u = x-1,\ du = dx \\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} + C && \text{Τύπος 16 για } a = 2 \\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ολοκληρώσεις, παίρνουμε

$$\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2-2x+5}\right) dx = \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Οι χειρισμοί και οι αντικαταστάσεις που κάναμε στο Παράδειγμα 1 είναι αντιπροσωπευτικοί του τρόπου που εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας πίνακες ολοκληρωμάτων. Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2 Χρήση πίνακα ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}.$$

Λύση Αφετηρία μας είναι ο Τύπος 15:

$$\mathbf{15.}\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C.$$

Για $a = 2$ και $b = -4$, έχουμε

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2\cdot 4}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C.$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε τον Τύπο 13(α) για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος

$$\mathbf{13(α).}\ \int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C.$$

Για $a = 2$ και $b = 4$, έχουμε

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

Συνδυάζουμε τις δύο ολοκληρώσεις και παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

Ολοκλήρωση με σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας

Μια εξαιρετικά σημαντική δυνατότητα των συστημάτων υπολογιστικής άλγεβρας είναι η συμβολική [Σ.τ.Μ. όχι αριθμητική] ολοκλήρωση. Η συμβολική ολοκλήρωση εκτελείται εάν εισάγουμε την **εντολή ολοκλήρωσης** όπως αυτή ορίζεται στο εκάστοτε σύστημα (π.χ., **int** στη Maple, **Integrate** στη Mathematica).

Παράδειγμα 3 Ολοκλήρωση αφού ορίσουμε τη συνάρτηση

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2+x^2}.$$

Αν εργαζόμαστε σε περιβάλλον Maple, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε (να κατονομάσουμε δηλαδή) τη συνάρτηση:

```
> f := x^2 * sqrt (a^2 + x^2);
```

Έπειτα χρησιμοποιούμε την εντολή ολοκλήρωσης επί της f, ορίζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης:

```
> int(f, x);
```

Η Maple δίνει τότε το αποτέλεσμα

$$\frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Θέλοντας να μάθουμε κατά πόσον μπορεί να απλοποιηθεί το αποτέλεσμα αυτό, πληκτρολογούμε

```
> simplify('');
```

Η Maple δίνει τότε

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα για $0 \le x \le \pi/2$, τότε εισάγουμε

```
> int(f, x = 0..Pi/2);
```

Η Maple (Έκδοση 3.0) μας δίνει τότε την έκφραση

$$\frac{1}{64}(4a^2+\pi^2)^{3/2}\pi - \frac{1}{8}a^4\ln\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+\pi^2}\right)$$
$$- \frac{1}{32}a^2\sqrt{4a^2+\pi^2}\,\pi + \frac{1}{8}a^4\ln\left(\sqrt{a^2}\right).$$

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα για συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς a:

```
> a := 1;
> int(f, x = 0..1);
```

Η Maple μας δίνει τότε το αποτέλεσμα

$$\frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Παράδειγμα 4 Ολοκλήρωση χωρίς να ορίσουμε τη συνάρτηση

Με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$$

Λύση Αν χρησιμοποιούμε Maple, εισάγουμε την εντολή

> int((sin ^2)(x)*(cos ^3)(x), x);

οπότε παίρνουμε

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4+\frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x)+\frac{2}{15}\sin(x).$$

Παράδειγμα 5 Ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας δεν μας δίνει πάντοτε λύση σε κλειστή μορφή

Με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int(\cos^{-1}ax)^2\,dx.$$

Λύση Αν χρησιμοποιούμε Maple, εισάγουμε την εντολή

> int((arccos(a*x))^2, x);

οπότε παίρνουμε στην οθόνη μας το αποτέλεσμα

$$\int \arccos(ax)^2\,dx,$$

που υποδηλώνει ότι για το ολοκλήρωμα αυτό η Maple δεν διαθέτει κλειστή αναλυτική έκφραση. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίζουμε τέτοιου είδους ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας αναπτύγματα σε σειρές.

Τα διάφορα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας ποικίλλουν ως προς τον τρόπο που εκτελούν την ολοκλήρωση. Χρησιμοποιήσαμε Maple στα Παραδείγματα 3 έως 5. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει Mathematica, θα βλέπαμε στην οθόνη μας τα εξής:

1. Στο Παράδειγμα 3, δίνοντας την εντολή

   In [1]: = Integrate [x^2 * Sqrt [a^2 + x^2], x]

   η Mathematica μας δίνει το αποτέλεσμα

   $$\text{Out}\,[1]=\text{Sqrt}\,[a^2+x^2]\left(\frac{a^2x}{8}+\frac{x^3}{4}\right)-\frac{a^4\,\text{Log}\,[x+\text{Sqrt}\,[a^2+x^2]]}{8}$$

   χωρίς να απαιτείται απλοποίηση κάποιου ενδιάμεσου αποτελέσματος. Η έκφραση αυτή έχει σχεδόν την ίδια μορφή με αυτήν του Τύπου 22 στον Πίνακα Ολοκληρωμάτων.

2. Η απόκριση της Mathematica στην εντολή ολοκλήρωσης

   In [2]: = Integrate [Sin [x]^2 * Cos [x]^3, x]

   του Παραδείγματος 4 είναι

   $$\text{Out}\,[2]=\frac{30\,\text{Sin}\,[x]-5\,\text{Sin}\,[3x]-3\,\text{Sin}\,[5x]}{240}$$

   που διαφέρει αισθητά από την έκφραση που μας έδωσε η Maple.

3. Η Mathematica μας δίνει αποτέλεσμα σε κλειστή έκφραση για το ολοκλήρωμα

   In [3]: = Integrate [ArcCos [a * x]^2, x]

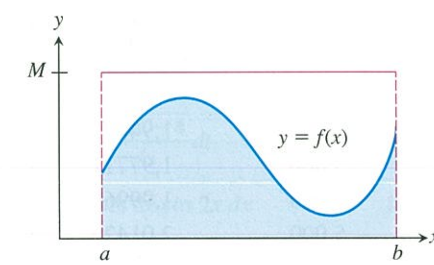
   στο Παράδειγμα 5:

   $$\text{Out}\,[3]=-2x-\frac{2\,\text{Sqrt}\,[1-a^2x^2]\,\text{ArcCos}\,[ax]}{a}+x\text{ArcCos}\,[ax]^2.$$

Παρόλο που τα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας έχουν όντως πολύ μεγάλες δυνατότητες και μπορούν να μας βοηθήσουν στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων, κάθε τέτοιο σύστημα έχει και τους περιορισμούς του. Υπάρχουν μάλιστα περιπτώσεις στις οποίες ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας μπορεί να περιπλέξει περισσότερο ένα πρόβλημα (υπό την έννοια ότι μπορεί να μας δώσει μια απάντηση εξαιρετικά δύσχρηστη ή περίπλοκη για να την κατανοήσουμε). Εντούτοις, με λίγη μαθηματική σκέψη από την πλευρά μας είναι δυνατόν να αναγάγουμε το πρόβλημα σε ένα εύκολα επιλύσιμο ισοδύναμό του. Θα δούμε μια τέτοια περίπτωση στην Άσκηση 49.

Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Monte Carlo

Σε πολλές εφαρμογές συναντούμε ολοκληρώματα του τύπου $\int_1^{100} e^{x^2}\,dx$, τα οποία δεν μπορούν να υπολογιστούν με τις αναλυτικές τεχνικές που παρουσιάσαμε ώς τώρα. Τέτοιου είδους ολοκληρώματα μπορούμε να τα προσεγγίζουμε με αριθμητικές μεθόδους, π.χ. με τον Κανόνα του Τραπεζίου ή με τον Κανόνα Simpson (Ενότητα 4.7). Μια άλλη αριθμητική μέθοδος προσεγγιστικού υπολογισμού τέτοιων ολοκληρωμάτων, είναι η **ολοκλήρωση Monte Carlo,** η οποία είναι μάλιστα εύκολα γενικεύσιμη για πολλαπλά ολοκληρώματα (Κεφάλαιο 12). Συνήθως χρησιμοποιούμε υπολογιστή για την εφαρμογή της μεθόδου. Θα δούμε πώς λειτουργεί, μέσω ενός απλού παραδείγματος.



Σχημα 7.9 Φανταστείτε ότι η ορθογώνια περιοχή είναι η επιφάνεια στόχου βολών με βελάκια.

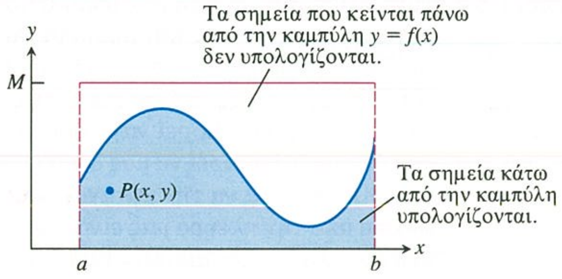
Παράδειγμα 6 Υπολογισμός εμβαδού χωρίου «κάτω» από μη αρνητική καμπύλη, με ολοκλήρωση Monte Carlo

Θεωρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x και τη συνεχή καμπύλη $y=f(x)$, $0\le f(x)\le M$, στο κλειστό διάστημα $a\le x\le b$, ως μέρος του εμβαδού του συνολικού ορθογωνίου που φαίνεται στο Σχήμα 7.9. Επιλέγουμε τυχαία ένα μεγάλο πλήθος σημείων $P(x, y)$ εντός του ορθογωνίου και χρησιμοποιούμε τα σημεία αυτά για να εκτιμήσουμε το εμβαδόν «κάτω» από την καμπύλη.

CD-ROM Δικτυότοπος

Λύση Για να «επιλέξουμε τυχαία» ένα σημείο εντός του ορθογωνίου, χρησιμοποιούμε υπολογιστή ή κομπιουτεράκι που διαθέτει γεννήτορα τυχαίων αριθμών. Πρώτα ζητάμε από τον υπολογιστή να παραγάγει έναν τυχαίο αριθμό x που ικανοποιεί τη συνθήκη $a\le x\le b$. Θεωρητικά, όλοι οι αριθμοί στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν. Κατόπιν ζητούμε από τον υπολογιστή να επιλέξει έναν δεύτερο τυχαίο αριθμό y που να ικανοποιεί τη συνθήκη $0\le y\le M$. Και πάλι όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $[0, M]$ έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής, θεωρητικά τουλάχιστον. Το σημείο $P(x, y)$ θα κείται συνεπώς εντός της ορθογώνιας περιοχής του Σχήματος 7.9. Έχοντας επιλέξει έτσι το σημείο $P(x, y)$, διερωτώμαστε αν το σημείο κείται εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής κάτω από την καμπύλη· δηλαδή, ικανοποιεί η συντεταγμένη του y τη συνθήκη $0\le y<f(x)$; Αν ναι, τότε προσμετράμε το σημείο P προσθέτοντας τη μονάδα σε κάποιον μετρητή. Απαιτούνται δύο μετρητές· ένας καταγράφει το συνολικό πλήθος των τυχαίων σημείων που παρήχθησαν κι ένας δεύτερος μετρά πόσα σημεία κείνται κάτω από την καμπύλη (δείτε το Σχήμα 7.10). Συλλέγουμε ένα μεγάλο πλήθος σημείων P με τη μέθοδο που περιγράψαμε, προσμετρώντας μόνο εκείνα που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη. Κατόπιν μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη με τον τύπο

$$\frac{\text{Εμβαδόν χωρίου κάτω από καμπύλη}}{\text{εμβαδόν ορθογώνιας περιοχής}}\approx\frac{\text{Πλήθος σημείων που προσμετρήθηκαν κάτω από την καμπύλη}}{\text{συνολικό πλήθος τυχαίων σημείων}}\qquad(2)$$



Σχήμα 7.10 Το εμβαδόν του χωρίου «κάτω» από τη μη αρνητική καμπύλη $y = f(x)$, $a \le x \le b$, περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ύψους M και βάσης $b - a$.

Πίνακας 7.3 Προσέγγιση Monte Carlo του εμβαδού του χωρίου «κάτω» από την καμπύλη $y = \cos x$ στο διάστημα $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

Αριθμός σημείων	Προσεγγιστικό εμβαδόν	Αριθμός σημείων	Προσεγγιστικό εμβαδόν
100	2,07345	2.000	1,94465
200	2,13628	3.000	1,97711
300	2,01064	4.000	1,99962
400	2,12058	5.000	2,01429
500	2,04832	6.000	2,02319
600	2,09440	8.000	2,00669
700	2,02857	10.000	2,00873
800	1,99491	15.000	2,00978
900	1,99666	20.000	2,01093
1.000	1,96664	30.000	2,01186

Για παράδειγμα, ο Πίνακας 7.3 δίνει εκτιμήσεις του εμβαδού κάτω από την καμπύλη $y = \cos x$ και πάνω από τον άξονα x για το διάστημα $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Επιλέξαμε τον αριθμό $M = 2$ ως ύψος της ορθογώνιας περιοχής, και εκτιμήσαμε το εμβαδόν μετά από επιλογή 100, 200, ..., 30.000 τυχαίων σημείων στην ορθογώνια περιοχή, εφαρμόζοντας τον τύπο (2).

Η πραγματική τιμή του εμβαδού κάτω από την καμπύλη $y = \cos x$ στο δεδομένο διάστημα είναι 2 τετραγωνικές μονάδες. Αξίζει να προσέξετε ότι ακόμη και για σχετικά μεγάλο πλήθος τυχαίων σημείων, το μέγεθος του σφάλματος είναι αισθητό. Για συναρτήσεις μίας μεταβλητής, η ολοκλήρωση Monte Carlo δεν αποδίδει τόσο καλά όσο οι τεχνικές που είδαμε στην Ενότητα 4.7. Άλλα μειονεκτήματα της μεθόδου είναι η έλλειψη άνω φράγματος στο σφάλμα, καθώς και η πιθανή δυσκολία μας στο να γνωρίζουμε εκ των προτέρων κάποιο άνω όριο M για την τιμή της συνάρτησης. Ωστόσο, η τεχνική Monte Carlo μπορεί να επεκταθεί σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, οπότε γίνεται σαφώς πιο εύχρηστη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.5

Χρήση πινάκων ολοκληρωμάτων

Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ολοκληρωμάτων στο τέλος του βιβλίου για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 1-20.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$ **2.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

3. $\int x\sqrt{2x-3}\,dx$ **4.** $\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,dx$

5. $\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$ **6.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$

7. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ **8.** $\int \sqrt{25-p^2}\,dp$

9. $\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$ **10.** $\int \frac{d\theta}{5+4\sin 2\theta}$

11. $\int e^{2t}\cos 3t\,dt$ **12.** $\int x\cos^{-1}x\,dx$

13. $\int \frac{ds}{(9-s^2)^2}$ **14.** $\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t}\,dt$ **16.** $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$

17. $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$ **18.** $\int 8\sin 4t\sin\frac{t}{2}\,dt$

19. $\int \cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{4}\,d\theta$ **20.** $\int \cos\frac{\theta}{2}\cos 7\theta\,d\theta$

Αντικατάσταση και πίνακες ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 21-32, εφαρμόστε αντικατάσταση για να φέρετε το ολοκλήρωμα σε μορφή που μπορείτε να εντοπίσετε σε έναν πίνακα ολοκληρωμάτων. Κατόπιν υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

21. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$ **22.** $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2}\,dx$

23. $\int \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx$ **24.** $\int \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

25. $\int \cot t\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt, \quad 0 < t < \pi/2$

26. $\int \frac{dt}{\tan t\sqrt{4-\sin^2 t}}$ **27.** $\int \frac{dy}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$

28. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{5+\sin^2\theta}}$ **29.** $\int \frac{3\,dr}{\sqrt{9r^2-1}}$

30. $\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$ **31.** $\int \cos^{-1}\sqrt{x}\,dx$

32. $\int \tan^{-1}\sqrt{y}\,dy$

Γινόμενα δυνάμεων του x και εκθετικών

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 33-36 με χρήση των Τύπων 103-106. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν επίσης να υπολογιστούν με πινακοειδή ολοκλήρωση (Ενότητα 7.2).

33. $\int xe^{3x}\,dx$ **34.** $\int x^3e^{x/2}\,dx$

35. $\int x^2 2^x\,dx$ **36.** $\int x\pi^x\,dx$

Υπερβολικές συναρτήσεις

Χρησιμοποιήστε πίνακες ολοκληρωμάτων για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 37-40.

37. $\int \frac{1}{8}\sinh^5 3x\,dx$ **38.** $\int \frac{\cosh^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

39. $\int x^2\cosh 3x\,dx$ **40.** $\int x\sinh 5x\,dx$

Θεωρία και παραδείγματα

Οι Ασκήσεις 41-44 αναφέρονται στους τύπους ολοκλήρωσης στο τέλος του βιβλίου.

41. Αποδείξτε τον Τύπο 9 χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = ax + b$ για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,dx.$$

42. Αποδείξτε τον Τύπο 29 χρησιμοποιώντας μια τριγωνομετρική αντικατάσταση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

43. Αποδείξτε τον Τύπο 110 υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\int x^n(\ln ax)^m\,dx$$

με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

44. Αποδείξτε τον Τύπο 99 υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\int x^n\sin^{-1}ax\,dx$$

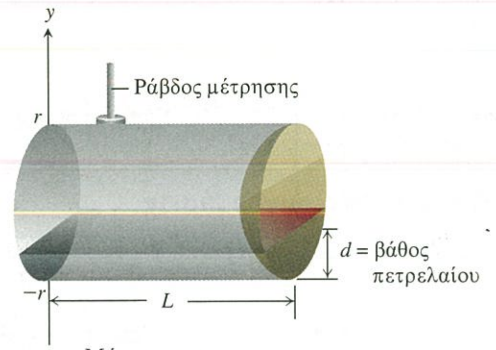
με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

45. *Εύρεση όγκου* Ο διευθυντής του λογιστηρίου της επιχείρησης στην οποία εργάζεστε σας έχει αναθέσει να βρείτε έναν μαθηματικό τύπο που να μπορεί να εισαχθεί σε πρόγραμμα υπολογιστή για να υπολογιστεί η ετήσια απογραφή πετρελαίου στις δεξαμενές της εταιρείας. Μια αντιπροσωπευτική τέτοια δεξαμενή έχει σχήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r και μήκους L, στερεωμένη με το κυκλικό της τοίχωμα οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι μετρήσεις του περιεχομένου κάθε δεξαμενής γίνονται με μια ράβδο που εισέρχεται κατακόρυφα στη δεξαμενή και που είναι βαθμονομημένη σε cm.

(α) Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του σχήματος, δείξτε ότι ο όγκος του πετρελαίου που περιέχει η δεξαμενή σε βάθος d είναι

$$V = 2L\int_{-r}^{-r+d}\sqrt{r^2-y^2}\,dy.$$

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.



Μήκη σε cm

46. *Μάθετε γράφοντας* Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \sqrt{x - x^2}\, dx$$

για κάθε a και b; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 47 και 48, χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε την ολοκλήρωση.

47. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (α) έως (γ).

(α) $\int x \ln x\, dx$ (β) $\int x^2 \ln x\, dx$

(γ) $\int x^3 \ln x\, dx$

(δ) Ποια τάση βλέπετε να διαμορφώνεται; Κάντε μια πρόβλεψη για την τιμή του $\int x^4 \ln x\, dx$ και ελέγξετε την πρόβλεψή σας υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας.

(ε) Με τι ισούται το ολοκλήρωμα $\int x^n \ln x\, dx$, $n \geq 1$; Ελέγξετε την απάντησή σας με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας.

48. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (α) έως (γ).

(α) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ (β) $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

(γ) $\int \frac{\ln x}{x^4}\, dx$

(δ) Ποια τάση βλέπετε να διαμορφώνεται; Κάντε μια πρόβλεψη για την τιμή του

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\, dx$$

και ελέγξετε την πρόβλεψή σας υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας.

(ε) Ποιος τύπος δίνει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\, dx, \quad n \geq 2\,;$$

Ελέγξετε την απάντησή σας με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας.

49. (α) Προσπαθήστε να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx,$$

όπου n αυθαίρετος θετικός ακέραιος, με κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας. Τι αποτέλεσμα παίρνετε;

(β) Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος θέτοντας διαδοχικά $n = 1, 2, 3, 5, 7$. Σχολιάστε την πολυπλοκότητα των αποτελεσμάτων σας.

(γ) Κάντε την αντικατάσταση $x = (\pi/2) - u$ και προσθέστε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν τώρα στα προηγούμενα. Ποια είναι η τιμή του

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx\,;$$

Η άσκηση αυτή δείχνει πώς με λίγη μαθηματική εφευρετικότητα μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα που δεν μπορεί να λυθεί άμεσα με σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας.

Ολοκλήρωση Monte Carlo

CD-ROM Δικτυότοπος

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 50-55. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις ακριβείς απαντήσεις που προκύπτουν με κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας ή με κάποια από τις αναλυτικές μεθόδους που μάθαμε ώς τώρα.

50. $\int_0^1 xe^{-2x}\, dx$

51. $\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin y)e^{\cos y}\, dy$

52. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2)\, dx$

53. $\int_0^1 z\sqrt{1-z}\, dz$

54. $\int_0^{1/2} \frac{t^3\, dt}{t^2 - 2t + 1}$

55. $\int_1^2 (\ln \theta)^3\, d\theta$

7.6 Κανόνας l'Hôpital

Απροσδιόριστη μορφή 0/0 • Απροσδιόριστες μορφές ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ • Απροσδιόριστες μορφές 1^∞, 0^0, ∞^0

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704)

Όπως είχαμε σημειώσει πιο πάνω, ο Johann Bernoulli ανακάλυψε έναν κανόνα για τον υπολογισμό του ορίου ενός κλάσματος στο οποίο τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής τείνουν στο μηδέν. Ο κανόνας αυτός είναι γνωστός σήμερα ως **κανόνας του l'Hôpital,** έχοντας πάρει την ονομασία του από τον Guillaume François Antoine de l'Hôpital, μαρκήσιο του (Marquis de) St. Mesme, έναν Γάλλο ευγενή που έγραψε το πρώτο εισαγωγικό σύγγραμμα στον διαφορικό λογισμό, παρουσιάζοντας εκεί για πρώτη φορά τον κανόνα αυτό (και ιδιοποιούμενος την πατρότητά του).

Απροσδιόριστη μορφή 0/0

Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ μηδενίζονται ταυτόχρονα στο $x = a$, τότε το όριο

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

δεν μπορεί να βρεθεί με την αντικατάσταση $x = a$. Η αντικατάσταση μας δίνει 0/0, μια έκφραση δίχως νόημα, που είναι γνωστή ως **απροσδιόριστη μορφή.** Η ώς τώρα εμπειρία μας μας πείθει ότι ο αλγεβρικός υπολογισμός ορίων που καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές δεν είναι κατ' ανάγκην δύσκολος. Χρειαστήκαμε βέβαια αρκετή ανάλυση στην Ενότητα 1.2 για να βρούμε το $\lim_{x\to 0} (\sin x)/x$. Από την άλλη, πολλές φορές υπολογίσαμε όρια του τύπου

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

(δηλαδή παραγώγους) τα οποία καταλήγουν πάντοτε στην απροσδιόριστη μορφή 0/0 αν αντικαταστήσουμε $x = a$. Ο κανόνας l'Hôpital μάς επιτρέπει να αντλήσουμε έμπνευση από την εμπειρία μας με τις παραγώγους για να υπολογίσουμε όρια που αλλιώς θα οδηγούσαν σε απροσδιόριστες μορφές.

Θεώρημα 1 Ο κανόνας l'Hôpital (πρώτη μορφή)
Έστω ότι $f(a) = g(a) = 0$, ότι υπάρχουν οι $f'(a)$ και $g'(a)$, και ότι $g'(a) \neq 0$. Τότε

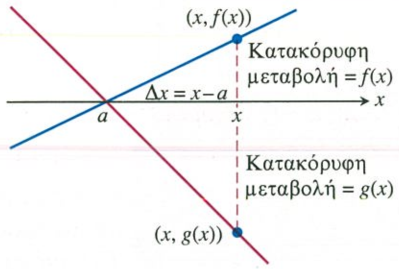
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Προσοχή
Όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα l'Hôpital στο πηλίκο f/g, διαιρούμε την παράγωγο της f με την παράγωγο της g. Μην πέσετε στην παγίδα να πάρετε την παράγωγο της f/g. Το πηλίκο που πρέπει να χρησιμοποιήσετε είναι f'/g', όχι $(f/g)'$.

Παράδειγμα 1 Χρήση του κανόνα l'Hôpital

(α) $$\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$$

(β) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$



Σχημα 7.11 Μεγέθυνση των γραφημάτων των διαφορίσιμων συναρτήσεων f και g στο $x = a$ (Θεώρημα 1). Δx είναι η οριζόντια μεταβολή.

Απόδειξη Θεωρήματος 1

Γραφικό επιχείρημα

Αν μεγεθύνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο $(a, f(a)) = (a, g(a)) = (a, 0)$, τα γραφήματα (Σχήμα 7.11) μοιάζουν με ευθείες διότι οι διαφορίσιμες συναρτήσεις είναι τοπικά γραμμικές. Έστω m_1 και m_2 οι κλίσεις των ευθειών αυτών για τις f και g, αντίστοιχα. Τότε για x κοντά στο a, θα είναι

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x)}{x-a}}{\dfrac{g(x)}{x-a}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Καθώς $x \to a$, οι κλίσεις m_1 και m_2 τείνουν στις τιμές $f'(a)$ και $g'(a)$, αντίστοιχα. Έτσι,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{m_1}{m_2} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Αναλυτική επαλήθευση

Εργαζόμενοι προς τα... πίσω, ξεκινούμε από τις παραγώγους $f'(a)$ και $g'(a)$, που οι ίδιες είναι όρια, οπότε

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Μερικές φορές, μετά την παραγώγιση, τόσο ο νέος αριθμητής όσο και ο παρονομαστής μηδενίζονται ταυτοχρόνως στο $x = a$, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο Παράδειγμα 2. Στις περιπτώσεις αυτές, εφαρμόζουμε μια ισχυρότερη μορφή του κανόνα l'Hôpital.

Θεώρημα 2 Κανόνας l'Hôpital (ισχυρότερη μορφή)
Έστω ότι $f(a) = g(a) = 0$, ότι οι f και g είναι διαφορίσιμες σε ένα ανοιχτό διάστημα I που περιέχει το a, και ότι $g'(x) \neq 0$ στο I για $x \neq a$. Τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

εφόσον το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει.

Μια απόδειξη του Θεωρήματος 2 για την περίπτωση πεπερασμένου ορίου παρατίθεται στο Παράρτημα 6.

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή της ισχυρότερης μορφής του κανόνα l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x} \qquad \text{Παραμένει } \frac{0}{0}\text{· παραγωγίζουμε πάλι.}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} \qquad \text{Όχι πια } \frac{0}{0}\text{· τώρα το όριο υπολογίζεται.}$$

Όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα l'Hôpital, εξετάζουμε πότε θα αλλάξει τιμή το πηλίκο των παραγώγων, από 0/0 σε κάτι άλλο. Μόλις έχει γίνει αυτό, αναδύεται το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα 3 Λανθασμένη εφαρμογή της ισχυρότερης μορφής του κανόνα l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{Όχι πια } \frac{0}{0}\text{· τώρα το όριο βρίσκεται.}$$

Αν συνεχίσουμε την παραγώγιση, επιχειρώντας να εφαρμόσουμε τον κανόνα l'Hôpital άλλη μία φορά, θα πάρουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

που είναι λάθος.

Ο κανόνας l'Hôpital εφαρμόζεται επίσης σε πλευρικά όρια.

Θυμίζουμε ότι γράφοντας ∞ και $+\infty$ εννοούμε το ίδιο πράγμα.

Παράδειγμα 4 Χρήση του κανόνα l'Hôpital με πλευρικά όρια

(α) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \frac{1}{0}$$

(β) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad -\frac{1}{0}$$

Στην περίπτωση που μηδενίζεται μία μόνο από τις παραγώγους, όπως στο Παράδειγμα 4, τότε το ζητούμενο όριο είναι είτε 0 (αν η μηδενιζόμενη παράγωγος βρίσκεται στον αριθμητή) είτε άπειρο (αν η παράγωγος είναι στον παρονομαστή).

Απροσδιόριστες μορφές ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

Μια εκδοχή του κανόνα του l'Hôpital ισχύει επίσης για πηλίκα που καταλήγουν στην απροσδιόριστη μορφή ∞/∞. Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ τείνουν ταυτόχρονα στο άπειρο καθώς $x \to a$, τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

εφόσον το παραπάνω όριο υπάρχει. Όπως για την απροσδιόριστη μορφή 0/0, έτσι και εδώ το a μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο· μπορεί ακόμη να είναι ακραίο σημείο του διαστήματος I του Θεωρήματος 2.

Παράδειγμα 5 Απροσδιόριστη μορφή ∞/∞

Να βρεθούν τα όρια

(α) $$\lim_{x\to \pi/2}\frac{\sec x}{1+\tan x}$$

(β) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Λύση

(α) Τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής παρουσιάζουν ασυνέχεια στο $x = \pi/2$, οπότε εξετάζουμε τα πλευρικά όρια στο σημείο αυτό. Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα l'Hôpital, επιλέγουμε ένα ανοιχτό διάστημα I με ακραίο του σημείο το $x = \pi/2$.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty} \text{ από αριστερά}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \sin x = 1$$

Το δεξιό όριο είναι επίσης ίσο με 1, με απροσδιόριστη μορφή το $(-\infty)/(-\infty)$. Συνεπώς, το ζητούμενο (αμφίπλευρο) όριο ισούται με 1.

(β) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Μερικές φορές είναι εφικτό με αλγεβρικούς χειρισμούς να φέρουμε μια απροσδιόριστη μορφή $\infty \cdot 0$ ή $\infty - \infty$ στη μορφή $0/0$ ή ∞/∞. Και πάλι, δεν υπονοούμε ότι υπάρχει ο αριθμός $\infty \cdot 0$ ή ο $\infty - \infty$, όπως δεν υπονοούσαμε και πιο πάνω την ύπαρξη του αριθμού $0/0$ ή του ∞/∞. Οι μορφές αυτές δεν είναι αριθμοί, αλλά περιγραφές της συμπεριφοράς των συναρτήσεων.

Παράδειγμα 6 Απροσδιόριστη μορφή $\infty \cdot 0$

Να βρεθούν τα όρια

(α) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)$

(β) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)$.

Λύση

(α)
$$\lim_{x\to\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) \qquad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h} \sin h\right) \qquad \text{Θέτουμε } h = 1/x.$$

$$= 1$$

(β) Ομοίως,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Παράδειγμα 7 Απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

Λύση Αν $x \to 0^+$, τότε $\sin x \to 0^+$ και

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty.$$

Ομοίως, αν $x \to 0^-$, τότε $\sin x \to 0^-$ και

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty.$$

Καμία από τις δύο αυτές μορφές δεν μας αποκαλύπτει το ζητούμενο όριο. Για να το βρούμε, καταρχάς κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \qquad \text{Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το } x \sin x.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον κανόνα l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \qquad \text{Παραμένει } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Απροσδιόριστες μορφές 1^∞, 0^0, ∞^0

Μερικές φορές, όρια που καταλήγουν στις απροσδιόριστες μορφές 1^∞, 0^0, και ∞^0 μπορούν να βρεθούν αν πρώτα λογαριθμίσουμε. Εφαρμόζουμε τον κανόνα l'Hôpital για να βρούμε το όριο του λογαρίθμου και μετά παίρνουμε το εκθετικό κάθε μέλους της εξίσωσης που προκύπτει, προκειμένου να βρούμε τη συμπεριφορά της αρχικής μας συνάρτησης.

Εφόσον $b = e^{\ln b}$ για τυχόν θετικό αριθμό b, μπορούμε να γράψουμε την $f(x)$ ως

$$f(x) = e^{\ln f(x)}$$

για τυχούσα θετική συνάρτηση $f(x)$.

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)} = e^L$$

Το a μπορεί να είναι πεπερασμένος αριθμός ή και άπειρο.

Στην Ενότητα 3 των Προκαταρκτικών, κάναμε χρήση γραφικών παραστάσεων και πινάκων τιμών για να διερευνήσουμε τις τιμές της $f(x) = (1 + 1/x)^x$ καθώς $x \to \infty$. Τώρα θα βρούμε το όριο αυτό με τον κανόνα l'Hôpital.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Παράδειγμα 8 Απροσδιόριστη μορφή 1^∞

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Λύση Έστω $f(x) = (1 + 1/x)^x$. Λογαριθμίζοντας κάθε μέλος μεταβαίνουμε από την απροσδιόριστη μορφή 1^∞ στη μορφή $0/0$, επί της οποίας και εφαρμόζουμε τον κανόνα l'Hôpital.

$$\ln f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα l'Hôpital στην τελευταία έκφραση.

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{Παραγωγίζουμε αριθμητή και παρονομαστή.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^1 = e.$$

Παράδειγμα 9 Απροσδιόριστη μορφή 0^0

Προσδιορίστε κατά πόσο υπάρχει, και με τι ισούται, το $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Λύση

Το όριο καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή 0^0. Για να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε άλλο που να καταλήγει στη μορφή 0/0, θέτουμε $f(x) = x^x$ και λογαριθμίζουμε κάθε μέλος.

$$\ln f(x) = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα l'Hôpital στο $(\ln x)/(1/x)$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \qquad \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \qquad \text{Παραγωγίζουμε.}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1.$$

Παράδειγμα 10 Απροσδιόριστη μορφή ∞^0

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Λύση Έστω $f(x) = x^{1/x}$. Τότε

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hôpital στο $\ln f(x)$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} \qquad \text{Παραγωγίζουμε.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.6

Εύρεση ορίων

Στις Ασκήσεις 1-6, υπολογίστε τα όρια εφαρμόζοντας πρώτα τον κανόνα l'Hôpital, και κατόπιν μια από τις μεθόδους που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 1.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

Εφαρμογή του κανόνα l'Hôpital

Εφαρμόστε τον κανόνα l'Hôpital για να βρείτε τα όρια των Ασκήσεων 7-38.

7. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin \theta^2}{\theta}$
8. $\lim\limits_{\theta\to\pi/2} \dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta}$
9. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t-1}{e^t-t-1}$
10. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{\ln t-\sin \pi t}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$
13. $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\ln(y^2+2y)}{\ln y}$
14. $\lim\limits_{y\to\pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)\tan y$
15. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$
16. $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\dfrac{1}{x}$
17. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\csc x-\cot x+\cos x)$
18. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln 2x-\ln(x+1))$
19. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x-\ln\sin x)$
20. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
21. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$
22. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^x$
23. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-5}{2x^2-x+2}$
24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\tan 11x}$
25. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$
26. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+2x)^{1/(2\ln x)}$
27. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-2x+1)^{x-1}$
28. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} (\cos x)^{\cos x}$
29. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$
30. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$
31. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$
32. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$
33. $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$
34. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$
35. $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$
36. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\ln x}\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$
37. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta-1}{e^\theta-\theta-1}$
38. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^t+t^2}{e^t-t}$

Θεωρία και εφαρμογές

Ο κανόνας L'Hôpital δεν αποβαίνει χρήσιμος για τα όρια των Ασκήσεων 39-42. Δοκιμάστε να τον εφαρμόσετε· θα δείτε ότι δεν θα καταλήξετε πουθενά. Βρείτε λοιπόν τα όρια με κάποια άλλη μέθοδο.

39. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$
40. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$
41. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$
42. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\csc x}$
43. *Μάθετε γράφοντας* Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύει, και ποια όχι; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

    (α) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$

    (β) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$

44. *Μορφή ∞/∞* Αναφέρετε ένα παράδειγμα δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων f και g με $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες.

    (α) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$ (β) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

    (γ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

45. *Μάθετε γράφοντας: Συνεχής επέκταση* Βρείτε μια τιμή του c για την οποία η συνάρτηση

    $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

    γίνεται συνεχής στο $x = 0$. Εξηγήστε τους λόγους αυτής της επιλογής σας για το c.

46. *Κανόνας l'Hôpital* Έστω

    $$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

    (α) Δείξτε ότι

    $$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{αλλά} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

    (β) *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε γιατί τα παραπάνω δεν αντιβαίνουν τον κανόνα l'Hôpital.

47. *Συνεχής ανατοκισμός*

    (α) Δείξτε ότι

    $$\lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0e^{rt}.$$

(β) *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε με ποιον τρόπο το όριο του ερωτήματος (α) συνδέει τον ανατοκισμό k φορές ετησίως, με τον συνεχή ανατοκισμό.

Τ **48.** *Μορφή 0/0* Εκτιμήστε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x-1}$$

κάνοντας μια γραφική παράσταση. Κατόπιν επιβεβαιώστε την εκτίμησή σας με χρήση του κανόνα l'Hôpital.

Τ **49.** *Μορφή 0/0*

(α) Εκτιμήστε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x\ln x - x - \cos \pi x}$$

αναπαριστώντας γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2/(x\ln x - x - \cos \pi x)$ κοντά στο $x = 1$. Κατόπιν επιβεβαιώστε την εκτίμησή σας με χρήση του κανόνα l'Hôpital.

(β) Σχεδιάστε την f στο διάστημα $0 < x \le 11$.

50. *Γιατί οι μορφές 0^∞ και $0^{-\infty}$ δεν είναι απροσδιόριστες* Έστω ότι η $f(x)$ είναι μη αρνητική στο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c και ότι $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

(α) Αν $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, δείξτε ότι $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = 0$.

(β) Αν $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, δείξτε ότι $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \infty$.

Τ **51.** *Ακρίβεια γραφικής σχεδίασης* Έστω

$$f(x) = \frac{1-\cos x^6}{x^{12}}.$$

Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο μερικές γραφικές παραστάσεις της f μπορεί να παρέχουν ψευδείς πληροφορίες για το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$. (*Υπόδειξη:* Δοκιμάστε να σχεδιάσετε στην περιοχή $[-1, 1]$ επί $[-0{,}5, 1]$.)

Τ **52.** *Μορφή $\infty - \infty$*

(α) Εκτιμήστε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$$

παριστάνοντας γραφικά την $f(x) = x - \sqrt{x^2+x}$ σε αρκούντως μεγάλο διάστημα τιμών του x.

(β) Επιβεβαιώστε τώρα την εκτίμησή σας υπολογίζοντας το όριο αυτό με τον κανόνα l'Hôpital. Ως πρώτο βήμα, πολλαπλασιάστε την $f(x)$ με το κλάσμα $(x + \sqrt{x^2+x})/(x + \sqrt{x^2+x})$ και απλοποιήστε τον αριθμητή που προκύπτει.

53. *Εκθετικές συναρτήσεις*

(α) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση

$$a^x = e^{x\ln a}$$

για να βρείτε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

(β) Βρείτε το όριο $\lim_{x\to -1^-} f(x)$.

(γ) Βρείτε το όριο $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

54. *Εκθετικά* Δεδομένου ότι $x > 0$, βρείτε τη μέγιστη τιμή, εάν υπάρχει, του

(α) $x^{1/x}$ **(β)** x^{1/x^2}

(γ) x^{1/x^n} (n θετικός ακέραιος)

(δ) Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n} = 1$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

Τ **55.** *Τι θέση έχει το ln x ανάμεσα στις δυνάμεις του x;* Το σύνολο τύπων της μορφής

$$\int t^{k-1}\,dt = \frac{t^k}{k} + C, \qquad k \ne 0,$$

περιέχει μια «κενή θέση» για $k = 0$. Ο φυσικός λογάριθμος

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

καλύπτει μεν το κενό αυτό, αλλά με τρόπο που δεν είναι προφανής αν κοιτάξουμε απλώς τους τύπους. Μπορούμε να δούμε με γραφικό τρόπο πόσο καλά «ταιριάζει» με τις συναρτήσεις αυτές ο λογάριθμος, αν παραστήσουμε γραφικά τις αντιπαραγώγους

$$\int_1^x t^{k-1}\,dt = \frac{x^k - 1}{k}, \qquad x > 0,$$

και συγκρίνουμε με τη γραφική παράσταση του $\ln x$.

(α) Παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = (x^k - 1)/k$ σε ενιαίο σχήμα με τον λογάριθμο $\ln x$ στο διάστημα $0 \le x \le 50$ για $k = \pm 1, \pm 0{,}5, \pm 0{,}1$, και $\pm 0{,}05$.

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{k\to 0} \frac{x^k - 1}{k} = \ln x.$$

(*Πηγή:* "The Place of ln x Among the Powers of x" του Henry C. Finlayson, *American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No. 5 (May 1987), p. 450.)

Τ **56.** *Συνεχής επέκταση της $(\sin x)^x$ στο $[0, \pi]$*

(α) Παραστήστε γραφικά την $f(x) = (\sin x)^x$ στο διάστημα $0 \le x \le \pi$. Ποια τιμή θα προσδίδατε στην f για να την κάνετε συνεχή στο $x = 0$;

(β) Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας στο ερώτημα (α) υπολογίζοντας το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ με τον κανόνα του l'Hôpital.

(γ) Εκτιμήστε στο διάγραμμα τη μέγιστη τιμή της f (max f) στο $[0, \pi]$. Σε ποιο περίπου σημείο προκύπτει η τιμή αυτή;

(δ) Βελτιώστε την εκτίμηση που κάνατε στο (γ) αναπαριστώντας γραφικά την f' στο ίδιο σχήμα ώστε να διακρίνετε σε ποιο σημείο τέμνει το γράφημά της τον άξονα x. Για να απλοποιήσετε τα πράγματα, μπορείτε να «ξεχάσετε» τον εκθετικό παράγοντα από την έκφραση της f' και να σχεδιάσετε μονάχα τον μηδενιζόμενο παράγοντα.

(ε) Βελτιώστε την εκτίμησή σας του σημείου μεγίστου, λύνοντας την εξίσωση $f' = 0$ αριθμητικά.

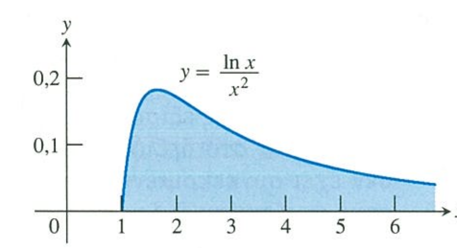
(στ) Εκτιμήστε τη max f υπολογίζοντας τις τιμές της f στα σημεία που βρήκατε στα ερωτήματα (γ), (δ), και (ε). Ποιο είναι το καλύτερο αποτέλεσμά σας για την τιμή max f;

7.7 Γενικευμένα ολοκληρώματα

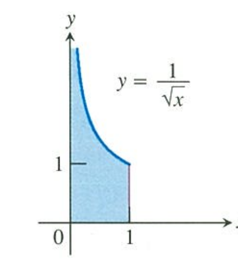
Άπειρα όρια ολοκλήρωσης • Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty dx/x^p$ • Ολοκληρωτέες ποσότητες με άπειρες ασυνέχειες • Κριτήρια σύγκλισης και απόκλισης • Συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας

CD-ROM Δικτυότοπος

Μέχρι τώρα, τα ορισμένα ολοκληρώματα που υπολογίζαμε έπρεπε να πληρούν δύο συνθήκες: τόσο το διάστημα ολοκλήρωσης, από a έως b, όσο και το πεδίο τιμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο διάστημα αυτό, έπρεπε να είναι πεπερασμένα. Στην πράξη, ωστόσο, δεν είναι λίγες οι φορές που η μία ή και οι δύο αυτές συνθήκες δεν ικανοποιούνται για τα προβλήματα που καλούμαστε να λύσουμε. Ένα παράδειγμα άπειρου διαστήματος ολοκλήρωσης, είναι όταν ζητούμε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = (\ln x)/x^2$ από $x = 1$ έως $x = \infty$ (Σχήμα 7.12α). Ένα παράδειγμα άπειρου πεδίου τιμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης, είναι όταν ζητούμε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = 1/\sqrt{x}$ από $x = 0$ έως $x = 1$ (Σχήμα 7.12β). Και οι δύο περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Θέτουμε δηλαδή το εύλογο ερώτημα, «Με τι ισούται το ολοκλήρωμα όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι κατά τι μικρότερο;» και εξετάζουμε πώς μεταβάλλεται η απάντησή μας στο ερώτημα αυτό καθώς το διάστημα ολοκλήρωσης προσεγγίζει οριακά το ζητούμενο διάστημα. Ξεκινούμε δηλαδή εξετάζοντας πρώτα το πεπερασμένο, και παρατηρούμε τι συμβαίνει καθώς «προσεγγίζουμε» το άπειρο.

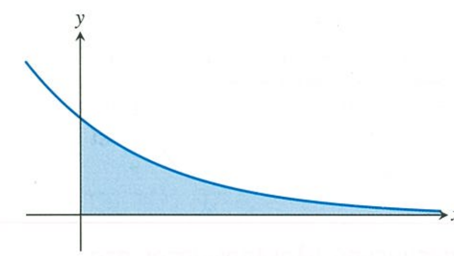


(α)

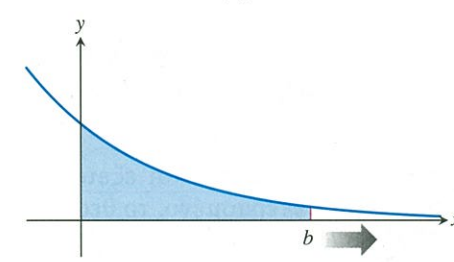


(β)

Σχημα 7.12 Είναι πεπερασμένα τα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες που εκτείνονται στο άπειρο;



(α)



(β)

(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

Σχημα 7.13 (α) Το εμβαδόν του χωρίου που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και βρίσκεται «κάτω» από την καμπύλη $y = e^{-x/2}$ ισούται με (β)

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x/2}\,dx.$$

Άπειρα όρια ολοκλήρωσης

Ας θεωρήσουμε το άπειρο χωρίο που κείται κάτω από την καμπύλη $y = e^{-x/2}$ στο πρώτο τεταρτημόριο (Σχήμα 7.13α). Ίσως σκεφθεί κανείς ότι το χωρίο αυτό έχει άπειρο εμβαδόν, ωστόσο η τιμή που θα δώσουμε στο εμβαδόν πρέπει να είναι πεπερασμένη. Ας δούμε πώς γίνεται αυτό. Κατ' αρχάς υπολογίζουμε το εμβαδόν $A(b)$ του τμήματος του χωρίου που φράσσεται εκ δεξιών από την ευθεία $x = b$ (Σχήμα 7.13β).

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

Κατόπιν, βρίσκουμε το όριο του $A(b)$ καθώς $b \to \infty$.

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} \left(-2e^{-b/2} + 2\right) = 2$$

Έτσι η τιμή που αποδίδουμε στο εμβαδόν του χωρίου που κείται κάτω από την καμπύλη, από 0 έως ∞, είναι

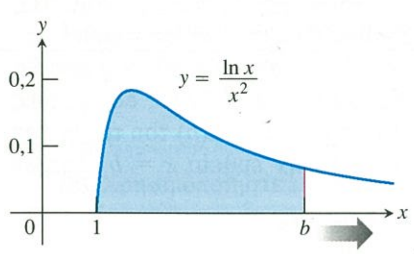
$$\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x/2}\,dx = 2.$$

Ορισμός **Γενικευμένα ολοκληρώματα με άπειρα όρια ολοκλήρωσης**

Ολοκληρώματα με άπειρα όρια ολοκλήρωσης καλούνται **γενικευμένα ολοκληρώματα.**

1. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, \infty)$, τότε
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
2. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, b]$, τότε
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
3. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, \infty)$, τότε
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,$$
όπου c τυχών πραγματικός αριθμός.

Στις περιπτώσεις 1 και 2, αν το όριο είναι πεπερασμένο, το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει** και το όριο είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος. Αν το όριο δεν υπάρχει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει.** Στην περίπτωση 3, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης **συγκλίνει** αν αμφότερα τα γενικευμένα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος συγκλίνουν· διαφορετικά **αποκλίνει** και δεν έχει συγκεκριμένη τιμή. Μπορεί να δειχθεί ότι η επιλογή του c στην περίπτωση 3 δεν έχει σημασία. Μπορούμε δηλαδή να κάνουμε υπολογισμούς και να προσδιορίσουμε αν το $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει με όποια τιμή του c μας εξυπηρετεί.



Σχημα 7.14 Το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη αυτή είναι

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

(Παράδειγμα 1)

Παράδειγμα 1 **Υπολογισμός γενικευμένου ολοκληρώματος στο διάστημα $[1, \infty)$**

Είναι πεπερασμένου εμβαδού το χωρίο που κείται κάτω από την καμπύλη $y = (\ln x)/x^2$ από $x = 1$ έως $x = \infty$; Αν ναι, ποια η τιμή του εμβαδού;

Λύση Υπολογίζουμε το εμβαδόν από $x = 1$ έως $x = b$ και εξετάζουμε το όριο καθώς $b \to \infty$. Αν το όριο είναι πεπερασμένο, το θεωρούμε ίσο με το ζητούμενο εμβαδόν (Σχήμα 7.14). Το εμβαδόν από 1 ώς b είναι

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες, με $u = \ln x$, $dv = dx/x^2$, $du = dx/x$, $v = -1/x$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

Το όριο του εμβαδού καθώς $b \to \infty$ είναι

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right]$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1.$$ Κανόνας l'Hôpital

Έτσι, το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει και το εμβαδόν έχει την πεπερασμένη τιμή 1.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Lejeune Dirichlet
(1805-1859)

Παράδειγμα 2 **Υπολογισμός ολοκληρώματος στο διάστημα $(-\infty, \infty)$**

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Λύση Βάσει του ορισμού (περίπτωση 3), μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Υπολογίζουμε τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} x\Big]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Έτσι,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

Η συνάρτηση $y = 1/x$ αποτελεί το «σύνορο» μεταξύ συγκλίνουσας και αποκλίνουσας συμπεριφοράς των γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $y = 1/x^p$. Το Παράδειγμα 3 εξηγεί το γιατί.

Παράδειγμα 3 Προσδιορισμός σύγκλισης

Για ποιες τιμές του p συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty dx/x^p$; Ποια είναι τότε η τιμή του ολοκληρώματος;

Λύση Αν $p \neq 1$, τότε

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right).$$

Έτσι,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)\right] = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

εφόσον

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases}0, & p>1\\ \infty, & p<1.\end{cases}$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τιμή $1/(p-1)$ αν $p>1$, ενώ αποκλίνει αν $p<1$.

Για $p=1$, έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\ln x\bigg]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$$

οπότε το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Ολοκληρωτέες ποσότητες με άπειρες ασυνέχειες

Ένας άλλος τύπος ολοκληρώματος προκύπτει όταν υπάρχει μια κατακόρυφη ασύμπτωτη —δηλαδή μια άπειρη ασυνέχεια— σε ένα όριο ολοκλήρωσης σε ενδιάμεσο σημείο.

Θεωρήστε το άπειρο χωρίο που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και κείται κάτω από την καμπύλη $y = 1/\sqrt{x}$ από $x=0$ έως $x=1$ (Σχήμα 7.12β). Υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδόν του τμήματος του χωρίου από a έως 1 (Σχήμα 7.15).

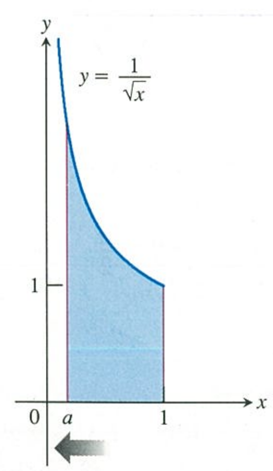
$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\bigg]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

Κατόπιν βρίσκουμε το όριο του εμβαδού αυτού καθώς $a \to 0^+$.

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to0^+}(2-2\sqrt{a}) = 2$$

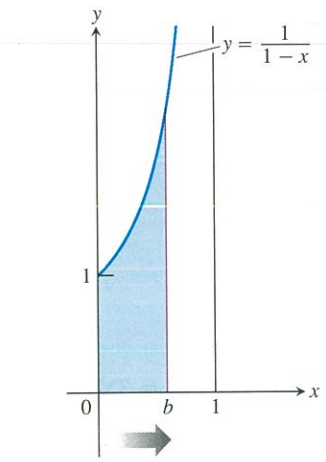
Το εμβαδόν του χωρίου που κείται κάτω από την καμπύλη από 0 έως 1 είναι

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$



Σχήμα 7.15 Το εμβαδόν του χωρίου που κείται κάτω από την καμπύλη είναι

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$



Σχήμα 7.16 Αν το όριο υπάρχει, τότε

$$\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx.$$

(Παράδειγμα 4)

Ορισμός **Γενικευμένα ολοκληρώματα με άπειρες ασυνέχειες**

Ολοκληρώματα συναρτήσεων οι οποίες απειρίζονται σε κάποιο σημείο εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης, καλούνται **γενικευμένα ολοκληρώματα.**

1. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(a, b]$, τότε
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$
2. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b)$, τότε
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$
3. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, c) \cup (c, b]$, τότε
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Στις περιπτώσεις 1 και 2, αν το όριο είναι πεπερασμένο, το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει** και το όριο είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος. Αν δεν υπάρχει το όριο, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει.** Στην περίπτωση 3, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης **συγκλίνει** αν και τα δύο ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος έχουν πεπερασμένες τιμές· διαφορετικά **αποκλίνει.**

Παράδειγμα 4 Ένα αποκλίνον γενικευμένο ολοκλήρωμα

Να διερευνηθεί η σύγκλιση του ολοκληρώματος

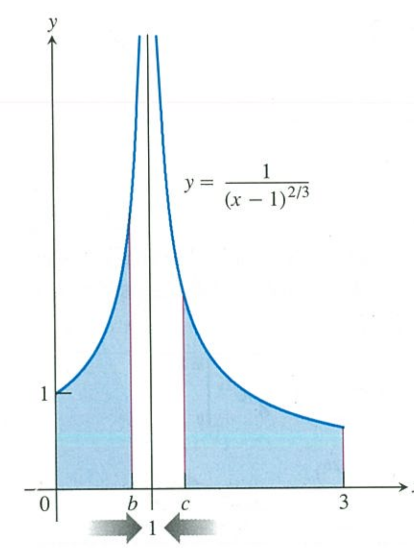
$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx.$$

Λύση Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = 1/(1-x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1)$ αλλά απειρίζεται καθώς $x \to 1^-$ (Σχήμα 7.16). Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμά της ως εξής:

$$\lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b\to1^-}\left[-\ln|1-x|\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to1^-}\left[-\ln(1-b)+0\right] = \infty.$$

Το όριο είναι άπειρο, συνεπώς το ολοκλήρωμα αποκλίνει.



Σχήμα 7.17 Στο Παράδειγμα 5 διερευνάται η σύγκλιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Παράδειγμα 5 Άπειρη ασυνέχεια σε εσωτερικό σημείο

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Λύση Η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=1$ και είναι συνεχής στο $[0, 1)$ και στο $(1, 3]$ (Σχήμα 7.17). Έτσι, βάσει της περίπτωσης 3 του παραπάνω ορισμού,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Υπολογίζουμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης.

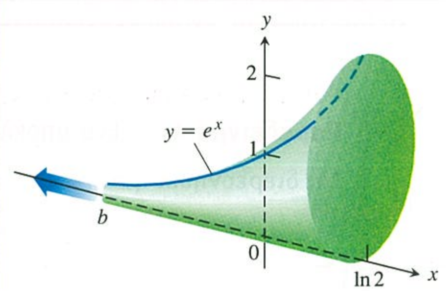
$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3}+3] = 3$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+}\int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3$$
$$= \lim_{c\to 1^+} [3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$

Παράδειγμα 6 Εύρεση του όγκου ενός άπειρου στερεού

Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού κέρατος στο Σχήμα 7.18 είναι κυκλικοί δίσκοι με διαμέτρους που εκτείνονται από τον άξονα x έως την καμπύλη $y = e^x$, $-\infty < x \le \ln 2$. Βρείτε τον όγκο που περικλείεται στο κέρας.



ΣΧΗΜΑ 7.18 Ο υπολογισμός του Παραδείγματος 6 δείχνει ότι αυτό το άπειρο κέρας έχει πεπερασμένο όγκο.

Λύση Το εμβαδόν μιας τυπικής διατομής είναι

$$A(x) = \pi(\text{ακτίνα})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right) = \frac{\pi}{4}e^{2x}.$$

Ορίζουμε τον όγκο του κέρατος ως το όριο, καθώς $b \to -\infty$, του όγκου που καταλαμβάνει το τμήμα του κέρατος από b έως $\ln 2$. Όπως κάναμε και στην Ενότητα 5.1 (με τη μέθοδο χωρισμού σε λεπτές φέτες), υπολογίζουμε τον όγκο αυτό ως εξής:

$$V = \int_b^{\ln 2} A(x)\,dx = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{8}e^{2x}\Big]_b^{\ln 2}$$
$$= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b}).$$

Καθώς $b \to -\infty$, $e^{2b} \to 0$ και $V \to (\pi/8)(4-0) = \pi/2$. Κατά συνέπεια, ο όγκος του κέρατος είναι $\pi/2$.

Παράδειγμα 7 Εύρεση περιφέρειας

Χρησιμοποιήστε τον τύπο μήκους τόξου (Ενότητα 5.3) για να δείξετε ότι η περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ είναι 4π.

Λύση Το ένα τέταρτο του κύκλου περιγράφεται από την εξίσωση $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$. Το μήκος του τόξου αυτού είναι

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad \text{όπου} \qquad y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γενικευμένο, διότι το y' δεν ορίζεται για $x = 2$. Το υπολογίζουμε λοιπόν με μια οριακή διαδικασία.

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx$$
$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \sqrt{\frac{1}{1-(x/2)^2}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to 2^-} 2\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 2^-} 2\left[\sin^{-1}\frac{b}{2} - 0\right] = \pi$$

Η περιφέρεια του τεταρτοκυκλίου είναι π, άρα η περιφέρεια του κύκλου είναι 4π.

Φραγμένες μονότονες συναρτήσεις

Μπορεί να δειχθεί ότι μια μονότονη συνάρτηση $f(x)$ που είναι φραγμένη σε ένα άπειρο διάστημα (a, ∞) οφείλει να έχει πεπερασμένο όριο καθώς $x \to \infty$. Στο Παράδειγμα 8, η πρόταση αυτή εφαρμόζεται στη συνάρτηση

$$f(b) = \int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

καθώς $b \to \infty$.

Κριτήρια σύγκλισης και απόκλισης

Όταν μας είναι αδύνατο να υπολογίσουμε άμεσα ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα (όπως συμβαίνει συχνά στην πράξη), προσπαθούμε πρώτα να βρούμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν το ολοκλήρωμα αποκλίνει, δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτε άλλο και το ζήτημα τελειώνει εδώ. Αν η σύγκλιση έχει εξασφαλιστεί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές μεθόδους για να βρούμε προσεγγιστικά την τιμή του ολοκληρώματος. Οι κύριοι έλεγχοι για σύγκλιση ή απόκλιση είναι το κριτήριο άμεσης σύγκρισης και το οριακό κριτήριο του λόγου.

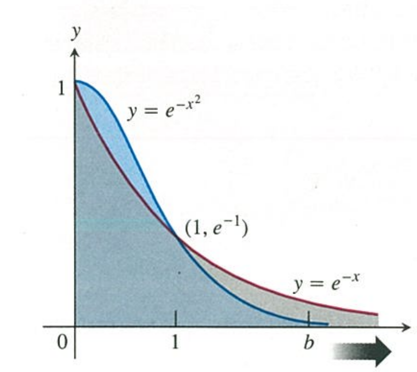
Παράδειγμα 8 Διερεύνηση σύγκλισης

Συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$;

Λύση Εξ ορισμού έχουμε,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα. διότι δεν υπάρχει απλός τύπος για την αντιπαράγωγο του e^{-x^2}. Θα πρέπει συνεπώς να προσδιορίσουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση με κάποιον άλλο τρόπο. Εφόσον $e^{-x^2} > 0$ για κάθε x, η $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ θα είναι αύξουσα συνάρτηση του b. Άρα, καθώς $b \to \infty$, το ολοκλήρωμα είτε απειρίζεται είτε είναι φραγμένο άνω και υποχρεούται συνεπώς να συγκλίνει (δηλαδή να έχει πεπερασμένο όριο).



ΣΧΗΜΑ 7.19 Η γραφική παράσταση του e^{-x^2} κείται χαμηλότερα από αυτήν του e^{-x} για $x > 1$. (Παράδειγμα 8)

Οι δύο καμπύλες $y = e^{-x^2}$ και $y = e^{-x}$ τέμνονται στο $(1, e^{-1})$, ενώ ισχύει $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$ για $x \ge 1$ (Σχήμα 7.19). Έτσι, για κάθε $b > 1$,

$$0 < \int_1^b e^{-x^2}\,dx \le \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0{,}368.$$

Στρογγυλλοποιούμε προς τα πάνω

Ως αύξουσα συνάρτηση του b και άνω φραγμένη από το 0,368, το ολοκλήρωμα $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ οφείλει να συγκλίνει καθώς $b \to \infty$. Βέβαια, η διαπίστωση αυτή δεν μας λέει και πολλά για την τιμή του ολοκληρώματος, πέραν του ότι αυτή είναι θετική και μικρότερη του 0,368.

Η σύγκριση των e^{-x^2} και e^{-x} στο Παράδειγμα 8 αποτελεί ειδική περίπτωση του ακόλουθου κριτηρίου.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Karl Weierstrass
(1815-1897)

Θεώρημα 3 **Κριτήριο άμεσης σύγκρισης**

Έστω f και g συνεχείς στο διάστημα $[a, \infty)$ και $0 \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \ge a$. Στην περίπτωση αυτή, το ολοκλήρωμα

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν το $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει

2. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ αποκλίνει αν το $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 9 Χρήση του κριτηρίου άμεσης σύγκρισης

(α) Το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει διότι

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \text{ στο } [1, \infty) \text{ και το } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ συγκλίνει.}$$ Παράδειγμα 3

(β) Το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}}\,dx$ αποκλίνει διότι

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}} \ge \frac{1}{x} \text{ στο } [1, \infty) \text{ και το } \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ αποκλίνει.}$$ Παράδειγμα 3

Θεώρημα 4 **Οριακό κριτήριο του λόγου**

Αν οι θετικές συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a, \infty)$ και αν

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

τότε τα ολοκληρώματα

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{και} \quad \int_a^\infty g(x)dx$$

συγκλίνουν ταυτόχρονα ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Το Θεώρημα 4 αποδεικνύεται με μεθόδους του προχωρημένου απειροστικού λογισμού.

Παρόλο που τα γενικευμένα ολοκληρώματα δύο συναρτήσεων από a έως ∞ μπορεί να συγκλίνουν ταυτόχρονα, δεν είναι απαραιτήτως ίσα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 10 Χρήση του οριακού κριτηρίου του λόγου

Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

συγκλίνει, συγκρίνοντάς το με το $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Βρείτε τις τιμές των δύο ολοκληρωμάτων.

Λύση Οι συναρτήσεις $f(x) = 1/x^2$ και $g(x) = 1/(1+x^2)$ είναι θετικές και συνεχείς στο $[1, \infty)$. Επίσης, το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1,$$

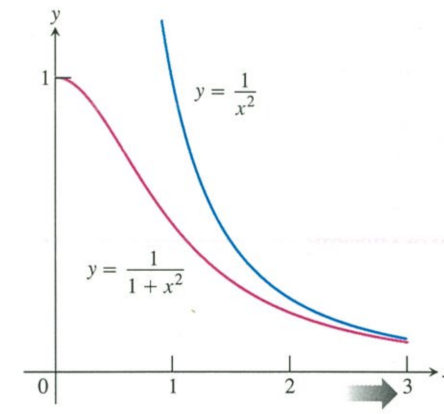
είναι θετικό και πεπερασμένο (Σχήμα 7.20). Συνεπώς, το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ συγκλίνει εφόσον και το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει.

Ωστόσο, τα δυο ολοκληρώματα συγκλίνουν σε διαφορετικές τιμές.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1$$ Παράδειγμα 3

ενώ

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



ΣΧΗΜΑ 7.20 Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 10.

Παράδειγμα 11 Χρήση του οριακού κριτηρίου του λόγου

Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{3}{e^x - 5}\,dx$$

συγκλίνει.

Λύση Από το Παράδειγμα 8, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το $\int_2^\infty e^{-x}\,dx = \int_2^\infty (1/e^x)\,dx$ συγκλίνει. Εφόσον

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x-5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-5}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3},$$

τότε και το ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{3}{e^x - 5}\,dx$$

θα συγκλίνει *επίσης*.

Συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας

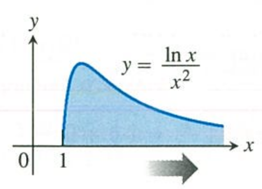
Τα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας είναι σε θέση να υπολογίζουν πολλά συγκλίνοντα γενικευμένα ολοκληρώματα.

Τύποι γενικευμένων ολοκληρωμάτων που εξετάστηκαν ώς τώρα

ΑΠΕΙΡΑ ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

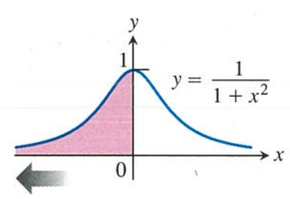
1. Άνω όριο

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



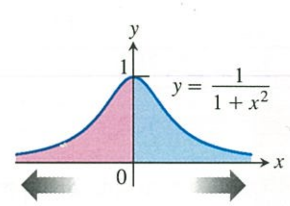
2. Κάτω όριο

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Και τα δύο όρια

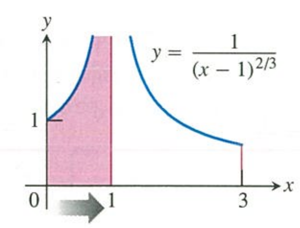
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{dx}{1+x^2}$$



Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΕΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΕΙΡΙΖΕΤΑΙ

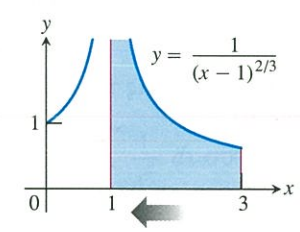
4. Στο άνω όριο ολοκλήρωσης

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



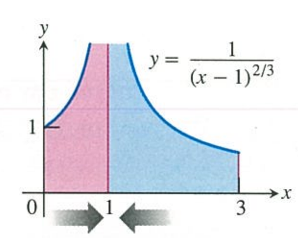
5. Στο κάτω όριο ολοκλήρωσης

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+}\int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Σε εσωτερικό σημείο

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



Παράδειγμα 12 Χρήση συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

Λύση Χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα Maple, όπου εισάγουμε τον ορισμό

```
> f: = (x + 3)/((x − 1)*(x^2 + 1));
```

Κατόπιν χρησιμοποιούμε την εντολή ολοκλήρωσης


```
> int(f, x=2..infinity);
```

Η Maple μας δίνει το αποτέλεσμα

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2).$$

Αν θέλουμε αριθμητικό αποτέλεσμα, θα πρέπει να εισαγάγουμε την εντολή αποτίμησης **evalf** και να καθορίσουμε τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων, ως εξής:

```
> evalf(", 6);
```

Το σύμβολο " αναθέτει στον υπολογιστή να αποτιμήσει την τελευταία έκφραση στην οθόνη, που στην περίπτωσή μας είναι η $(-1/2)\pi + \ln(5) + \arctan(2)$. Το αποτέλεσμα που εμφανίζεται στην οθόνη μας είναι 1.14579.

Αν χρησιμοποιήσουμε Mathematica, εισάγουμε

```
In [1]: = Integrate [(x + 3)/((x − 1)(x^2 + 1)), {x, 2, Infinity}]
```

οπότε παίρνουμε

$$\text{Out [1]} = \frac{-\text{Pi}}{2} + \text{ArcTan [2]} + \text{Log [5]}.$$

Για να πάρουμε αριθμητικό αποτέλεσμα με έξι σημαντικά ψηφία, πληκτρολογούμε την εντολή «N[%, 6]»· το αποτέλεσμα στην οθόνη μας είναι και πάλι 1.14579.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.7

Αναγνώριση γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 1-6, εκτελέστε τα ακόλουθα.

(α) Δηλώστε γιατί το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο.

(β) Προσδιορίστε αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει.

(γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα, αν αυτό συγκλίνει.

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ **2.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ **4.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

5. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{1/x}\,dx$ **6.** $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$

Υπολογισμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε κάθε ολοκλήρωμα στις Ασκήσεις 7-34 ή δηλώστε (επιχειρηματολογώντας σχετικά) ότι αποκλίνει.

7. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$ **8.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

9. $\int_0^4 \frac{dr}{\sqrt{4-r}}$ **10.** $\int_0^1 \frac{dr}{r^{0.999}}$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $\int_{-\infty}^2 \frac{2\,dx}{x^2+4}$

13. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$ **14.** $\int_2^\infty \frac{3\,dt}{t^2-t}$

15. $\int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$ **16.** $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$

17. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ **18.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

19. $\int_1^2 \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$ **20.** $\int_{-1}^\infty \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$

21. $\int_2^\infty \frac{2}{v^2-v}\,dv$ **22.** $\int_2^\infty \frac{2\,dt}{t^2-1}$

23. $\int_0^2 \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$ **24.** $\int_0^1 \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$

25. $\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1}v)}$ **26.** $\int_0^\infty \frac{16\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

28. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\, d\theta$

30. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} 2e^{-\theta} \sin\theta\, d\theta$

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx$

32. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{1} x \ln x\, dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{1} (-\ln x)\, dx$

Έλεγχος σύγκλισης

Στις Ασκήσεις 35-64, αποφανθείτε αν συγκλίνουν τα ολοκληρώματα, είτε εκτελώντας την ολοκλήρωση, είτε εφαρμόζοντας τα κριτήρια των θεωρημάτων 3 και 4. Επιλέξτε όποια μέθοδο προτιμάτε, αν και όπου υπάρχει τέτοια επιλογή.

35. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \tan\theta\, d\theta$

36. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cot\theta\, d\theta$

37. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$

38. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

39. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\, dx$

40. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

41. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$

42. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{t-\sin t}$ (*Υπόδειξη:* $t \geq \sin t$ για $t \geq 0$)

43. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

44. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln|x|\, dx$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x\ln|x|\, dx$

47. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

48. $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

49. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$

50. $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{2\, dt}{t^{3/2}-1}$

51. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

52. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

53. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\, dx$

54. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4-1}}$

55. $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\, dx$

56. $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}\, dx$

57. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{d\theta}{1+e^{\theta}}$

58. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$

59. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{e^x}{x}\, dx$

60. $\displaystyle\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\, dx$

61. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\, dx$

62. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x}\, dx$

63. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

64. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Θεωρία και παραδείγματα

65. Να βρεθούν οι τιμές του p για τις οποίες κάθε ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(α) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ **(β)** $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. *Το $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ δεν είναι απαραιτήτως ίσο με το $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\, dx$* Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\, dx}{x^2+1}$$

αποκλίνει και ότι συνεπώς και το

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\, dx}{x^2+1}$$

αποκλίνει. Κατόπιν δείξτε ότι

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\, dx}{x^2+1} = 0.$$

Οι Ασκήσεις 67-69 αναφέρονται στο άπειρο χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $y = e^{-x}$ και του άξονα x.

67. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου.

68. *Όγκος* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο ως προς τον αξονα y.

69. *Όγκος* Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο ως προς τον αξονα x.

70. *Εμβαδόν* Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που κείται μεταξύ των καμπυλών $y = \sec x$ και $y = \tan x$ από $x = 0$ έως $x = \pi/2$.

71. *Μάθετε γράφοντας* Ακολουθεί μια επιχειρηματολογία ότι το ln 3 ισούται με $\infty - \infty$. Πού έγκειται το λάθος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln 1 + \ln 3 = \ln 1 - \ln \frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln \frac{x-2}{x}\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x-2) - \ln x\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_3^{\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_3^{\infty} \frac{1}{x-2}\, dx - \int_3^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x-2)\right]_3^b - \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_3^b \\
&= \infty - \infty
\end{aligned}$$

72. *Σύγκριση ολοκληρωμάτων* Δείξτε ότι αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα πραγματικών αριθμών και οι a και b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, τότε

(α) τα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ και $\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνουν ταυτόχρονα αν και μόνον αν τα $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ και $\int_{b}^{\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνουν ταυτόχρονα

(β) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\, dx$ στην περίπτωση σύγκλισης.

73. *Εκτιμήστε την τιμή του συγκλίνοντος γενικευμένου ολοκληρώματος με διάστημα ολοκλήρωσης άπειρο*

(α) Δείξτε ότι

$$\int_3^{\infty} e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3}e^{-9} < 0{,}000042$$

και άρα ότι $\int_3^{\infty} e^{-x^2}\, dx < 0{,}000042$. Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο τα παραπάνω συνεπάγονται ότι το $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $\int_0^{3} e^{-x^2}\, dx$ χωρίς να προκληθεί σφάλμα μεγαλύτερο του 0,000042.

T **(β)** *Αριθμητική ολοκλήρωση* Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{3} e^{-x^2}\, dx$ αριθμητικά.

74. *Συνάρτηση ημιτονικού ολοκληρώματος* Το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

που καλείται **συνάρτηση ημιτονικού ολοκληρώματος,** έχει σπουδαίες εφαρμογές στην οπτική.

T **(α)** Παραστήστε γραφικά την ολοκληρωτέα συνάρτηση $(\sin t)/t$ για $t > 0$. Η συνάρτηση Si είναι παντού αύξουσα ή φθίνουσα; Πιστεύετε ότι $\mathrm{Si}\,(x) = 0$ για $x > 0$; Ελέγξετε τις απαντήσεις σας παριστώντας γραφικά τη συνάρτηση $\mathrm{Si}\,(x)$ για $0 \leq x \leq 25$.

(β) Διερευνήστε τη σύγκλιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Αν αυτό συγκλίνει, ποια είναι η τιμή του;

75. *Συνάρτηση σφάλματος* Η συνάρτηση

$$\mathrm{erf}\,(x) = \int_0^{x} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\, dt,$$

που καλείται **συνάρτηση σφάλματος (error function),** έχει σπουδαίες εφαρμογές στις πιθανότητες και στη στατιστική.

T **(α)** Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση σφάλματος για $0 \leq x \leq 25$.

(β) Διερευνήστε τη σύγκλιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\infty} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\, dt.$$

Αν αυτό συγκλίνει, ποια πιστεύετε ότι είναι η τιμή του; Στην Άσκηση 37 της Ενότητας 12.3 θα δείτε πώς επαληθεύεται η εκτίμηση που κάνατε.

76. *Συνάρτηση κανονικής κατανομής πιθανότητας* Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

καλείται **συνάρτηση κανονικής πυκνότητας πιθανότητας** με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Ο αριθμός μ μάς λέει που βρίσκεται το κέντρο της κατανομής, ενώ το σ μετρά τη «διασπορά» γύρω από τη μέση τιμή.

Από τη θεωρία πιθανοτήτων, είναι γνωστό ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Σε όσα ακολουθούν, υποθέτουμε ότι $\mu = 0$ και $\sigma = 1$.

T **(α)** Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f. Βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα, τα διαστήματα όπου η f είναι φθίνουσα, καθώς και πού προκύπτουν και ποια είναι τα τοπικά ακρότατά της.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-n}^{n} f(x)\, dx$$

για $n = 1, 2, 3$.

(γ) Επιχειρηματολογήστε πειστικά ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

(*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι $0 < f(x) < e^{-x/2}$ για $x > 1$, και ότι για $b > 1$,

$$\int_b^{\infty} e^{-x/2}\, dx \to 0, \text{ καθώς } 0 \to \infty\ .)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Διερεύνηση ολοκληρωμάτων της μορφής $x^p \ln x$

Στις Ασκήσεις 77-80, χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να διερευνήσετε τα ολοκληρώματα για διάφορες τιμές του p (περιλαμβάνοντας μη ακέραιες τιμές). Για ποιες τιμές του p συγκλίνει το ολοκλήρωμα; Ποια είναι τότε η τιμή του; Παραστήστε γραφικά την ολοκληρωτέα συνάρτηση για διάφορες τιμές του p.

77. $\displaystyle\int_0^{e} x^p \ln x\, dx$

78. $\displaystyle\int_e^{\infty} x^p \ln x\, dx$

79. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^p \ln x\, dx$

80. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^p \ln|x|\, dx$

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Ποιους βασικούς τύπους ολοκλήρωσης γνωρίζετε;
2. Ποιες μεθόδους γνωρίζετε για να αντιστοιχίζετε ολοκληρώματα με γνωστούς βασικούς τύπους ολοκλήρωσης;
3. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες; Ποια η προέλευσή του; Γιατί μας είναι χρήσιμος;
4. Κατά την εφαρμογή του τύπου ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, πώς επιλέγουμε τα u και dv; Πώς εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f(x)\, dx$;
5. Τι είναι η πινακοειδής ολοκλήρωση; Δώστε ένα παράδειγμα.
6. Σε τι αποσκοπεί η μέθοδος των μερικών κλασμάτων;
7. Όταν ο βαθμός ενός πολυωνύμου $f(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $g(x)$, πώς μπορούμε να γράψουμε το πηλίκο $f(x)/g(x)$ σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων αν το $g(x)$

(α) είναι γινόμενο διακριτών (διαφορετικών) γραμμικών παραγόντων (β) περιλαμβάνει έναν επαναλαμβανόμενο γραμμικό παράγοντα

(γ) περιέχει έναν ανάγωγο δευτεροβάθμιο παράγοντα;

Τι κάνουμε όταν ο βαθμός του πολυωνύμου f *δεν* είναι μικρότερος του βαθμού του g;

8. Με ποιες αντικαταστάσεις μπορούμε μερικές φορές να μετατρέπουμε πολυώνυμα δευτέρου βαθμού σε απλούς όρους (μονώνυμα) στο τετράγωνο; Γιατί είναι επιθυμητή μια τέτοια μετατροπή;
9. Τι είδους περιορισμούς επιβάλλουμε στις μεταβλητές των τριών κύριων τριγωνομετρικών αντικαταστάσεων για να εξασφαλίσουμε ότι οι αντικαταστάσεις αυτές είναι αντιστρέψιμες (διαθέτουν αντιστρόφους);
10. Πώς χρησιμοποιούμε τύπους ολοκλήρωσης στην πράξη; Τι κάνουμε όταν ένα συγκεκριμένο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε δεν περιέχεται στον πίνακα ολοκλήρωσης που διαθέτουμε;
11. Περιγράψτε την ολοκλήρωση Monte Carlo για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου που κείται κάτω από μια καμπύλη και πάνω από τον άξονα x.
12. Περιγράψτε τον κανόνα l'Hôpital. Πώς ξέρουμε πότε να εφαρμόσουμε τον κανόνα και πότε να σταματήσουμε να τον εφαρμόζουμε; Δώστε ένα παράδειγμα.
13. Πώς μπορούμε μερικές φορές να υπολογίζουμε όρια που καταλήγουν στις απροσδιόριστες μορφές 1^∞, 0^0, και ∞^0; Δώστε παραδείγματα.
14. Τι είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα; Πώς ορίζονται οι τιμές διαφόρων τύπων γενικευμένων ολοκληρωμάτων; Δώστε παραδείγματα.
15. Ποια κριτήρια έχουμε στη διάθεσή μας για τον προσδιορισμό σύγκλισης και απόκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων που δεν μπορούν να υπολογιστούν άμεσα; Δώστε παραδείγματα χρήσης των κριτηρίων αυτών.

Ασκήσεις κεφαλαίου

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 1-46. Χρησιμοποιήστε τις τεχνικές της αλγεβρικής αντικατάστασης, συμπλήρωσης του τετραγώνου, χωρισμού σε κλάσματα, εκτέλεσης της διαίρεσης, ή τριγωνομετρικής αντικατάστασης.

1. $\int x\sqrt{4x^2-9}\,dx$
2. $\int x(2x+1)^{1/2}\,dx$
3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}$
4. $\int \frac{y\,dy}{25+y^2}$
5. $\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{9-4t^4}}$
6. $\int z^{2/3}(z^{5/3}+1)^{2/3}\,dz$
7. $\int \frac{\sin 2\theta\,d\theta}{(1-\cos 2\theta)^2}$
8. $\int \frac{\cos 2t}{1+\sin 2t}\,dt$
9. $\int \sin 2x\, e^{\cos 2x}\,dx$
10. $\int e^\theta \sec^2(e^\theta)\,d\theta$
11. $\int 2^{x-1}\,dx$
12. $\int \frac{dv}{v\ln v}$
13. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(2+\tan^{-1}x)}$
14. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
15. $\int \frac{dt}{\sqrt{16-9t^2}}$
16. $\int \frac{dt}{9+t^2}$
17. $\int \frac{4\,dx}{5x\sqrt{25x^2-16}}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$
19. $\int \frac{dy}{y^2-4y+8}$
20. $\int \frac{dv}{(v+1)\sqrt{v^2+2v}}$
21. $\int \cos^2 3x\,dx$
22. $\int \sin^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$
23. $\int \tan^3 2t\,dt$
24. $\int \frac{dx}{2\sin x\cos x}$
25. $\int \frac{2\,dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}$
26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\csc^2 y-1}\,dy$
27. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{\cot^2 t+1}\,dt$
28. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}\,dx$
29. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\cos 2t}\,dt$
30. $\int_\pi^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2t}\,dt$
31. $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$
32. $\int \frac{x^3}{9+x^2}\,dx$
33. $\int \frac{2y-1}{y^2+4}\,dy$
34. $\int \frac{y+4}{y^2+1}\,dy$
35. $\int \frac{t+2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$
36. $\int \frac{2t^2+\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt$
37. $\int \frac{\tan x\,dx}{\tan x+\sec x}$
38. $\int x\csc(x^2+3)\,dx$
39. $\int \cot\left(\frac{x}{4}\right)dx$
40. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$
41. $\int (16+z^2)^{-3/2}\,dz$
42. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+y^2}}$
43. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
44. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$
46. $\int \frac{12\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 47-54 με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

47. $\int \ln(x+1)\,dx$
48. $\int x^2\ln x\,dx$
49. $\int \tan^{-1}3x\,dx$
50. $\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)dx$
51. $\int (x+1)^2e^x\,dx$
52. $\int x^2\sin(1-x)\,dx$

53. $\int e^x\cos 2x\,dx$
54. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$

Μερικά κλάσματα

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 55-66. Σε μερικά από αυτά θα χρειαστεί να κάνετε πρώτα κάποια αντικατάσταση.

55. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$
56. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
57. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$
58. $\int \frac{3x^2+4x+4}{x^3+x}\,dx$
59. $\int \frac{v+3}{2v^3-8v}\,dv$
60. $\int \frac{dt}{t^4+4t^2+3}$
61. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx$
62. $\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+4x+3}\,dx$
63. $\int \frac{2x^3+x^2-21x+24}{x^2+2x-8}\,dx$
64. $\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x+1})}$
65. $\int \frac{ds}{e^s-1}$
66. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s+1}}$

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 67-70 (α) χωρίς τριγωνομετρική αντικατάσταση και (β) με τριγωνομετρική αντικατάσταση.

67. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{16-y^2}}$
68. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$
69. $\int \frac{x\,dx}{4-x^2}$
70. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^2-1}}$

Δευτεροβάθμιοι όροι

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 71-74.

71. $\int \frac{x\,dx}{9-x^2}$
72. $\int \frac{dx}{x(9-x^2)}$
73. $\int \frac{dx}{9-x^2}$
74. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Ολοκληρώματα διαφόρων τύπων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 75-114. Η σειρά με την οποία παρατίθενται τα ολοκληρώματα είναι τυχαία.

75. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$
76. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$
77. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
78. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$
79. $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$
80. $\int \frac{2-\cos x+\sin x}{\sin^2 x}\,dx$
81. $\int \frac{9\,dv}{81-v^4}$
82. $\int \theta\cos(2\theta+1)\,d\theta$
83. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$
84. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sqrt{\theta}}}$
85. $\int \frac{2\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}$
86. $\int \frac{x^5\,dx}{x^4-16}$
87. $\int \frac{d\theta}{\theta^2-2\theta+4}$
88. $\int \frac{dr}{(r+1)\sqrt{r^2+2r}}$
89. $\int \frac{\sin 2\theta\,d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$
90. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
91. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$
92. $\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$
93. $\int \ln\sqrt{x-1}\,dx$
94. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$
95. $\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\,dz$
96. $\int x^3e^{(x^2)}\,dx$
97. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$
98. $\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$
99. $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$
100. $\int \frac{\cos(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
101. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x-\sin x}$
102. $\int \frac{e^t\,dt}{1+e^t}$
103. $\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3}\,dy$
104. $\int \frac{\cot v\,dv}{\ln\sin v}$
105. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x}}$
106. $\int e^{\ln\sqrt{x}}\,dx$
107. $\int e^\theta\sqrt{3+4e^\theta}\,d\theta$
108. $\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$
109. $\int (27)^{3\theta+1}\,d\theta$
110. $\int x^5\sin x\,dx$
111. $\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$
112. $\int \frac{8\,dy}{y^3(y+2)}$
113. $\int \frac{8\,dm}{m\sqrt{49m^2-4}}$
114. $\int \frac{dt}{t(1+\ln t)\sqrt{(\ln t)(2+\ln t)}}$

Όρια

Στις Ασκήσεις 115-128, βρείτε τα όρια.

115. $\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+2t)}{t^2}$
116. $\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3t}{\tan 5t}$
117. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$
118. $\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$
119. $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$
120. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$
121. $\lim_{r\to\infty}\frac{\cos r}{\ln r}$
122. $\lim_{\theta\to\pi/2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\sec\theta$
123. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$
124. $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
125. $\lim_{\theta\to 0^+}(\tan\theta)^\theta$
126. $\lim_{\theta\to\infty}\theta^2\sin\left(\frac{1}{\theta}\right)$
127. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{2x^2+x-3}$
128. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^4-x^3+2}$

Γενικευμένα ολοκληρώματα

Στις Ασκήσεις 129-138, υπολογίστε κάθε γενικευμένο ολοκλήρωμα, ή δείξτε ότι αποκλίνει.

129. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **130.** $\int_0^1 \ln x\,dx$

131. $\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^{2/3}}$ **132.** $\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

133. $\int_3^\infty \frac{2\,du}{u^2-2u}$ **134.** $\int_1^\infty \frac{3v-1}{4v^3-v^2}\,dv$

135. $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$ **136.** $\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\,dx$

137. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+9}$ **138.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{4\,dx}{x^2+16}$

Σύγκλιση ή απόκλιση

Ποια από τα γενικευμένα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 139-144 συγκλίνουν, και ποια αποκλίνουν; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

139. $\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$ **140.** $\int_0^\infty e^{-u}\cos u\,du$

141. $\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\,dz$

142. $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$

143. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

144. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Στις Ασκήσεις 145-148, λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών.

145. $\frac{dy}{dx} = e^x(y^2-y),\quad y(0)=2$

146. $\frac{dy}{d\theta} = (y+1)^2\sin\theta,\quad y(\pi/2)=0$

147. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2-3x+2},\quad y(3)=0$

148. $\frac{ds}{dt} = \frac{2s+2}{t^2+2t},\quad s(1)=1$

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

Ολοκληρώματα με ... απαιτήσεις

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 1-10.

1. $\int (\sin^{-1}x)^2\,dx$

2. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\int x\sin^{-1}x\,dx$ **4.** $\int \sin^{-1}\sqrt{y}\,dy$

5. $\int \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$

6. $\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\,dx$

7. $\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$ **8.** $\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

9. $\int \frac{dx}{x^4+4}$ **10.** $\int \frac{dx}{x^6-1}$

Όρια

Βρείτε τα όρια στις Ασκήσεις 11-16.

11. $\lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \tan^{-1}t\,dt$

13. $\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$ **14.** $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}$

15. $\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^x \sin t\,dt$ **16.** $\lim_{x\to0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

Θεωρία και εφαρμογές

17. *Εύρεση μήκους τόξου* Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$y=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt,\qquad 0\le x\le \pi/4.$$

18. *Εύρεση μήκους τόξου* Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le 1/2$.

19. *Εύρεση όγκου* Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τον άξονα x και την καμπύλη $y=3x\sqrt{1-x}$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα y. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

20. *Εύρεση όγκου* Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τον άξονα x, την καμπύλη $y=5/(x\sqrt{5-x})$, και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

21. *Εύρεση όγκου* Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τους άξονες συντεταγμένων, την καμπύλη $y=e^x$, και την ευθεία $x=1$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα y. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

22. *Εύρεση όγκου* Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $y=e^x-1$, από κάτω από τον άξονα x, και εκ δεξιών από την ευθεία $x=\ln 2$ περιστρέφεται ως προς την ευθεία $x=\ln 2$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

23. *Εύρεση όγκου* Έστω R το «τριγωνικό» χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου το οποίο φράσσεται από πάνω από την ευθεία $y=1$, από κάτω από την καμπύλη $y=\ln x$, και εξ αριστερών από την ευθεία $x=1$. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο R ως προς

(α) τον άξονα x

(β) την ευθεία $y=1$.

24. *Εύρεση όγκου* (*Συνέχεια της Άσκησης 23*) Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο R ως προς

(α) τον άξονα y

(β) την ευθεία $x=1$.

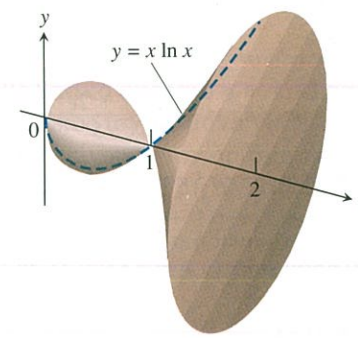
25. *Εύρεση όγκου* Το χωρίο μεταξύ του άξονα x και της καμπύλης

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x\ln x, & 0<x\le 2\end{cases}$$

περιστρέφεται ως προς τον άξονα x παράγοντας το στερεό που δείχνεται στο σχήμα.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

(β) Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής.



26. *Εύρεση όγκου* Το άπειρο χωρίο που φράσσεται από τους άξονες συντεταγμένων και την καμπύλη $y=-\ln x$ στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστρέφεται ως προς τον άξονα x. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

27. *Εύρεση ορίου* Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\,y^{n-1}}{1+y}\,dy.$$

28. *Τύπος ολοκλήρωσης* Αποδείξτε τον τύπο

$$\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2}+C,\qquad n\ne -2.$$

29. *Μια ανισότητα* Αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{6}<\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

(*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι για $0<x<1$, έχουμε $4-x^2>4-x^2-x^3>4-2x^2$, οπότε η αριστερή ανισότητα γίνεται ισότητα για $x=0$ ενώ η δεξιά ανισότητα γίνεται ισότητα για $x=1$.)

30. *Μάθετε γράφοντας* Για ποιες τιμές του a συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2+1}-\frac{1}{2x}\right)dx;$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στις τιμές αυτές.

31. *Υπολογισμός ολοκληρώματος* Γνωρίζουμε ότι για μια συνάρτηση f ισχύει ότι

$$\frac{\pi}{6}<\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\quad\text{και}\quad f(3\pi/2)=b.$$

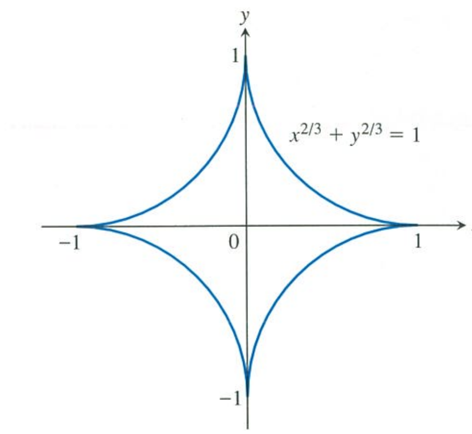
Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες υπολογίστε το

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx.$$

32. *Εύρεση ίσων εμβαδών* Να βρεθεί ο θετικός αριθμός a για τον οποίο ικανοποιείται η ισότητα

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

33. *Μήκος αστροειδούς* Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ ανήκει σε μια οικογένεια καμπυλών που καλούνται *αστροειδείς* (όχι «αστεροειδείς») λόγω του σχήματός τους που μοιάζει με αστέρι (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα). Να βρεθεί το μήκος της συγκεκριμένης αστροειδούς.



34. Να βρεθεί μια καμπύλη που διέρχεται από την αρχή και έχει μήκος

$$\int_0^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx.$$

35. *Μια ρητή συνάρτηση* Να βρεθεί το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $P(x)$ για το οποίο $P(0)=1$, $P'(0)=0$, και η

$$\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

είναι ρητή συνάρτηση.

36. *Μάθετε γράφοντας* Χωρίς να υπολογίσετε κανένα από τα δύο ολοκληρώματα, εξηγήστε γιατί ισχύει ότι

$$2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(*Πηγή:* Peter A. Lindstrom, άρθρο στο περιοδικό *Mathematics Magazine*, Vol. 45, No. 1 (January 1972), p. 47.)

37. *Άπειρο εμβαδόν και πεπερασμένος όγκος* Για ποιες τιμές του p ισχύουν τα ακόλουθα; Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της καμπύλης $y=x^{-p}$, $1\le x<\infty$, και του άξονα x είναι άπειρο, αλλά ο όγκος του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο ως προς τον άξονα x είναι πεπερασμένος.

38. *Άπειρο εμβαδόν και πεπερασμένος όγκος* Για ποιες τιμές του p ισχύουν τα ακόλουθα; Το εμβαδόν του χωρίου στο πρώτο τεταρτημόριο που περικλείεται από την καμπύλη $y=x^{-p}$, τον άξονα y, την ευθεία $x=1$, και το διάστημα [0, 1] του άξονα x απειρίζεται, αλλά ο όγκος του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο ως προς τον άξονα x είναι πεπερασμένος.

39. *Πεπερασμένο εμβαδόν*

T **(α)** Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = e^{(x-e^x)}$, $-5 \le x \le 3$.

(β) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

συγκλίνει, και ακολούθως βρείτε την τιμή του.

40. *Ένα ολοκλήρωμα που συνδέει το π με την προσεγγιστική τιμή 22/7*

(α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,dx.$$

(β) Πόσο καλή είναι η προσέγγιση $\pi \approx 22/7$; Απαντήστε στο ερώτημα εκφράζοντας το $(\pi - 22/7)$ ως ποσοστό του π.

T **(γ)** Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$y = \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$$

για $0 \le x \le 1$. Ξεκινήστε με το διάστημα τιμών σχεδίασης του y από 0 έως 1, κατόπιν από 0 έως 0,5, και συνεχίστε μειώνοντάς το βαθμιαία, αρκεί να μπορείτε να διακρίνετε την καμπύλη. Τι συμπεραίνετε ως προς το εμβαδόν του χωρίου που κείται κάτω από την καμπύλη;

Πινακοειδής ολοκλήρωση

Η τεχνική της πινακοειδούς ολοκλήρωσης εφαρμόζεται επίσης σε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(x)g(x)\,dx$ όπου καμία από τις δύο συναρτήσεις δεν μπορεί να «μηδενιστεί» παραγωγιζόμενη επανειλημμένα. Για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσουμε το

$$\int e^{2x}\cos x\,dx,$$

ξεκινούμε όπως και πριν, με έναν πίνακα όπου καταγράφουμε διαδοχικά παραγώγους του e^{2x} και ολοκληρώματα του $\cos x$:

e^{2x} **και παράγωγοί του**		**cos x και ολοκληρώματά του**
e^{2x}	$+$	$\cos x$
$2e^{2x}$	$-$	$\sin x$
$4e^{2x}$	$+$	$-\cos x$ ←

Εδώ σταματάμε: Η σειρά αυτή συμπίπτει με την αρχική, αν εξαιρέσουμε πολλαπλασιαστικές σταθερές (4 για τη συνάρτηση αριστερά, −1 για τη συνάρτηση δεξιά).

Σταματούμε την παραγώγιση και την ολοκλήρωση μόλις καταλήξουμε σε μια σειρά που (αν εξαιρέσουμε πολλαπλασιαστικές σταθερές) είναι η ίδια με την αρχική. Ερμηνεύουμε τον πίνακα αυτόν ως εξής:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = +(e^{2x}\sin x) - (2e^{2x}(-\cos x))$$
$$+ \int (4e^{2x})(-\cos x)\,dx.$$

Δηλαδή, αθροίζουμε προσημασμένα γινόμενα όπως δείχνουν τα διαγώνια βέλη, και ένα προσημασμένο ολοκλήρωμα όπως δείχνει το τελευταίο οριζόντιο βέλος. Μεταφέροντας το ολοκλήρωμα αυτό από το δεξιό μέλος στο αριστερό, παίρνουμε

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$$

δηλαδή

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x}{5} + C,$$

μετά από διαίρεση με το 5 και πρόσθεση της σταθεράς ολοκλήρωσης.

Εφαρμόστε πινακοειδή ολοκλήρωση για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 41-48.

41. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

42. $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$

43. $\int \sin 3x \sin x\,dx$

44. $\int \cos 5x \sin 4x\,dx$

45. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$

46. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

47. $\int \ln(ax)\,dx$

48. $\int x^2\ln(ax)\,dx$

Η συνάρτηση Γάμμα και ο τύπος Stirling

Η συνάρτηση Γάμμα του Euler $\Gamma(x)$ χρησιμοποιεί ένα ολοκλήρωμα για να επεκτείνει τη συνάρτηση παραγοντικού από μη αρνητικούς ακεραίους στους υπόλοιπους πραγματικούς αριθμούς. Ο τύπος της είναι

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad x > 0.$$

Για κάθε x, ο αριθμός $\Gamma(x)$ είναι το ολοκλήρωμα του $t^{x-1}e^{-t}$ ως προς t από 0 έως ∞. Το Σχήμα 7.21 δείχνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Γ κοντά στην αρχή των αξόνων. Στην Επιπρόσθετη Άσκηση 31 του Κεφαλαίου 12 θα δείτε πώς υπολογίζουμε την τιμή $\Gamma(1/2)$.

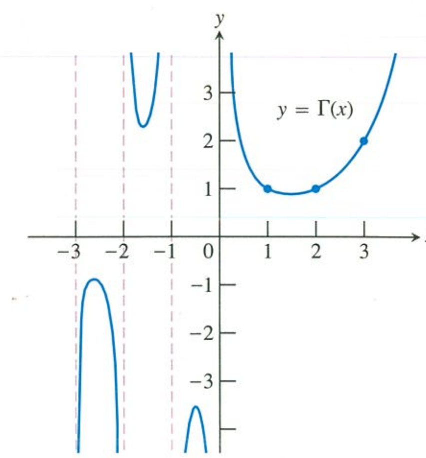
49. *Για n μη αρνητικό ακέραιο, $\Gamma(n+1) = n!$*

(α) Δείξτε ότι $\Gamma(1) = 1$.

(β) Κατόπιν εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το ολοκλήρωμα $\Gamma(x+1)$ για να δείξετε ότι $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Έτσι παίρνουμε

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \qquad (1)$$

(γ) Να επαληθεύσετε την Εξίσωση (1) για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.



Σχημα 7.21 Η $\Gamma(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x με τιμή $n!$ για κάθε θετικό ακέραιο $n+1$. Ο παραπάνω ολοκληρωτικός τύπος ισχύει μόνο για $x > 0$, αλλά μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης Γ σε αρνητικές μη ακέραιες τιμές του x μέσω του τύπου $\Gamma(x) = (\Gamma(x+1))/x$, όπως καλείστε να κάνετε στην Άσκηση 49.

50. *Τύπος Stirling* Ο Σκωτσέζος μαθηματικός James Stirling (1692-1770) έδειξε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Gamma(x) = 1,$$

οπότε για μεγάλα x,

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,(1+\epsilon(x)),\ \epsilon(x)\to 0 \text{ καθώς } x\to\infty. \quad (2)$$

Θεωρώντας αμελητέο το $\epsilon(x)$ παίρνουμε την προσέγγιση

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad \textbf{(τύπος Stirling)}. \quad (3)$$

(α) *Προσέγγιση Stirling του παραγοντικού n!* Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση (3) και το γεγονός ότι $n! = n\Gamma(n)$ για να δείξετε ότι

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi} \qquad \textbf{(προσέγγιση Stirling)}. \quad (4)$$

Όπως θα δείτε στην Άσκηση 64 της Ενότητας 8.1, η Εξίσωση (4) οδηγεί στην προσέγγιση

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}. \quad (5)$$

(β) Συγκρίνετε με το κομπιουτεράκι σας την τιμή του $n!$ με την τιμή που δίνει η προσέγγιση Stirling για $n = 10, 20, 30, \ldots$, (για όσο μεγαλύτερα n μπορείτε).

(γ) Μια βελτίωση της Εξίσωσης (2) είναι η

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{1/(12x)}(1+\epsilon(x)),$$

δηλαδή

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{1/(12x)},$$

που σημαίνει ότι

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\,e^{1/(12n)}. \quad (6)$$

Συγκρίνετε με το κομπιουτεράκι σας την τιμή του 10! με την τιμή της προσέγγισης Stirling, και της Εξίσωσης (6).

χωρίου που κείται κάτω από την παραβολή είναι το ίδιο ανεξαρτήτως της θέσης του άξονα y, αρκεί να μην αλλάξουμε βέβαια την κατακόρυφη κλίμακα. Η παραβολή περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $y = Ax^2 + Bx + C$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που κείται κάτω από αυτήν από $x = -h$ έως $x = h$ θα είναι

$$\begin{aligned}\text{Εμβαδόν} &= \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch \\ &= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).\end{aligned}$$

Εφόσον η καμπύλη διέρχεται από τα σημεία $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, και (h, y_2), θα έχουμε επίσης

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε

$$\begin{aligned}C &= y_1 \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές των C και $2Ah^2$ παίρνουμε

$$\text{Εμβαδόν} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Π.6 Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy και η ισχυρότερη μορφή του κανόνα του l'Hôpital

Στο παράρτημα αυτό θα αποδείξουμε την περίπτωση πεπερασμένου ορίου της ισχυρότερης μορφής του κανόνα l'Hôpital (Ενότητα 7.6, Θεώρημα 2):

Κανόνας του L'Hôpital (ισχυρότερη μορφή)

Έστω ότι

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

και ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ταυτόχρονα διαφορίσιμες σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) που περιέχει το σημείο x_0. Έστω ακόμη ότι $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο του (a, b) εκτός, ενδεχομένως, στο x_0. Τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1}$$

εφόσον το όριο του δεξιού μέλους υπάρχει.

Η απόδειξη της ισχυρότερης μορφής του κανόνα l'Hôpital βασίζεται στο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, το οποίο κάνει λόγο για δύο συναρτήσεις. Αφού αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα του Cauchy, θα δείξουμε κατόπιν πώς αυτό οδηγεί στον κανόνα l'Hôpital.

Το θεώρημα μέσης τιμής που είδαμε στο Κεφάλαιο 3 (Ενότητα 3.2, Θεώρημα 4) αντιστοιχεί στην περίπτωση $g(x) = x$.

Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και διαφορίσιμες στο (a, b) και ακόμη ότι $g'(x) \neq 0$ σε όλο το (a, b). Θα υπάρχει τότε ένας αριθμός c στο (a, b) για τον οποίο θα ισχύει

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{2}$$

Απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy Εφαρμόζουμε δύο φορές το θεώρημα μέσης τιμής της Ενότητας 3.2. Κατ' αρχάς το χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι $g(a) \neq g(b)$. Αν το $g(b)$ ήταν ίσο με $g(a)$, τότε το θεώρημα μέσης τιμής θα μας έδινε

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

για κάποιο c μεταξύ των a και b, πράγμα που δεν μπορεί να αληθεύει εφόσον $g'(x) \neq 0$ στο (a, b).

Εφαρμόζουμε έπειτα το θεώρημα μέσης τιμής στη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και διαφορίσιμη όπου οι f και g είναι τέτοιες, και επίσης $F(b) = F(a) = 0$. Συνεπώς, θα υπάρχει ένας αριθμός c μεταξύ των a και b τέτοιος ώστε $F'(c) = 0$. Εκφράζοντας την εξίσωση αυτή συναρτήσει των f και g, παίρνουμε

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

δηλαδή

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

που είναι η ζητούμενη Εξίσωση (2).

Απόδειξη της ισχυρότερης μορφής του κανόνα l'Hôpital Θα δείξουμε πρώτα ότι η Εξίσωση (1) ισχύει για την περίπτωση $x \to x_0^+$. Η μέθοδος που θα εφαρμόσουμε μπορεί ευθέως να χρησιμοποιηθεί ευθέως και για την περίπτωση $x \to x_0^-$, ενώ ο συνδυασμός των δύο περιπτώσεων ολοκληρώνει την απόδειξη.

Έστω ότι το x κείται στα δεξιά του x_0. Τότε $g'(x) \neq 0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy στο κλειστό διάστημα x_0 έως x. Έτσι προκύπτει ένας αριθμός c μεταξύ x_0 και x τέτοιος ώστε

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Όμως $f(x_0) = g(x_0) = 0$, οπότε

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Καθώς το x τείνει στο x_0, το c τείνει στο x_0 εφόσον κείται μεταξύ των x και x_0. Συνεπώς,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

σχέση που αποδεικνύει τον κανόνα l'Hôpital στην περίπτωση όπου το x τείνει στο x_0 από πάνω. Η περίπτωση κατά την οποία το x τείνει στο x_0 από κάτω αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy στο κλειστό διάστημα $[x, x_0]$, $x < x_0$.

69. (α) $\coth^{-1}(2) - \coth^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$ (β) $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

71. (α) $-\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(β) $-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\left(\frac{12}{13}\right)}\right) + \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\left(\frac{4}{5}\right)}\right) =$

$-\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

73. (α) 0 (β) 0

75. (β) i. $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$

ii. $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

77. (β) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ (γ) $\approx 54{,}2$ m/sec

79. $y = \operatorname{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$ 81. 2π

83. $\frac{6}{5}$

87. (β) Η τομή προκύπτει κοντά στο σημείο (0,042, 0,672)
(γ) $a \approx 0{,}0417525$ (δ) $\approx 47{,}90$ N

Ασκήσεις Κεφαλαίου 6, σελ. 514-518

1. $-2e^{-x/5}$ 3. xe^{4x}

5. $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} = 2\cot\theta$ 7. $\frac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}(\ln 8)$ 11. $18x^{2,6}$

13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$ 15. $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, 0 < u <$
1

17. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}$ 19. $\tan^{-1}(t) + \frac{t}{1+t^2}$
$-\frac{1}{2t}$

21. $\frac{1-z}{\sqrt{z^2-1}} + \sec^{-1}z, z > 1$ 23. $-1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

25. $\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \tan 2x\right)$

27. $5\left[\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+3}\right)$

29. $\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}(\ln\sqrt{\sin\theta} + \theta\cot\theta)$

31. $-\cos e^x + C$ 33. $\tan(e^x - 7) + C$

35. $e^{\tan x} + C$ 37. $\frac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$ 41. $\ln\left(\frac{9}{25}\right)$

43. $-[\ln|\cos(\ln v)|] + C$ 45. $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$

47. $-\cot(1+\ln r) + C$ 49. $\frac{1}{2\ln 3}(3^{x^2}) + C$

51. $3\ln 7$ 53. $\frac{15}{16} + \ln 2$

55. $e - 1$ 57. $\frac{1}{6}$

59. $\frac{9}{14}$

61. $\frac{1}{3}[(\ln 4)^3 - (\ln 2)^3]$ δηλ. $\frac{7}{3}(\ln 2)^3$

63. $\frac{9\ln 2}{4}$ 65. π

67. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 69. $\sec^{-1}|2y| + C$

71. $\frac{\pi}{12}$ 73. $\sin^{-1}(x+1) + C$

75. $\frac{\pi}{2}$ 77. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{t+1}{3}\right) + C$

79. $\frac{1}{3}$

81. Ολικό μέγιστο $= 0$ για $x = \frac{e}{2}$, ολικό ελάχιστο $= -0{,}5$ για $x = 0{,}5$

83. 1 85. $\frac{1}{e}$ m/sec

87. (α) Ολικό μέγιστο $\frac{2}{e}$ για $x = e^2$,
σημείο καμπής $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$,
κοίλα άνω στο $(e^{8/3}, \infty)$, κοίλα κάτω στο $(0, e^{8/3})$

(β) Ολικό μέγιστο 1 για $x = 0$,
σημεία καμπής $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,
κοίλα άνω στο $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$,
κοίλα κάτω στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(γ) Ολικό μέγιστο 1 για $x = 0$, σημείο καμπής $\left(1, \frac{2}{e}\right)$,
κοίλα άνω στο $(1, \infty)$,κοίλα κάτω στο $(-\infty, 1)$

89. 18.935 έτη

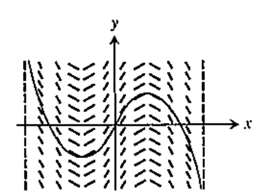
91. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ μονάδες σε μήκος επί $\frac{1}{\sqrt{e}}$ μονάδες σε ύψος,
$A = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0{,}43$ μονάδες^2

93. $\ln 5x - \ln 3x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ 95. $20(5 - \sqrt{17})$ m

99. $y = \ln(-e^{-x-2} + 2e^{-2})$

101. $y = \frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1\right)$

103.



105. Θέτουμε $z_n = y_{n-1} + ((2 - y_{n-1})(2x_{n-1} + 3))(0{,}1)$ και $y_n = y_{n-1} + \left(\frac{(2 - y_{n-1})(2x_{n-1} + 3) + (2 - z_n)(2x_n + 3)}{2}\right)(0{,}1)$ με αρχικές τιμές $x_0 = -3$, $y_0 = 1$, και 20 βήματα. Χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή γραφικών ή κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, βρίσκουμε τις τιμές του ακόλουθου πίνακα.

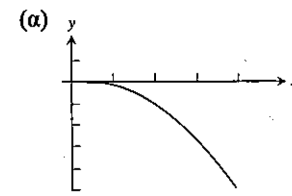
x	y
−3	1
−2,9	0,6680
−2,8	0,2599
−2,7	−0,2294
−2,6	−0,8011
−2,5	−1,4509
−2,4	−2,1687
−2,3	−2,9374
−2,2	−3,7333
−2,1	−4,5268
−2,0	−5,2840

x	y
−1,9	−5,9686
−1,8	−6,5456
−1,7	−6,9831
−1,6	−7,2562
−1,5	−7,3488
−1,4	−7,2553
−1,3	−6,9813
−1,2	−6,5430
−1,1	−5,9655
−1,0	−5,2805

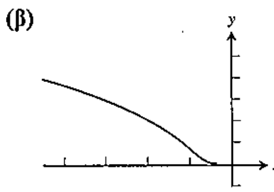
107. Θέτουμε $y_n = y_{n-1} + \left(\frac{x_{n-1}{}^2 - 2y_{n-1} + 1}{x_{n-1}}\right)(0{,}05)$ με αρχικές τιμές $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, και 60 βήματα.
Χρησιμοποιώντας υπολογιστή γραφικών ή κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, βρίσκουμε $y(4) \approx 4{,}4974$.

109. Θέτουμε $z_n = y_{n-1} - \left(\frac{x_{n-1}{}^2 + y_{n-1}}{e^{y_{n-1}} + x_{n-1}}\right)(dx)$ και $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_{n-1}{}^2 + y_{n-1}}{e^{y_{n-1}} + x_{n-1}} + \frac{x_n{}^2 + z_n}{e^{z_n} + x_n}\right)(dx)$ με τιμές εκκίνησης $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, και βήματα 0,1 και −0,1.
Χρησιμοποιώντας υπολογιστή γραφικών ή κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, παράγουμε τα ακόλουθα γραφήματα::

(α)



(β)



111. y(ακριβής) $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$· $y \approx 0{,}4$· η ακριβής τιμή είναι $\frac{1}{2}$

113. y(ακριβής) $= -e^{(x^2-1)/2}$· $y \approx -3{,}4192$· η ακριβής τιμή είναι $-e^{3/2} \approx -4{,}4817$.

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 6, σελ. 518-520

1. $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{2\ln 2}, 2\cdot 1$ 3. $\frac{2}{17}$

9. Κάνοντας χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού παίρνουμε $y' = \sin(x^2) + 3x^2 + 1$. Κατόπιν παραγωγίζουμε και πάλι και επίσης επαληθεύουμε τις αρχικές συνθήκες.

11. $\pi\ln 2$ 13. (β) 61°

15. (α) $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$
(β) Λύση σταθερής κατάστασης: $y_\infty = c$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ενότητα 7.1, σελ. 526-528

1. $2\sqrt{8x^2+1} + C$ 3. $2(\sin v)^{3/2} + C$

5. $\ln 5$ 7. $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

9. $-\frac{1}{7}\ln|\sin(3-7x)| + C$

11. $-\ln|\csc(e^\theta+1) + \cot(e^\theta+1)| + C$

13. $3\ln\left|\sec\frac{t}{3} + \tan\frac{t}{3}\right| + C$

15. $-\ln|\csc(s-\pi) + \cot(s-\pi)| + C$

17. 1 19. $e^{\tan v} + C$

21. $\frac{3^{x+1}}{\ln 3} + C$ 23. $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$

25. $3\tan^{-1}3u + C$ 27. $\frac{\pi}{18}$

29. $\sin^{-1}s^2 + C$ 31. $6\sec^{-1}|5x| + C$

33. $\tan^{-1}e^x + C$ 35. $\ln(2+\sqrt{3})$

37. 2π 39. $\sin^{-1}(t-2) + C$

41. $\sec^{-1}|x+1| + C$, για $|x+1| > 1$

43. $\tan x - 2\ln|\csc x + \cot x| - \cot x - x + C$

45. $x + \sin 2x + C$ 47. $x - \ln|x+1| + C$

49. $7 + \ln 8$

51. $2t^2 - t + 2\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$

53. $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$ 55. $\sqrt{2}$

57. $\tan x - \sec x + C$ 59. $\ln|1+\sin\theta| + C$

61. $\cot x + x + \csc x + C$ 63. 4

65. $\sqrt{2}$ 67. 2

69. $\ln|\sqrt{2}+1| - \ln|\sqrt{2}-1|$ 71. $4 - \frac{\pi}{2}$

73. $-\ln|\csc(\sin\theta) + \cot(\sin\theta)| + C$

75. $\ln|\sin x| + \ln|\cos x| + C$ 77. $12\tan^{-1}(\sqrt{y}) + C$

79. $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right| + C$ 81. $\ln|\sec(\tan t)| + C$

83. (α) $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$

(β) $\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta + C$

(γ) $\int\cos^9\theta\,d\theta = \int\cos^8\theta(\cos\theta)\,d\theta = \int(1-\sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,d\theta$

85. (α) $\int\tan^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \int\tan\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + \ln|\cos\theta| + C$

(β) $\int\tan^5\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\tan^4\theta - \int\tan^3\theta\,d\theta$

(γ) $\int\tan^7\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\tan^6\theta - \int\tan^5\theta\,d\theta$

(δ) $\int\tan^{2k+1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2k}\tan^{2k}\theta - \int\tan^{2k-1}\theta\,d\theta$

87. $2\sqrt{2} - \ln(3+2\sqrt{2})$

89. π^2

91. $\ln(2+\sqrt{3})$

Ενότητα 7.2, σελ. 534-536

1. $-2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$

3. $t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$

5. $\ln 4 - \frac{3}{4}$

7. $y \tan^{-1}(y) - \ln \sqrt{1 + y^2} + C$
9. $x \tan x + \ln |\cos x| + C$
11. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$
13. $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$
15. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$
17. $\frac{\pi^2 - 4}{8}$ 19. $\frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$
21. $\frac{1}{2}(-e^{\theta} \cos \theta + e^{\theta} \sin \theta) + C$
23. $\frac{e^{2x}}{13}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C$
25. $\frac{2}{3}(\sqrt{3s + 9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}) + C$
27. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$
29. $\frac{1}{2}[-x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)] + C$
31. $y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\right)e^{4x} + C$
33. $-2(\sqrt{\theta} \cos \sqrt{\theta} - \sin \sqrt{\theta}) + C$
35. (α) π (β) 3π
(γ) 5π (δ) $(2n + 1)\pi$
37. $2\pi(1 - \ln 2)$
39. (α) $\pi(\pi - 2)$ (β) 2π
41. $\frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$
43. $u = x^n, dv = \cos x\, dx$ 45. $u = x^n, dv = e^{ax}\, dx$
47. (α) Έστω $y = f^{-1}(x)$. Τότε $x = f(y)$, άρα $dx = f'(y)\, dy$. Με απευθείας αντικατάσταση προκύπτει το ζητούμενο.
(β) $u = y, dv = f'(y)\, dy$
49. (α) $\int \sin^{-1} x\, dx = x \sin^{-1} x + \cos(\sin^{-1} x) + C$
(β) $\int \sin^{-1} x\, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$
(γ) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
51. (α) $\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C$
(β) $\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$
(γ) $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

Ενότητα 7.3, σελ. 545-546

1. $\frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x - 2}$ 3. $\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$
5. $\frac{-2}{z} + \frac{-1}{z^2} + \frac{2}{z - 1}$ 7. $1 + \frac{17}{t - 3} + \frac{-12}{t - 2}$
9. $\frac{1}{2}[\ln|1 + x| - \ln|1 - x|] + C$
11. $\frac{1}{7}\ln|(x + 6)^2(x - 1)^5| + C$
13. $\frac{\ln 15}{2}$
15. $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t + 2| + \frac{1}{3}\ln|t - 1| + C$
17. $3 \ln 2 - 2$
19. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right| - \frac{x}{2(x^2 - 1)} + C$
21. $\frac{\pi + 2 \ln 2}{8}$
23. $\tan^{-1} y - \frac{1}{y^2 + 1} + C$
25. $-(s - 1)^{-2} + (s - 1)^{-1} + \tan^{-1} s + C$
27. $\frac{-1}{\theta^2 + 2\theta + 2} + \ln|\theta^2 + 2\theta + 2| - \tan^{-1}(\theta + 1) + C$
29. $x^2 + \ln\left|\frac{x - 1}{x}\right| + C$
31. $9x + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + 7 \ln|x - 1| + C$
33. $\frac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + C$
35. $\ln\left|\frac{e^t + 1}{e^t + 2}\right| + C$ 37. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sin y - 2}{\sin y + 3}\right| + C$
39. $\frac{(\tan^{-1} 2x)^2}{4} - 3 \ln|x - 2| + \frac{6}{x - 2} + C$
41. $x = \ln|t - 2| - \ln|t - 1| + \ln 2$
43. $x = \frac{6t}{t + 2} - 1, t > 2/5$
45. $\ln|y - 1| - \ln|y| = e^x - 1 - \ln 2$
47. $y = \ln|x - 2| - \ln|x - 1| + \ln 2$
49. $3\pi \ln 25$
51. (α) $x = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ (β) 1,55 ημέρες

Ενότητα 7.4, σελ. 550

1. $\ln|\sqrt{9 + y^2} + y| + C$
3. $\frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t\sqrt{25 - t^2}}{2} + C$
5. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2 - 49}}{7}\right| + C$
7. $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$
9. $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2 + 4} + C$ 11. $\frac{-2\sqrt{4 - w^2}}{w} + C$
13. $-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$ 15. $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)^5 + C$
17. $2 \tan^{-1} 2x + \frac{4x}{(4x^2 + 1)} + C$ 19. $\ln 9 - \ln(1 + \sqrt{10})$
21. $\frac{\pi}{6}$ 23. $\sec^{-1}|x| + C$
25. $\sqrt{x^2 - 1} + C$
27. $y = 2\left[\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$
29. $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3\pi}{8}$ 31. $\frac{3\pi}{4}$
33. (α) Προκύπτει από τη γεωμετρία του σχήματος.
(β) Κάνοντας χρήση του (α), αντικαθιστούμε

$z = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ οπότε παίρνουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα. Άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$ με $\theta = \frac{x}{2}$.

(γ) Κάνοντας χρήση του (α), αντικαθιστούμε

$z = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ οπότε παίρνουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα. Άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$ με $\theta = \frac{x}{2}$.

(δ) $dz = \left(\sec^2 \frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\, dx = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\, dx = (1 + z^2)\frac{1}{2}\, dx$, και λύνουμε ως προς dx.
35. $-\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + C$ 37. $\ln\left|1 + \tan \frac{t}{2}\right| + C$
39. $\frac{1}{2}(\ln \sqrt{3} - 1)$ 41. $-\cot\left(\frac{t}{2}\right) - t + C$

Ενότητα 7.5, σελ. 557-558

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x - 3}{3}}\right) + C$ 3. $\frac{(2x - 3)^{3/2}(x + 1)}{5} + C$
5. $\frac{(x + 2)(2x - 6)\sqrt{4x - x^2}}{6} + 4 \sin^{-1}\left(\frac{x - 2}{2}\right) + C$
7. $\sqrt{4 - x^2} - 2 \ln\left|\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + C$
9. $2 \sin^{-1}\frac{r}{2} - \frac{1}{2}r\sqrt{4 - r^2} + C$
11. $\frac{e^{2t}}{13}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t) + C$
13. $\frac{s}{18(9 - s^2)} + \frac{1}{108}\ln\left|\frac{s + 3}{s - 3}\right| + C$
15. $2\sqrt{3t - 4} - 4 \tan^{-1}\sqrt{\frac{3t - 4}{4}} + C$
17. $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$
19. $6 \sin\left(\frac{\theta}{12}\right) + \frac{6}{7}\sin\left(\frac{7\theta}{12}\right) + C$
21. $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + \frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$
23. $\left(x - \frac{1}{2}\right)\sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} + C$
25. $\sqrt{1 - \sin^2 t} - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t}\right| + C$
27. $\ln|\ln y + \sqrt{3 + (\ln y)^2}| + C$
29. $\ln|3r + \sqrt{9r^2 - 1}| + C$
31. $x \cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} + C$
33. $\frac{e^{3x}}{9}(3x - 1) + C$
35. $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right] + C$
37. $\frac{1}{120}\sinh^4 3x \cosh 3x - \frac{1}{90}\sinh^2 3x \cosh 3x + \frac{2}{90}\cosh 3x + C$
39. $\frac{x^2}{3}\sinh 3x - \frac{2x}{9}\cosh 3x + \frac{2}{27}\sinh 3x + C$
45. (β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο 29 του πίνακα ολοκληρωμάτων, παίρνουμε

$$V = 2L\left[\left(\frac{d - r}{2}\right)\sqrt{2rd - d^2} + \left(\frac{r^2}{2}\right)\left[\sin^{-1}\left(\frac{d - r}{r}\right) + \frac{\pi}{2}\right]\right]$$

49. (γ) $\frac{\pi}{4}$ 51. $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632121$
53. $\frac{4}{15} \approx 0{,}266667$
55. $6 + 2[(\ln 2)^3 - 3(\ln 2)^2 + 6 \ln 2 - 6] \approx 0{,}101097$

Ενότητα 7.6, σελ. 565-566

1. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{5}{7}$
5. $\frac{1}{2}$ 7. 0
9. -1 11. $\ln 2$
13. 1 15. 0
17. 1 19. 0
21. e^2 23. 0
25. 1 27. 1
29. e 31. 1
33. e^{-1} 35. $\ln 2$
37. -1 39. 3
41. 1
43. Το (β) είναι σωστό, αλλά το (α) όχι.
45. $c = \frac{27}{10}$
47. (α) $\ln\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = k \ln\left(1 + \frac{r}{k}\right)$. Οπότε, καθώς $k \to \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} k \ln\left(1 + \frac{r}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{r}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}$$

$$\frac{\frac{-r}{k^2} \Big/ \left(1 + \frac{r}{k}\right)}{\frac{-1}{k^2}} =$$

$\lim_{k\to\infty} \frac{r}{1 + \frac{r}{k}} = r$. Συνεπώς, $\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = e^r$.

Έτσι, $\lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0 e^{rt}$.

(β) Το ερώτημα (α) δείχνει ότι καθώς το πλήθος των ανατοκισμών αυξάνει τείνοντας στο άπειρο, το επιτόκιο των k ανατοκισμών τείνει οριακά στο επιτόκιο του συνεχούς ανατοκισμού.
53. (α) $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ (β) ∞ (γ) e

Ενότητα 7.7, σελ. 577-579

1. (α) Διότι υπάρχει ένα άπειρο όριο ολοκλήρωσης
(β) Συγκλίνει
(γ) $\frac{\pi}{2}$
3. (α) Διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση εμφανίζει άπειρη ασυνέχεια στο $x = 0$
(β) Συγκλίνει
(γ) $-\frac{9}{2}$
5. (α) Διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση εμφανίζει άπειρη ασυνέχεια στο $x = 0$
(β) Αποκλίνει
(γ) Δεν έχει τιμή
7. 1000 9. 4
11. $\frac{\pi}{2}$ 13. $\ln 3$
15. $\sqrt{3}$ 17. π
19. $\frac{\pi}{3}$ 21. $\ln 4$

23. $\frac{\pi}{2}$

25. $\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$

27. 6

29. -1

31. 2

33. $-\frac{1}{4}$

35. Αποκλίνει

37. Συγκλίνει

39. Συγκλίνει

41. Συγκλίνει

43. Αποκλίνει

45. Συγκλίνει

47. Συγκλίνει

49. Αποκλίνει

51. Συγκλίνει

53. Συγκλίνει

55. Αποκλίνει

57. Συγκλίνει

59. Αποκλίνει

61. Συγκλίνει

63. Συγκλίνει

65. (α) Συγκλίνει για $p < 1$
(β) Συγκλίνει για $p > 1$

67. 1

69. $\frac{\pi}{2}$

73. (β) $\approx 0{,}88621$

75. (β) 1

Ασκήσεις Κεφαλαίου 7, σελ. 580-582

1. $\frac{1}{12}(4x^2-9)^{3/2}+C$

3. $\frac{\sqrt{8x^2+1}}{8}+C$

5. $\frac{-\sqrt{9-4t^4}}{8}+C$

7. $-\frac{1}{2(1-\cos 2\theta)}+C$

9. $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$

11. $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

13. $\ln|2+\tan^{-1}x|+C$

15. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3t}{4}\right)+C$

17. $\frac{1}{5}\sec^{-1}\left|\frac{5x}{4}\right|+C$

19. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y-2}{2}\right)+C$

21. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 6x}{12}+C$

23. $\frac{\tan^2(2t)}{4}-\frac{1}{2}\ln|\sec 2t|+C$

25. $\ln|\sec 2x+\tan 2x|+C$

27. $\ln(3+2\sqrt{2})$

29. $2\sqrt{2}$

31. $x-2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

33. $\ln(y^2+4)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)+C$

35. $-\sqrt{4-t^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)+C$

37. $x-\tan x+\sec x+C$

39. $4\ln\left|\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right|+C$

41. $\frac{z}{16(16+z^2)^{1/2}}+C$

43. $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

45. $\ln|x+\sqrt{x^2-9}+C$

47. $[(x+1)(\ln(x+1))-(x+1)]+C$

49. $x\tan^{-1}(3x)-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C$

51. $(x+1)^2e^x-2(x+1)e^x+2e^x+C$

53. $\frac{2e^x\sin 2x}{5}+\frac{e^x\cos 2x}{5}+C$

55. $2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$

57. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+2}\right|+C$

59. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right|+C$

61. $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$

63. $x^2-3x+\frac{2}{3}\ln|x+4|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+C$

65. $\ln|1-e^{-s}|+C$

67. $-\sqrt{16-y^2}+C$

69. $-\frac{1}{2}\ln|4-x^2|+C$

71. $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+C$

73. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$

75. $\frac{2x^{3/2}}{3}-x+2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

77. $2\sin\sqrt{x}+C$

79. $\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+C$

81. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right|+\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{v}{3}+C$

83. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$

85. $-\cos(2\sqrt{x})+C$

87. $\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\theta-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

89. $\frac{1}{4}\sec^2\theta+C$

91. $-\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{2-x}+C$

93. $\frac{1}{2}[x\ln|x-1|-x-\ln|x-1|]+C$

95. $\frac{1}{4}\ln|z|-\frac{1}{4z}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(z^2+4)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\right]+C$

97. $-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\ln|x|-\ln\sqrt{1+x^2}+C$

99. $\tan x-x+C$

101. $\ln|\csc(2x)+\cot(2x)|+C$

103. $\frac{1}{4}$

105. $\sec^{-1}|2x-1|+C$

107. $\frac{1}{6}(3+4e^\theta)^{3/2}+C$

109. $\frac{1}{3}\left(\frac{27^{3\theta+1}}{\ln 27}\right)+C$

111. $2\sqrt{r}-2\ln(1+\sqrt{r})+C$

113. $4\sec^{-1}\left|\frac{7m}{2}\right|+C$

115. Δεν υπάρχει το όριο.

117. 2

119. 1

121. 0

123. $-\frac{1}{2}$

125. 1

127. ∞

129. $\frac{\pi}{2}$

131. 6

133. $\ln 3$

135. 2

137. $\frac{\pi}{6}$

139. Αποκλίνει

141. Αποκλίνει

143. Συγκλίνει

145. $\ln|y-1|-\ln|y|=e^x-1-\ln 2$

147. $y=\ln|x-2|-\ln|x-1|+\ln 2$

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 7, σελ. 582-585

1. $x(\sin^{-1}x)^2+2(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}-2x+C$

3. $\frac{x^2\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}x}{4}+C$

5. $\frac{\ln|\sec 2\theta+\tan 2\theta|+2\theta}{4}+C$

7. $\frac{1}{2}[\ln|t-\sqrt{1-t^2}|-\sin^{-1}t]+C$

9. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)]+C$

11. $\frac{\pi}{2}$

13. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

15. 0

17. 1

19. $\frac{32\pi}{35}$

21. 2π

23. (α) π (β) $\pi(2e-5)$

25. (β) $\pi\left[\frac{8(\ln 2)^2}{3}-\frac{16(\ln 2)}{9}+\frac{16}{27}\right]$

27. $\frac{1}{2}$

31. $\frac{\pi}{2}(3b-a)+2$

33. 6

35. $P(x)=-3x^2+1$

37. $\frac{1}{2}<p\le 1$

39. (β) 1

41. $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

43. $\frac{\cos x\sin 3x-3\sin x\cos 3x}{8}+C$

45. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

47. $x\ln(ax)-x+C$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Π.4

1. (α) $(14, 8)$ (β) $(-1, 8)$ (γ) $(0, -5)$
3. (α) Κατοπτρίζοντας το z στον πραγματικό άξονα
(β) Κατοπτρίζοντας το z στον φανταστικό άξονα
(γ) Κατοπτρίζοντας το z στον πραγματικό άξονα και πολλαλασιάζοντας κατόπιν το μήκος του διανύσματος με $1/|z|^2$
5. (α) Τα σημεία ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=4$
(β) Τα σημεία βρίσκονται εντός του κύκλου $x^2+y^2=4$
(γ) Τα σημεία βρίσκονται εκτός του κύκλου $x^2+y^2=4$
7. Τα σημεία βρίσκονται πάνω στον κύκλο ακτίνας 1, κέντρου $(-1, 0)$
9. Τα σημεία ανήκουν στην ευθεία $y=-x$
11. $4e^{2\pi i/3}$
13. $1e^{2\pi i/3}$
21. $\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta$
23. $1, -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
25. $2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$
27. $\frac{\sqrt{6}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$
29. $1\pm\sqrt{3}i, -1, \pm\sqrt{3}i$