**32.** *Πετρελαϊκή παραγωγή*

T (α) Βρείτε μια εξίσωση παλινδρομήσεως φυσικού λογαρίθμου για τα δεδομένα του Πίνακα 28.

(β) Υπολογίστε κατ' εκτίμηση την ποσότητα πετρελαίου (σε τόνους) που παρήγαγε ο Καναδάς το 1985.

(γ) Κάντε μια πρόβλεψη για το πότε θα φθάσει η καναδική παραγωγή πετρελαίου τους 120.000.000 τόνους.

**Πίνακας 28** Πετρελαϊκή παραγωγή Καναδά

| Έτος | Τόνοι (εκατομμύρια) |
|---|---|
| 1960 | 27,48 |
| 1970 | 69,95 |
| 1990 | 92,24 |

*Πηγή: The Statesman's Yearbook*, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

**33.** Ο Πίνακας 29 παρέχει κάποια υποθετικά στοιχεία για T την κατανάλωση ενέργειας.

(α) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο έτος 1900, η $x = 1$ στο 1910, κ.ο.κ. Βάσει των στοιχείων του πίνακα, βρείτε μια εκθετική εξίσωση παλινδρομήσεως της μορφής $Q = ae^{bx}$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση στο ίδιο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Κάνοντας χρήση της εκθετικής εξίσωσης παλινδρομήσεως, κάντε μια πρόβλεψη της κατανάλωσης ενέργειας το έτος 1996. Ποιος ο ετήσιος ρυθμός αύξησης της ενεργειακής κατανάλωσης στη διάρκεια του 20ού αιώνα;

**Πίνακας 29** Κατανάλωση ενέργειας

| Έτος | Κατανάλωση $Q$ |
|---|---|
| 1900 | 1,00 |
| 1910 | 2,01 |
| 1920 | 4,06 |
| 1930 | 8,17 |
| 1940 | 16,44 |
| 1950 | 33,12 |
| 1960 | 66,69 |
| 1970 | 134,29 |
| 1980 | 270,43 |
| 1990 | 544,57 |
| 2000 | 1096,63 |

# 1 Όρια και συνέχεια

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Το όριο συναρτήσεως είναι από εκείνες τις έννοιες που διαφοροποιούν τον απειροστικό λογισμό από την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Στο παρόν κεφάλαιο θα δείξουμε πώς ορίζονται και πώς υπολογίζονται όρια τιμών συναρτήσεων. Οι κανόνες υπολογισμού των ορίων είναι στρωτοί και ξεκάθαροι, και τα περισσότερα όρια που θα χρειαστούμε προκύπτουν με αντικατάσταση, γραφική εποπτευση, αριθμητική προσέγγιση, λίγη άλγεβρα — ή με κάποιον συνδυασμό όλων αυτών.

Οι τιμές μερικών συναρτήσεων μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο με τις τιμές των μεταβλητών τους — όσο μικραίνει η διακύμανση της μεταβλητής, τόσο μικραίνει και η διακύμανση της συνάρτησης. Σε άλλες συναρτήσεις, πάλι, οι τιμές των συναρτήσεων παρουσιάζουν «άλματα» ή ακατάστατες διακυμάνσεις, ανεξάρτητα από το πόσο προσεκτικά ελέγχουμε τις τιμές της μεταβλητής. Η έννοια του ορίου παρέχει έναν ακριβή τρόπο διαχωρισμού μεταξύ αυτών των δύο τύπων συμπεριφοράς. Επίσης, τα όρια μας χρησιμεύουν στο να ορίζουμε εφαπτόμενες ευθείες σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Η γεωμετρική αυτή εφαρμογή οδηγεί κατευθείαν στην πολύ σπουδαία έννοια της παραγώγου μιας συναρτήσεως. Η παράγωγος, την οποία θα μελετήσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2, μας επιτρέπει να μετράμε ανά πάσα στιγμή τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές μιας συναρτήσεως.

## 1.1 Ρυθμοί μεταβολής και όρια

Μέση και στιγμιαία ταχύτητα • Μέσοι ρυθμοί μεταβολής και τέμνουσες ευθείες • Όρια συναρτήσεων • Άτυπος ορισμός του ορίου • Ακριβής ορισμός του ορίου

CD-ROM Δικτυότοπος

Εδώ θα ορίσουμε τον μέσο και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Θα οδηγηθούμε, έτσι, στην κυριότερη έννοια της ενότητας: την έννοια του ορίου.

CD-ROM Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Ζήνων (490 π.Χ.- 430 π.Χ.)

### Μέση και στιγμιαία ταχύτητα

Η **μέση ταχύτητα** ενός κινούμενου σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα ισούται με το πηλίκο της διανυθείσας απόστασης διά τον αντίστοιχο χρόνο. Το πηλίκο αυτό μετριέται σε μονάδες μήκους ανά μονάδα χρόνου: π.χ. χιλιόμετρα ανά ώρα, μέτρα ανά δευτερόλεπτο, κ.λπ., ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα προς επίλυση.

**Παράδειγμα 1** Εύρεση μέσης ταχύτητας

Ένας βράχος αποκόπτεται από την κορυφή μιας απότομης βουνοπλαγιάς και πέφτει κατακόρυφα. Πόση είναι η μέση ταχύτητά του κατά τα δύο πρώτα δευτερόλεπτα της πτώσης του;

**Ελεύθερη πτώση**

Κοντά στην επιφάνεια της Γης, όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση. Αν ένα σώμα που αρχικά ηρεμούσε αφεθεί να πέσει, η απόσταση που διανύει είναι σταθερό πολλαπλάσιο του τετραγώνου του χρόνου πτώσεως. Έτσι, τουλάχιστον, συμβαίνει όταν η πτώση γίνεται στο κενό, όπου δεν υπάρχει η επιβραδυντική επίδραση του αέρα. Όμως ακόμη και στον αέρα, ο κανόνας του τετραγώνου του χρόνου εξακολουθεί να ισχύει για συμπαγή, βαριά αντικείμενα όπως βράχους, ρουλεμάν και ατσάλινα εργαλεία, κατά τα πρώτα δευτερόλεπτα της πτώσης τους (προτού η ταχύτητά τους πάρει τιμές όπου η αντίσταση του αέρα αρχίζει πάλι να παίζει ρόλο). Όταν η αντίσταση του αέρα δεν υπάρχει ή είναι αμελητέα, και η μόνη δύναμη που δρα σε σώμα που πέφτει είναι η βαρύτητα, τότε καλούμε την κίνηση του σώματος *ελεύθερη πτώση*.

Λύση Έχει δειχθεί πειραματικά ότι όταν ένα συμπαγές στερεό σώμα που αρχικά ηρεμεί σε θέση κοντά στην επιφάνεια της Γης, αφεθεί να πέσει ελεύθερα, θα διανύσει

$$y = 4{,}9t^2$$

μέτρα στα πρώτα $t$ δευτερόλεπτα της πτώσης του. Η μέση ταχύτητα του βράχου κατά τη διάρκεια τυχόντος χρονικού διαστήματος ισούται με τη διανυθείσα απόσταση, $\Delta y$, διά το χρονικό διάστημα $\Delta t$. Έτσι, για τα πρώτα 2 sec της πτώσης, από $t = 0$ έως $t = 2$, θα έχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2)^2 - 4{,}9(0)^2}{2-0} = 9{,}8 \text{ m/sec}.$$

**Παράδειγμα 2** Εύρεση στιγμιαίας ταχύτητας

Βρείτε την ταχύτητα του βράχου του Παραδείγματος 1 τη χρονική στιγμή $t = 2$.

Λύση

**Αριθμητική επίλυση**

Η μέση ταχύτητα του βράχου κατά το χρονικό διάστημα από $t = 2$ έως $t = 2 + h$, $h > 0$, ισούται με

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h}. \tag{1}$$

Ο τύπος αυτός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας ακριβώς για $t = 2$, αφού κάτι τέτοιο θα απαιτούσε να θέσουμε $h = 0$, και το πηλίκο 0/0 δεν ορίζεται. Μπορούμε, ωστόσο, να δούμε τι συμβαίνει τη στιγμή $t = 2$, αν υπολογίσουμε το πηλίκο για τιμές του $h$ *κοντά* στο 0. Προκύπτει τότε μια σαφής συμπεριφορά (Πίνακας 1.1).

Καθώς το $h$ τείνει στο 0, η μέση ταχύτητα προσεγγίζει την οριακή τιμή 19,6 m/sec.

**Αλγεβρική επαλήθευση**

Αναπτύσσοντας τον αριθμητή της Εξισώσεως (1) και εκτελώντας τις πράξεις, βρίσκουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h} = \frac{4{,}9(4 + 4h + h^2) - 19{,}6}{h}$$

$$= \frac{19{,}6h + 4{,}9h^2}{h} = 19{,}6 + 4{,}9h.$$

Για $h$ διάφορο του μηδενός, η μέση ταχύτητα ισούται με $19{,}6 + 4{,}9h$ m/sec. Βλέπουμε λοιπόν τώρα γιατί η οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας είναι $19{,}6 + 4{,}9(0) = 19{,}6$ m/sec καθώς το $h$ τείνει στο 0.

**Πίνακας 1.1** Μέσες ταχύτητες για μικρά χρονικά διαστήματα που αρχίζουν τη στιγμή $t = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h}$$

| Χρονικό διάστημα, $h$ (sec) | Μέση ταχύτητα στο διάστημα $\Delta y/\Delta t$ (m/sec) |
|---|---|
| 1 | 24,5 |
| 0,1 | 20,09 |
| 0,01 | 19,649 |
| 0,001 | 19,6049 |
| 0,0001 | 19,60049 |
| 0,00001 | 19,600049 |

## Μέσοι ρυθμοί μεταβολής και τέμνουσες ευθείες

Για τυχούσα συνάρτηση $y = f(x)$, υπολογίζουμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του $y$ ως προς το $x$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ως εξής: διαιρούμε τη μεταβολή του $y$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, με το μήκος $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ του διαστήματος στο οποίο σημειώνεται η εν λόγω μεταβολή.

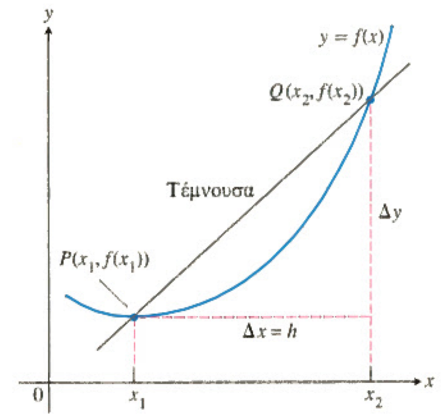
**Ορισμός** Μέσος ρυθμός μεταβολής

Ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς $x$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισούται με

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$



Από γεωμετρική άποψη, ο μέσος ρυθμός μεταβολής είναι η κλίση μιας τέμνουσας ευθείας.



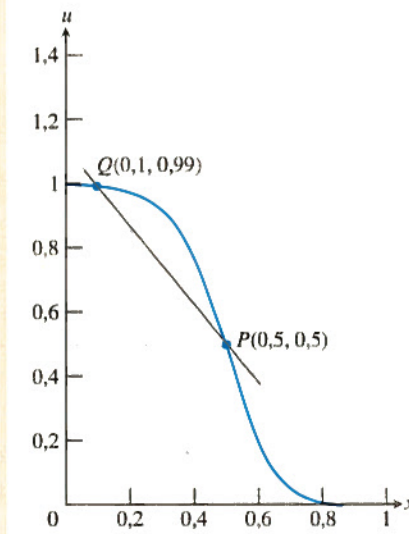

**ΣΧΗΜΑ 1.1** Μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$. Η κλίση της είναι $\Delta y/\Delta x$, ίση με τον μέσο ρυθμό μεταβολής τής $f$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Σημειώστε ότι ο ρυθμός μεταβολής της $f$ στο $[x_1, x_2]$ δεν είναι παρά η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P(x_1, f(x_1))$ και $Q(x_2, f(x_2))$ (Σχήμα 1.1). Στη γεωμετρία, η ευθεία που ενώνει δύο σημεία μιας καμπύλης είναι μια **τέμνουσα** της καμπύλης. Έτσι, ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f$ από το $x_1$ στο $x_2$ ταυτίζεται με την κλίση της τέμνουσας $PQ$.

Οι μηχανικοί υπολογίζουν συχνά ρυθμούς μεταβολής της θερμοκρασίας, για να προσδιορίσουν αν θα παρουσιαστούν ρωγμές ή άλλου είδους φθορές σε διάφορα υλικά που τους ενδιαφέρουν.

**Παράδειγμα 3** Μεταβολή θερμοκρασίας θερμικής θωράκισης

Ένας μηχανολόγος μηχανικός σχεδιάζει μια θερμική θωράκιση πάχους 1 cm που προορίζεται για ένα διαστημικό λεωφορείο. Έχει ήδη προσδιορίσει πόση θα είναι η θερμοκρασία $u$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x$ της θωράκισης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2 (όπου οι θερμοκρασίες έχουν κανονικοποιηθεί ώστε να παίρνουν τις τιμές $0 \le u \le 1$). Απομένει να υπολογίσει τη μέγιστη θερμοκρασιακή μεταβολή ανά μονάδα πάχους που καλείται να αντέξει το συγκεκριμένο υλικό.




**ΣΧΗΜΑ 1.2** Η θερμοκρασία του στρώματος θερμικής θωράκισης έναντι του βάθους στο εσωτερικό του στρώματος, λίγο μετά την είσοδο στην ατμόσφαιρα της Γης.

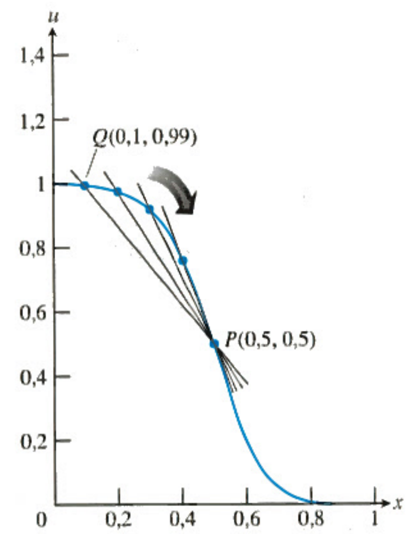
Λύση Από τη γραφική παράσταση της θερμοκρασίας (Σχήμα 1.2), ο μηχανικός διακρίνει ότι η κλίση της καμπύλης γίνεται μέγιστη (πιο απότομη) στο σημείο $P$ βάθους 0,5 cm. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας, από το σημείο $Q$ βάθους 0,1 cm μέχρι το σημείο $P$ βάθους 0,5 cm, δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής: } \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{0{,}99 - 0{,}5}{0{,}1 - 0{,}5} \approx -1{,}23 \text{ deg/cm}.$$

Η μέση αυτή τιμή δεν είναι παρά η κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P$ και $Q$ στο γράφημα του Σχήματος 1.2. Όμως ο μέσος ρυθμός μεταβολής δεν μας πληροφορεί για το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο ίδιο το σημείο $P$. Για να το μάθουμε αυτό θα πρέπει να μελετήσουμε τους μέσους ρυθμούς μεταβολής για ολοένα και βραχύτερα διαστήματα που αρχίζουν ή τελειώνουν στο σημείο $x = 0{,}5$ cm. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπολογίζουμε τις κλίσεις των τεμνουσών που διέρχονται από τα $P$ και $Q$, για μια ακολουθία σημείων $Q$ της καμπύλης που πλησιάζουν στο $P$ (Σχήμα 1.3).

Όπως φαίνεται από τον πίνακα τιμών του Σχήματος 1.3, οι κλίσεις των τεμνουσών κυμαίνονται από $-1{,}23$ έως $-2{,}6$, καθώς η συντεταγμένη $x$ του $Q$ μεταβάλλεται από 0,1 σε 0,4. Από γεωμετρική

| $Q$ | Κλίση της $PQ = \Delta u/\Delta x$ |
|---|---|
| (0,1, 0,99) | $\dfrac{0{,}99-0{,}5}{0{,}1-0{,}5} \approx -1{,}23$ |
| (0,2, 0,98) | $\dfrac{0{,}98-0{,}5}{0{,}2-0{,}5} \approx -1{,}60$ |
| (0,3, 0,92) | $\dfrac{0{,}92-0{,}5}{0{,}3-0{,}5} \approx -2{,}10$ |
| (0,4, 0,76) | $\dfrac{0{,}76-0{,}5}{0{,}4-0{,}5} \approx -2{,}60$ |

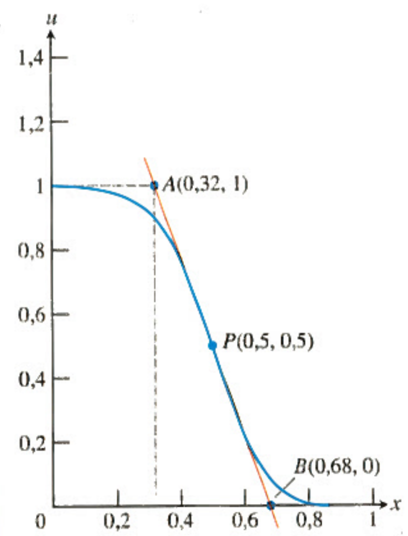



**Σχημα 1.3** Οι θέσεις και οι κλίσεις τεσσάρων τεμνουσών που διέρχονται από το σημείο $P$ του γραφήματος του Σχήματος 1.2.

σκοπιά, αυτό σημαίνει ότι οι διαδοχικές τέμνουσες ευθείες περιστρέφονται δεξιόστροφα ως προς το $P$, προσεγγίζοντας μια ευθεία που διέρχεται από το $P$ με την ίδια κλίση (το ίδιο απότομα) με την καμπύλη στο $P$. Όπως θα δούμε, η ευθεία αυτή καλείται *εφαπτομένη* της καμπύλης στο σημείο $P$ (Σχήμα 1.4). Και αφού η ευθεία αυτή δείχνει να περνά από τα σημεία $A(0{,}32, 1)$ και $B(0{,}68, 0)$, η κλίση της θα ισούται με

$$\frac{1 - 0}{0{,}32 - 0{,}68} \approx -2{,}78 \text{ deg/cm}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο σημείο $P$, όπου το πάχος της θερμικής θωράκισης ισούται με 0,5 cm, η θερμοκρασία μεταβάλλεται με ρυθμό περίπου $-2{,}78$ deg/cm.




**Σχημα 1.4** Η εφαπτομένη στο σημείο $P$ είναι το ίδιο απότομη (ίσης κλίσεως) με την καμπύλη στο $P$.

Ο ρυθμός πτώσεως του βράχου (Παράδειγμα 2) κατά τη χρονική στιγμή $t = 2$, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας (Παράδειγμα 3) στο σημείο βάθους 0,5 cm, καλούνται *στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής*. Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα, οι στιγμιαίοι ρυθμοί προκύπτουν ως οριακές τιμές των μέσων ρυθμών. Στο Παράδειγμα 3, εξάλλου, παρουσιάσαμε την εφαπτόμενη ευθεία της θερμοκρασιακής καμπύλης στο σημείο 0,5 ως την οριακή θέση μιας ακολουθίας τεμνουσών. Οι στιγμιαίοι ρυθμοί και οι εφαπτόμενες ευθείες είναι δυο στενά συνδεδεμένες έννοιες, που απαντούν σε ευρύ φάσμα εφαρμογών. Για να τις κατανοήσουμε βαθύτερα, θα πρέπει να διερευνήσουμε τη διαδικασία προσδιορισμού οριακών τιμών, δηλαδή των *ορίων*, όπως οι τελευταίες ονομάζονται.

## Όρια συναρτήσεων

Προτού ορίσουμε την έννοια του ορίου, ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα.

CD-ROM Δικτυότοπος

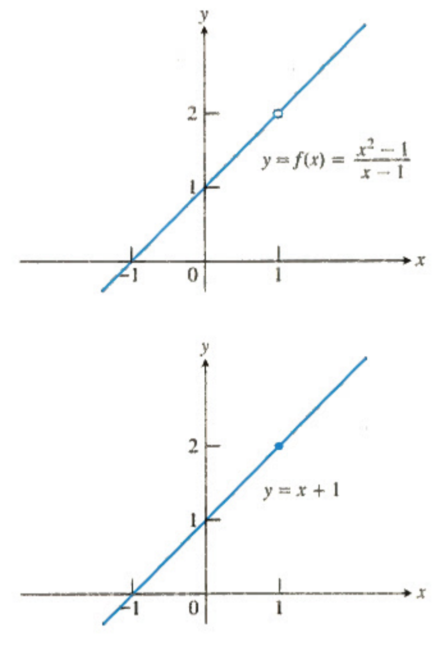
### Παράδειγμα 4 Συμπεριφορά συναρτήσεως κοντά σε σημείο

Πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

κοντά στο σημείο $x = 1$;






**Σχημα 1.5** Η γραφική παράσταση της $f$ ταυτίζεται με την ευθεία $y = x + 1$ με εξαίρεση το σημείο $x = 1$, όπου η $f$ δεν ορίζεται.

Λύση Ο παραπάνω τύπος ορίζει την $f$ για κάθε πραγματικό $x$ εκτός του $x = 1$ (δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν). Για $x \neq 1$, απλοποιούμε τον τύπο παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και απαλείφοντας κοινούς παράγοντες:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \text{ για } x \neq 1.$$

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της $f$ θα είναι η ευθεία $y = x + 1$ *χωρίς* το σημείο (1, 2). Το αφαιρεθέν αυτό σημείο φαίνεται ως «οπή» στο Σχήμα 1.5. Παρόλο που η $f(1)$ δεν ορίζεται, είναι εμφανές ότι η $f(x)$ προσεγγίζει *όσο εγγύτερα θέλουμε* την τιμή 2 για τιμές του $x$ *αρκετά κοντά* στη μονάδα (Πίνακας 1.2).

**Πίνακας 1.2** Καθώς το $x$ τείνει στη μονάδα, η $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$ δείχνει να προσεγγίζει την τιμή 2

| Τιμές $x$ μικρότερες και μεγαλύτερες του 1 | $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1, \quad x \neq 1$ |
|---|---|
| 0,9 | 1,9 |
| 1,1 | 2,1 |
| 0,99 | 1,99 |
| 1,01 | 2,01 |
| 0,999 | 1,999 |
| 1,001 | 2,001 |
| 0,999999 | 1,999999 |
| 1,000001 | 2,000001 |

Λέμε λοιπόν ότι η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στην τιμή 2 καθώς το $x$ πλησιάζει στη μονάδα, ή απλούστερα, ότι η $f(x)$ τείνει στο *όριο* 2 καθώς το $x$ τείνει στη μονάδα. Και γράφουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2, \qquad \text{δηλαδή} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

## Άτυπος ορισμός του ορίου

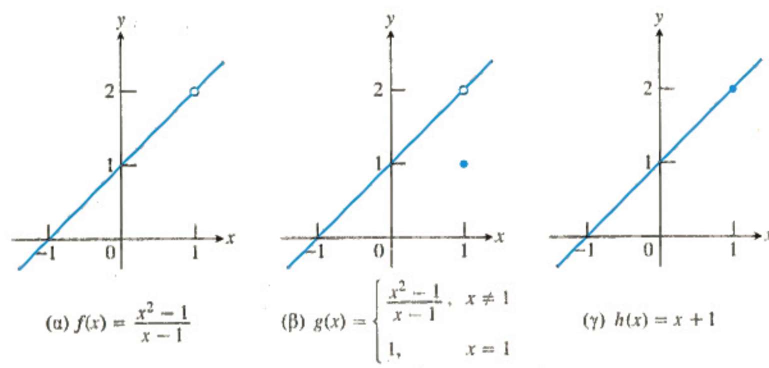
Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα εκατέρωθεν του $x_0$, *εκτός, ίσως από το ίδιο το* $x_0$. Αν η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στην τιμή $L$ για κάθε $x$ που είναι αρκετά κοντά στο $x_0$, θα λέμε ότι η $f$ τείνει στο **όριο** $L$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$, και γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

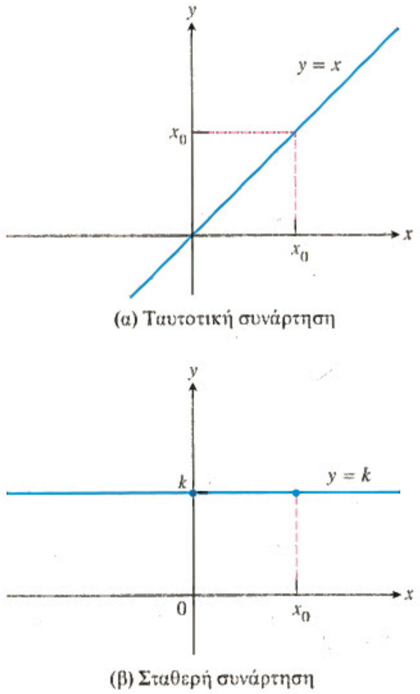
Πρόκειται για «άτυπο» ορισμό, διότι εκφράσεις του είδους *αυθαίρετα κοντά* και *ικανά κοντά δεν* είναι απόλυτα ακριβείς· η σημασία τους εξαρτάται από τα συμφραζόμενα. Για κάποιον τεχνικό που κατασκευάζει ένα πιστόνι, *κοντά* μπορεί να σημαίνει *σε απόσταση μερικών χιλιοστών του μέτρου*. Για έναν αστρονόμο που παρατηρεί τους μακρινούς γαλαξίες, *κοντά* μπορεί να σημαίνει *μια απόσταση μερικών χιλιάδων ετών φωτός*. Παρόλα αυτά, ο ανωτέρω ορισμός εμπεριέχει αρκετή σαφήνεια ώστε να χρησιμεύει στην εύρεση ορίων αρκετών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 5** Η τιμή του ορίου δεν εξαρτάται από το πώς ορίζεται η συνάρτηση στο $x_0$

Η συνάρτηση $f$ στο Σχήμα 1.6 έχει όριο 2, καθώς $x \to 1$, παρά το ότι η $f$ δεν ορίζεται στο $x = 1$. Η συνάρτηση $g$ έχει όριο 2 καθώς $x \to 1$ παρά το ότι $2 \neq g(1)$. Η συνάρτηση $h$ είναι η μόνη της οποίας το όριο καθώς $x \to 1$ ισούται με την τιμή της στο $x = 1$. Για την $h$, έχουμε $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$. Η ισότητα αυτή του ορίου και της τιμής μιας συναρτήσεως αποτελεί ειδική περίπτωση, με την οποία θα ασχοληθούμε στην Ενότητα 1.4.




**Σχήμα 1.6** $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$.




**Σχήμα 1.7** Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 6.

**Παράδειγμα 6** Δυο συναρτήσεις που διαθέτουν όρια σε κάθε τους σημείο

**(α)** Αν $f$ είναι η **ταυτοτική συνάρτηση** $f(x) = x$, τότε για κάθε $x_0$ (Σχήμα 1.7α),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 .$$

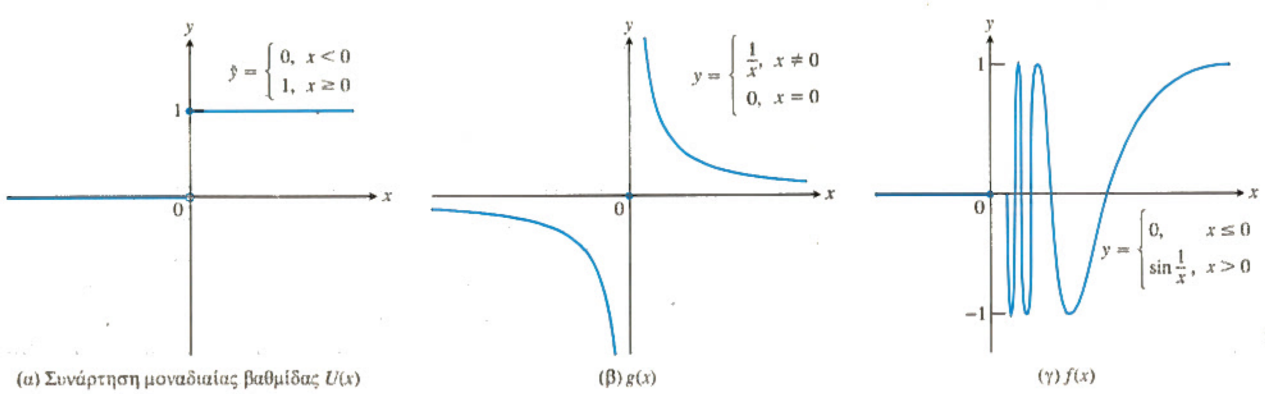
**(β)** Αν $f$ είναι η **σταθερή συνάρτηση** $f(x) = k$ (συνάρτηση με σταθερή τιμή $k$), τότε για κάθε $x_0$ (Σχήμα 1.7β),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k .$$

Παραδείγματος χάριν,

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to -7} (4) = \lim_{x\to 2} (4) = 4.$$

Στο Σχήμα 1.8 φαίνονται μερικές περιπτώσεις συναρτήσεων που δεν έχουν όρια για κάποιες τιμές του $x$. Η συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών αναλύεται στο επόμενο παράδειγμα.




**Σχήμα 1.8** Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 7.



**Παράδειγμα 7** Όρια μπορεί να μην υπάρχουν

Μελετήστε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων που ακολουθούν, καθώς $x \to 0$.

**(α)** $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

**(β)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**(γ)** $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Λύση

**(α)** Η συνάρτηση παρουσιάζει *άλμα*: Η **συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας** $U(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$, αφού οι τιμές της παρουσιάζουν άλμα στο $x = 0$. Για $x$ που τείνουν στο μηδέν από αρνητικές τιμές, έχουμε $U(x) = 0$. Για $x$ που τείνουν στο μηδέν από θετικές τιμές, έχουμε $U(x) = 1$. Δεν υπάρχει λοιπόν *μοναδική* τιμή $L$ που να προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $U(x)$ καθώς $x \to 0$ (Σχήμα 1.8α).

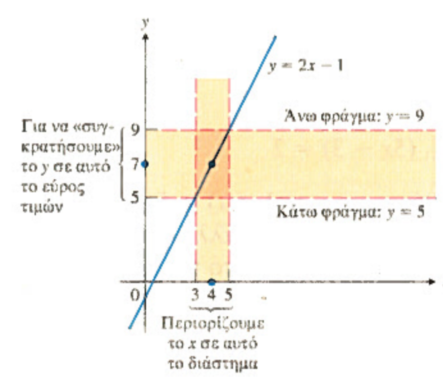
**(β)** Η συνάρτηση *παίρνει απεριόριστα μεγάλες τιμές:* η $g(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$, αφού οι τιμές της $g$ αυξάνονται απεριόριστα (κατ' απόλυτη τιμή) καθώς $x \to 0$, δηλαδή δεν προσεγγίζουν *κανέναν* πραγματικό αριθμό (Σχήμα 1.8β).

**(γ)** Η συνάρτηση *ταλαντώνεται:* η $f(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$, αφού οι τιμές της ταλαντώνονται μεταξύ του $+1$ και του $-1$ σε κάθε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0. Οι τιμές της συναρτήσεως δεν προσεγγίζουν κανέναν αριθμό καθώς $x \to 0$ (Σχήμα 1.8γ).

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Αριστοτέλης
(384 π.Χ.-322 π.Χ.)

## Ακριβής ορισμός του ορίου

Προκειμένου να δείξουμε ότι το όριο της $f(x)$ ισούται με $L$, καθώς $x \to x_0$, πρέπει να δείξουμε ότι η απόσταση μεταξύ των $f(x)$ και $L$ μπορεί να γίνει «όσο μικρή θέλουμε» αν περιορίσουμε το $x$ «αρκούντως κοντά» στο $x_0$. Ας δούμε τι συνεπάγεται αυτό, από τη στιγμή που έχουμε καθορίσει το μέγεθος της απόστασης μεταξύ των $f(x)$ και $L$.




**Σχήμα 1.9** Περιορίζοντας το $x$ σε απόσταση το πολύ μίας μονάδας από το $x_0 = 4$, καταφέρνουμε να συγκρατήσουμε το $y$ σε απόσταση μικρότερη των δύο μονάδων από το $y_0 = 7$.

**Παράδειγμα 8** «Συγκρατώντας» τις τιμές μιας γραμμικής συνάρτησης

Πόσο κοντά στο $x_0 = 4$ πρέπει να «περιορίσουμε» την τιμή εισόδου $x$ ούτως ώστε η τιμή εξόδου $y = 2x - 1$ να απέχει λιγότερο από 2 μονάδες από το $y_0 = 7$;

Λύση Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Για ποιες τιμές του $x$ αληθεύει ότι $|y - 7| < 2$; Για να το απαντήσουμε, θα πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το $|y - 7|$ συναρτήσει του $x$:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8| .$$

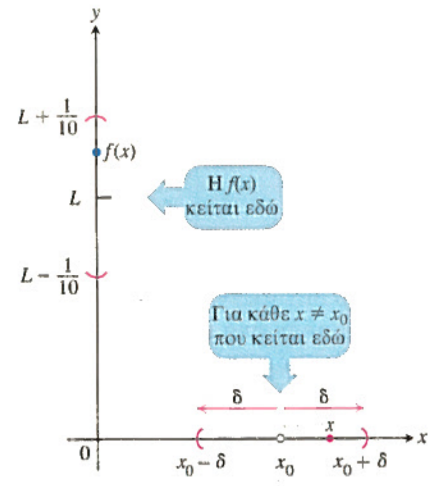
Το ερώτημα τώρα είναι το εξής: ποιες τιμές του $x$ ικανοποιούν την ανισότητα $|2x - 8| < 2$; Λύνουμε την ανισότητα:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1 . \end{aligned}$$

Έτσι, περιορίζοντας το $x$ σε απόσταση το πολύ μίας μονάδας από το $x_0 = 4$, συγκρατούμε το $y$ σε απόσταση δύο μονάδων από την τιμή $y_0 = 7$ (Σχήμα 1.9).

Στο Παράδειγμα 8, προσδιορίσαμε πόσο κοντά σε μια τιμή $x_0$ πρέπει να περιορίσουμε τη μεταβλητή $x$, προκειμένου να συγκρατηθούν οι τιμές της $f(x)$ εντός ενός προκαθορισμένου διαστήματος γύρω από το όριο $L$. Για να δείξουμε ότι το όριο της $f(x)$, καθώς $x \to x_0$, όντως ισούται με $L$, θα πρέπει να δείξουμε ότι η απόσταση μεταξύ της $f(x)$ και του $L$ μπορεί να γίνει μικρότερη από *οποιοδήποτε προκαθορισμένο σφάλμα*, όσο μικρό κι αν είναι αυτό, αρκεί να συγκρατούμε το $x$ αρκετά κοντά στο $x_0$.

Έστω ότι παρατηρούμε τις τιμές μιας συναρτήσεως $f(x)$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ (χωρίς όμως να γίνεται ίσο με $x_0$). Θα πρέπει να μπορούμε με βεβαιότητα να αποφανθούμε ότι η $f(x)$ συγκρατείται σε απόσταση μικρότερη π.χ. του ενός δεκάτου της μονάδας από το $L$, εφόσον το $x$ περιορίστεί σε μια απόσταση μικρότερη του $\delta$ από το $x_0$ (Σχήμα 1.10). Βέβαια από μόνο του αυτό δεν αρκεί, διότι καθώς το $x$ συνεχίζει να πλησιάζει στο $x_0$, ποιος μας εγγυάται ότι η $f(x)$ δεν θα αυξομειώνεται αυθαίρετα εντός του διαστήματος από $L - 1/10$ έως $L + 1/10$, χωρίς ποτέ να τείνει στο $L$; Θα εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι η $f(x)$ τείνει στο $L$ αν δείξουμε ότι ανεξάρτητα του πόσο μειώσουμε την απόσταση «ανοχής» της $f(x)$ από το $L$, εφόσον εμείς περιορίζουμε το $x$ αρκετά κοντά στο $x_0$, η $f(x)$ θα παραμένει εντός της απόστασης ανοχής από το $L$. Με άλλα λόγια, καθώς το $x$ πλησιάζει ολοένα και εγγύτερα στο $x_0$, η συνάρτηση $y = f(x)$ προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο το $L$.




**Σχήμα 1.10** Προκαταρκτικό στάδιο στην ανάπτυξη του ορισμού του ορίου.

**Ορισμός** **Αυστηρός ορισμός του ορίου**

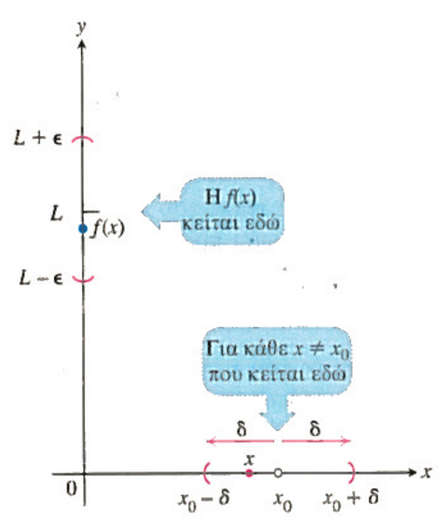
Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το $x_0$, εκτός ενδεχομένως στο ίδιο το $x_0$. Λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο **όριο** $L$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$, και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ο ορισμός του ορίου αποδίδεται γραφικά στο Σχήμα 1.11.




**Σχήμα 1.11** Η σχέση μεταξύ του $\delta$ και του $\epsilon$ στον ορισμό του ορίου.

**Παράδειγμα 9** Έλεγχος του ορισμού

Δείξτε ότι $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$.

*Λύση* Στις σχέσεις του ορισμού θέτουμε $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$, και $L = 2$. Για κάθε $\epsilon > 0$, θα πρέπει να βρούμε ένα κατάλληλο $\delta > 0$ ούτως ώστε αν $x \neq 1$ και το $x$ απέχει λιγότερο από $\delta$ από το $x_0 = 1$, δηλαδή αν

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

η $f(x)$ να απέχει λιγότερο από $\epsilon$ από το $L = 2$, δηλαδή

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

Βρίσκουμε το $\delta$ ξεκινώντας από την ανισότητα που ικανοποιεί το $\epsilon$:

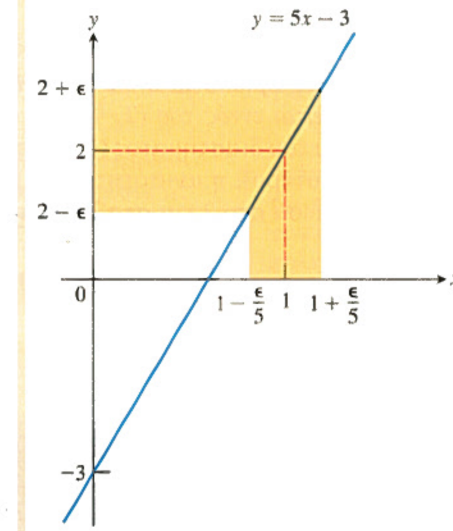
$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| = |5x - 5| &< \epsilon \\ 5|x - 1| &< \epsilon \\ |x - 1| &< \epsilon/5 . \end{aligned}$$



Συνεπώς, μπορούμε να θέσουμε $\delta = \epsilon/5$ (Σχήμα 1.12). Αν $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$, τότε

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

οπότε $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$.




**Σχήμα 1.12** Αν $f(x) = 5x - 3$, τότε ο περιορισμός $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ εγγυάται ότι $|f(x) - 2| < \epsilon$. (Παράδειγμα 9)

Η τιμή αυτή ($\delta = \epsilon/5$) δεν είναι η μόνη για την οποία η ανισότητα $0 < |x - 1| < \delta$ μας εξασφαλίζει ότι $|5x - 5| < \epsilon$. Κάθε θετική τιμή του $\delta$ μικρότερη από την παραπάνω είναι εξίσου ικανοποιητική. Όντως, ο ορισμός δεν απαιτεί να βρούμε ένα «βέλτιστο» θετικό $\delta$, απλώς κάποιο $\delta$ που να ικανοποιεί τις ανισότητες.

Στο Παράδειγμα 9, το διάστημα γύρω από το $x_0$ όπου η ποσότητα $|f(x) - L|$ είναι μικρότερη του $\epsilon$ ήταν συμμετρικό ως προς το $x_0$, και έτσι το $\delta$ μπορούσε να τεθεί ίσο με το μισό μήκος του διαστήματος. Αν δεν υπάρχει τέτοιου είδους συμμετρία, όπως συμβαίνει συνήθως, μπορούμε να θέσουμε το $\delta$ ίσο με την απόσταση από το $x_0$ του πλησιέστερου άκρου του διαστήματος. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 10** Αλγεβρική εύρεση του $\delta$ για δεδομένο $\epsilon$

Για $\epsilon = 1$, βρείτε ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1} = 2$. Με άλλα λόγια, βρείτε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x - 1} - 2| < 1.$$

*Λύση* Οργανώνουμε την εύρεση του $\delta$ σε δύο βήματα. Πρώτα θα επιλύσουμε την ανισότητα $|\sqrt{x - 1} - 2| < 1$ ώστε να βρούμε ένα διάστημα $(a, b)$ γύρω από το $x_0 = 5$, σε κάθε σημείο $x \neq x_0$ του οποίου να ικανοποιείται η ανισότητα. Κατόπιν θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $5 - \delta < x < 5 + \delta$ (συμμετρικό ως προς το $x_0 = 5$) να κείται εντός του $(a, b)$.

Βήμα 1: *Επιλύουμε την ανισότητα $|\sqrt{x - 1} - 2| < 1$ για να βρούμε ένα διάστημα γύρω από το $x_0 = 5$, όπου να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \neq x_0$.*

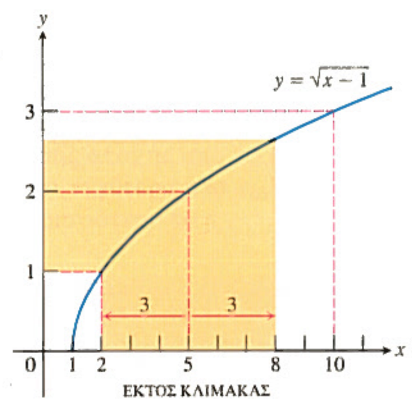
$$|\sqrt{x-1}-2|<1$$
$$-1<\sqrt{x-1}-2<1$$
$$1<\sqrt{x-1}<3$$
$$1<x-1<9$$
$$2<x<10$$

Η ανισότητα λοιπόν ισχύει για κάθε $x \neq 5$ στο ανοιχτό διάστημα $(2, 10)$.

Βήμα 2: *Βρίσκουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $5-\delta < x < 5+\delta$ να κείται εντός του* $(2, 10)$. Η απόσταση του 5 από το πλησιέστερο άκρο του διαστήματος $(2, 10)$ είναι 3 (Σχήμα 1.13). Θέτοντας $\delta = 3$ (ή μικρότερο), η ανισότητα $0 < |x-5| < \delta$ αυτομάτως τοποθετεί το $x$ ανάμεσα στο 2 και στο 10, έτσι ώστε $|\sqrt{x-1}-2|<1$ (Σχήμα 1.14):

$$0<|x-5|<3 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2|<1 .$$


**ΣΧΗΜΑ 1.13** Το ανοιχτό διάστημα ακτίνας 3 γύρω από το σημείο $x_0 = 5$ κείται εντός του ανοιχτού διαστήματος $(2, 10)$.




**ΣΧΗΜΑ 1.14** Η συνάρτηση και τα διαστήματα του Παραδείγματος 10.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

## Μέσοι ρυθμοί μεταβολής

Στις Ασκήσεις 1-4, βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής κάθε συναρτήσεως στα διαστήματα που δίδονται.

**1.** $f(x) = x^3 + 1$

**(α)** $[2, 3]$ **(β)** $[-1, 1]$

**2.** $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$, $[0, 2]$

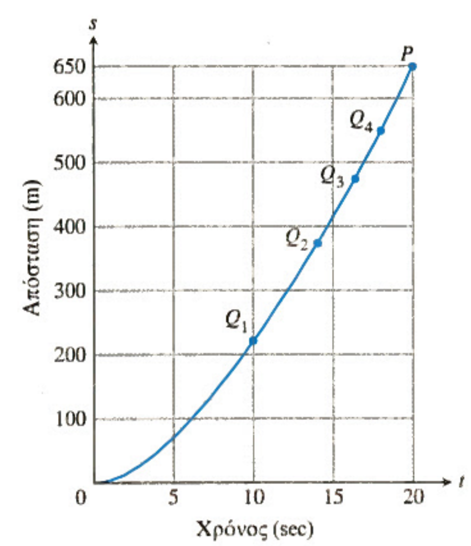
**3.** $h(t) = \cot t$

**(α)** $[\pi/4, 3\pi/4]$ **(β)** $[\pi/6, \pi/2]$

**4.** $g(t) = 2 + \cos t$

**(α)** $[0, \pi]$ **(β)** $[-\pi, \pi]$

**5.** *Ταχύτητα ενός Ford Mustang Cobra* Το σχήμα δείχνει τη διανυθείσα απόσταση έναντι του χρόνου για ένα μοντέλο Ford Mustang Cobra του 1994 που επιταχύνεται από τη θέση ηρεμίας.





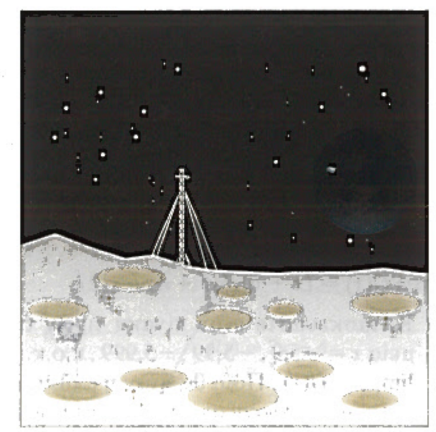

**(α)** Εκτιμήστε από το σχήμα τις κλίσεις των τεμνουσών $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$, και $PQ_4$, και καταχωρίστε τις σε πίνακα. Σε τι μονάδες μετρώνται οι κλίσεις αυτές;

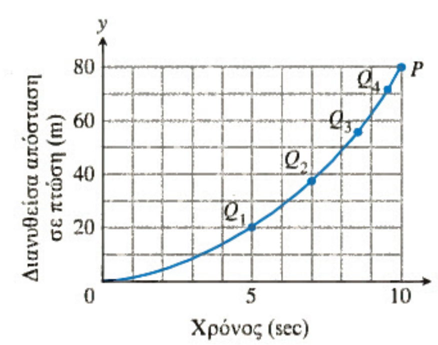
**(β)** Στη συνέχεια εκτιμήστε την ταχύτητα του αυτοκινήτου κατά τη χρονική στιγμή $t = 20$ sec.

**6.** *Ταχύτητα ρουλεμάν που πέφτει* Ακολουθεί ένα διάγραμμα της απόστασης που διανύει πέφτοντας, έναντι του χρόνου, ένα ρουλεμάν που αφήνεται να πέσει από την κορυφή μιας τηλεπικοινωνιακής κεραίας (ύψους 80 m) στην οροφή διαστημικού σταθμού στη Σελήνη.

**(α)** Εκτιμήστε από το σχήμα τις κλίσεις των τεμνουσών $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$, και $PQ_4$, και καταχωρίστε τις σε πίνακα παρόμοιο με αυτόν του Σχήματος 1.3.

**(β)** Με ποια ταχύτητα περίπου προσέκρουσε στην οροφή το ρουλεμάν;






**7.** *Ταχύτητα μπάλας* Τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα παριστάνουν την απόσταση που διανύει μια μπάλα κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου. Εκτιμήστε τη στιγμιαία ταχύτητα για $t = 1$ βρίσκοντας ένα άνω και ένα κάτω φράγμα της, και παίρνοντας τη μέση τιμή τους. Με άλλα λόγια, βρείτε τα $a$ και $b$ ώστε $a \leq v(1) \leq b$ και εκτιμήστε κατόπιν τη $v(1)$ ως $(a+b)/2$.

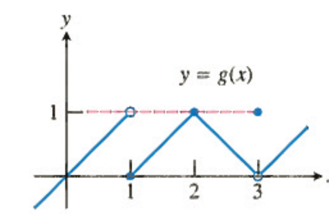
| **Χρόνος $t$** (sec) | **Διανυθείσα απόσταση** (m) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,2 | 0,16 |
| 0,4 | 0,64 |
| 0,6 | 1,44 |
| 0,8 | 2,56 |
| 1,0 | 3,99 |
| 1,2 | 5,75 |
| 1,4 | 7,83 |

**8.** *Απόσταση που διανύεται από τρένο* Ένα τρένο επιταχύνεται από την ηρεμία μέχρι τη μέγιστη ταχύτητά του, ενώ αργότερα επιβραδύνεται ώστε να διέλθει από μια πόλη με σταθερή ταχύτητα. Μόλις εξέρχεται από την πόλη επιταχύνεται και πάλι αποκτώντας μέγιστη ταχύτητα. Τελικά, επιβραδύνεται απαλά και σταματά φτάνοντας στον προορισμό του. Σχεδιάστε ένα πιθανό διάγραμμα της απόστασης που διένυσε το τρένο, έναντι του χρόνου.

## Εύρεση ορίων από γραφικές παραστάσεις

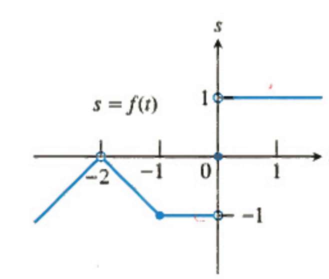
**9.** Για τη συνάρτηση $g(x)$ που φαίνεται στο σχήμα, βρείτε τα ακόλουθα όρια ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν.

**(α)** $\lim_{x\to 1} g(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 2} g(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 3} g(x)$




**10.** Για τη συνάρτηση $f(t)$ που φαίνεται στο σχήμα, βρείτε τα ακόλουθα όρια ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν.

**(α)** $\lim_{t\to -2} f(t)$ **(β)** $\lim_{t\to -1} f(t)$ **(γ)** $\lim_{t\to 0} f(t)$




**11.** Για τη συνάρτηση $y = f(x)$ που φαίνεται στο σχήμα, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

**(α)** Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει.

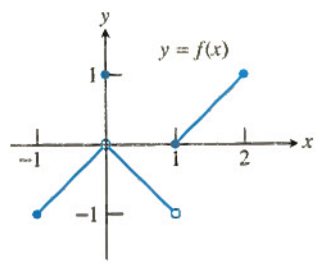
(β) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(γ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(δ) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(ε) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

(στ) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει για κάθε $x_0$ στο $(-1, 1)$.




**12.** Για τη συνάρτηση $y = f(x)$ που φαίνεται στο σχήμα, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

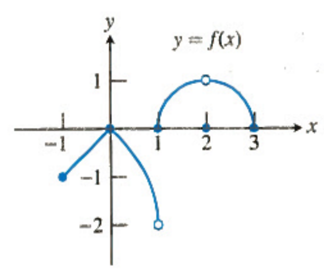
(α) Το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.

(γ) Το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

(δ) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει για κάθε $x_0$ στο $(-1, 1)$.

(ε) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει για κάθε $x_0$ στο $(1, 3)$.




## Ύπαρξη ορίων

Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν τα όρια των Ασκήσεων 13 και 14.

**13.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ **14.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

**15.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε πραγματικό $x$ πλην του $x = x_0$. Τι συμπεραίνετε για την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**16.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε $x$ στο $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to 0} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**17.** *Μάθετε γράφοντας* Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, είναι απαραίτητο να ορίζεται η $f$ στο $x = 1$; Αν ορίζεται στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο να ισχύει $f(1) = 5$; Μπορούμε να συναγάγουμε *οποιαδήποτε πληροφορία* για την τιμή της $f$ στο $x = 1$; Εξηγήστε.

**18.** *Μάθετε γράφοντας* Αν $f(1) = 5$, είναι απαραίτητο να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$; Αν υπάρχει, είναι απαραίτητο να ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$; Μπορούμε να συναγάγουμε *οποιαδήποτε πληροφορία* για το $\lim_{x\to 1} f(x)$; Εξηγήστε.

## Εκτίμηση ορίων

T Για τις Ασκήσεις 19-26 χρησιμοποιήστε κομπιουτεράκι με δυνατότητα γραφικής σχεδίασης.

**19.** Έστω ότι $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της $f$ στα σημεία $x = -3{,}1$, $-3{,}01$, $-3{,}001$, κ.ο.κ., χρησιμοποιώντας όσα δεκαδικά ψηφία μπορεί να χειριστεί το κομπιουτεράκι σας. Κατόπιν εκτιμήστε το $\lim_{x\to -3} f(x)$. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για το όριο, αν υπολογίζατε την $f$ στα σημεία $x = -2{,}9$, $-2{,}99$, $-2{,}999$, ...;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $f$ κοντά στο σημείο $x_0 = -3$, και χρησιμοποιώντας τις επιλογές "Zoom" και "Trace" για να εκτιμήσετε τις τιμές $y$ του γραφήματος καθώς $x \to -3$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to -3} f(x)$.

**20.** Έστω $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της $g$ στα σημεία $x = 1{,}4$, $1{,}41$, $1{,}414$, κ.ο.κ., κάνοντας διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$. Εκτιμήστε το $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$.

(β) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $g$ κοντά στο σημείο $x_0 = \sqrt{2}$, και χρησιμοποιώντας τις επιλογές "Zoom" και "Trace" για να εκτιμήσετε τις τιμές $y$ του γραφήματος καθώς $x \to \sqrt{2}$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$.

**21.** Έστω $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της $G$ στα σημεία $x = -5{,}9$, $-5{,}99$, $-5{,}999$, κ.ο.κ. Εκτιμήστε το $\lim_{x\to -6} G(x)$. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για το όριο, αν υπολογίζατε την $G$ στα σημεία $x = -6{,}1$, $-6{,}01$, $-6{,}001$, ...;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $G$ και χρησιμοποιώντας τις επιλογές "Zoom" και "Trace" για να εκτιμήσετε τις τιμές $y$ του γραφήματος καθώς $x \to -6$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to -6} G(x)$.

**22.** Έστω $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της $h$ στα σημεία $x = 2{,}9$, $2{,}99$, $2{,}999$, κ.ο.κ. Εκτιμήστε το $\lim_{x\to 3} h(x)$. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για το όριο, αν υπολογίζατε την $h$ στα σημεία $x = 3{,}1$, $3{,}01$, $3{,}001$, ...;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $h$ κοντά στο σημείο $x_0 = 3$ και χρησιμοποιώντας τις επιλογές "Zoom" και "Trace" για να εκτιμήσετε τις τιμές $y$ του γραφήματος καθώς $x \to 3$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to 3} h(x)$.

**23.** Έστω $g(\theta) = (\sin\theta)/\theta$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της $g$ καθώς το $\theta$ τείνει στο $\theta_0 = 0$ από άνω και από κάτω. Εκτιμήστε το $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$.

(β) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $g$ κοντά στο σημείο $\theta_0 = 0$.



**24.** Έστω $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της $G$ καθώς το $t$ τείνει στο $t_0 = 0$ από άνω και από κάτω. Εκτιμήστε το $\lim_{t\to 0} G(t)$.

(β) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $G$ κοντά στο σημείο $t_0 = 0$.

**25.** Έστω $f(x) = x^{1/(1-x)}$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της $f$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0 = 1$ από άνω και από κάτω. Δείχνει να έχει όριο η $f$ καθώς $x \to 1$; Αν ναι, ποιο είναι αυτό; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $f$ κοντά στο σημείο $x_0 = 1$.

**26.** Έστω $f(x) = (3^x - 1)/x$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της $f$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0 = 0$ από άνω και από κάτω. Δείχνει να έχει όριο η $f$ καθώς $x \to 0$; Αν ναι, ποιο είναι αυτό; Αν όχι, γιατί όχι;

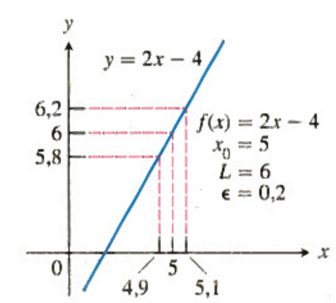
(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την $f$ κοντά στο σημείο $x_0 = 0$.

## Γραφική εύρεση του δ

CD-ROM Δικτυότοπος Στις Ασκήσεις 27-30, κάντε χρήση των γραφικών παραστάσεων για να βρείτε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$,

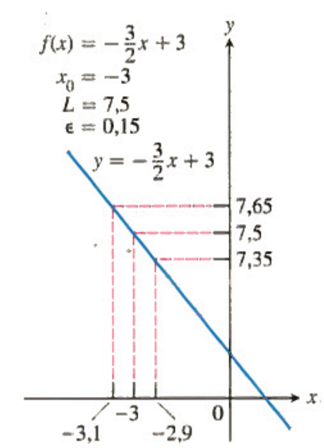
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

**26.**



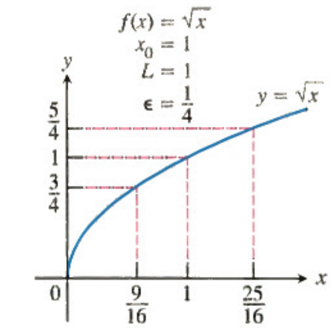

ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

**27.**

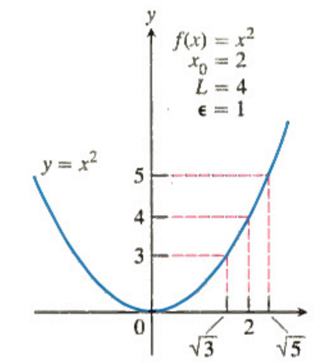



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

**28.**




**29.**




ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

## Αλγεβρική εύρεση του δ

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 31-36 δίδεται μια συνάρτηση $f(x)$ και οι αριθμοί $L$, $x_0$, και $\epsilon > 0$. Βρείτε ένα ανοιχτό διάστημα γύρω από το $x_0$ στο οποίο να ισχύει η ανισότητα $|f(x) - L| < \epsilon$. Κατόπιν, δώστε μια τιμή του $\delta > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $x$ που ικανοποιεί την $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει και η ανισότητα $|f(x) - L| < \epsilon$.

**31.** $f(x) = x + 1$, $L = 5$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0{,}01$

**32.** $f(x) = 2x - 2$, $L = -6$, $x_0 = -2$, $\epsilon = 0{,}02$

**33.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $L = 1$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0{,}1$

**34.** $f(x) = \sqrt{19 - x}$, $L = 3$, $x_0 = 10$, $\epsilon = 1$

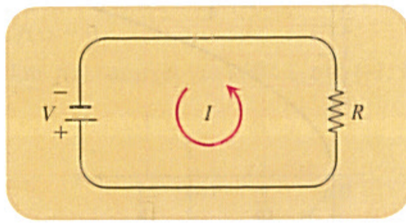
**35.** $f(x) = 1/x$, $L = 1/4$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0{,}05$

**36.** $f(x) = x^2$, $L = 3$, $x_0 = \sqrt{3}$, $\epsilon = 0{,}1$

## Θεωρία και παραδείγματα

**37.** *Κατασκευή μηχανικών κυλίνδρων* Προκειμένου να κατασκευάσετε μηχανικούς κυλίνδρους εμβαδού διατομής 9 cm², χρειάζεται να γνωρίζετε πόση απόκλιση από την ιδανική διάμετρο του κυλίνδρου $x_0 = 3{,}385$ cm είναι επιτρεπτή, ώστε το εμβαδόν της διατομής να μην διαφέρει περισσότερο από 0,01 cm² από την απαιτούμενη τιμή 9 cm². Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό, θέστε $A = \pi(x/2)^2$ και ερευνήστε σε ποιο διάστημα τιμών πρέπει να περιορίσετε το $x$ έτσι ώστε $|A - 9| \le 0{,}01$. Ποιο διάστημα βρήκατε;

**38.** *Κατασκευή ηλεκτρικών αντιστατών* Για ηλεκτρικά κυκλώματα όπως αυτό του σχήματος, ο νόμος του Ohm μάς λέει ότι $V = RI$. Εδώ $V$ είναι μια σταθερή τάση, $I$ είναι το ρεύμα μετρούμενο σε Ampère, και $R$ η αντίσταση μετρούμενη σε Ohm. Η εταιρεία σας έχει αναλάβει μια παραγγελία κατασκευής αντιστατών για κύκλωμα όπου $V = 120$ Volt και το ρεύμα $I$ πρέπει να ισούται με $5 \pm 0{,}1$ Amp. Ποιο είναι το επιτρεπτό εύρος τιμών της αντίστασης $R$ ώστε το $I$ να αποκλίνει το πολύ κατά 0,1 Amp από την ευκταία τιμή $I_0 = 5$;




**T 39.** *Συγκράτηση τιμών συναρτήσεως* Έστω $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

**(α)** Δείξτε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 2 = f(2)$.

**(β)** Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, εκτιμήστε τα $a$ και $b$, ούτως ώστε $1{,}8 < f(x) < 2{,}2$ όταν $a < x < b$.

**(γ)** Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, εκτιμήστε τα $a$ και $b$, ούτως ώστε $1{,}99 < f(x) < 2{,}01$ όταν $a < x < b$.

**T 40.** *Συγκράτηση τιμών συναρτήσεως* Έστω $f(x) = \sin x$.

**(α)** Υπολογίστε την τιμή $f(\pi/6)$.

**(β)** Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, βρείτε ένα διάστημα $(a, b)$ γύρω από το σημείο $x = \pi/6$ ούτως ώστε $0{,}3 < f(x) < 0{,}7$ όταν $a < x < b$.

**(γ)** Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, βρείτε ένα διάστημα $(a, b)$ γύρω από το σημείο $x = \pi/6$ ούτως ώστε $0{,}49 < f(x) < 0{,}51$ όταν $a < x < b$.

**41.** *Ελεύθερη πτώση* Ένα μπαλόνι γεμάτο νερό αφήνεται από ένα παράθυρο πολυώροφου κτιρίου και διανύει πέφτοντας $y = 4{,}9t^2$ m σε $t$ sec. Να υπολογίσετε

**(α)** τη μέση ταχύτητά του κατά τα πρώτα 3 sec της πτώσεως.

**(β)** την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t = 3$.

**42.** *Ελεύθερη πτώση σε μικρό πλανήτη που δεν έχει ατμόσφαιρα* Βρισκόμαστε σε έναν μικρό πλανήτη που δεν έχει ατμόσφαιρα. Ένας βράχος που αρχικά ηρεμεί αφήνεται να πέσει σε χαράδρα βάθους 20 m. Αν πέφτοντας ο βράχος διανύει $y = gt^2$ m σε $t$ sec, όπου $g$ μια σταθερά, και προσκρούει στο έδαφος σε 4 sec, να υπολογίσετε:

**(α)** Την τιμή της σταθεράς $g$.

**(β)** Τη μέση ταχύτητα πτώσεως.

**(γ)** Την ταχύτητα του βράχου τη στιγμή που προσπίπτει στο έδαφος.

Αφού συμπληρώσετε τους πίνακες των Ασκήσεων 43-46, δηλώστε ποια πιστεύετε ότι είναι η τιμή του ορίου $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**(α)**

| $x$ | −0,1 | −0,01 | −0,001 | −0,0001 . . . |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ; | ; | ; | ; |

**(β)**

| $x$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 . . . |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ; | ; | ; | ; |

**43.** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  **44.** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

**45.** $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$  **46.** $f(x) = x \sin(\ln|x|)$

## Γραφική εκτίμηση ορίων

Στις Ασκήσεις 47-50, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να κάνετε τα εξής:

**(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση κοντά στο σημείο $x_0$.

**(β)** Από τη γραφική παράσταση που κάνατε, προβλέψτε την τιμή του ορίου.

**(γ)** Βρείτε την ακριβή τιμή του ορίου με συμβολικό υπολογισμό. Πόσο καλή ήταν η πρόβλεψη που κάνατε;

**47.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$  **48.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

**49.** $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$  **50.** $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+7} - 4}$

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

## Γραφική εύρεση του δ

Στις Ασκήσεις 51-54, καλείστε να διερευνήσετε περαιτέρω τη διαδικασία γραφικής εύρεσης τιμών του $\delta$. Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να κάνετε τα εξής:

**(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = f(x)$ κοντά στο σημείο $x_0$.

**(β)** Προβλέψτε την τιμή του ορίου $L$. Κατόπιν, βρείτε επακριβώς το όριο με συμβολικό υπολογισμό, για να δείτε αν η πρόβλεψή σας ήταν σωστή.

**(γ)** Για $\epsilon = 0{,}2$, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τις ευθείες $y_1 = L - \epsilon$ και $y_2 = L + \epsilon$, καθώς και την $f$ για $x$ κοντά στο $x_0$.

**(δ)** Από το σχήμα που κάνατε, εκτιμήστε κάποιο $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε $x$ να ισχύει

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon .$$

Ελέγξτε την τιμή του $\delta$ που επιλέξατε, σχεδιάζοντας τις $f$, $y_1$, και $y_2$ στο διάστημα $0 < |x - x_0| < \delta$. Δώστε στον υπολογιστή σας ως διαστάσεις της περιοχής σχεδίασης τις ακόλουθες

$$x_0 - 2\delta \le x \le x_0 + 2\delta \quad \text{και} \quad L - 2\epsilon \le y \le L + 2\epsilon .$$

Αν οποιαδήποτε τιμή της συναρτήσεως $f$ κείται εκτός του διαστήματος $[L - \epsilon, L + \epsilon]$, σημαίνει ότι το $\delta$ που επιλέξατε ήταν υπερβολικά μεγάλο. Ξαναδοκιμάστε επιλέγοντας μικρότερο $\delta$.

**(ε)** Επαναλάβετε τα (γ) και (δ) διαδοχικά για $\epsilon = 0{,}1$, 0,05, και 0,001.

**51.** $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$, $x_0 = 3$

**52.** $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}$, $x_0 = 0$

**53.** $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}$, $x_0 = 0$

CD-ROM Δικτυότοπος

**54.** $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$, $x_0 = 0$



# 1.2 Εύρεση ορίων και πλευρικών ορίων

Ιδιότητες ορίων • Αλγεβρική απαλοιφή μηδενιζόμενων παρονομαστών • Το θεώρημα «σάντουιτς» • Πλευρικά όρια • Όρια που περιέχουν όρους $(\sin\theta)/\theta$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία
Όρια

Στην προηγούμενη ενότητα, υπολογίζαμε όρια συναρτήσεων εποπτεύοντας τα γραφήματά τους και εξετάζοντας τη συμπεριφορά των τιμών τους. Εδώ, θα δούμε ότι πολλά όρια μπορούν να υπολογιστούν αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας απλή αριθμητική και μερικούς στοιχειώδεις κανόνες.

## Ιδιότητες ορίων

Το ακόλουθο θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε όρια αριθμητικών συνδυασμών συναρτήσεων των οποίων τα όρια μας είναι ήδη γνωστά. Η απόδειξη των ιδιοτήτων δίδεται στο Παράρτημα 2.

**Θεώρημα 1** Ιδιότητες ορίων

Αν $L$, $M$, $c$, και $k$ είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ τότε}$$

**1.** *Όριο αθροίσματος:* $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

Το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των ορίων τους.

**2.** *Όριο διαφοράς:* $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

Το όριο της διαφοράς δύο συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των ορίων τους.

**3.** *Όριο γινομένου:* $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Το όριο του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των ορίων τους.

**4.** *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Το όριο του γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση ισούται με το γινόμενο της σταθεράς επί το όριο της συναρτήσεως.

**5.** *Όριο πηλίκου:* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

Το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων ισούται με το πηλίκο των ορίων τους, δεδομένου ότι το όριο του παρονομαστή δεν μηδενίζεται.

**6.** *Όριο δύναμης:* Αν $r$ και $s$ είναι ακέραιοι, και $s \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

εφόσον ο $L^{r/s}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο ρητής δύναμης συναρτήσεως ισούται με το όριο της συνάρτησης υψωμένο στη δύναμη αυτή, εφόσον το όριο της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα χρήσης του Θεωρήματος 1 στην εύρεση ορίων πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 1** Χρήση των κανόνων ορίων

Κάνοντας χρήση των προφανών σχέσεων $\lim_{x\to c} k = k$ και $\lim_{x\to c} x = c$ καθώς και των ιδιοτήτων των ορίων, να βρείτε τα ακόλουθα όρια.

(α) $\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)$ (β) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2+5}$ (γ) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}$

Λύση

(α) $\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)=\lim_{x\to c}x^3+\lim_{x\to c}4x^2-\lim_{x\to c}3$ Όρια αθροίσματος και διαφοράς

$=c^3+4c^2-3$ Όρια γινομένου και πολλαπλασίου

(β) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2+5}=\dfrac{\lim_{x\to c}(x^4+x^2-1)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)}$ Όριο πηλίκου

$=\dfrac{\lim_{x\to c}x^4+\lim_{x\to c}x^2-\lim_{x\to c}1}{\lim_{x\to c}x^2+\lim_{x\to c}5}$ Όρια αθροίσματος και διαφοράς

$=\dfrac{c^4+c^2-1}{c^2+5}$ Όριο γινομένου

(γ) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}=\sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2-3)}$ Όριο δύναμης $r/s = 1/2$

$=\sqrt{\lim_{x\to -2}4x^2-\lim_{x\to -2}3}$ Όρια αθροίσματος και διαφοράς

$=\sqrt{4(-2)^2-3}$ Όρια γινομένου και πολλαπλασίου

$=\sqrt{16-3}$

$=\sqrt{13}$

Όπως φαίνεται από το Παράδειγμα 1, οι σχέσεις του Θεωρήματος 1 μας επιτρέπουν να βρίσκουμε τα όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων με απλή αντικατάσταση. Το ίδιο ισχύει για ρητές συναρτήσεις των οποίων οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται στο σημείο υπολογισμού.

**Θεώρημα 2 Τα όρια πολυωνύμων προκύπτουν με αντικατάσταση**

Αν $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, τότε

$$\lim_{x\to c}P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_0.$$

**Θεώρημα 3 Τα όρια ρητών συναρτήσεων προκύπτουν με αντικατάσταση αρκεί να μην μηδενίζεται το όριο του παρονομαστή**

Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, και $Q(c)\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(c)}{Q(c)}.$$

**Παράδειγμα 2** Όριο ρητής συναρτήσεως

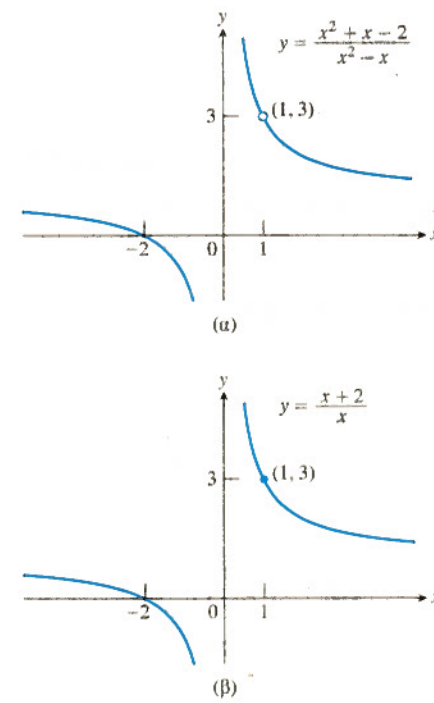
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5}=\frac{0}{6}=0$$

Το όριο αυτό είναι παρόμοιο με το δεύτερο όριο του Παραδείγματος 1 για $c=-1$, όπου ο υπολογισμός γίνεται τώρα σε ένα μόνο βήμα.



**Εντοπισμός κοινών παραγόντων**

Μπορεί να δειχτεί ότι αν το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο και $Q(c)=0$, τότε το $Q(x)$ θα έχει ως παράγοντα το $(x-c)$. Συνεπώς, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής μιας ρητής συνάρτησης του $x$ μηδενίζονται αμφότεροι στο $x=c$, θα έχουν ως κοινό παράγοντα το $(x-c)$.




**Σχημα 1.15** Η γραφική παράσταση της $f(x)=(x^2+x-2)/(x^2-x)$ στο (α) συμπίπτει με αυτήν της $g(x)=(x+2)/x$ στο (β), με εξαίρεση το σημείο $x=1$, όπου η $f$ δεν ορίζεται. Οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινό όριο καθώς $x\to 1$.

## Αλγεβρική απαλοιφή μηδενιζόμενων παρονομαστών

Το Θεώρημα 3 ισχύει μονάχα αν ο παρονομαστής της ρητής συναρτήσεως δεν μηδενίζεται στο σημείο $c$. Αν ο παρονομαστής είναι μηδέν, ενδέχεται η απαλοιφή κοινών παραγόντων στον αριθμητή και στον παρονομαστή να οδηγήσει σε κλάσμα μη μηδενιζόμενου παρονομαστή στο $c$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να βρούμε το όριο με αντικατάσταση στο απλοποιημένο κλάσμα.

**Παράδειγμα 3** Απαλοιφή κοινού παράγοντα

Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}.$$

Λύση Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $x=1$ αφού τότε μηδενίζεται ο παρονομαστής. Ελέγχουμε λοιπόν τον αριθμητή για ενδεχόμενο μηδενισμό στο $x=1$. Όντως ο αριθμητής μηδενίζεται, άρα θα έχει έναν κοινό παράγοντα $(x-1)$ με τον παρονομαστή. Απαλείφοντας τον παράγοντα $(x-1)$ από αριθμητή και παρονομαστή, προκύπτει ένα απλούστερο κλάσμα που για $x\neq 1$ παίρνει τις ίδιες τιμές με το αρχικό:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x},\qquad \text{αν } x\neq 1.$$

Από το απλούστερο κλάσμα, με αντικατάσταση, βρίσκουμε το ζητούμενο όριο για $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3.$$

Δείτε το Σχήμα 1.15.

**Παράδειγμα 4** Δημιουργία και απαλοιφή κοινού παράγοντα

Υπολογίστε το

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}.$$

Λύση Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $h=0$, ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Μπορούμε, όμως, να δημιουργήσουμε έναν κοινό παράγοντα, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη *συζυγή έκφραση* $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$, η οποία προκύπτει αλλάζοντας το πρόσημο μεταξύ των δύο ριζών:

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}\quad \text{Κοινός παράγοντας } h$$

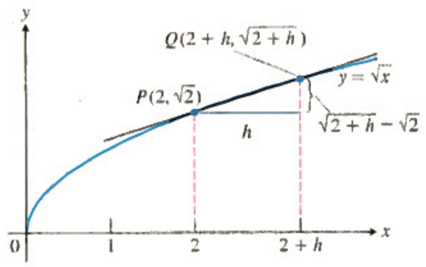
$$=\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}.\quad \text{Απαλοιφή του } h \text{ για } h\neq 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}\quad \text{Παρονομαστής διάφορος του 0 για } h=0\text{· αντικατάσταση}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

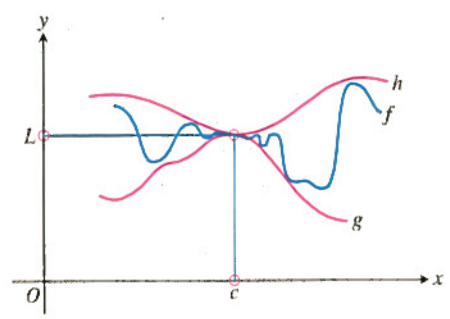



**Σχημα 1.16** Το όριο της κλίσεως $(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})/h$ της τέμνουσας $PQ$, καθώς $Q \to P$ κατά μήκος της καμπύλης, ισούται με $1/(2\sqrt{2})$. (Παράδειγμα 4)

Σημειώστε ότι η ποσότητα $(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})/h$ είναι η κλίση της τέμνουσας που διέρχεται από τα σημεία $P(2, \sqrt{2})$ και $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ της καμπύλης $y = \sqrt{x}$. Η τέμνουσα φαίνεται στο Σχήμα 1.16, για $h > 0$. Ο υπολογισμός μας φανερώνει ότι η κλίση της τέμνουσας παίρνει την οριακή τιμή $1/(2\sqrt{2})$, καθώς το σημείο $Q$ τείνει στο $P$ κινούμενο επί της καμπύλης από οποιαδήποτε κατεύθυνση.

## Το θεώρημα «σάντουιτς»

Αν δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο όριο άμεσα, υπάρχει και ο έμμεσος υπολογισμός, με χρήση του λεγόμενου θεωρήματος «σάντουιτς». Το θεώρημα ισχύει για μια συνάρτηση $f$ με τιμές που φράζονται άνω και κάτω από τις τιμές δύο άλλων συναρτήσεων, $g$ και $h$. Αν οι $g$ και $h$ έχουν το ίδιο όριο καθώς $x \to c$, τότε και η $f$ θα έχει το όριο αυτό (Σχήμα 1.17).




**Σχημα 1.17** Η γραφική παράσταση της $f$ κείται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $g$ και $h$.

**Θεώρημα 4** **Θεώρημα «σάντουιτς»**

Έστω ότι $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x$ το οποίο ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $c$, εκτός, ενδεχομένως, για το ίδιο το σημείο $x = c$. Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

τότε $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4 δίδεται στο Παράρτημα 2.

**Παράδειγμα 5** Εφαρμογή του θεωρήματος «σάντουιτς»

Δεδομένου ότι

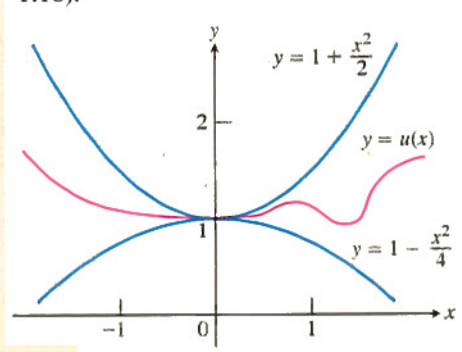
$$1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{για κάθε } x \ne 0,$$

να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} u(x)$.

Λύση Εφόσον

$$\lim_{x\to 0} (1 - (x^2/4)) = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} (1 + (x^2/2)) = 1,$$

το θεώρημα «σάντουιτς» συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ (Σχήμα 1.18).




**Σχημα 1.18** Κάθε συνάρτηση $u(x)$ με γραφική παράσταση που κείται μεταξύ των $y = 1 + (x^2/2)$ και $y = 1 - (x^2/4)$, έχει όριο 1 καθώς $x \to 0$.



CD-ROM Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Ευκλείδης
(Περίπου 365 π.Χ.)

**Παράδειγμα 6** Μία ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος «σάντουιτς»

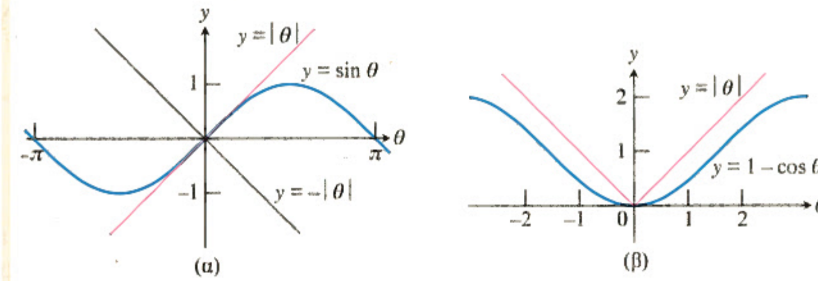
**(α)** (Σχήμα 1.19α) Εφόσον $-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta|$ για κάθε $\theta$ και $\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta\to 0}|\theta| = 0$, θα ισχύει ότι

$$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0.$$

**(β)** (Σχήμα 1.19β) Εφόσον $0 \le 1 - \cos\theta \le |\theta|$ για κάθε $\theta$, θα ισχύει ότι $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$ ή ότι

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1.$$

**(γ)** Για τυχούσα συνάρτηση $f(x)$, αν $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι η $f(x)$ είναι άνω και κάτω φραγμένη, $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, ενώ τόσο η $-|f(x)|$ όσο και η $|f(x)|$ έχουν όριο το 0 καθώς $x \to c$.




**Σχημα 1.19** Το θεώρημα «σάντουιτς» επαληθεύει ότι (α) $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$ και (β) $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$.

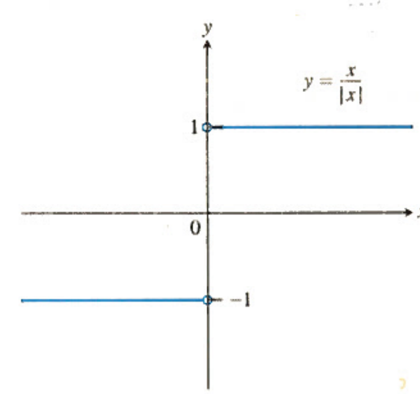
CD-ROM Δικτυότοπος

## Πλευρικά όρια

Για να έχει μια συνάρτηση $f$ όριο το $L$ καθώς $x \to a$, θα πρέπει να ορίζεται *εκατέρωθεν* του $a$ και οι τιμές της $f(x)$ να τείνουν στο $L$ καθώς το $x$ τείνει στο $a$ από οποιαδήποτε πλευρά. Έτσι, τα συνήθη όρια είναι **αμφίπλευρα**.

Αν η $f$ δεν έχει αμφίπλευρο όριο στο $a$, μπορεί ωστόσο να έχει πλευρικό όριο εκεί, δηλαδή να έχει όριο αν το $x$ τείνει στο $a$ από τη μία πλευρά μονάχα. Αν πρόκειται για τη δεξιά πλευρά, το όριο είναι **δεξιό**. Αν πρόκειται για την αριστερή, μιλάμε για **αριστερό** όριο.

Η συνάρτηση $f(x) = x/|x|$ (Σχήμα 1.20) έχει όριο το 1 καθώς το $x$ τείνει στο 0 από δεξιά, και το $-1$ καθώς το $x$ τείνει στο 0 από αριστερά.




**Σχημα 1.20** Διαφορετικό δεξιό και αριστερό όριο στην αρχή.

**Ορισμοί** **Δεξιά και αριστερά όρια**

Έστω $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα $(a, b)$, όπου $a < b$. Αν η $f(x)$ τείνει στο $L$ καθώς το $x$ τείνει στο $a$, θα λέμε ότι η $f$ έχει **δεξιό όριο** $L$ στο $a$, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Έστω $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα $(c, a)$, όπου $c < a$. Αν η $f(x)$ τείνει στο $M$ καθώς το $x$ τείνει στο $a$, θα λέμε ότι η $f$ έχει **αριστερό όριο** $M$ στο $a$, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = M.$$

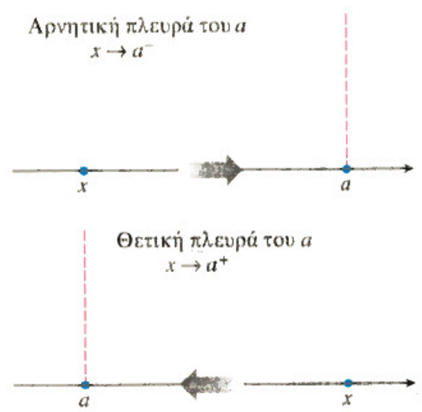
Για τη συνάρτηση $f(x) = x/|x|$ του Σχήματος 1.20, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

**Τα «+» και «–»**
Η σημασία των προσήμων στον συμβολισμό των πλευρικών ορίων είναι η εξής:

$x \to a^-$ σημαίνει ότι το $x$ τείνει στο $a$ από αριστερά (από την αρνητική πλευρά του $a$), δηλαδή από τιμές μικρότερες του $a$.

$x \to a^+$ σημαίνει ότι το $x$ τείνει στο $a$ από δεξιά (από τη θετική πλευρά του $a$), δηλαδή από τιμές μεγαλύτερες του $a$.

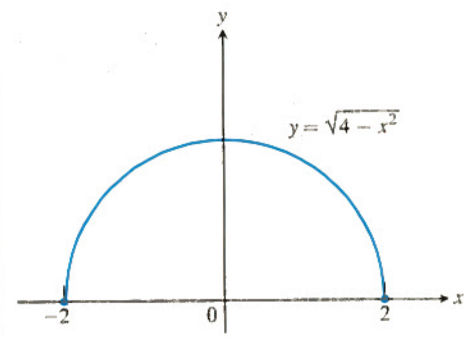



## Παράδειγμα 7 Πλευρικά όρια για συνάρτηση ημικυκλίου

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ είναι το $[-2, 2]$· η γραφική παράσταση είναι το ημικύκλιο του Σχήματος 1.21. Έχουμε

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0\,.$$

Η συνάρτηση δεν έχει αριστερό όριο στο $x = -2$, ούτε δεξιό όριο στο $x = 2$. Δηλαδή δεν έχει συνήθη αμφίπλευρα όρια στα σημεία $-2$ και $2$.




**Σχημα 1.21**
$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ και
$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$.

Τα πλευρικά όρια έχουν όλες τις ιδιότητες του Θεωρήματος 1. Το δεξιό όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων είναι το άθροισμα των δεξιών ορίων τους, κ.ο.κ. Επίσης, τα θεωρήματα περί ορίων πολυωνύμων και ρητών συναρτήσεων ισχύουν για πλευρικά όρια, καθώς και το θεώρημα «σάντουιτς».

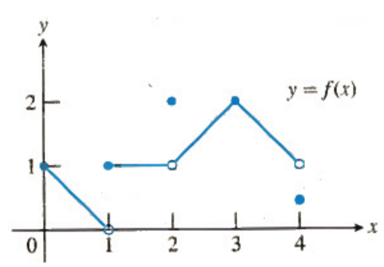
Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των πλευρικών και των αμφίπλευρων ορίων είναι η εξής:

**Το σύμβολο $\Leftrightarrow$**
Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ διαβάζεται «αν και μόνο αν». Αποτελεί συνδυασμό των συμβόλων $\Rightarrow$ (συνεπάγεται ότι) και $\Leftarrow$ (προκύπτει από το ότι).

**Θεώρημα 5 Σχέση μεταξύ πλευρικών και αμφίπλευρων ορίων**
Μια συνάρτηση $f(x)$ έχει (αμφίπλευρο) όριο καθώς το $x$ τείνει στο $c$ αν και μόνο αν έχει αριστερό και δεξιό όριο στο $c$ και τα πλευρικά αυτά όρια ταυτίζονται:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

## Παράδειγμα 8 Όρια της συνάρτησης του Σχήματος 1.22




**Σχημα 1.22** Γραφική παράσταση της συναρτήσεως του Παραδείγματος 8.

Στο $x = 0$: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$,
τα $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχουν. Η συνάρτηση δεν ορίζεται αριστερά του σημείου $x = 0$.



Στο $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$, παρόλο που $f(1) = 1$,
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$,
το $\lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Το δεξιό και το αριστερό όριο είναι άνισα.

Στο $x = 2$: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$,
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, παρόλο που $f(2) = 2$.

Στο $x = 3$: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 2$

Στο $x = 4$: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, παρόλο που $f(4) \neq 1$,
τα $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ και $\lim_{x \to 4} f(x)$ δεν υπάρχουν. Η συνάρτηση δεν ορίζεται δεξιά του σημείου $x = 4$.

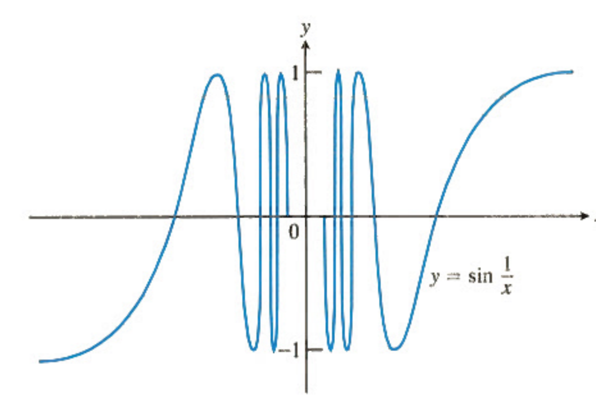
Σε κάθε άλλο σημείο $a$ του διαστήματος $[0, 4]$, η $f(x)$ έχει όριο $f(a)$.

Μέχρι τώρα, οι συναρτήσεις που μελετήσαμε διέθεταν κάποιο είδος ορίου σε καθένα από τα σημεία που εξετάσαμε. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντοτε.

## Παράδειγμα 9 Μια συνάρτηση που ταλαντώνεται πάρα πολύ για να έχει όριο

Δείξτε ότι η $y = \sin(1/x)$ δεν έχει όριο καθώς το $x$ τείνει στο μηδέν από οποιαδήποτε πλευρά (Σχήμα 1.23).

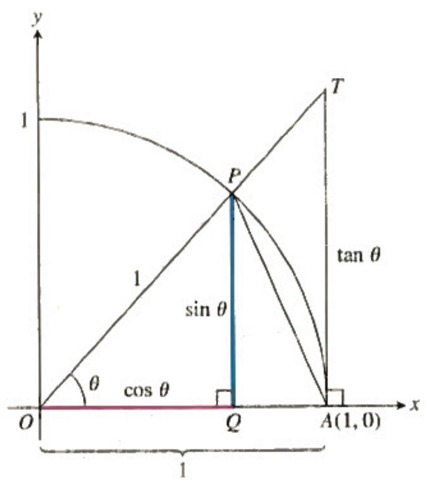
*Λύση* Καθώς το $x$ τείνει στο μηδέν, ο αντίστροφός του, $1/x$, αυξάνεται απεριόριστα και οι τιμές τού $\sin(1/x)$ ταλαντώνονται ολοένα και πιο γρήγορα μεταξύ των τιμών $-1$ και $1$. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμός $L$ τον οποίο να προσεγγίζουν οι τιμές της συναρτήσεως καθώς το $x$ τείνει στο μηδέν, ακόμα και αν περιορίσουμε το $x$ σε θετικές ή αρνητικές μονάχα τιμές. Έτσι η συνάρτηση δεν έχει ούτε δεξιό ούτε αριστερό όριο στο $x = 0$.




**Σχημα 1.23** Η συνάρτηση $y = \sin(1/x)$ δεν έχει ούτε δεξιό ούτε αριστερό όριο καθώς το $x$ τείνει στο μηδέν. (Παράδειγμα 9)

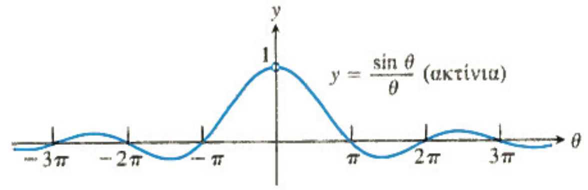
## Όρια που περιέχουν όρους $(\sin\theta)/\theta$

Ένα γεγονός θεμελιώδους σημασίας για τη συνάρτηση $(\sin\theta)/\theta$ είναι ότι όταν η γωνία $\theta$ μετριέται σε ακτίνια και $\theta \to 0$, η συνάρτηση έχει όριο 1. Το γεγονός αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.24, αλλά το επαληθεύουμε και αλγεβρικά με το θεώρημα «σάντουιτς».




**ΣΧΗΜΑ 1.25** Το σχήμα χρησιμεύει στην απόδειξη του Θεωρήματος 6. $TA/OA = \tan\theta$, αλλά $OA = 1$, συνεπώς $TA = \tan\theta$.

Το ακτινιακό μέτρο υπεισέρχεται στην Εξίσωση (2): Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $OAP$ ισούται με $\theta/2$ μόνο αν η γωνία $\theta$ μετριέται σε ακτίνια.




ΕΚΤΟΣ ΚΑΙΜΑΚΑΣ

**ΣΧΗΜΑ 1.24** Γραφική παράσταση της $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$.

**Θεώρημα 6**

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ σε ακτίνια}) \qquad (1)$$

**Απόδειξη** Ο στόχος είναι να δείξουμε ότι τα όρια από δεξιά και από αριστερά ισούνται με 1. Τότε και το αμφίπλευρο όριο θα ισούται με 1.

Για το δεξιό όριο, θεωρούμε θετικές γωνίες $\theta$ μικρότερες του $\pi/2$ (Σχήμα 1.25). Σημειώστε ότι

Εμβαδόν $\Delta OAP <$ εμβαδόν κυκλικού τομέα $OAP <$ εμβαδόν $\Delta OAT$.

Εκφράζουμε τα εμβαδά αυτά συναρτήσει του $\theta$ ως ακολούθως:

$$\text{Εμβαδόν } \Delta OAP = \frac{1}{2}\text{ βάση} \times \text{ύψος} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{Εμβαδόν κυκλικού τομέα } OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

$$\text{Εμβαδόν } \Delta OAT = \frac{1}{2}\text{ βάση} \times \text{ύψος} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Η ανισότητα αυτή διατηρεί τη φορά της αν διαιρέσουμε κάθε μέλος με τον θετικό αριθμό $(1/2)\sin\theta$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο κάθε μέλους, η ανισότητα αλλάζει φορά:

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

Εφόσον $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$, το θεώρημα «σάντουιτς» δίνει

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Θυμηθείτε ότι οι $\sin\theta$ και $\theta$ είναι *περιττές συναρτήσεις* (Παράγραφος 0.3). Συνεπώς, η $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$ θα είναι *άρτια συνάρτηση*, με γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y$ (Σχήμα 1.24). Η συμμετρία αυτή συνεπάγεται ότι υπάρχει το αριστερό όριο στο 0, και ισούται με το εκεί δεξιό όριο:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta},$$

άρα $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta)/\theta = 1$, βάσει του Θεωρήματος 4.



CD-ROM Δικτυότοπος

**Παράδειγμα 10** Χρήση του ότι $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Δείξτε ότι (α) $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ και (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

Λύση

**(α)** Χρησιμοποιώντας τον γνωστό μας τύπο των ημίσεων γωνιών $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} - \frac{2\sin^2(h/2)}{h}$$

$$= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad \text{Έστω } \theta = h/2.$$

$$= -(1)(0) = 0.$$

**(β)** Η Εξίσωση (1) δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο κλάσμα ως αυτό έχει. Τον όρο $2x$ που χρειαζόμαστε στον παρονομαστή (αντί του $5x$ που υπάρχει) τον κατασκευάζουμε, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $2/5$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{Εδώ εφαρμόζουμε την Εξ. (1) για } \theta = 2x.$$

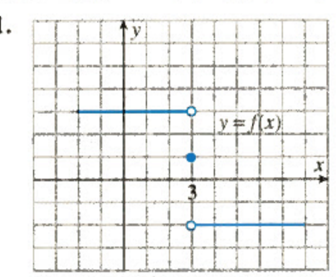
$$= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

### Γραφική εκτίμηση ορίων

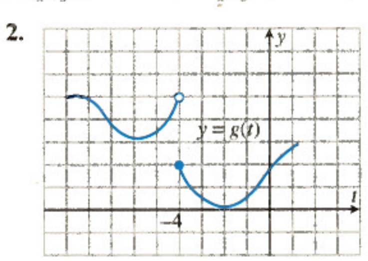
Στις Ασκήσεις 1-6, χρησιμοποιήστε τις γραφικές παραστάσεις για να εκτιμήσετε τα όρια και την τιμή της συνάρτησης που ζητούνται, ή εξηγήστε γιατί τα όρια δεν υπάρχουν.

**1.**



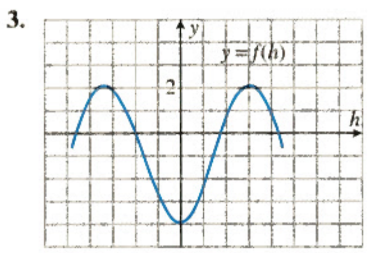

**(α)** $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **(δ)** $f(3)$

**2.**



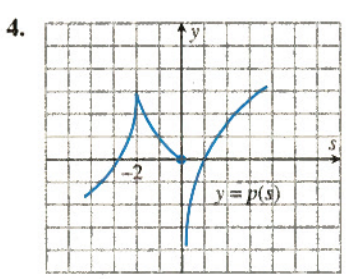

**(α)** $\lim_{t\to -4^-} g(t)$ **(β)** $\lim_{t\to -4^+} g(t)$ **(γ)** $\lim_{t\to -4} g(t)$ **(δ)** $g(-4)$

**3.**



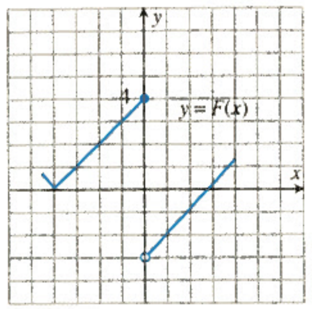

**(α)** $\lim_{h\to 0^-} f(h)$ **(β)** $\lim_{h\to 0^+} f(h)$ **(γ)** $\lim_{h\to 0} f(h)$ **(δ)** $f(0)$

**4.**



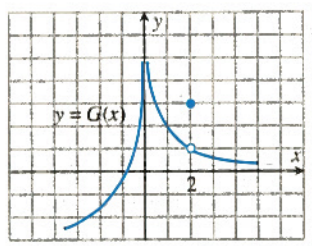

**(α)** $\lim_{s\to -2^-} p(s)$ **(β)** $\lim_{s\to -2^+} p(s)$ **(γ)** $\lim_{s\to -2} p(s)$ **(δ)** $p(-2)$

5.




(α) $\lim_{x\to0^-} F(x)$ (β) $\lim_{x\to0^+} F(x)$ (γ) $\lim_{x\to0} F(x)$ (δ) $F(0)$

6.




(α) $\lim_{x\to2^-} G(x)$ (β) $\lim_{x\to2^+} G(x)$ (γ) $\lim_{x\to2} G(x)$ (δ) $G(2)$

## Χρήση κανόνων ορίων

**7.** Έστω $\lim_{x\to0} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to0} g(x) = -5$. Αναφέρετε ποιους κανόνες του Θεωρήματος 1 έχουμε εφαρμόσει στα βήματα (α), (β), και (γ) του ακόλουθου υπολογισμού.

$$\lim_{x\to0}\frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to0}(f(x)+7)^{2/3}} \qquad (\alpha)$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}2f(x)-\lim_{x\to0}g(x)}{\left(\lim_{x\to0}(f(x)+7)\right)^{2/3}} \qquad (\beta)$$

$$=\frac{2\lim_{x\to0}f(x)-\lim_{x\to0}g(x)}{\left(\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}7\right)^{2/3}} \qquad (\gamma)$$

$$=\frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}}=\frac{7}{4}$$

**8.** Έστω $\lim_{x\to1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to1} p(x) = 1$, και $\lim_{x\to1} r(x) = -2$. Αναφέρετε ποιους κανόνες του Θεωρήματος 1 έχουμε εφαρμόσει στα βήματα (α), (β), και (γ) του ακόλουθου υπολογισμού.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to1}(p(x)(4-r(x)))} \qquad (\alpha)$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to1}5h(x)}}{\left(\lim_{x\to1}p(x)\right)\left(\lim_{x\to1}(4-r(x))\right)} \qquad (\beta)$$

$$=\frac{\sqrt{5\lim_{x\to1}h(x)}}{\left(\lim_{x\to1}p(x)\right)\left(\lim_{x\to1}4-\lim_{x\to1}r(x)\right)} \qquad (\gamma)$$

$$=\frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)}=\frac{5}{2}$$

**9.** Έστω $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ και $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ (β) $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

(γ) $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$ (δ) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

**10.** Έστω $\lim_{x\to4} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to4} g(x) = -3$. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to4} (g(x) + 3)$ (β) $\lim_{x\to4} xf(x)$

(γ) $\lim_{x\to4} (g(x))^2$ (δ) $\lim_{x\to4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

## Υπολογισμοί ορίων

Στις Ασκήσεις 11-14, να βρεθούν τα όρια:

**11.** (α) $\lim_{x\to-7} (2x+5)$ (β) $\lim_{t\to6} 8(t-5)(t-7)$

(γ) $\lim_{y\to2} \dfrac{y+2}{y^2+5y+6}$ (δ) $\lim_{h\to0} \dfrac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

**12.** (α) $\lim_{r\to-2} (r^3-2r^2+4r+8)$ (β) $\lim_{x\to2} \dfrac{x+3}{x+6}$

(γ) $\lim_{y\to-3} (5-y)^{4/3}$ (δ) $\lim_{\theta\to5} \dfrac{\theta-5}{\theta^2-25}$

**13.** (α) $\lim_{t\to-5} \dfrac{t^2+3t-10}{t+5}$ (β) $\lim_{x\to-2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

(γ) $\lim_{y\to1} \dfrac{y-1}{\sqrt{y+3}-2}$

**14.** (α) $\lim_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$ (β) $\lim_{\theta\to1} \dfrac{\theta^4-1}{\theta^3-1}$

(γ) $\lim_{t\to9} \dfrac{3-\sqrt{t}}{9-t}$

## Χρήση του θεωρήματος «σάντουιτς»

**15.** *Μάθετε γράφοντας* (α) Μπορεί να δειχτεί ότι οι ανισότητες

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{x\sin x}{2-2\cos x}<1$$

ισχύουν για κάθε $x$ κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Τ** (β) Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = 1-(x^2/6)$, $y = (x\sin x)/(2-2\cos x)$, και $y = 1$, για $-2 \le x \le 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \to 0$.

**16.** *Μάθετε γράφοντας* (α) Οι ανισότητες

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}<\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}$$

ισχύουν για $x$ κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Τ** (β) Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = (1/2)-(x^2/24)$, $y = (1-\cos x)/x^2$, και $y = 1/2$, για $-2 \le x \le 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \to 0$.

## Όρια μέσων ρυθμών μεταβολής

Στον απειροστικό λογισμό, όρια του τύπου

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

προκύπτουν συχνά κατά τη μελέτη των τεμνουσών και των εφαπτόμενων ευθειών, καθώς και των στιγμιαίων μεταβολών. Στις Ασκήσεις 17-20, να υπολογίσετε το παραπάνω όριο για τα $x_0$ και τις συναρτήσεις $f$ που δίδονται.

**17.** $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

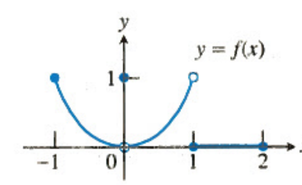
**18.** $f(x) = 3x-4$, $x_0 = 2$

**19.** $f(x) = 1/x$, $x_0 = -2$

**20.** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 7$

## Γραφική εύρεση ορίων

**21.** Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις, σχετικά με τη συνάρτηση $y = f(x)$ που έχει σχεδιαστεί παρακάτω, είναι αληθείς και ποιες όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.




(α) $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 1$. (β) $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$.

(γ) $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$. (δ) $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x)$.

(ε) Το $\lim_{x\to0} f(x)$ υπάρχει. (στ) $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

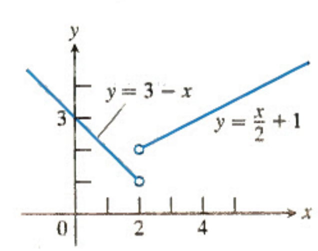
(ζ) $\lim_{x\to0} f(x) = 1$. (η) $\lim_{x\to1} f(x) = 1$.

(θ) $\lim_{x\to1} f(x) = 0$. (ι) $\lim_{x\to2^-} f(x) = 2$.

(ια) Το $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ δεν υπάρχει. (ιβ) $\lim_{x\to2^+} f(x) = 0$.

**22.** Έστω

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ \dfrac{x}{2}+1, & x>2.\end{cases}$$





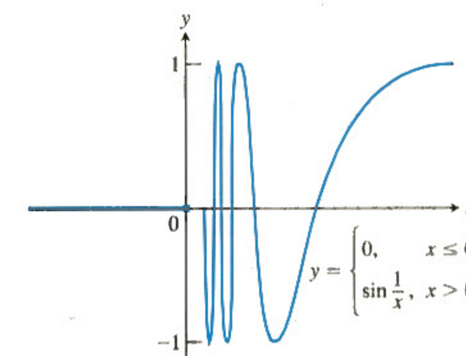

(α) Βρείτε τα $\lim_{x\to2^+} f(x)$ και $\lim_{x\to2^-} f(x)$.

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to2} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Βρείτε τα $\lim_{x\to4^-} f(x)$ και $\lim_{x\to4^+} f(x)$.

(δ) Υπάρχει το $\lim_{x\to4} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

**23.** Έστω $f(x)=\begin{cases}0, & x\le0\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

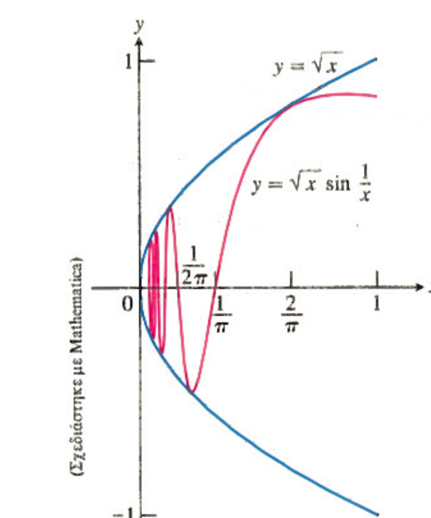



(α) Υπάρχει το $\lim_{x\to0^+} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to0^-} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to0} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

**24.** Έστω $g(x) = \sqrt{x}\sin(1/x)$.




(α) Υπάρχει το $\lim_{x\to0^+} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to0^-} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to0} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

Αφού σχεδιάσετε τις συναρτήσεις στις Ασκήσεις 25 και 26, απαντήστε στα εξής ερωτήματα.

**(α)** Ποια τα πεδία ορισμού και τιμών της $f$;

**(β)** Σε ποια σημεία $c$, αν υπάρχουν τέτοια, υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x)$;

**(γ)** Σε ποιο σημείο υπάρχει μόνο το αριστερό όριο;

**(δ)** Σε ποιο σημείο υπάρχει μόνο το δεξιό όριο;

**25.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{για } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{για } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{για } x = 2 \end{cases}$

**26.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{για } -1 \le x < 0 \text{ ή } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{για } x = 0 \\ 0 & \text{για } x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$

## Αλγεβρική εύρεση πλευρικών ορίων

Στις Ασκήσεις 27-32, να βρεθούν τα όρια:

**27.** $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

**28.** $\lim_{x\to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

**29.** $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

**30.** $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

**31.** **(α)** $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ **(β)** $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

**32.** **(α)** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ **(β)** $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

## Θεωρία και παραδείγματα

CD-ROM Δικτυότοπος

**33.** *Μάθετε γράφοντας* Αν $x^4 \le f(x) \le x^2$ για κάθε $x$ στο διάστημα $[-1, 1]$, και $x^2 \le f(x) \le x^4$ για $x < -1$ ή $x > 1$, τότε σε ποια σημεία $c$ σας είναι αμέσως γνωστό το $\lim_{x\to c} f(x)$ και ποια η τιμή του;

**34.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \ne 2$, και ότι

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5 .$$

Μπορείτε να συμπεράνετε κάτι για τις τιμές των $f$, $g$, και $h$ στο σημείο $x = 2$; Θα μπορούσε να είναι $f(2) = 0$; Θα μπορούσε να είναι $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**35.** *Υπολογίστε το όριο* Δεδομένου ότι $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, βρείτε τα

**(α)** $\lim_{x\to -2} f(x)$ **(β)** $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$

**36.** *Υπολογίστε το όριο*

**(α)** Δεδομένου ότι $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

**(β)** Δεδομένου ότι $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

**37.** *Μάθετε γράφοντας* Αν τα $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to a^-} f(x)$ σας είναι γνωστά σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $f$, τότε ξέρετε και την τιμή του $\lim_{x\to a} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**38.** *Μάθετε γράφοντας* Αν γνωρίζετε ότι το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει, μπορείτε να μάθετε την τιμή του υπολογίζοντας το $\lim_{x\to c^+} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**39.** *Εύρεση του δέλτα* Για δεδομένο $\epsilon > 0$, βρείτε ένα διάστημα $I = (5, 5+\delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν το $x$ ανήκει στο $I$, να ισχύει $\sqrt{x-5} < \epsilon$. Ποιο όριο συνάρτησης βρίσκεται έτσι, και ποια η τιμή του;

**40.** *Εύρεση του δέλτα* Για δεδομένο $\epsilon > 0$, βρείτε ένα διάστημα $I = (4-\delta, 4)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν το $x$ ανήκει στο $I$, να ισχύει $\sqrt{4-x} < \epsilon$. Ποιο όριο συνάρτησης βρίσκεται έτσι, και ποια η τιμή του;

## Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $y = f(x)$, με πεδίο ορισμού $D$ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς την αρχή, θα είναι **άρτια** αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x$ στο $D$ και **περιττή** αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x$ στο $D$.

**41.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω $f$ περιττή συνάρτηση του $x$. Αν ξέρετε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**42.** *Μάθετε γράφοντας* Έστω $f$ άρτια συνάρτηση του $x$. Αν ξέρετε ότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ και $\lim_{x\to -2^+} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

**43.** **(α)** Σχεδιάστε την $g(x) = x \sin(1/x)$ και από το γράφημα εκτιμήστε το $\lim_{x\to 0} g(x)$, μεγεθύνοντας γύρω από την αρχή, αν χρειαστεί.

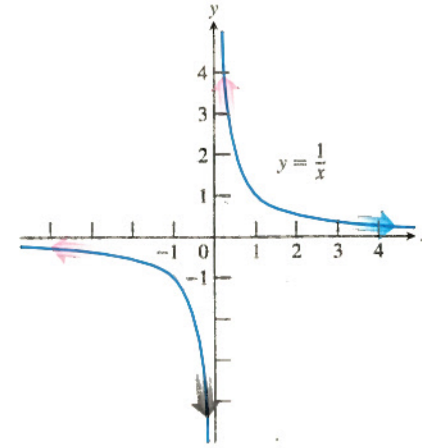
**(β)** *Μάθετε γράφοντας* Τώρα σχεδιάστε την $k(x) = \sin(1/x)$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά των $g$ και $k$ κοντά στην αρχή. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε;

**44.** **(α)** Σχεδιάστε την $h(x) = x^2 \cos(1/x)$ και από το γράφημα εκτιμήστε το $\lim_{x\to 0} h(x)$, μεγεθύνοντας γύρω από την αρχή, αν χρειαστεί.

**(β)** *Μάθετε γράφοντας* Τώρα σχεδιάστε την $k(x) = \cos(1/x)$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά των $h$ και $k$ κοντά στην αρχή. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε;



# 1.3 Άπειρα όρια




**Σχημα 1.26** Η γραφική παράσταση της $y = 1/x$.

Πεπερασμένα όρια καθώς $x \to \pm\infty$ • Όρια ρητών συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$ • Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες: άπειρα όρια • Το θεώρημα «σάντουιτς» • Ακριβείς ορισμοί άπειρων ορίων • Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα και πλάγιες ασύμπτωτες

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε γραφικές παραστάσεις ρητών συναρτήσεων (πηλίκα πολυωνύμων), καθώς και άλλων συναρτήσεων, που παρουσιάζουν ενδιαφέρουσα οριακή συμπεριφορά καθώς $x \to \pm\infty$. Μεταξύ των εργαλείων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

## Πεπερασμένα όρια καθώς $x \to \pm\infty$

Το σύμβολο του απείρου ($\infty$) δεν αντιπροσωπεύει κάποιον υπαρκτό αριθμό. Το χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης όταν οι τιμές είτε του πεδίου ορισμού είτε του πεδίου τιμών της υπερβαίνουν κάθε πεπερασμένο όριο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ ορίζεται για κάθε $x \ne 0$ (Σχήμα 1.26). Όταν το $x$ είναι θετικό και αυξάνεται απεριόριστα, το $1/x$ ελαττώνεται απεριόριστα. Όταν το $x$ είναι αρνητικό και αυξάνεται (κατά μέτρο) απεριόριστα, το $1/x$ ελαττώνεται και πάλι. Συνοψίζουμε τις παρατηρήσεις αυτές λέγοντας ότι η $f(x) = 1/x$ έχει όριο 0 καθώς $x \to \pm\infty$.

CD-ROM Δικτυότοπος

**Ορισμοί** Όρια καθώς $x \to \pm\infty$

**1.** Λέμε ότι η $f(x)$ έχει **όριο $L$ καθώς το $x$ τείνει στο άπειρο,** και γράφουμε

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

αν η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο $L$ καθώς το $x$ απομακρύνεται ολοένα από την αρχή, κινούμενο επί του θετικού ημιάξονα.

**2.** Λέμε ότι η $f(x)$ έχει **όριο $L$ καθώς το $x$ τείνει στο μείον άπειρο,** και γράφουμε

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

αν η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο $L$ καθώς το $x$ απομακρύνεται ολοένα από την αρχή, κινούμενο επί του αρνητικού ημιάξονα.

Η μέθοδος υπολογισμού ορίων συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$ μοιάζει με αυτήν που ακολουθήσαμε για πεπερασμένα όρια στην Ενότητα 1.2. Εκεί είχαμε πρώτα υπολογίσει τα όρια της σταθερής και της ταυτοτικής συναρτήσεως $y = k$ και $y = x$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια επεκτείναμε τα αποτελέσματα αυτά σε άλλες συναρτήσεις, εφαρμόζοντας ένα θεώρημα υπολογισμού ορίων αλγεβρικών συνδυασμών. Θα κάνουμε κι εδώ το ίδιο, με τη διαφορά ότι εδώ οι αρχικές συναρτήσεις είναι οι $y = k$ και $y = 1/x$, αντί των $y = k$ και $y = x$.

Τα δυο πρωταρχικά λοιπόν αποτελέσματα προς επαλήθευση, καθώς $x \to \pm\infty$, δίδονται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

**Το σύμβολο του απείρου ($\infty$)**

Όπως έχουμε πει και αλλού, το σύμβολο $\infty$ δεν παριστάνει κάποιον υπαρκτό αριθμό και συνεπώς δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στις συνήθεις αριθμητικές πράξεις. Σημειώστε επίσης ότι γράφοντας $\infty$ εννοούμε $+\infty$. Τα δύο αυτά σύμβολα χρησιμοποιούνται συχνά το ένα αντί του άλλου.

**Παράδειγμα 1** Όρια των $1/x$ και $k$ καθώς $x \to \pm\infty$

Δείξτε ότι

**(α)** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

**(β)** $\lim_{x\to\infty} k = \lim_{x\to-\infty} k = k.$

Λύση

**(α)** Από το Σχήμα 1.26, είναι φανερό ότι η $y = 1/x$ πλησιάζει όλο και περισσότερο στο μηδέν καθώς το $x$ απομακρύνεται ολοένα από την αρχή κινούμενο είτε προς τη θετική είτε προς την αρνητική κατεύθυνση.

**(β)** Ασχέτως του πόσο απέχει το $x$ από την αρχή, η σταθερή συνάρτηση $y = k$ λαμβάνει πάντα την ίδια τιμή $k$.

Τα όρια στο (συν ή πλην) άπειρο έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τα όρια όπου το $x$ τείνει σε πεπερασμένο αριθμό.

**Θεώρημα 7** **Κανόνες ορίων καθώς $x \to \pm\infty$**

Αν $L$, $M$, και $k$, είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{τότε}$$

1. *Όριο αθροίσματος:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Όριο διαφοράς:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Όριο γινομένου:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
5. *Όριο πηλίκου:* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Όριο δύναμης:* Αν $r$ και $s$ είναι ακέραιοι, και $s \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

δεδομένου ότι ο $L^{r/s}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι αντίστοιχες αυτών του Θεωρήματος 1, Ενότητα 1.2, και τις εφαρμόζουμε κατά τον ίδιο τρόπο.

**Παράδειγμα 2** Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 7

**(α)** $\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ — Όριο αθροίσματος

$= 5 + 0 = 5$ — Γνωστά όρια

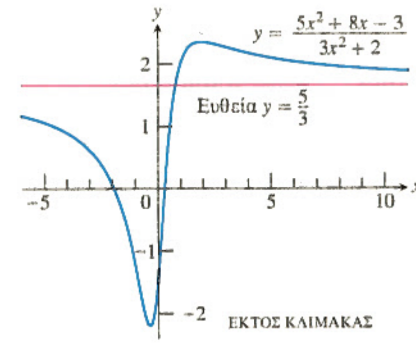
**(β)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ — Όριο γινομένου

$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$ — Γνωστά όρια



Ο **βαθμός** του πολυωνύμου $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ισούται με $n$, δηλαδή με τον μεγαλύτερο εκθέτη.




**ΣΧΗΜΑ 1.27** Η συνάρτηση του Παραδείγματος 3.

## Όρια ρητών συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$

Για να προσδιορίσουμε το όριο μιας ρητής συναρτήσεως καθώς $x \to \pm\infty$, μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την υψηλότερη δύναμη του $x$ στον παρονομαστή. Το τι θα συμβεί τότε εξαρτάται από τους βαθμούς των δύο πολυωνύμων.

**Παράδειγμα 3** Αριθμητής και παρονομαστής ίδιου βαθμού

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το $x^2$.

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

Δείτε το Σχ. 1.27.

**Παράδειγμα 4** Βαθμός αριθμητή μικρότερος του βαθμού παρονομαστή

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το $x^3$.

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

Δείτε το Σχ. 1.28.

**Παράδειγμα 5** Βαθμός αριθμητή μεγαλύτερος του βαθμού παρονομαστή

**(α)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - (3/x)}{7 + (4/x)}$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το $x$.

$= -\infty$

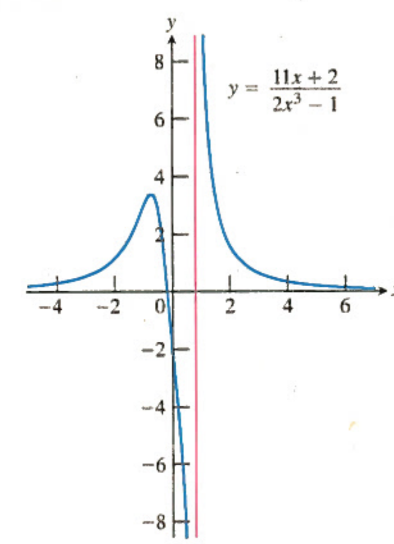
Ο αριθμητής τώρα τείνει στο $-\infty$ ενώ ο παρονομαστής τείνει στο 7, άρα ο λόγος τους $\to -\infty$. Δείτε το Σχ. 1.29.

**(β)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3 + 7x}{2x^2 - 3x - 10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x + (7/x)}{2 - (3/x) - (10/x^2)}$

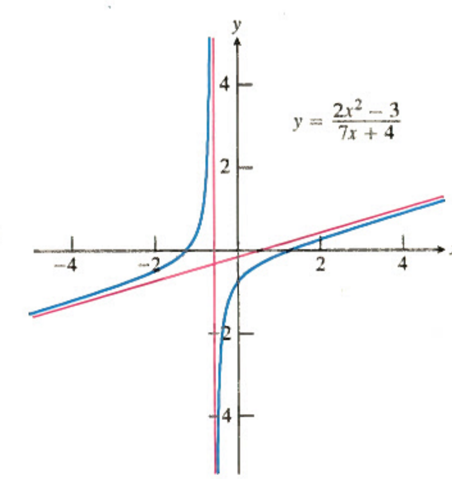
Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το $x^2$.

$= \infty$

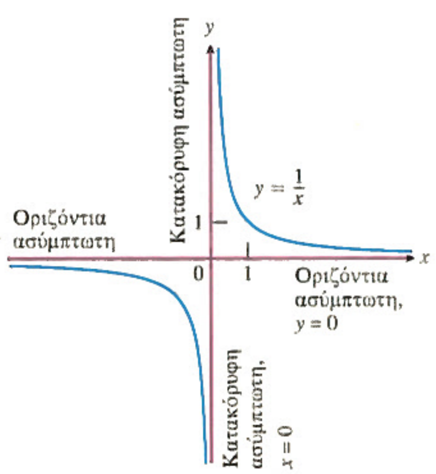
Ο αριθμητής $\to \infty$, ο παρονομαστής $\to 2$, ο λόγος τους $\to \infty$.



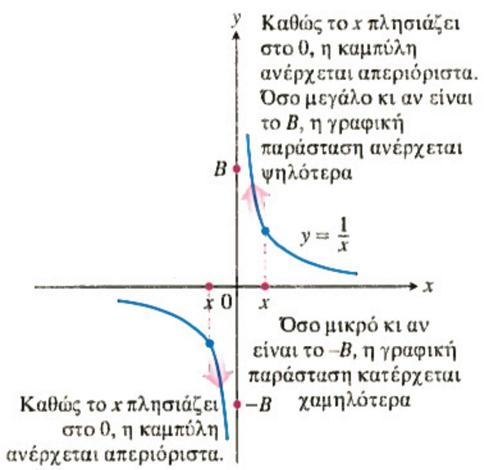

**ΣΧΗΜΑ 1.28** Γραφική παράσταση της συναρτήσεως του Παραδείγματος 4. Η καμπύλη τείνει στον άξονα $x$ καθώς το $|x|$ αυξάνεται.




**ΣΧΗΜΑ 1.29** Η συνάρτηση του Παραδείγματος 5(α).




**Σχημα 1.30** Οι άξονες συντεταγμένων αποτελούν τις ασύμπτωτες των κλάδων της υπερβολής $y = 1/x$.




**Σχημα 1.31** Τα πλευρικά όρια απειρίζονται:

$$\lim_{x\to 0^+} {}^1/_x = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-} {}^1/_x = -\infty.$$

## Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες: άπειρα όρια

Από το γράφημα της $f(x) = 1/x$ (Σχήμα 1.30), παρατηρούμε τα εξής:

**(α)** Καθώς $x \to \infty$, $(1/x) \to 0$, δηλαδή $\lim_{x\to\infty} (1/x) = 0$.

**(β)** Καθώς $x \to -\infty$, $(1/x) \to 0$, δηλαδή $\lim_{x\to-\infty} (1/x) = 0$.

Λέμε τότε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι *οριζόντια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της $f$.

Αν η απόσταση μεταξύ του γραφήματος μιας συναρτήσεως και μιας σταθερής ευθείας τείνει στο μηδέν καθώς απομακρυνόμαστε ολοένα από την αρχή, λέμε ότι η γραφική παράσταση τείνει (προσεγγίζει, πλησιάζει) ασυμπτωτικά στην ευθεία, και ότι η τελευταία είναι μια *ασύμπτωτη* της γραφικής παραστάσεως.

Ας δούμε προσεκτικά τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $f(x) = 1/x$ που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.31. Καθώς $x \to 0^+$, οι τιμές της $f$ αυξάνονται απεριόριστα, και τελικά υπερβαίνουν κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Με άλλα λόγια, δοθέντος ενός θετικού πραγματικού αριθμού $B$, οσοδήποτε μεγάλου, οι τιμές της $f$ γίνονται τελικά μεγαλύτερες του B (Σχήμα 1.31). Συνεπώς, αυστηρά μιλώντας, η $f$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0^+$. Ωστόσο ένας πρακτικός τρόπος περιγραφής τέτοιου είδους συμπεριφοράς της $f$ είναι να πούμε ότι η $f(x)$ τείνει στο $\infty$ καθώς $x \to 0^+$. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Καθώς $x \to 0^-$, οι τιμές της $f(x) = 1/x$ γίνονται αυθαίρετα μεγάλες (κατά μέτρο) και αρνητικές. Δοθέντος ενός οποιουδήποτε αρνητικού πραγματικού αριθμού $-B$, οι τιμές της $f$ θα κείνται τελικά κάτω του $-B$. (Δείτε το Σχήμα 1.31.) Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Προσέξτε ότι ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x = 0$, άρα η συνάρτηση δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

> **Ορισμοί** **Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες**
>
> Μια ευθεία $y = b$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συναρτήσεως $y = f(x)$ αν
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$
>
> Μια ευθεία $x = a$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, αν
>
> $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

### Παράδειγμα 6 Αναζήτηση ασυμπτώτων

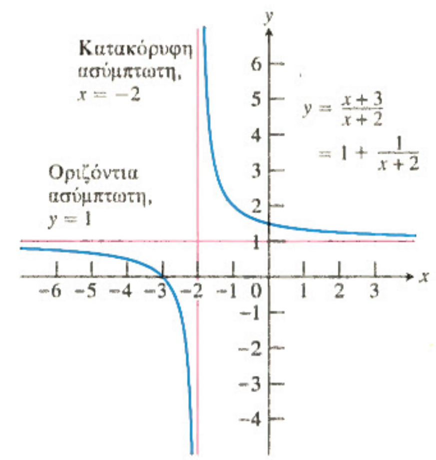
Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y = \frac{x+3}{x+2}.$$

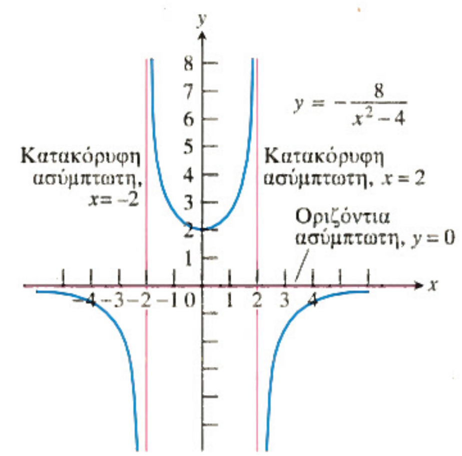
Λύση Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της καμπύλης καθώς $x \to \pm\infty$ και καθώς $x \to -2$, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Οι ασύμπτωτες προκύπτουν αμέσως, αν γράψουμε τη ρητή συνάρτηση ως πολυώνυμο συν κάποιο υπόλοιπο, δηλαδή εκτελώντας τη διαίρεση που δηλώνεται από το κλάσμα:






**Σχημα 1.32** Οι ευθείες $y = 1$ και $x = -2$ είναι ασύμπτωτες της καμπύλης $y = (x + 3)/(x + 2)$. (Παράδειγμα 6)




**Σχημα 1.33** Γραφική παράσταση της $y = -8/(x^2 - 4)$. Προσέξτε ότι η καμπύλη προσεγγίζει τον άξονα $x$ μόνο από τη μία του πλευρά. Οι ασύμπτωτες λοιπόν δεν είναι απαραίτητως «αμφίπλευρες». (Παράδειγμα 7)

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ \underline{x+2} & 1 \\ 1 & \end{array}$$

Έτσι γράφουμε:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

Από εδώ μπορούμε να δούμε ότι η καμπύλη μας δεν είναι άλλη από την $y = 1/x$, μετατοπισμένη 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά (Σχήμα 1.32). Έτσι οι ασύμπτωτες δεν είναι πλέον οι άξονες συντεταγμένων (όπως ίσχυε για την $y = 1/x$), αλλά οι ευθείες $y = 1$ και $x = -2$.

### Παράδειγμα 7 Οι ασύμπτωτες δεν είναι απαραιτήτως αμφίπλευρες

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της καμπύλης

$$f(x) = -\frac{8}{x^2-4}.$$

Λύση Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της καμπύλης για $x \to \pm\infty$ και $x \to \pm 2$, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής. Προσέξτε ότι η $f$ είναι άρτια συνάρτηση του $x$, με γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y$.

*Συμπεριφορά καθώς* $x \to \pm\infty$. Εφόσον $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ η ευθεία $y = 0$ είναι μια ασύμπτωτη της καμπύλης στα δεξιά (δηλ. για μεγάλα $x$). Και λόγω συμμετρίας, θα είναι ασύμπτωτη της καμπύλης και στα αριστερά (δηλ. για μικρά $x$) (Σχήμα 1.33).

*Συμπεριφορά καθώς* $x \to \pm 2$. Εφόσον

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,$$

η ευθεία $x = 2$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη, τόσο από δεξιά (δηλ. για $x \to 2^+$) όσο και από αριστερά (δηλ. για $x \to 2^-$). Και λόγω συμμετρίας, το ίδιο θα ισχύει και για την ευθεία $x = -2$.

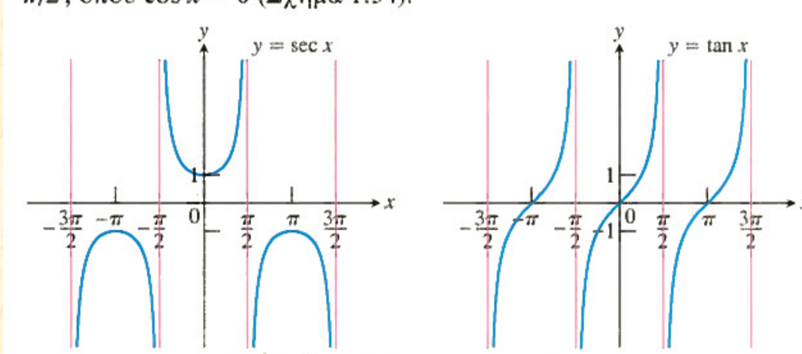
Άλλες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν, διότι η $f$ έχει πεπερασμένο όριο σε κάθε άλλο σημείο.

### Παράδειγμα 8 Καμπύλες με άπειρο αριθμό ασυμπτώτων

Οι καμπύλες

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{και} \qquad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x$ = περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$, όπου $\cos x = 0$ (Σχήμα 1.34).

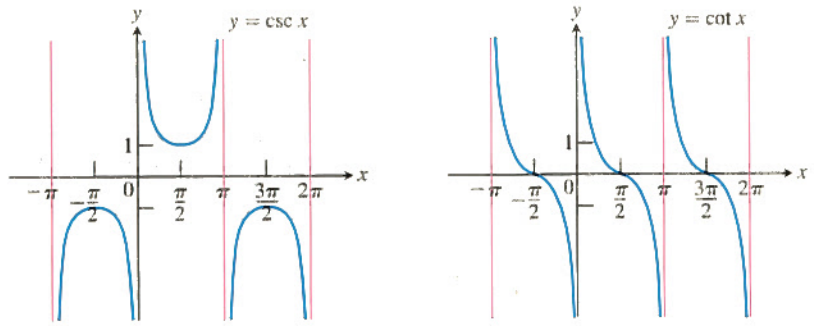



**Σχημα 1.34** Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\sec x$ και $\tan x$. (Παράδειγμα 8)

Οι γραφικές παραστάσεις των

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{και} \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x =$ ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi$, όπου $\sin x = 0$ (Σχήμα 1.35).




**Σχημα 1.35** Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\csc x$ και $\cot x$. (Παράδειγμα 8)

| $x$ | $e^x$ |
|---|---|
| 0 | 1,00000 |
| −1 | 0,36788 |
| −2 | 0,13534 |
| −3 | 0,04979 |
| −5 | 0,00674 |
| −8 | 0,00034 |
| −10 | 0,00005 |

### Παράδειγμα 9 Οριζόντια ασύμπτωτη της $y = e^x$

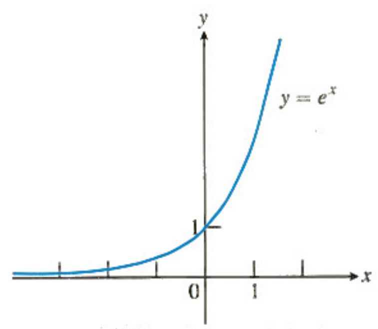
Η καμπύλη

$$y = e^x$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ (δηλαδή τον άξονα $x$). Αυτό προκύπτει από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 1.36 και τον συνοδευτικό πίνακα τιμών. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 .$$

Προσέξτε ότι οι τιμές της $e^x$ τείνουν στο 0 αρκετά γρήγορα.




**Σχημα 1.36** Η ευθεία $y = 0$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $y = e^x$.

Όσο για τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $y = f(x)$ στο $x \to \pm\infty$, μπορούμε να τη διερευνήσουμε υπολογίζοντας το όριο της $y = f(1/x)$ καθώς $x \to 0$.

### Παράδειγμα 10 Αντικατάσταση με νέα μεταβλητή

Να βρεθεί το $\lim_{x \to \infty} \sin(1/x)$.

Λύση Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή, την $t = 1/x$. Από το Σχήμα 1.30, γνωρίζουμε ότι $t \to 0^+$ καθώς $x \to \infty$. Κατά συνέπεια,

$$\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \sin t = 0 .$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά της $y = f(1/x)$ καθώς $x \to 0$, εξετάζοντας την $y = f(x)$ καθώς $x \to \pm\infty$.

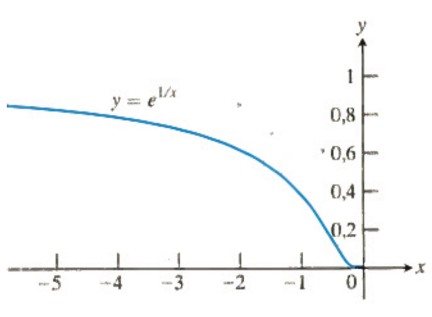
### Παράδειγμα 11 Αντικατάσταση

Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

Λύση Έστω $t = 1/x$. Από το Σχήμα 1.31, γνωρίζουμε ότι $t \to -\infty$ καθώς $x \to 0^-$. Κατά συνέπεια,

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \qquad \text{Παράδειγμα 9}$$

(Σχήμα 1.37).




**Σχημα 1.37** Η γραφική παράσταση της $y = e^{1/x}$ για $x < 0$ δείχνει ότι $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$. (Παράδειγμα 11)



## Το θεώρημα «σάντουιτς»

Το θεώρημα «σάντουιτς» ισχύει επίσης για όρια καθώς $x \to \pm\infty$.

### Παράδειγμα 12 Εύρεση ορίου καθώς το $x$ τείνει στο 0 ή στο $\pm\infty$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα «σάντουιτς», να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x} .$$

Λύση Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της καμπύλης καθώς $x \to \pm\infty$ και $x \to 0$, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής.

*Συμπεριφορά καθώς $x \to 0$.* Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to 0} (\sin x)/x = 1$, και άρα δεν υπάρχει ασύμπτωτη στην αρχή των αξόνων.

*Συμπεριφορά καθώς $x \to \pm\infty$.* Εφόσον

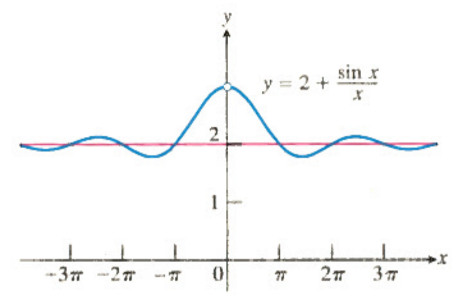
$$0 \le \left| \frac{\sin x}{x} \right| \le \left| \frac{1}{x} \right|$$

και $\lim_{x \to \pm\infty} |1/x| = 0$, θα είναι $\lim_{x \to \pm\infty} (\sin x)/x = 0$, βάσει του θεωρήματος «σάντουιτς». Συνεπώς,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left( 2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2 ,$$

και άρα η ευθεία $y = 2$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης τόσο στα δεξιά όσο και στα αριστερά (Σχήμα 1.38).

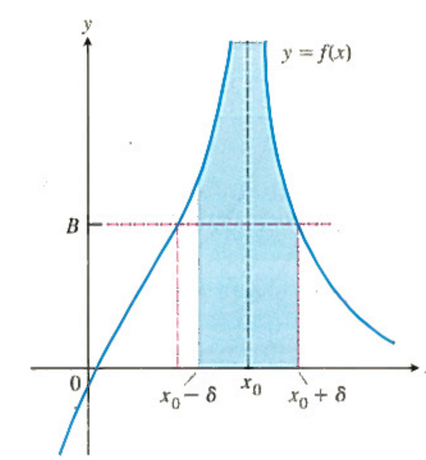
Το παράδειγμα αυτό φανερώνει ότι μια καμπύλη μπορεί να τέμνει, και μάλιστα πολλές φορές, μια οριζόντιά της ασύμπτωτη.



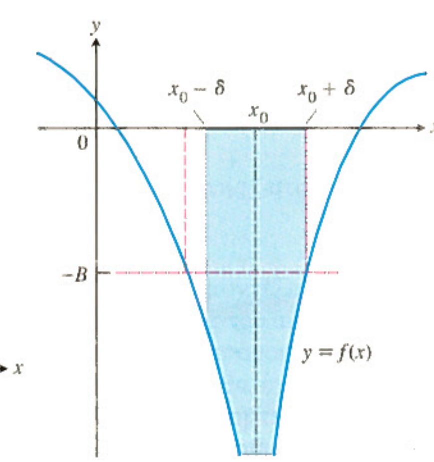

**Σχημα 1.38** Μια καμπύλη μπορεί να τέμνει την ασύμπτωτή της άπειρες φορές. (Παράδειγμα 12)

## Ακριβείς ορισμοί άπειρων ορίων

Ενώ μέχρι τώρα ορίζαμε όρια απαιτώντας από την $f(x)$ να πλησιάζει αυθαίρετα κοντά σε πεπερασμένο αριθμό $L$ για κάθε $x$ που βρίσκεται αρκετά κοντά στο $x_0$, θα ορίσουμε τα άπειρα όρια αξιώνοντας από την $f(x)$ να κείται αυθαίρετα μακριά από την αρχή των αξόνων. Εκτός από την αλλαγή αυτή, κατά τα άλλα οι διατυπώσεις είναι πανομοιότυπες με αυτές που ήδη έχουμε δει. Τα Σχήματα 1.39 και 1.40 συνοδεύουν τους ορισμούς.




**Σχημα 1.39** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.




**Σχημα 1.40** $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

**Ορισμός** **Απειριζόμενα όρια**

**1.** Λέμε ότι η $f(x)$ **τείνει στο άπειρο καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$**, και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό $B$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$ να ισχύει ότι

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B\,.$$

**2.** Λέμε ότι η $f(x)$ **τείνει στο μείον άπειρο καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$**, και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\,,$$

αν για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-B$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$ να ισχύει ότι

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B\,.$$

Παρόμοιοι είναι και οι ακριβείς ορισμοί των πλευρικών άπειρων ορίων στο $x_0$.

CD-ROM Δικτυότοπος

## Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα και πλάγιες ασύμπτωτες

Για μεγάλες αριθμητικά (δηλ. κατά μέτρο) τιμές του $x$, μπορούμε ενίοτε να προσομοιώνουμε μια περίπλοκη συνάρτηση με μια απλούστερη που παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά στις ίδιες περιοχές τιμών του $x$.

**Παράδειγμα 13** Μοντέλα συναρτήσεων για μεγάλα $|x|$

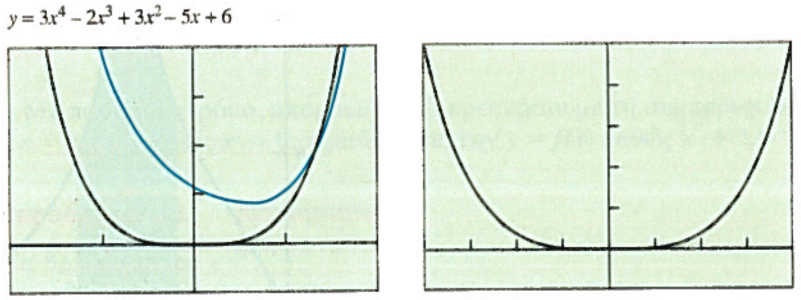
Έστω $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = 3x^4$. Δείξτε ότι παρόλο που οι $f$ και $g$ διαφέρουν αρκετά για αριθμητικά μικρές τιμές του $x$, ουσιαστικά ταυτίζονται για μεγάλα $|x|$.

Λύση

**Γραφική επίλυση**

Οι γραφικές παραστάσεις των $f$ και $g$ (Σχήμα 1.41α), αν και αρκετά διαφορετικές κοντά στην αρχή, ουσιαστικά συμπίπτουν αν ειδωθούν σε μεγαλύτερη κλίμακα (Σχήμα 1.41β).

$y = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$



[–2, 2] επί [–5, 20] (α)    [–20, 20] επί [–100.000, 500.000] (β)

**Σχημα 1.41** Οι γραφικές παραστάσεις των $f$ (άνω καμπύλη) και $g$, (α) διαφέρουν για μικρά $|x|$, και (β) σχεδόν ταυτίζονται για μεγάλα $|x|$. (Παράδειγμα 13)



**Αναλυτική επαλήθευση**

Η υπόθεση ότι η $g$ έχει την ίδια συμπεριφορά με την $f$ (και άρα αποτελεί μοντέλο της) για αριθμητικά μεγάλες τιμές του $x$, μπορεί να ελεγχθεί εξετάζοντας τον λόγο των δύο συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

γεγονός που αποτελεί πειστήριο του ότι όντως οι $f$ και $g$ παρουσιάζουν κοινή συμπεριφορά για μεγάλα $|x|$.

**Ορισμός** **Μοντέλο με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα**

Η συνάρτηση $g$ είναι

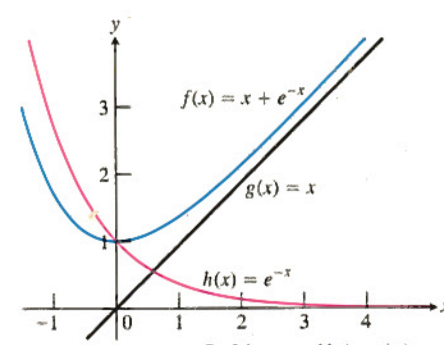
**(α)** ένα **μοντέλο της $f$ στο άπειρο** αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**(β)** ένα **μοντέλο της $f$ στο μείον άπειρο** αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Το μοντέλο μιας συναρτήσεως $f$ στο συν άπειρο δεν αποτελεί αναγκαστικά και μοντέλο της $f$ στο μείον άπειρο.




**Σχημα 1.42** Η γραφική παράσταση της $f(x) = x + e^{-x}$ μοιάζει με αυτήν της $g(x) = x$ δεξιά του άξονα $y$. Αριστερά του άξονα $y$, μοιάζει με τη γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x}$. (Παράδειγμα 14)

**Παράδειγμα 14** Εύρεση μοντέλων με δεδομένη συμπεριφορά στο $\pm\infty$

Έστω $f(x) = x + e^{-x}$. Δείξτε ότι η $g(x) = x$ αποτελεί μοντέλο της $f$ στο συν άπειρο, ενώ η $h(x) = e^{-x}$ αποτελεί μοντέλο της $f$ στο μείον άπειρο.

Λύση Στο συν άπειρο,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1, \text{ εφόσον } \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0.$$

Στο μείον άπειρο,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}} + 1\right) = 1, \text{ εφόσον } \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0.$$

(Δείτε την Άσκηση 51). Η γραφική παράσταση της $f$ στο Σχήμα 1.42 έρχεται σε συμφωνία με τους υπολογισμούς μας.

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε μοντέλα συναρτήσεων στο άπειρο για ρητές συναρτήσεις. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, τότε η γραφική παράσταση της ρητής συναρτήσεως $f(x)$ θα έχει μια **πλάγια (λοξή) ασύμπτωτη**, όπως στο Σχήμα 1.29. Η εξίσωση της ασύμπτωτης αυτής βρίσκεται αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή, προκειμένου να εκφράσουμε την $f$ ως μια γραμμική συνάρτηση συν κάποιο υπόλοιπο που τείνει στο μηδέν καθώς $x \to \pm\infty$. Ακολουθεί ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 15** Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης

Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

που φαίνεται στο Σχήμα 1.29.

Λύση Εκτελώντας τη διαίρεση, βρίσκουμε

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x + 4)}}_{\text{υπόλοιπο}}.$$

Καθώς $x \to \pm\infty$, το υπόλοιπο (η απόλυτη τιμή του οποίου μας δίνει την κατακόρυφη απόσταση των καμπυλών $f$ και $g$) τείνει στο μηδέν, άρα η ευθεία

$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

θα είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της $f$ (Σχήμα 1.29). Η συνάρτηση $g$ είναι λοιπόν μοντέλο της $f$ τόσο στο συν άπειρο όσο και στο μείον άπειρο.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3

## Υπολογισμός ορίων καθώς $x \to \pm\infty$

Στις Ασκήσεις 1-4, να βρεθούν τα όρια κάθε συναρτήσεως (α) καθώς $x \to \infty$ και (β) καθώς $x \to -\infty$. (Μπορείτε, αν θέλετε, να ελέγξετε τις απαντήσεις σας σχεδιάζοντας τις συναρτήσεις σε υπολογιστή.)

**1.** $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

**2.** $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

**3.** $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

**4.** $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + (\sqrt{2}/x^2)}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, να βρεθούν τα όρια.

**5.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sin 2x}{x}$

**6.** $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$

## Όρια ρητών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 7-14, να βρεθούν τα όρια κάθε συναρτήσεως (α) καθώς $x \to \infty$ και (β) καθώς $x \to -\infty$.

**7.** $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

**8.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

**9.** $f(x) = \dfrac{1 - 12x^3}{4x^2 + 12}$

**10.** $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

**11.** $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{4x - 8}$

**12.** $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3}{-x^2 + x}$

**13.** $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

**14.** $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

## Όρια μη ακέραιων ή αρνητικών δυνάμεων

Η ίδια διαδικασία που χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε τα όρια ρητών συναρτήσεων, μπορεί να εφαρμοστεί και για πηλίκα συναρτήσεων με μη ακέραιες ή και αρνητικές δυνάμεις του $x$: Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του $x$ στον παρονομαστή, και συνεχίζουμε κατά τα συνήθη. Στις Ασκήσεις 15-20, να βρεθούν τα όρια.

**15.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

**16.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

**17.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

**18.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

**19.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

**20.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

## Κατασκευή γραφικών παραστάσεων από τιμές συναρτήσεων και όρια

Στις Ασκήσεις 21 και 22, σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες. Δεν σας χρειάζεται ο μαθηματικός τύπος της $f(x)$· απλώς ονομάστε τους άξονες και σχεδιάστε μια κατάλληλη καμπύλη. (Δεν υπάρχει μία και μοναδική απάντηση, άρα οι απαντήσεις σας δεν θα συμπίπτουν αναγκαστικά με αυτές στο τέλος του βιβλίου.)



**21.** $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$, και $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

**22.** $f(0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, και $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

## Κατασκευή συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 23 και 24, βρείτε μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες και σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική της παράσταση. (Και εδώ οι απαντήσεις δεν είναι μοναδικές. Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες είναι αποδεκτή. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις, αν αυτό σας εξυπηρετεί.)

**23.** $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, και $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

**24.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x) = -1$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} h(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} h(x) = -1$, και $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$

## Σχεδίαση ρητών συναρτήσεων

**T** Παραστήστε γραφικά τις ρητές συναρτήσεις των Ασκήσεων 25-34. Σε κάθε σχήμα σχεδιάστε τις ασύμπτωτες, γράφοντας και τις σχετικές τους εξισώσεις.

**25.** $y = \dfrac{1}{x - 1}$

**26.** $y = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

**27.** $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

**28.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

**29.** $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

**30.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

**31.** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

**32.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

**33.** $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ (μάγισσα της Agnesi)

**34.** $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ (οφιοειδής του Νεύτωνα)

## Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα

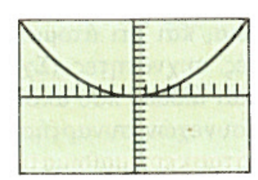
Στις Ασκήσεις 35-38, αντιστοιχίστε κάθε συνάρτηση με τη γραφική παράσταση του μοντέλου της στα άκρα του πεδίου ορισμού

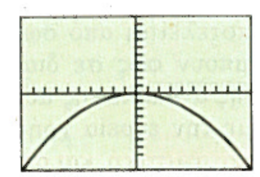
**35.** $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x + 3}$

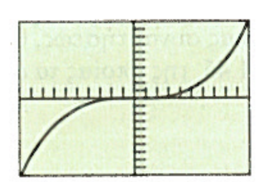
**36.** $y = \dfrac{x^5 - x^4 + x + 1}{2x^2 + x - 3}$

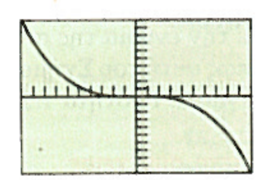
**37.** $y = \dfrac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{2 - x}$

**38.** $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 1}{1 - x^2}$


(α)


(β)


(γ)


(δ)

Στις Ασκήσεις 39-42, να βρεθεί μια απλή στοιχειώδης συνάρτηση που αποτελεί μοντέλο της συναρτήσεως (α) στο συν άπειρο και (β) στο μείον άπειρο.

**39.** $y = e^x - 2x$

**40.** $y = x^2 + e^{-x}$

**41.** $y = x + \ln|x|$

**42.** $y = x^2 + \sin x$

## Θεωρία και παραδείγματα

**T** **43.** **(α)** Εκτιμήστε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$$

σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x.$$

**(β)** Αφού συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών της $f(x)$, προβλέψτε την τιμή του ορίου (α). Κατόπιν δείξτε ότι η πρόβλεψή σας ήταν η ορθή.

**T** **44.** Βρείτε με γραφικό τρόπο το $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$ και επαληθεύστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

**45.** *Μάθετε γράφοντας* Πόσες οριζόντιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**46.** *Μάθετε γράφοντας* Πόσες κατακόρυφες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

## Σύγκριση μεταξύ συναρτήσεων και μαθηματικών τύπων

Σχεδιάστε τις καμπύλες των Ασκήσεων 47-50. Εξηγήστε τη σχέση μεταξύ κάθε καμπύλης και του αντίστοιχου μαθηματικού τύπου.

**47.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

**48.** $y = \dfrac{-1}{\sqrt{4 - x^2}}$

**49.** $y = x^{2/3} + \dfrac{1}{x^{1/3}}$

**50.** $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2 + 1}\right)$

## Αντικατάσταση του $1/x$

Στις Ασκήσεις 51-54, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της $y = f(1/x)$ για να βρείτε τα $\lim_{x \to \infty} f(x)$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

**51.** $f(x) = xe^x$

**52.** $f(x) = x^2 e^{-x}$

**53.** $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

**54.** $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$

**55.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos(1/x)}{1 + (1/x)}$

**56.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

**57.** $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right)\left(\cos\frac{1}{x}\right)$

**58.** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x}\right)\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)$

## Εύρεση ασυμπτώτων

Στις Ασκήσεις 59-62, παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις που δίδονται. Ποιες ασύμπτωτες έχουν οι γραφικές παραστάσεις και γιατί οι ασύμπτωτες αυτές βρίσκονται εκεί που βρίσκονται;

**59.** $y = -\dfrac{x^2-4}{x+1}$

**60.** $y = \dfrac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$

**61.** $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$

**62.** $y = 2\sin x + \dfrac{1}{x}$

Στις Ασκήσεις 63 και 64, παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις που δίδονται. Κατόπιν απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

**(α)** Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη καθώς $x \to 0^+$;

**(β)** Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη καθώς $x \to \pm\infty$;

**(γ)** Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη για $x = 1$ και $x = -1$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**63.** $y = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{2/3}$

**64.** $y = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2/3}$

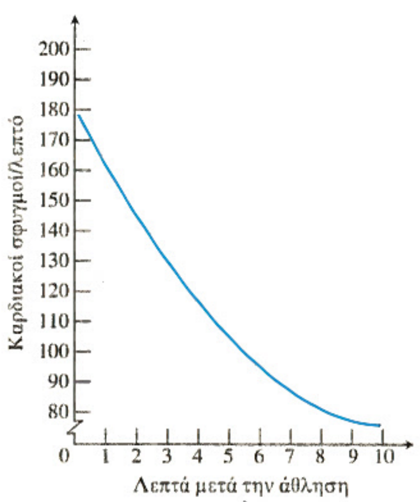
# 1.4 Συνέχεια

Σημειακή συνέχεια • Συνεχείς συναρτήσεις • Αλγεβρικοί συνδυασμοί • Σύνθετες συναρτήσεις • Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις

CD-ROM Δικτυότοπος

Όταν τοποθετούμε σε διάγραμμα σημεία που αντιστοιχούν σε πειραματικά δεδομένα, συνηθίζεται να συνδέουμε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή. Με αυτόν τον τρόπο δηλώνουμε ποιες πιστεύουμε ότι είναι (κατά πάσα πιθανότητα) οι τιμές της συναρτήσεως σε ενδιάμεσες περιοχές όπου δεν πήραμε μετρήσεις (Σχήμα 1.43). Εδώ ενυπάρχει η υπόθεσή μας ότι έχουμε να κάνουμε με *συνεχή συνάρτηση*, της οποίας οι τιμές εξόδου μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο με τις τιμές εισόδου, δηλαδή δεν παρουσιάζουν άλματα από μια τιμή σε μια άλλη χωρίς να παίρνουν όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση μπορεί να σχεδιαστεί κατά συνεχή τρόπο, δηλαδή χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι («μονοκοντυλιά»), είναι μια συνεχής συνάρτηση. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την έννοια αυτή της συνέχειας.




ΣΧΗΜΑ 1.43 Επιστροφή των παλμών της καρδιάς στα φυσιολογικά τους επίπεδα μετά από άθληση (τρέξιμο).

## Σημειακή συνέχεια

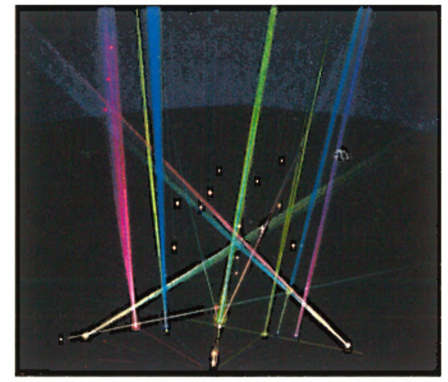
Χρησιμοποιούμε συνεχείς συναρτήσεις για να βρούμε το πλησιέστερο στον Ήλιο σημείο μιας πλανητικής τροχιάς, ή τη μέγιστη συγκέντρωση αντισωμάτων στο πλάσμα του αίματος. Συνεχείς συναρτήσεις χρησιμοποιούμε ακόμη για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος στον χώρο, ή το πώς η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης αλλάζει με τον χρόνο. Υπάρχουν τόσες πολλές φυσικές διαδικασίες που εξελίσσονται κατά συνεχή τρόπο, ώστε ήταν σχεδόν αδιανόητο στους επιστήμονες του 18ου και 19ου αιώνα να ερευνήσουν για κάποιου άλλου είδους συμπεριφορά στη φύση. Έτσι, προξενήθηκε σάλος στην επιστημονική κοινότητα όταν κατά τη δεκαετία του 1920 οι φυσικοί ανακάλυψαν ότι το φως αποτελείται από σωματίδια, και ότι άτομα που έχουν θερμανθεί εκπέμπουν φως σε διακριτές συχνότητες (Σχήμα 1.44). Ως αποτέλεσμα της ανακάλυψης αυτής και άλλων που ακολούθησαν, σε συνδυασμό με την ευρεία χρήση ασυνεχών συναρτήσεων στην πληροφορική, στη στατιστική, και στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων, το ζήτημα της συνέχειας έχει αποκτήσει τεράστια πρακτική αλλά και θεωρητική σημασία.

Για να καταλάβουμε την έννοια της συνέχειας συναρτήσεως, θεωρούμε μια συνάρτηση όπως αυτή του Σχήματος 1.45, της οποίας τα όρια εξετάσαμε στο Παράδειγμα 8, Ενότητα 1.2.

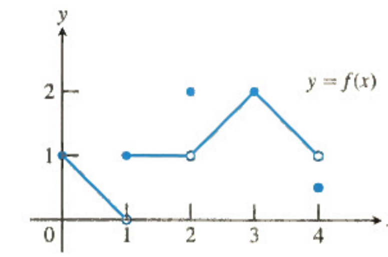
### Παράδειγμα 1 Μελέτη συνέχειας

Να βρεθούν τα σημεία συνέχειας και ασυνέχειας της συναρτήσεως $f$ του Σχήματος 1.45.





ΣΧΗΜΑ 1.44 Μια από τις συνέπειες της κατανόησης της φύσεως του ατόμου ήταν και η εφεύρεση του λέιζερ.




ΣΧΗΜΑ 1.45 Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$, με εξαίρεση τα σημεία $x = 1$, $x = 2$, και $x = 4$. (Παράδειγμα 1)

Λύση Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής παντού στο πεδίο ορισμού της $[0, 4]$ εκτός από τα σημεία $x = 1$, $x = 2$, και $x = 4$. Στα σημεία αυτά η γραφική παράσταση «σπάει» και εμφανίζονται κενά. Προσέξτε τη σχέση μεταξύ του ορίου της $f$ και της τιμής της $f$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

**Σημεία συνέχειας της $f$:**

Στο $x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Στο $x = 3$, $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Για $0 < c < 4$, $c \neq 1, 2$, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

**Σημεία ασυνέχειας της $f$:**

Στο $x = 1$, το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Στο $x = 2$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, αλλά $1 \neq f(2)$.

Στο $x = 4$, $\lim_{x\to 4} f(x) = 1$, αλλά $1 \neq f(4)$.

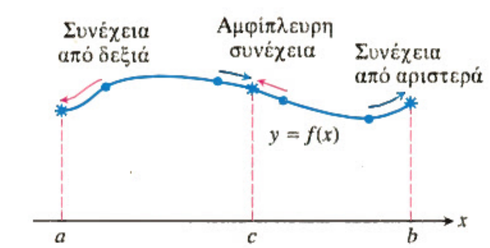
Για $c < 0$, $c > 4$, τα σημεία αυτά δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $f$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Johann van Waveren Hudde (1628-1704)

Προκειμένου να ορίσουμε τη συνέχεια συναρτήσεως σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, χρειάζεται να ορίσουμε τη συνέχεια σε εσωτερικό σημείο (οπότε εξετάζουμε κάποιο αμφίπλευρο όριο), καθώς και σε ακραίο σημείο (οπότε εξετάζουμε κάποιο πλευρικό όριο) (Σχήμα 1.46).




ΣΧΗΜΑ 1.46 Συνέχεια στα σημεία $a$, $b$, και $c$.

**Ορισμός** Σημειακή συνέχεια

*Εσωτερικό σημείο:* Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο $c$** του πεδίου ορισμού της αν

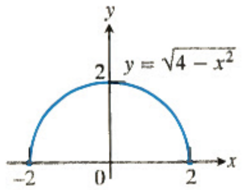
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

*Ακραίο σημείο:* Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **συνεχής στο αριστερό άκρο $a$** ή **συνεχής στο δεξιό άκρο $b$** του πεδίου ορισμού της αν

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b), \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Αν μια συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $c$, θα λέμε ότι η $f$ είναι **ασυνεχής** στο $c$ και ότι το $c$ είναι ένα **σημείο ασυνέχειας** της $f$. Σημειώστε ότι το $c$ δεν οφείλει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f$.

Μια συνάρτηση $f$ είναι **συνεχής από δεξιά** στο σημείο $x = c$ του πεδίου ορισμού της αν $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$. Θα είναι, δε, **συνεχής από αριστερά** στο σημείο $c$ αν $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$. Κατά συνέπεια, μια συνάρτηση θα είναι συνεχής στο αριστερό άκρο $a$ του πεδίου ορισμού της αν είναι συνεχής από δεξιά στο $a$· και θα είναι συνεχής στο δεξιό άκρο $b$ του πεδίου ορισμού της αν είναι συνεχής από αριστερά στο $b$. Μια συνάρτηση θα είναι συνεχής σε εσωτερικό σημείο $c$ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα συνεχής από δεξιά και συνεχής από αριστερά στο $c$ (Σχήμα 1.46).



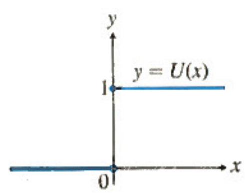

**ΣΧΗΜΑ 1.47** Η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

### Παράδειγμα 2 Μια συνάρτηση συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ παραμένει συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, $[-2, 2]$ (Σχήμα 1.47), συμπεριλαμβανομένου του $x = -2$, όπου είναι συνεχής από δεξιά, και του $x = 2$, όπου είναι συνεχής από αριστερά.

### Παράδειγμα 3 Μια συνάρτηση με ασυνέχεια άλματος

Η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας $U(x)$, που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.48, είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 0$, αλλά όχι και από αριστερά, συνεπώς δεν είναι συνεχής στο 0. Παρουσιάζει μια ασυνέχεια άλματος στο $x = 0$.




**ΣΧΗΜΑ 1.48** Η συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά στην αρχή.

Συνοψίζουμε την έννοια της σημειακής συνέχειας με τη μορφή ενός κριτηρίου.

**Κριτήριο συνέχειας**

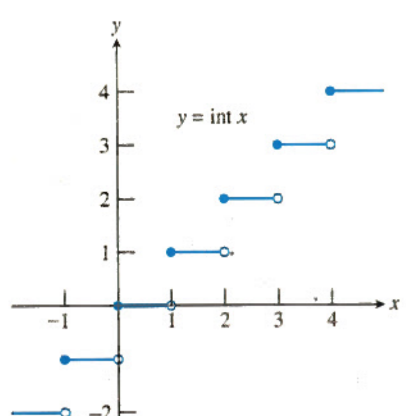
Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$ αν και μόνο αν πληροί τους ακόλουθους τρεις όρους:

| | |
|---|---|
| 1. υπάρχει το $f(c)$ | (το $c$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f$) |
| 2. υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x)$ | (η $f$ έχει όριο καθώς $x \to c$) |
| 3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ | (το όριο ισούται με την τιμή της συναρτήσεως) |

Όταν έχουμε να κάνουμε με πλευρική συνέχεια καθώς και με συνέχεια σε άκρο διαστήματος, τα όρια 2 και 3 του κριτηρίου θα πρέπει να αντικατασταθούν με τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.

### Παράδειγμα 4 Εύρεση σημείων συνέχειας και ασυνέχειας

Να βρεθούν τα σημεία συνέχειας και τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης ακέραιας τιμής $y = \operatorname{int} x$ (Σχήμα 1.49).




**ΣΧΗΜΑ 1.49** Η συνάρτηση $\operatorname{int} x$ είναι συνεχής για κάθε μη ακέραιο $x$. Επίσης είναι συνεχής από δεξιά, αλλά όχι και από αριστερά, για κάθε ακέραιο $x$. (Παράδειγμα 4)

*Λύση* Για να είναι η $y$ συνεχής στο $x = c$, πρέπει να υπάρχει το όριο καθώς $x \to c$ και να ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο εν λόγω σημείο $x = c$. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση $y$ είναι ασυνεχής σε κάθε ακέραια τιμή του $x$. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 3^-} \operatorname{int} x = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} \operatorname{int} x = 3,$$

κι έτσι το όριο καθώς $x \to 3$ δεν υπάρχει. Σημειώστε ότι $\operatorname{int} 3 = 3$,



άρα η συνάρτησή μας είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 3$. Γενικεύοντας, για τυχόντα ακέραιο $n$,

$$\lim_{x\to n^-} \operatorname{int} x = n - 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to n^+} \operatorname{int} x = n,$$

άρα το όριο καθώς $x \to n$ δεν υπάρχει. Εφόσον $\operatorname{int} n = n$, η συνάρτηση ακέραιας τιμής είναι συνεχής από δεξιά (αλλά όχι και από αριστερά) σε κάθε ακέραιο $n$.

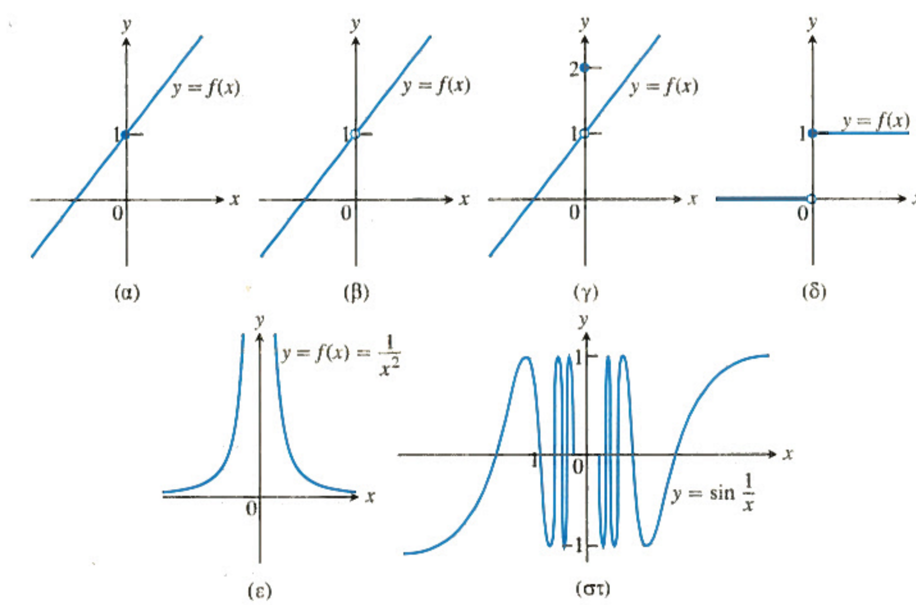
Η συνάρτηση ακέραιας τιμής είναι συνεχής σε κάθε μη ακέραιο πραγματικό αριθμό. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 1,5} \operatorname{int} x = 1 = 1{,}5.$$

Γενικεύοντας, αν $n - 1 < c < n$, όπου $n$ ακέραιος, τότε

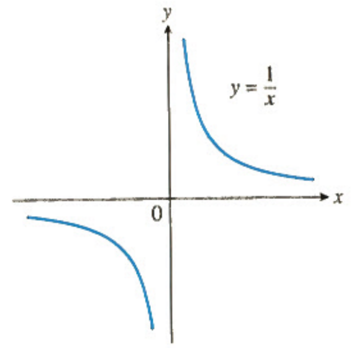
$$\lim_{x\to c} \operatorname{int} x = n - 1 = \operatorname{int} c.$$

Στο Σχήμα 1.50 έχουμε «καταλογοποιήσει» τους διαφορετικούς τύπους ασυνέχειας. Η συνάρτηση του Σχήματος 1.50α είναι συνεχής στο $x = 0$. Η συνάρτηση του Σχήματος 1.50β θα ήταν συνεχής αν ίσχυε ότι $f(0) = 1$. Η συνάρτηση του Σχήματος 1.50γ θα ήταν συνεχής αν το $f(0)$ ισούτο με 1 αντί για 2. Οι ασυνέχειες των Σχημάτων 1.50β και γ είναι **αιρόμενες (θεραπεύσιμες):** Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση έχει όριο καθώς $x \to 0$, άρα μπορούμε να άρουμε την ασυνέχεια θέτοντας το $f(0)$ ίσο με το όριο αυτό.




CD-ROM Δικτυότοπος **ΣΧΗΜΑ 1.50** Η συνάρτηση (α) είναι συνεχής στο $x = 0$, κάτι που δεν ισχύει για τις συναρτήσεις (β) έως (στ).

Οι ασυνέχειες των Σχημάτων 1.50δ έως στ είναι σοβαρότερες: το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, και δεν μπορούμε να βελτιώσουμε την κατάσταση αλλάζοντας την τιμή της $f$ στο 0. Η συνάρτηση βαθμίδας στο Σχήμα 1.50δ παρουσιάζει **ασυνέχεια άλματος:** Τα πλευρικά όρια υπάρχουν, αλλά διαφέρουν μεταξύ τους. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x^2$ στο Σχήμα 1.50ε παρουσιάζει **άπειρη ασυνέχεια.** Η συνάρτηση στο Σχήμα 1.50στ παρουσιάζει **ταλαντευόμενη ασυνέχεια:** Ταλαντώνεται τόσο έντονα ώστε δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$.




**Σχημα 1.51** Η συνάρτηση $y = 1/x$ είναι συνεχής για κάθε $x$ εκτός για $x = 0$, όπου παρουσιάζει σημειακή ασυνέχεια. (Παράδειγμα 5)

## Συνεχείς συναρτήσεις

Μια συνάρτηση είναι **συνεχής σε διάστημα** αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος. Μια **συνεχής συνάρτηση** είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Μια συνεχής συνάρτηση δεν οφείλει να παραμένει συνεχής σε κάθε διάστημα. Για παράδειγμα, η $y = 1/x$ δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ (Σχήμα 1.51).

**Παράδειγμα 5** Ταυτοποίηση συνεχούς συναρτήσεως

Η συνάρτηση $y = 1/x$ (Σχήμα 1.51) είναι συνεχής συνάρτηση διότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Παρουσιάζει όμως, ένα σημείο ασυνέχειας στο $x = 0$, διότι δεν ορίζεται εκεί.

Οι ακόλουθοι τύποι συναρτήσεων είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους:

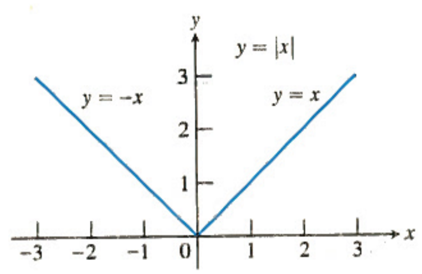
- πολυώνυμα
- ρητές συναρτήσεις
- συναρτήσεις με ρίζες ($y = \sqrt[n]{x}$, $n$ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1)
- τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- εκθετικές συναρτήσεις
- λογαριθμικές συναρτήσεις.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f$ είναι συνεχείς σε κάθε αριθμό $c$ αφού $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους· ασυνέχεια παρουσιάζουν στα σημεία μηδενισμού των παρονομαστών τους. Όσο για τις συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου, είναι συνεχείς, όπως φαίνεται και από τις γραφικές τους παραστάσεις.

Η αντίστροφη συνάρτηση κάθε συνεχούς συναρτήσεως είναι συνεχής. Ξέρουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f$ και $f^{-1}$ αποτελούν κατοπτρικά είδωλα (ως προς την ευθεία $y = x$) η μία της άλλης· έτσι, αν η γραφική παράσταση της $f$ δεν «σπάει» πουθενά, ούτε και της $f^{-1}$ θα «σπάει», και άρα η $f^{-1}$ είναι συνεχής.

Η εκθετική συνάρτηση $y = a^x$ ορίστηκε έτσι ώστε να είναι συνεχής, και συνεπώς η αντίστροφή της $y = \log_a x$ θα είναι επίσης συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής για κάθε $x$ (Σχήμα 1.52). Αν $x > 0$, τότε $f(x) = x$, που είναι πολυώνυμο (και άρα συνεχής). Αν $x < 0$, τότε $f(x) = -x$, πάλι πολυώνυμο. Τέλος, στην αρχή των αξόνων θα είναι $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$.




**Σχημα 1.52** Παρά τον γωνιώδη χαρακτήρα της, η συνάρτηση παραμένει συνεχής στην αρχή.

## Αλγεβρικοί συνδυασμοί

Όπως θα έχετε ήδη υποψιαστεί, οι αλγεβρικοί συνδυασμοί συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς, όπου ορίζονται.

**Θεώρημα 8** **Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων**

Αν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι συνεχείς στο $x = c$, τότε και οι ακόλουθοι συνδυασμοί είναι συνεχείς στο $x = c$.

1. *Αθροίσματα:* $f + g$
2. *Διαφορές:* $f - g$
3. *Γινόμενα:* $f \cdot g$
4. *Σταθερά πολλαπλάσια:* $k \cdot f$, για τυχόντα αριθμό $k$
5. *Πηλίκα:* $f/g$, για $g(c) \neq 0$



Τα περισσότερα αποτελέσματα του Θεωρήματος 8 προκύπτουν εύκολα από τους κανόνες ορίων του Θεωρήματος 1.

## Σύνθετες συναρτήσεις

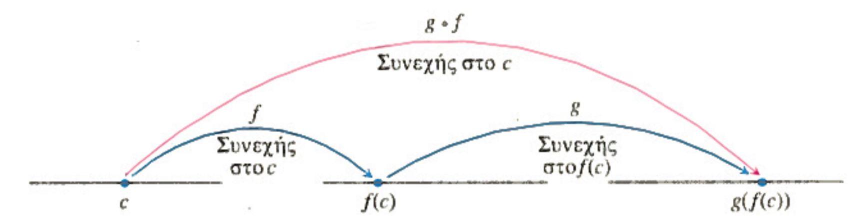
Κάθε σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, οι σύνθετες συναρτήσεις

$$y = \sin(x^2) \qquad \text{και} \qquad y = |\cos x|$$

είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Εδώ η βασική ιδέα είναι ότι αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$ και η $g(x)$ είναι συνεχής στο $x = f(c)$, τότε και η $g \circ f$ θα είναι συνεχής στο $x = c$ (Σχήμα 1.53). Στην περίπτωση αυτή το όριο της σύνθετης συνάρτησης, καθώς $x \to c$, ισούται με $g(f(c))$.

**Θεώρημα 9** **Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων**

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $c$ και η $g$ είναι συνεχής στο $f(c)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο $c$.




**Σχημα 1.53** Συναρτήσεις που προέκυψαν από σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς.

Από διαισθητικής απόψεως το Θεώρημα 9 είναι εύλογο, γιατί όταν το $x$ παίρνει τιμές κοντά στο $c$, η $f(x)$ θα κείται κοντά στην τιμή $f(c)$· και εφόσον η $g$ είναι συνεχής στο $f(c)$, η $g(f(x))$ θα κείται κοντά στην τιμή $g(f(c))$.

**Παράδειγμα 6** Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 9

Δείξτε ότι η

$$y = \left|\frac{x \sin x}{x^2 + 2}\right|$$

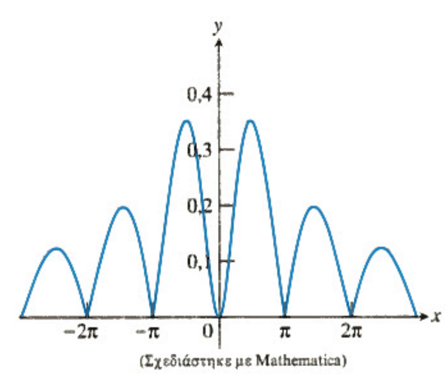
είναι συνεχής.

Λύση Η γραφική παράσταση (Σχήμα 1.54) της $y = |(x \sin x)/(x^2 + 2)|$ δείχνει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε $x$. Αν θέσουμε

$$g(x) = |x| \qquad \text{και} \qquad f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 2},$$

βλέπουμε αμέσως ότι η $y$ είναι η σύνθεση $g \circ f$.

Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνάρτηση απόλυτης τιμής $g$ είναι συνεχής. Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής βάσει του Θεωρήματος 8. Η σύνθεση των δύο θα είναι συνεχής, βάσει του Θεωρήματος 9.



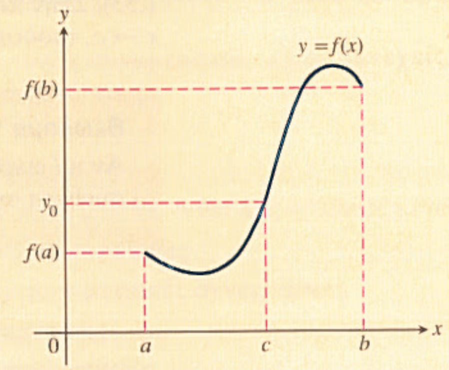

**Σχημα 1.54** Όπως δείχνει η γραφική παράσταση, η $y = |(x \sin x)/(x^2 + 2)|$ είναι συνεχής. (Παράδειγμα 6)

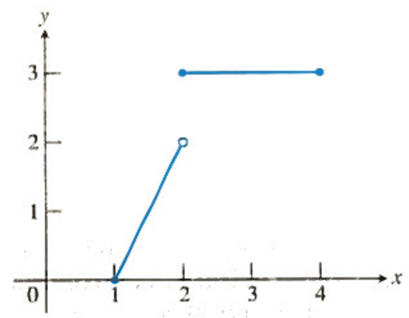
## Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις

Συναρτήσεις συνεχείς σε κάποιο διάστημα έχουν ιδιότητες που τις καθιστούν εξαιρετικά χρήσιμες στα μαθηματικά και στις εφαρμογές τους. Μία τέτοια ιδιότητα είναι η *ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής*. Λέμε ότι μία συνάρτηση $f$ έχει την **ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής,** αν μεταξύ δύο οποιονδήποτε τιμών της, η $f$ παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

**Θεώρημα 10** **Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις**

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$. Με άλλα λόγια, αν $y_0$ είναι τυχούσα ενδιάμεση τιμή μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, τότε $y_0 = f(c)$ για κάποιο $c$ στο $[a, b]$.




**ΣΧΗΜΑ 1.55** Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

δεν παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(1) = 0$ και $f(4) = 3$· παραλείπει τις τιμές μεταξύ του 2 και του 3.

Από γεωμετρική άποψη, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής λέει ότι κάθε οριζόντια ευθεία $y = y_0$ που τέμνει τον άξονα $y$ κάπου μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, θα τέμνει και την καμπύλη $y = f(x)$ σε τουλάχιστον ένα σημείο του διαστήματος $[a, b]$.

Για να ισχύει το Θεώρημα 10, η συνέχεια της $f$ στο εν λόγω διάστημα είναι ουσιώδης. Αν η $f$ παρουσιάζει ασυνέχεια έστω και σε ένα σημείο του διαστήματος, το συμπέρασμα του θεωρήματος μπορεί να μην αληθεύει, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.55.

**Συνέπεια για τη σχεδίαση: συνεκτικότητα** Το Θεώρημα 10 είναι ο λόγος για τον οποίο η γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως συνεχούς στο διάστημα $I$ δεν μπορεί να «σπάει» στο διάστημα αυτό. Η καμπύλη θα είναι συνεκτική, δηλαδή ενιαία και αδιάλειπτη, όπως αυτή του $\sin x$. Δεν θα παρουσιάζει άλματα, όπως η καμπύλη της συνάρτησης ακέραιας τιμής $\text{int}\, x$, ούτε χωριστούς κλάδους, όπως αυτή της $1/x$.

**Συνέπεια για την εύρεση ριζών** Κάθε λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ καλείται **ρίζα** της εξίσωσης, ή **σημείο μηδενισμού** της συναρτήσεως $f$. Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μάς λέει ότι αν η $f$ είναι συνεχής, τότε κάθε διάστημα όπου η $f$ αλλάζει πρόσημο θα περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο μηδενισμού της συναρτήσεως.

Από πρακτική άποψη, όταν βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης να διασχίζει τον οριζόντιο άξονα της οθόνης του υπολογιστή μας, τότε ξέρουμε ότι δεν μπορεί παρά να τον τέμνει σε σημείο στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται. Η διαπίστωση αυτή μάς προϊδεάζει για μια μέθοδο προσεγγιστικού υπολογισμού των σημείων μηδενισμού κάθε συνεχούς συναρτήσεως που μπορεί να παρασταθεί γραφικά:

Μια διαδικασία γραφικής εύρεσης ριζών.

1. Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση σε αρκετά μεγάλο διάστημα, ώστε να δούμε περίπου πού αυτή μηδενίζεται.
2. Εστιάζουμε (μεγεθύνουμε τη γραφική παράσταση) σε κάθε σημείο μηδενισμού, για να εκτιμήσουμε το $x$.

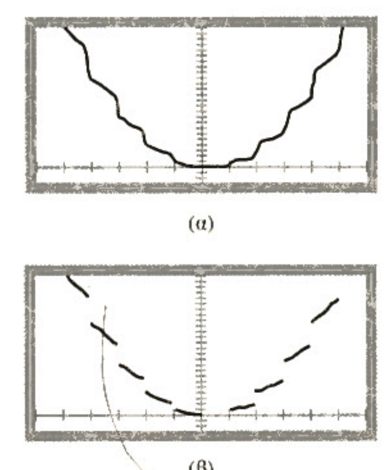


Μπορείτε να εφαρμόσετε τη μέθοδο αυτή στον υπολογιστή σας για μερικές από τις ασκήσεις του κεφαλαίου.

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

*Απατηλές εικόνες* Ο υπολογιστής σχεδιάζει μία γραφική παράσταση με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που ακολουθείτε όταν σχεδιάζετε με το χέρι: τοποθετώντας σημεία (εικονοψηφίδες, “pixels”) στο χαρτί και κατόπιν συνδέοντάς τα. Η εικόνα που προκύπτει μπορεί να αποπροσανατολίζει στην περίπτωση εσφαλμένης σύνδεσης σημείων εκατέρωθεν ενός σημείου ασυνέχειας. Προκειμένου να αποφευχθούν τέτοιες ατυχείς συνδέσεις, χρησιμοποιήστε την επιλογή διάκριτης σχεδίασης (“dot mode”) του υπολογιστή σας, οπότε τοποθετούνται στο διάγραμμα μόνο τα αληθή σημεία της γραφικής παράστασης. Το μειονέκτημα μιας τέτοιας σχεδίασης είναι ότι αυτή ενδέχεται να μην αποκαλύψει ικανή ποσότητα πληροφορίας ώστε να αποδώσει εύγλωττα τη φύση της γραφικής παράστασης. Σχεδιάστε τις ακόλουθες τέσσερις συναρτήσεις στον υπολογιστή σας. Αν είναι δυνατόν, δοκιμάστε και τις δύο επιλογές, διάκριτης (“dot mode”) και «συνεχούς» (“connected mode”) σχεδίασης.

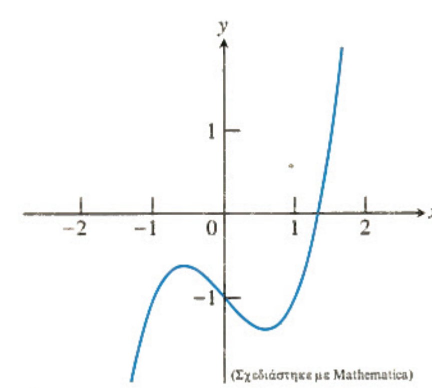
| | | |
|---|---|---|
| $y_1 = x \,\text{int}\, x$ | στο $x = 2$ | ασυνέχεια άλματος |
| $y_2 = \sin 1/x$ | στο $x = 0$ | ταλαντευόμενη ασυνέχεια |
| $y_3 = 1/(x-2)$ | στο $x = 2$ | άπειρη ασυνέχεια |
| $y_4 = (x^2-2)/(x-\sqrt{2})$ | στο $x = \sqrt{2}$ | αιρόμενη ασυνέχεια |



(α)

(β)

(α) Εσφαλμένη σχεδίαση της $y_1 = x \times \text{int}\, x$, με σύνδεση των τμημάτων της γραφικής παράστασης (συνεχές γράφημα).
(β) Ορθή σχεδίαση της $y_1 = x \times \text{int}\, x$, χωρίς σύνδεση (διάκριτο γράφημα).




**ΣΧΗΜΑ 1.56** Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x - 1$. (Παράδειγμα 7)

**Παράδειγμα 7** Κάνοντας χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής

Υπάρχει πραγματικός αριθμός μικρότερος κατά μία μονάδα από τον κύβο του;

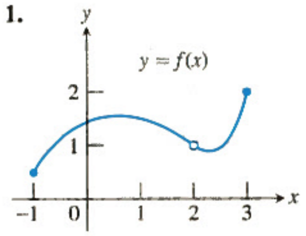
*Λύση* Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής ως ακολούθως. Ο ζητούμενος αριθμός θα ικανοποιεί την εξίσωση $x = x^3 - 1$ ή, ισοδύναμα, τη $x^3 - x - 1 = 0$. Οδηγούμαστε λοιπόν στην αναζήτηση των σημείων μηδενισμού της συνεχούς συναρτήσεως $f(x) = x^3 - x - 1$ (Σχήμα 1.56). Μεταξύ των σημείων $x = 1$ και $x = 2$, η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο, συνεπώς θα υπάρχει σημείο $c$ μεταξύ των 1 και 2 όπου $f(c) = 0$.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.4

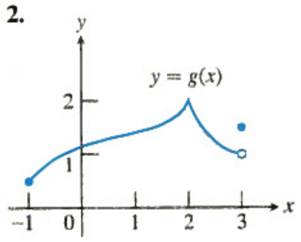
## Συνέχεια και γραφικές παραστάσεις

Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις (Ασκήσεις 1-4) συνεχείς στο διάστημα $[-1, 3]$; Αν όχι, σε ποια σημεία και γιατί;

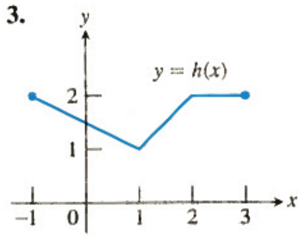
**1.**



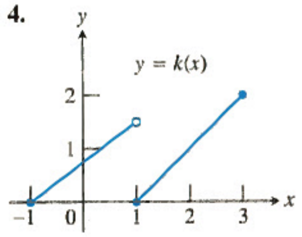

**2.**




**3.**




**4.**




Οι Ασκήσεις 5-10 αναφέρονται στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

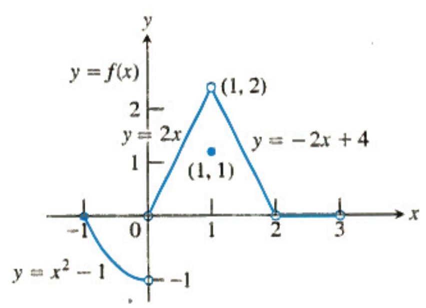
που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.57.

**5.** **(α)** Υπάρχει η τιμή $f(-1)$;

**(β)** Υπάρχει το $\lim_{x\to -1^+} f(x)$;

**(γ)** Αληθεύει ότι $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$;

**(δ)** Είναι η $f$ συνεχής στο $x = -1$;




**Σχημα 1.57** Η γραφική παράσταση στην οποία αναφέρονται οι Ασκήσεις 5-10.

**6.** **(α)** Υπάρχει η τιμή $f(1)$;

**(β)** Υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$;

**(γ)** Αληθεύει ότι ~~Υπάρχει το~~ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$;

**(δ)** Είναι η $f$ συνεχής στο $x = 1$;

**7.** **(α)** Ορίζεται η $f$ στο $x = 2$; (Συμβουλευτείτε τον ορισμό της $f$.)

**(β)** Είναι η $f$ συνεχής στο $x = 2$;

**8.** Για ποιες τιμές του $x$ είναι συνεχής η $f$;

**9.** Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στην $f(2)$ ώστε να διατηρηθεί η συνέχεια στο $x = 2$;

**10.** Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στην $f(1)$ ώστε να αρθεί η ασυνέχεια;

## Εφαρμογή του κριτηρίου συνέχειας

Σε ποια σημεία παύουν να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 11 και 12; Σε ποια από αυτά η ασυνέχεια είναι αιρόμενη, και σε ποια μη αιρόμενη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**11.** Άσκηση 11, Παράγραφος 1.1

**12.** Άσκηση 12, Παράγραφος 1.1

Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 13-20;

**13.** $y = \dfrac{1}{x-2} - 3x$

**14.** $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

**15.** $z = \dfrac{t+1}{t^2 - 4t + 3}$

**16.** $u = \dfrac{1}{|t|+1} - \dfrac{t^2}{2}$

**17.** $r = \dfrac{\cos\theta}{\theta}$

**18.** $y = \tan\dfrac{\pi\theta}{2}$

**19.** $s = \sqrt{2v+3}$

**20.** $y = \sqrt[4]{3x-1}$

## Σύνθετες συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 21-24, να βρεθούν τα όρια. Είναι συνεχείς οι συναρτήσεις στο σημείο υπολογισμού κάθε ορίου;

**21.** $\lim_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$

**22.** $\lim_{t\to 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$

**23.** $\lim_{y\to 1} \sec(y\sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

**24.** $\lim_{\theta\to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\sin\theta^{1/3})\right)$

## Θεωρία και παραδείγματα

**25.** *Μάθετε γράφοντας* Μια συνάρτηση $y = f(x)$, συνεχής στο $[0, 1]$, είναι αρνητική στο $x = 0$ και θετική στο $x = 1$. Τι σας λέει αυτό για την εξίσωση $f(x) = 0$; Κάντε ένα σχήμα για να δείξετε τι συμβαίνει.

**26.** *Μάθετε γράφοντας* Γιατί η εξίσωση $\cos x = x$ διαθέτει τουλάχιστον μία λύση;

**27.** *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε γιατί τα ακόλουθα πέντε ερωτήματα απαιτούν τις ίδιες ακριβώς πληροφορίες για την απάντησή τους.

**(α)** Να βρεθούν τα σημεία μηδενισμού της $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

**(β)** Να βρεθεί η συντεταγμένη $x$ των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3$ με την ευθεία $y = 3x + 1$.

**(γ)** Να βρεθούν όλες οι τιμές του $x$ για τις οποίες $x^3 - 3x = 1$.

**(δ)** Να βρεθούν οι συντεταγμένες $x$ των σημείων όπου η καμπύλη $y = x^3 - 3x$ τέμνει την ευθεία $y = 1$.

**(ε)** Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 3x - 1 = 0$.



**28.** *Επίλυση εξισώσεως* Αν $f(x) = x^3 - 8x + 10$, δείξτε ότι θα υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του $c$ για την οποία η $f(c)$ θα ισούται με

**(α)** $\pi$

**(β)** $-\sqrt{3}$

**(γ)** 5.000.000.

**29.** *Αιρόμενη ασυνέχεια* Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεως $f(x)$ συνεχούς για κάθε $x$ εκτός από $x = 2$, όπου η συνάρτηση παρουσιάζει αιρόμενη ασυνέχεια. Εξηγήστε γιατί η $f$ είναι ασυνεχής στο $x = 2$ και γιατί η εν λόγω ασυνέχεια είναι αιρόμενη.

**30.** *Μη αιρόμενη ασυνέχεια* Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεως $g(x)$ συνεχούς για κάθε $x$ εκτός από $x = -1$, όπου παρουσιάζει μη αιρόμενη ασυνέχεια. Εξηγήστε γιατί η $g$ είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό και γιατί η εν λόγω ασυνέχεια είναι μη αιρόμενη.

**31.** *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου* Από την ακόλουθη παραγοντοποίηση, βρείτε τις σταθερές $r_1$ έως $r_5$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων:

$$x^5 - x^4 - 5x^3 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5).$$

T **32.** *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου* Έστω ότι επιθυμείτε να φέρετε το πολυώνυμο $x^3 - 3x - 1$ στη μορφή $(x - r)q(x)$, όπου $q(x)$ είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο. Ποια η τιμή της σταθεράς $r$, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων;

**33.** *Μια συνάρτηση ασυνεχής παντού*

**(α)** Με βάση το γεγονός ότι κάθε μη κενό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο.

**(β)** Υπάρχει κανένα σημείο όπου η $f$ είναι συνεχής από δεξιά ή από αριστερά;

**34.** *Μάθετε γράφοντας* Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς για $0 \le x \le 1$, θα μπορούσε το πηλίκο $f(x)/g(x)$ να παρουσιάζει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[0, 1]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**35.** *Μάθετε γράφοντας* Αληθεύει ότι μια συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται ποτέ σε κάποιο διάστημα, δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα αυτό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**36.** *Τεντώνοντας ένα λαστιχάκι* Αν τεντώσετε ένα λαστιχάκι τραβώντας το ένα του άκρο προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά, θα υπάρχει κάποιο σημείο πάνω στο λαστιχάκι που θα καταλήξει στην αρχική του θέση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**37.** *Θεώρημα σταθερού σημείου* Έστω ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ότι $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x$ στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι οφείλει να υπάρχει αριθμός $c$ στο $[0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(c) = c$ (το $c$ καλείται **σταθερό σημείο** της $f$).

**38.** *Η ιδιότητα συνεχών συναρτήσεων να διατηρούν το πρόσημό τους* Έστω ότι η $f$ ορίζεται σε διάστημα $(a, b)$ και ότι $f(c) \neq 0$ για κάποιο σημείο $c$ στο οποίο η $f$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει μια περιοχή $(c - \delta, c + \delta)$ γύρω από το $c$ όπου η $f$ έχει το ίδιο πρόσημο με την $f(c)$. Το συμπέρασμα αυτό είναι άξιο προσοχής. Η $f$, αν και ορίζεται στο $(a, b)$, δεν απαιτείται να είναι συνεχής πουθενά εκτός από το $c$. Η συνέχεια στο σημείο $c$ και η συνθήκη $f(c) \neq 0$ αρκούν για να εξασφαλίσουν μη μηδενικές (θετικές ή αρνητικές) τιμές της $f$ σε όλη την έκταση μιας (μικρής) περιοχής.

T **39.** *Μισθολογική διαπραγμάτευση* Η Λουίζα εργάζεται ως οξυγονοκολλητής, με σύμβαση εργασίας που της αποδίδει μισθολογική αύξηση 3,5% κατ' έτος, για 4 χρόνια. Ο αρχικός μισθός της είναι 36.500 €.

**(α)** Δείξτε ότι ο μισθός της Λουίζας δίδεται από τη σχέση

$$y = 36.500(1{,}035)^{\text{int}\, t},$$

όπου $t$ ο χρόνος (σε έτη) αφότου η Λουίζα υπέγραψε τη σύμβαση.

**(β)** Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση του μισθού της Λουίζας. Για ποιες τιμές του $t$ είναι συνεχής η καμπύλη;

T **40.** *Στάθμευση σε αεροδρόμιο* Μια εταιρεία χρεώνει 1,10 € ανά ώρα στάθμευσης (ελάχιστη χρέωση) στον χώρο του αεροδρομίου. Η μέγιστη ημερήσια χρέωση είναι 7,25 €.

**(α)** Γράψτε έναν τύπο που να δίδει τη χρέωση για $x$ ώρες σταθμεύσεως, όπου $0 \le x \le 24$. (*Υπόδειξη:* Δείτε την Άσκηση 39.)

**(β)** Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση του ερωτήματος (α). Για ποιες τιμές του $x$ είναι αυτή συνεχής;

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

### Συνεχής επέκταση σε σημείο

Όπως είδαμε στην Ενότητα 1.2, μια ρητή συνάρτηση μπορεί να έχει όριο ακόμα και σε σημείο όπου ο παρονομαστής της μηδενίζεται. Αν η $f(c)$ δεν ορίζεται αλλά υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x) = L$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $F(x)$ ως εξής:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν το } x \text{ ανήκει στο πεδίο ορισμού της } f \\ L & \text{αν } x = c. \end{cases}$$

Η $F$ είναι συνεχής στο $x = c$. Ονομάζεται **συνεχής επέκταση** της $f$ στο $x = c$. Για ρητές συναρτήσεις $f$, η εύρεση συνεχών επεκτάσεων γίνεται συνήθως με απαλοιφή κοινών παραγόντων.

Στις Ασκήσεις 41-44, παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση $f$. Από το γράφημα που βλέπετε, δείχνει να διαθέτει συνεχή επέκταση στην αρχή η $f$; Αν ναι, χρησιμοποιήστε τις εντολές "Trace" και "Zoom" για να βρείτε μια εύλογη τιμή συνεχούς επέκτασης της συνάρτησης στο $x = 0$. Αν πάλι η $f$ δεν μοιάζει να διαθέτει συνεχή επέκταση, μπορεί να επεκταθεί ώστε να παρουσιάζει τουλάχιστον συνέχεια από δεξιά ή από αριστερά στην αρχή; Αν ναι, ποιες νομίζετε ότι πρέπει να είναι οι τιμές της συνάρτησης επέκτασης;

**41.** $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

**42.** $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

**43.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ **44.** $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

## Γραφική επίλυση εξισώσεων

Κάνοντας χρήση του υπολογιστή σας, επιλύστε γραφικά τις εξισώσεις των Ασκήσεων 45-52. Στρογγυλοποιήστε κάθε λύση σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

**45.** $x^3 - 3x - 1 = 0$ **46.** $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

**47.** $x(x-1)^2 = 1$ (μία ρίζα) **48.** $x^x = 2$

**49.** $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$

**50.** $x^3 - 15x + 1 = 0$ (τρεις ρίζες)

**51.** $\cos x = x$ (μία ρίζα). Βεβαιωθείτε ότι επιλέξατε μέτρηση γωνιών σε ακτίνια ("radian mode").

**52.** $2 \sin x = x$ (τρεις ρίζες). Βεβαιωθείτε ότι επιλέξατε μέτρηση γωνιών σε ακτίνια ("radian mode").

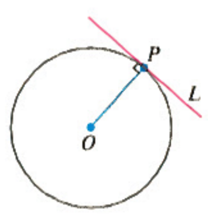
# 1.5 Εφαπτόμενες ευθείες

Τι *είναι* η εφαπτομένη καμπύλης; • Εύρεση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης • Ρυθμοί μεταβολής: Παράγωγος σε σημείο

Θα συνεχίσουμε εδώ τη μελέτη των τεμνουσών και των εφαπτόμενων ευθειών που αρχίσαμε στην Ενότητα 1.1. Υπολογίζουμε όρια κλίσεων τεμνουσών προκειμένου να βρούμε εφαπτομένες καμπυλών.

## Τι είναι η εφαπτομένη καμπύλης;

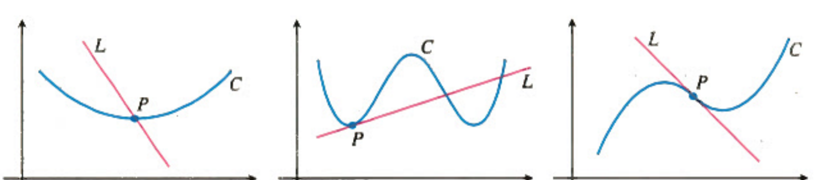
Προκειμένου για κύκλους, η έννοια της εφαπτομένης είναι απλή. Μια ευθεία $L$ εφάπτεται ενός κύκλου στο σημείο $P$ αν η $L$ διέρχεται από το $P$ κάθετα στην εκεί ακτίνα (Σχήμα 1.58). Μια τέτοια ευθεία μόλις που *αγγίζει* τον κύκλο. Αλλά τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ευθεία $L$ εφάπτεται μιας άλλου τύπου καμπύλης $C$ σε σημείο $P$; Γενικεύοντας την περίπτωση του κύκλου, θα μπορούσαμε να εικάσουμε ότι η έννοια της εφαπτομένης συνεπάγεται μια από τις ακόλουθες προτάσεις:




**Σχήμα 1.58** Η ευθεία $L$ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο $P$ αν διέρχεται από το $P$ κάθετα στην ακτίνα $OP$.

1. Η $L$ διέρχεται από το $P$ κάθετα στην ευθεία που ενώνει το $P$ με το κέντρο της $C$.
2. Η $L$ διέρχεται από ένα μόνο σημείο της $C$, το $P$.
3. Η $L$ διέρχεται από το $P$ και κείται πάντα από τη μία πλευρά της καμπύλης $C$.

Παρότι οι παραπάνω προτάσεις αληθεύουν αν η $C$ είναι κύκλος, καμία τους δεν παραμένει σε πλήρη ισχύ σε γενικότερου τύπου καμπύλες. Οι περισσότερες καμπύλες δεν διαθέτουν κέντρο, ενώ μια καμπύλη που θα ονομάζαμε εφαπτομένη ενδέχεται να τέμνει τη $C$ σε άλλα σημεία της, ή ακόμη και να τη «διασχίζει» στο σημείο επαφής (Σχήμα 1.59).

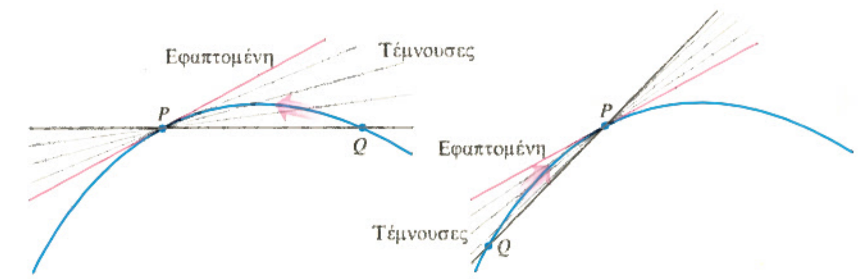



Η $L$ έχει μόνο το σημείο $P$ κοινό με την $C$, αλλά δεν εφάπτεται της $C$. | Η $L$ εφάπτεται της $C$ στο $P$ αλλά έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με την $C$. | Η $L$ εφάπτεται της $C$ στο $P$ αλλά κείται εκατέρωθεν της $C$ αφού διασχίζει την $C$ στο $P$.

**Σχήμα 1.59** Διευκρινίσεις περί της έννοιας της εφαπτομένης.

Για να ορίσουμε την εφαπτομένη μιας γενικής καμπύλης, χρειαζόμαστε μια *δυναμική* ερμηνεία που να λαμβάνει υπ' όψιν της τη συμπεριφορά των τεμνουσών που διέρχονται από το $P$ και από γειτονικά






**Σχήμα 1.60** Δυναμική ερμηνεία της έννοιας της εφαπτομένης. Εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $P$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το $P$ με κλίση ίση με το όριο των κλίσεων των τεμνουσών ευθειών καθώς $Q \to P$ (από όποια πλευρά του $P$ κι αν κινείται το $Q$).

**CD-ROM**
**Δικτυότοπος**
Βιογραφικά στοιχεία
Pierre de Fermat (1601-1665)

σημεία $Q$, καθώς το $Q$ προσεγγίζει το $P$, κινούμενο επί της καμπύλης (Σχήμα 1.60). Η δυναμική ερμηνεία έχει ως εξής:

1. Ξεκινούμε με ό,τι *μπορούμε* να υπολογίσουμε, δηλαδή με την κλίση της τέμνουσας $PQ$.
2. Εξετάζουμε το όριο της κλίσης της τέμνουσας, καθώς το $Q$ προσεγγίζει το $P$ κινούμενο επί της καμπύλης.
3. Αν το όριο αυτό υπάρχει, το θεωρούμε ως την κλίση της καμπύλης στο P και ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης στο P την ευθεία που διέρχεται από το P με την κλίση αυτή.

Όταν, στην Ενότητα 1.1, εξετάζαμε με τα παραδείγματα του βράχου που έπεφτε και της θερμικής θωράκισης, ουσιαστικά εκτελούσαμε την παραπάνω διαδικασία.

**Πώς βρίσκουμε την εφαπτομένη καμπύλης;**

Το ζήτημα της εφαπτομένης ήταν το κυριότερο μαθηματικό πρόβλημα των αρχών του 17ου αιώνα, και η επίλυσή του αποτελούσε διακαή πόθο των μεγαλύτερων μαθηματικών της εποχής. Στην οπτική, η εφαπτομένη καθορίζει τη γωνία υπό την οποία μια φωτεινή ακτίνα εισέρχεται σε καμπύλο φακό. Στη μηχανική, η εφαπτομένη καθορίζει την κατεύθυνση της κίνησης σωματιδίου σε κάθε σημείο της τροχιάς του. Στη γεωμετρία, οι εφαπτομένες δύο καμπυλών στο σημείο τομής τους καθορίζουν τη γωνία που σχηματίζουν τέμνομενες οι καμπύλες. Ο René Descartes μάλιστα είχε δηλώσει ότι το πρόβλημα εύρεσης της εφαπτομένης σε μια καμπύλη ήταν «το χρησιμότερο και γενικότερο πρόβλημα που γνωρίζω και που θα ήθελα όσο τίποτε άλλο να λύσω.»

### Παράδειγμα 1 Εφαπτόμενη ευθεία σε παραβολή

Να βρεθεί η κλίση της παραβολής $y = x^2$ στο σημείο $P(2, 4)$. Να γραφεί μια εξίσωση για την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

*Λύση* Θεωρούμε την τέμνουσα που διέρχεται από το $P(2, 4)$ και από το γειτονικό σημείο $Q(2+h, (2+h)^2)$. Γράφουμε μια έκφραση για την κλίση της τέμνουσας $PQ$ και εξετάζουμε την κλίση καθώς το $Q$ προσεγγίζει το $P$ κινούμενο επί της καμπύλης:

$$\text{Κλίση τέμνουσας} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Αν $h > 0$, τότε το $Q$ κείται άνω δεξιά του $P$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.61. Αν $h < 0$, τότε το $Q$ κείται αριστερά του $P$ (δεν φαίνεται). Σε κάθε περίπτωση, καθώς το $Q$ προσεγγίζει το $P$ κινούμενο επί της καμπύλης, το $h$ τείνει στο 0 και η κλίση της τέμνουσας τείνει στο 4:

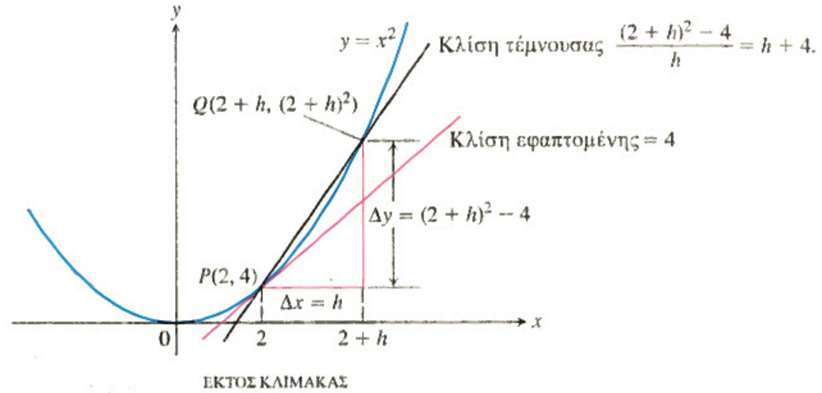
$$\lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

Θεωρούμε ότι η κλίση της παραβολής στο σημείο $P$ ισούται με 4.

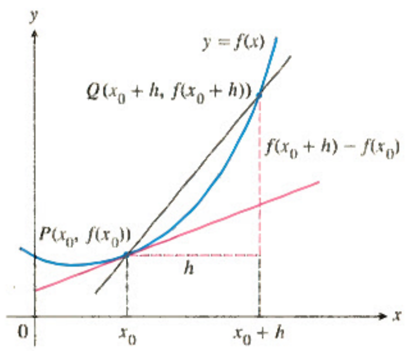
Η εφαπτομένη της παραβολής στο $P$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το $P$ με κλίση 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \quad \text{Εξίσωση σημείου-κλίσεως}$$

$$y = 4x - 4.$$




**Σχημα 1.61** Διάγραμμα για την εύρεση της κλίσης της παραβολής $y = x^2$ στο σημείο $P(2, 4)$. (Παράδειγμα 1)




**Σχημα 1.62** Η κλίση της εφαπτομένης ισούται με

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

## Εύρεση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Για να βρούμε μια εφαπτομένη τυχούσας καμπύλης $y = f(x)$ σε σημείο της $P(x_0, f(x_0))$, εφαρμόζουμε την ίδια δυναμική διαδικασία. Υπολογίζουμε την κλίση της τέμνουσας που διέρχεται από το $P$ και από το σημείο $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Κατόπιν εξετάζουμε το όριο της κλίσεως καθώς $h \to 0$ (Σχήμα 1.62). Αν το όριο υπάρχει, το ονομάζουμε κλίση της καμπύλης στο $P$ και ορίζουμε ως εκεί εφαπτομένη την ευθεία που διέρχεται από το $P$ με την κλίση αυτή.

**Ορισμός** **Κλίση και εφαπτόμενη ευθεία**

Η **κλίση της καμπύλης** $y = f(x)$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ ισούται με

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{(δεδομένου ότι υπάρχει το όριο).}$$

Η **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης στο $P$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το $P$ με κλίση ίση με $m$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Όταν διατυπώνουμε κάποιον καινούριο ορισμό, καλό είναι να τον δοκιμάζουμε πρώτα σε περιπτώσεις όπου γνωρίζουμε την απάντηση για να βεβαιωθούμε ότι αναπαράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα. Το Παράδειγμα 2 δείχνει ότι ο νέος ορισμός της κλίσεως συμφωνεί με τον παλιό ορισμό όταν τον εφαρμόσουμε σε μη κατακόρυφες ευθείες.

### Παράδειγμα 2 Έλεγχος του ορισμού

Δείξτε ότι η ευθεία $y = mx + b$ είναι εφαπτομένη του εαυτού της σε τυχόν της σημείο $(x_0, mx_0 + b)$.

Λύση Έστω $f(x) = mx + b$. Εκτελούμε τα εξής τρία βήματα.

Βήμα 1: *Βρίσκουμε τα $f(x_0)$ και $f(x_0 + h)$.*

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

Βήμα 2: *Βρίσκουμε την κλίση* $\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(mx_0+mh+b)-(mx_0+b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m$$



Βήμα 3: *Εφαρμόζουμε την εξίσωση σημείου-κλίσεως για να βρούμε την εφαπτομένη.* Η εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, mx_0 + b)$ είναι η

$$y = (mx_0 + b) + m(x - x_0)$$
$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$
$$y = mx + b.$$

**Πώς βρίσκουμε την εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο $(x_0, y_0)$**

1. Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_0)$ και $f(x_0 + h)$.
2. Υπολογίζουμε την κλίση $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
3. Αν το παραπάνω όριο υπάρχει, η εφαπτόμενη ευθεία θα δίδεται από την εξίσωση $y = y_0 + m(x - x_0)$.

### Παράδειγμα 3 Κλίση και εφαπτομένη της $y = 1/x$

**(α)** Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $y = 1/x$ στο $x = a$.

**(β)** Σε ποια σημεία παίρνει η κλίση αυτή την τιμή $-1/4$;

**(γ)** Πώς αλλάζει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(a, 1/a)$ καθώς το $a$ μεταβάλλεται;

Λύση

**(α)** Εδώ έχουμε $f(x) = 1/x$. Η κλίση στο σημείο $(a, 1/a)$ ισούται με

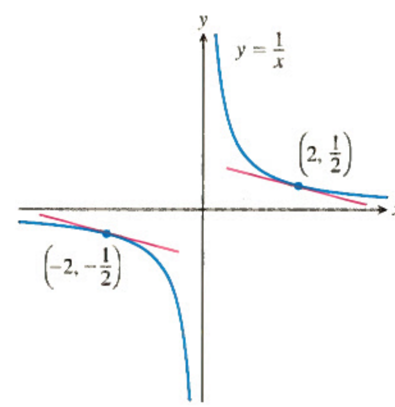
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{a-(a+h)}{a(a+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Προσέξτε ότι εξακολουθούμε να γράφουμε «$\lim_{h\to 0}$» πριν από κάθε κλάσμα, μέχρι να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το όριο αντικαθιστώντας $h = 0$.

**(β)** Η κλίση της $y = 1/x$ στο σημείο $x = a$ ισούται με $-1/a^2$. Θα ισούται με $-1/4$ εφόσον

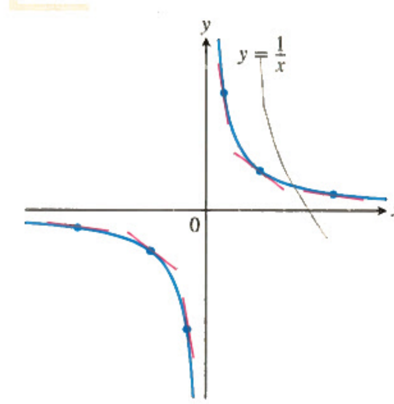
$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Η τελευταία εξίσωση ισοδυναμεί με την $a^2 = 4$, άρα $a = 2$ ή $a = -2$. Η καμπύλη έχει κλίση $-1/4$ στα δύο σημεία $(2, 1/2)$ και $(-2, -1/2)$ (Σχήμα 1.63).




**Σχημα 1.63** Οι δύο εφαπτόμενες της καμπύλης $y = 1/x$, που έχουν κλίση $-1/4$.

**(γ)** Προσέξτε ότι η κλίση $-1/a^2$ είναι πάντα αρνητική. Καθώς $a \to 0^+$, η κλίση τείνει στο $-\infty$ και η εφαπτομένη γίνεται όλο και πιο απότομη (Σχήμα 1.64). Το ίδιο συμβαίνει καθώς $a \to 0^-$. Καθώς το $a$ απομακρύνεται από την αρχή (προς οποιαδήποτε κατεύθυνση), η κλίση τείνει στο $0^-$ και η εφαπτομένη «οριζοντιώνεται».




**Σχημα 1.64** Οι εφαπτομενικές κλίσεις, που είναι απότομες κοντά στην αρχή, βαθμιαία εξομαλύνονται καθώς το σημείο επαφής απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
René François de Sluse
(1622-1685)

## Ρυθμοί μεταβολής: Παράγωγος σε σημείο

Η έκφραση

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

καλείται **πηλίκο διαφορών της $f$ στο $x_0$ με βήμα $h$.** Αν το πηλίκο διαφορών έχει όριο καθώς το $h$ τείνει στο μηδέν, το όριο αυτό καλείται **παράγωγος της $f$ στο $x_0$.** Αν ερμηνεύσουμε το πηλίκο διαφορών ως την κλίση μιας τέμνουσας ευθείας, η παράγωγος δίνει την κλίση της καμπύλης και της εφαπτομένης στο σημείο $x = x_0$. Αν ερμηνεύσουμε το πηλίκο διαφορών ως κάποιον μέσο ρυθμό μεταβολής, όπως κάναμε στην Ενότητα 1.1, τότε η παράγωγος δίνει τον ρυθμό μεταβολής (ως προς $x$) της συναρτήσεως στο σημείο $x = x_0$. Η παράγωγος είναι το ένα από τα δύο σπουδαιότερα μαθηματικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού (το άλλο είναι το ολοκλήρωμα). Με τις παραγώγους θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα στο Κεφάλαιο 2· με τα ολοκληρώματα στο Κεφάλαιο 4.

**Πέντε ταυτόσημες έννοιες**

1. Η κλίση της $y = f(x)$ στο σημείο $x = x_0$
2. Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = x_0$
3. Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς το $x$ στο σημείο $x = x_0$
4. Η παράγωγος της $f$ στο σημείο $x = x_0$
5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

### Παράδειγμα 4 Στιγμιαία ταχύτητα (συνέχεια των Παραδειγμάτων 1 και 2 της Ενότητας 1.1)

Στα Παραδείγματα 1 και 2 της Ενότητας 1.1, εξετάσαμε την ταχύτητα ελεύθερης πτώσεως ενός βράχου που αρχικά ηρεμούσε κοντά στην επιφάνεια της γης. Μας ήταν γνωστό ότι πέφτοντας ο βράχος διανύει $y = 4{,}9t^2$ m κατά τα πρώτα $t$ sec, οπότε χρησιμοποιήσαμε μια ακολουθία μέσων ρυθμών μεταβολής για ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα, για να εκτιμήσουμε την ταχύτητα του βράχου τη χρονική στιγμή $t = 2$. Πόση *ακριβώς* ήταν η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή εκείνη;

Λύση Θέτουμε $f(t) = 4{,}9t^2$. Κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ $t = 2$ και $t = 2 + h$ sec, η μέση ταχύτητα του βράχου ήταν

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{4{,}9(2+h)^2-4{,}9(2)^2}{h} = \frac{4{,}9(h^2+4h)}{h} = 4{,}9(h+4).$$

Έτσι η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή $t = 2$ ήταν

$$\lim_{h\to 0} 4{,}9(h+4) = 4{,}9(0+4) = 19{,}6 \text{ m/sec}.$$

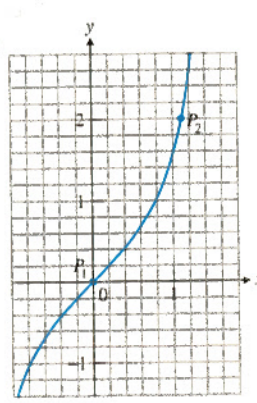
Η αρχική εκτίμησή μας των 19,6 m/sec ήταν λοιπόν ορθή.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.5

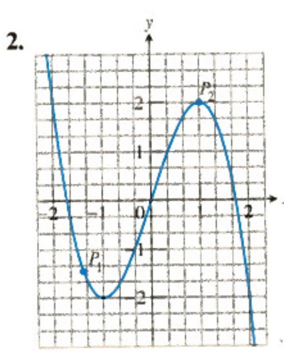
## Κλίσεις και τέμνουσες ευθείες

Στις Ασκήσεις 1-4, χρησιμοποιήστε τα διαγράμματα για να κάνετε μια χονδρική εκτίμηση της κλίσεως της καμπύλης (σε μονάδες $y$ ανά μονάδα $x$) στα σημεία $P_1$ και $P_2$. Οι γραφικές παραστάσεις μπορεί να έχουν κάπως μετατοπιστεί κατά την εκτύπωση του βιβλίου, κι έτσι οι απαντήσεις σας ενδέχεται να διαφέρουν κάπως από αυτές στο τέλος του βιβλίου.

**1.**

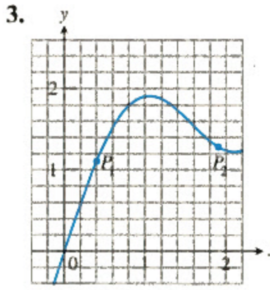



**2.**

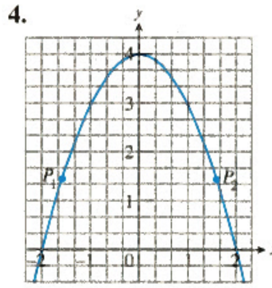





**3.**




**4.**




Στις Ασκήσεις 5-8, βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που δίδεται. Σχεδιάστε πρόχειρα στο ίδιο σχήμα την καμπύλη και την εφαπτομένη της.

**5.** $y = 4 - x^2$, $(-1, 3)$ **6.** $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$

**7.** $y = x^3$, $(-2, -8)$ **8.** $y = \dfrac{1}{x^3}$, $(-2, -1/8)$

Στις Ασκήσεις 9-12, βρείτε την κλίση της γραφικής παράστασης κάθε συνάρτησης στο σημείο που δίδεται. Κατόπιν, βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό.

**9.** $f(x) = x - 2x^2$, $(1, -1)$

**10.** $h(t) = t^3 + 3t$, $(1, 4)$

**11.** $g(u) = \dfrac{u}{u-2}$, $(3, 3)$

**12.** $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$

Στις Ασκήσεις 13 και 14, βρείτε την κλίση της καμπύλης για την τιμή του $x$ που δίδεται.

**13.** $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x = 3$ **14.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x = 0$

## Εφαπτόμενες ευθείες με καθορισμένες κλίσεις

Σε ποια σημεία γίνονται οριζόντιες οι εφαπτόμενες ευθείες των γραφημάτων των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 15 και 16;

**15.** $f(x) = x^2 + 4x - 1$ **16.** $g(x) = x^3 - 3x$

**17.** Βρείτε εξισώσεις για όλες τις εφαπτόμενες της καμπύλης $y = 1/(x-1)$ που έχουν κλίση ίση με $-1$.

**18.** Βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ με κλίση $1/4$.

## Ρυθμοί μεταβολής

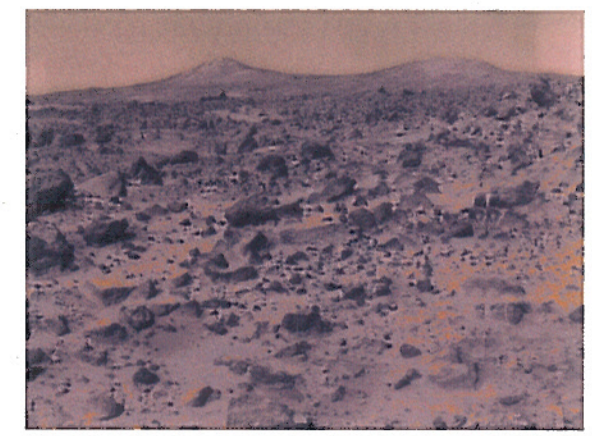
**19.** *Αντικείμενο που πέφτει από πύργο* Αντικείμενο αφήνεται να πέσει ελεύθερα από την κορυφή πύργου ύψους 100 m. Μετά από $t$ sec, το ύψος του ισούται με $100 - 4{,}9t^2$ m. Πόσο γρήγορα πέφτει κατά τη χρονική στιγμή 2 sec μετά την έναρξη της πτώσης του;

**20.** *Ταχύτητα πυραύλου* $t$ sec μετά την εκτόξευση πυραύλου, το ύψος του είναι $t^2$ m. Πόσο γρήγορα ανυψώνεται ο πύραυλος 10 sec μετά την εκτόξευση;

**21.** *Μεταβαλλόμενο εμβαδόν κύκλου* Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν κύκλου ($A = \pi r^2$) ως προς την ακτίνα $r$, όταν $r = 3$;

**22.** *Μεταβαλλόμενος όγκος σφαίρας* Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου σφαίρας ($V = (4/3)\pi r^3$) ως προς την ακτίνα $r$, όταν $r = 2$;

**23.** *Ελεύθερη πτώση στον Άρη* Η εξίσωση που περιγράφει ελεύθερη πτώση στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη είναι $s = 1{,}86t^2$ m, όπου $t$ ο χρόνος σε sec. Αν ένας βράχος αφήνεται να πέσει κατακόρυφα από την κορυφή απότομης βουνοπλαγιάς ύψους 200 m, να βρεθεί η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή $t = 1$ sec.



**24.** *Ελεύθερη πτώση στον Δία* Η εξίσωση που περιγράφει ελεύθερη πτώση στην επιφάνεια του πλανήτη Δία είναι $s = 11{,}44t^2$ m, όπου $t$ ο χρόνος σε sec. Αν ένας βράχος αφήνεται να πέσει κατακόρυφα από την κορυφή απότομης βουνοπλαγιάς ύψους 500 m, να βρεθεί η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή $t = 2$ sec.

## Αναζήτηση εφαπτόμενων ευθειών

**25.** *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έχει εφαπτομένη στην αρχή η γραφική της παράστασης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**26.** *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έχει εφαπτομένη στην αρχή η γραφική της παράστασης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

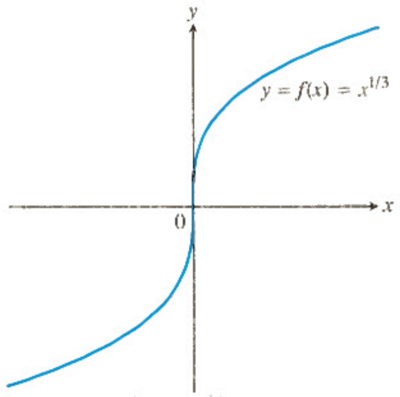
## Κατακόρυφες εφαπτόμενες

Λέμε ότι η καμπύλη $y = f(x)$ έχει **κατακόρυφη εφαπτομένη** στο σημείο $x = x_0$ αν $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))/h = \infty$ ή $-\infty$.

Η ακόλουθη καμπύλη έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

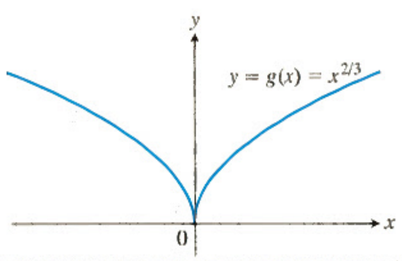



ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ

Η ακόλουθη καμπύλη *δεν* έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x = 0$: Το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

δεν υπάρχει, αφού το δεξιό όριο είναι $\infty$, ενώ το αριστερό είναι $-\infty$.




ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ

**27.** *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στην αρχή η γραφική της παράσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**28.** *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

Έχει κατακόρυφη εφαπτόμένη στο σημείο (0, 1) η γραφική της παράσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 29-32, χρησιμοποιήστε υπολογιστή ή κομπιουτεράκι για να βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως σε κάθε διάστημα.

**29.** $f(x) = e^x$
(α) $[-2, 0]$ (β) $[1, 3]$

**30.** $f(x) = \ln x$
(α) $[1, 4]$ (β) $[100, 103]$

**31.** $f(t) = \cot t$
(α) $[\pi/4, 3\pi/4]$ (β) $[\pi/6, \pi/2]$

**32.** $f(t) = 2 + \cos t$
(α) $[0, \pi]$ (β) $[-\pi, \pi]$

**33.** *Επιχορήγηση στο INS* Ο Πίνακας 1.3 παραθέτει τα ποσά επιχορήγησης που έλαβε η υπηρεσία Immigration and Naturalization Service (INS) των ΗΠΑ για κάποια χρονική περίοδο.

**Πίνακας 1.3** Ομοσπονδιακή επιχορήγηση προς το INS

| Έτος | Επιχορήγηση (δισεκ. \$) |
|---|---|
| 1993 | 1,5 |
| 1994 | 1,6 |
| 1995 | 2,1 |
| 1996 | 2,6 |
| 1997 | 3,1 |

*Πηγή:* Immigration and Naturalization Service, από άρθρο του Bob Laird στην εφημερίδα *USA Today*, February 18, 1997.

(α) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της επιχορήγησης από το 1993 έως το 1995.

(β) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της επιχορήγησης από το 1995 έως το 1997.

(γ) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1990, η $x = 1$ στο 1991, κ.ο.κ. Αφού βρείτε μια δευτεροβάθμια παλινδρομική εξίσωση που να προσαρμόζεται στα δεδομένα, σχεδιάστε την μαζί με το διάγραμμα διασποράς. (Για να θυμηθείτε πώς γίνεται παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή, δείτε τη σελ. 5.)

(δ) Υπολογίστε τους μέσους ρυθμούς μεταβολής στα ερωτήματα (α) και (β) κάνοντας χρήση της παλινδρομικής εξίσωσης.

(ε) Χρησιμοποιώντας την παλινδρομική εξίσωση, βρείτε πόσο γρήγορα αυξανόταν η επιχορήγηση το έτος 1997.

**34.** *Επιχορήγηση στα πανεπιστήμια από το Κογκρέσο* Στον Πίνακα 1.4 παρατίθενται τα ποσά που ενέκρινε το αμερικανικό Κογκρέσο για την επιχορήγηση ακαδημαϊκών προγραμμάτων, για κάποια χρονική περίοδο.



**Πίνακας 1.4** Επιχορήγηση Κογκρέσου προς πανεπιστήμια των ΗΠΑ

| Έτος | Επιχορήγηση (εκατομμύρια \$) |
|---|---|
| 1988 | 225 |
| 1989 | 289 |
| 1990 | 270 |
| 1991 | 493 |
| 1992 | 684 |
| 1993 | 763 |
| 1994 | 651 |
| 1995 | 600 |
| 1996 | 296 |
| 1997 | 440 |

*Πηγή: The Chronicle of Higher Education*, March 28, 1997.

(α) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1980, η $x = 1$ στο 1981, κ.ο.κ. Κάντε το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Έστω $P$ το σημείο που αντιστοιχεί στο 1997 και $Q$ το σημείο που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε από τα προηγούμενα έτη. Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών με τις κλίσεις όλων των δυνατών τεμνουσών $PQ$.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Βάσει των υπολογισμών σας, εξηγήστε γιατί δεν θα εμπιστευόσασταν μια πρόβλεψη του ρυθμού μεταβολής της επιχορήγησης από το Κογκρέσο το έτος 1997.

### Γραφικές διερευνήσεις: κατακόρυφες εφαπτομένες

(α) Σχεδιάστε με υπολογιστή τις καμπύλες των Ασκήσεων 35-44. Σε ποια σημεία δείχνουν να έχουν κατακόρυφες εφαπτομένες οι γραφικές παραστάσεις;

(β) Διαβάστε την εισαγωγή στις Ασκήσεις 27 και 28. Κατόπιν, επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο (α) υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια.

**35.** $y = x^{2/5}$ **36.** $y = x^{4/5}$

**37.** $y = x^{1/5}$ **38.** $y = x^{3/5}$

**39.** $y = 4x^{2/5} - 2x$ **40.** $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

**41.** $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$ **42.** $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

**43.** $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ **44.** $y = \sqrt{|4-x|}$

### Σχεδίαση τεμνουσών και εφαπτόμενων ευθειών

Με κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, εκτελέστε τα παρακάτω βήματα στις Ασκήσεις 45-48.

(α) Σχεδιάστε την $y = f(x)$ στο διάστημα $x_0 - 1/2 \le x \le x_0 + 3$.

(β) Για σταθερό $x_0$, το πηλίκο διαφορών στο $x_0$,

$$q(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

γίνεται η συνάρτηση βαθμίδας $h$. Εισάγετε τη συνάρτηση αυτή στο υπολογιστικό σύστημα που χρησιμοποιείτε.

(γ) Βρείτε το όριο του $q$ καθώς $h \to 0$.

(δ) Ορίστε τις τέμνουσες ευθείες $y = f(x_0) + q*(x - x_0)$ για $h = 3, 2$, και $1$. Σχεδιάστε τις σε κοινό σχήμα με την $f$ και την εφαπτομένη, στην περιοχή τιμών του ερωτήματος (α).

**45.** $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

**46.** $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

**47.** $f(x) = x + \sin(2x), \quad x_0 = \pi/2$

**48.** $f(x) = \cos x + 4\sin(2x), \quad x_0 = \pi$

## Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Τι είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $g(t)$ στο διάστημα από $t = a$ έως $t = b$ και ποια η σχέση του με τέμνουσες ευθείες;

2. Ποιος υπολογισμός ορίου απαιτείται για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης $g(t)$ στο $t = t_0$;

3. Ποιος είναι ο άτυπος ορισμός του ορίου
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L;$$
Γιατί είναι «άτυπος» ο ορισμός αυτός; Δώστε παραδείγματα. Όταν γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) =$ τί ακριβώς εννοούμε;

4. Εξαρτάται η ύπαρξη και η τιμή του ορίου συναρτήσεως $\lim_{x\to x_0} f(x)$ από το τι συμβαίνει στο σημείο $x = x_0$; Εξηγήστε και δώστε παραδείγματα.

5. Για ποια είδη συμπεριφοράς μιας συνάρτησης παύει να υπάρχει το όριό της; Δώστε παραδείγματα.

6. Ποια θεωρήματα έχουμε στη διάθεσή μας για τον υπολογισμό ορίων; Δώστε παραδείγματα για το πώς αυτά χρησιμοποιούνται.

7. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ πλευρικών ορίων και ορίων; Πώς μπορούμε, εκμεταλλευόμενοι τη σχέση αυτή, να υπολογίσουμε κάποιο όριο ή να δείξουμε ότι δεν υπάρχει; Δώστε παραδείγματα.

8. Ποια η τιμή του $\lim_{\theta\to 0}((\sin\theta)/\theta)$; Έχει σημασία αν η γωνία $\theta$ μετρείται σε μοίρες ή σε ακτίνια; Εξηγήστε.

9. Τι σημαίνουν οι συμβολισμοί $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$; Δώστε παραδείγματα.

10. Ποια η τιμή των $\lim_{x\to\pm\infty} k$ (όπου $k$ μια σταθερά) και $\lim_{x\to\pm\infty} (1/x)$; Πώς μπορούν να χρησιμεύσουν τα όρια αυτά στην εύρεση ορίων άλλων συναρτήσεων; Δώστε παραδείγματα.

11. Πώς βρίσκουμε το όριο ρητής συναρτήσεως καθώς $x \to \pm\infty$; Δώστε παραδείγματα.

12. Τι είναι οι οριζόντιες, οι κατακόρυφες, και οι πλάγιες ασύμπτωτες; Δώστε παραδείγματα.

13. Ποιες συνθήκες πρέπει να πληρούνται για να είναι μια συνάρτηση συνεχής σε σημείο του πεδίου ορισμού της (α) εσωτερικό και (β) ακραίο;

14. Πώς μπορείτε κοιτάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως να αποφανθείτε για το πού αυτή είναι συνεχής;

15. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά ή συνεχής από αριστερά σε ένα σημείο; Πώς συνδέονται οι έννοιες της συνέχειας και της πλευρικής συνέχειας;

16. Τι γνωρίζετε για τη συνέχεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων; Των ρητών συναρτήσεων; Των τριγωνομετρικών συναρτήσεων; Των εκθετικών συναρτήσεων; Των λογαριθμικών συναρτήσεων; Των ρητών δυνάμεων και των αλγεβρικών συνδυασμών συναρτήσεων; Των σύνθετων συναρτήσεων; Των απόλυτων τιμών συναρτήσεων; Των αντίστροφων συναρτήσεων;

17. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα;

18. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής; Δείξτε με μερικά παραδείγματα ότι υπάρχει η περίπτωση μια συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο πλήρες πεδίο ορισμού της αλλά σε συγκεκριμένα διαστήματα μέσα σε αυτό.

19. Ποιοι είναι οι κυριότεροι τύποι ασυνέχειας; Δώστε από ένα παράδειγμα. Τι είναι η αιρόμενη ασυνέχεια; Δώστε ένα παράδειγμα.

20. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής; Ποιες συνθήκες μάς εγγυώνται ότι μια συνάρτηση θα έχει την ιδιότητα αυτή σε κάποιο διάστημα; Τι συνεπάγεται η ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για τη γραφική παράσταση της $f$ και την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$;

21. Λέγεται συχνά ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση χωρίς να χρειαστεί να σηκώσετε το μολύβι σας από το χαρτί. Γιατί;

22. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ευθεία εφάπτεται μιας καμπύλης $C$ σε ένα σημείο $P$;

23. Ποια η σημασία του τύπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ ?$$

Δώστε τη γεωμετρική και τη φυσική του ερμηνεία.

24. Πώς βρίσκεται η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ σε σημείο $(x_0, y_0)$ επί της καμπύλης;

25. Πώς συνδέεται η κλίση της καμπύλης $y=f(x)$ στο $x=x_0$ με τον ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως ως προς $x$ στο $x = x_0$; Πώς συνδέεται με την παράγωγο της $f$ στο $x_0$;

## Ασκήσεις κεφαλαίου

### Όρια και συνέχεια

1. Σχεδιάστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Κατόπιν μελετήστε λεπτομερώς τα όρια, τα πλευρικά όρια, τη συνέχεια, και την πλευρική συνέχεια της $f$ στα σημεία $x = -1, 0,$ και $1$. Είναι καμία από τις ασυνέχειες αιρόμενη; Εξηγήστε.

2. Επαναλάβετε ό,τι κάνατε στην Άσκηση 1 για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Έστω ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι ορισμένες για κάθε $t$ και ότι $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ και $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Βρείτε τα όρια, καθώς $t \to t_0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

(α) $3f(t)$ (β) $(f(t))^2$

(γ) $f(t)\cdot g(t)$ (δ) $\dfrac{f(t)}{g(t)-7}$

(ε) $\cos(g(t))$ (στ) $|f(t)|$

(ζ) $f(t) + g(t)$ (η) $1/f(t)$

4. Έστω ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι ορισμένες για κάθε $x$ και ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Βρείτε τα όρια, καθώς $x \to 0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

(α) $-g(x)$ (β) $g(x)\cdot f(x)$

(γ) $f(x) + g(x)$ (δ) $1/f(x)$

(ε) $x + f(x)$ (στ) $\dfrac{f(x)\cdot\cos x}{x-1}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, βρείτε ποια τιμή πρέπει να έχει το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ ώστε να αληθεύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4-g(x)}{x}\right) = 1$

6. $\lim_{x\to -4}\left(x \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

(α) $f(x) = x^{1/3}$ (β) $g(x) = x^{3/4}$

(γ) $h(x) = x^{-2/3}$ (δ) $k(x) = x^{-1/6}$

8. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;



(α) $f(x) = \tan x$ (β) $g(x) = \csc x$

(γ) $h(x) = e^{-x}$ (δ) $k(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

### Εύρεση ορίων

Στις Ασκήσεις 9-16, βρείτε κάθε όριο ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

9. $\lim \dfrac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$

(α) καθώς $x \to 0$ (β) καθώς $x \to 2$

10. $\lim \dfrac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$

(α) καθώς $x \to 0$ (β) καθώς $x \to -1$

11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

12. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^4-a^4}$

13. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3-8}{x}$

Στις Ασκήσεις 17-28, να βρεθούν τα όρια .

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{5x+7}$

18. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+3}{5x^2+7}$

19. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-4x+8}{3x^3}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-7x+1}$

21. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-7x}{x+1}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{\operatorname{int} x}$ (Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $-5 \le x \le 5$.)

24. $\lim_{\theta\to\infty} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ (Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε την $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$ κοντά στην αρχή ώστε να «δείτε» το όριο στο άπειρο.)

25. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

27. $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}$

28. $\lim_{x\to -\infty} e^{1/x}$

T 29. Έστω $f(x) = x^3 - x - 1$.

(α) Δείξτε ότι η $f$ έχει ένα σημείο μηδενισμού μεταξύ του $-1$ και του $2$.

(β) Επιλύστε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$ με μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα $10^{-8}$.

(γ) Μπορεί να δειχτεί ότι η ακριβής λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) είναι

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

Υπολογίστε την τιμή της λύσης αυτής και συγκρίνετέ την με την απάντησή σας στο (β).

T 30. Έστω $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

(α) Δείξτε ότι η $f$ έχει ένα σημείο μηδενισμού μεταξύ του $-2$ και του $0$.

(β) Επιλύστε γραφικά την εξίσωση $f(\theta) = 0$ με μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα $10^{-4}$.

(γ) Μπορεί να δειχτεί ότι η ακριβής λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) είναι

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}}-1\right)^{1/3}-\left(\sqrt{\frac{19}{27}}+1\right)^{1/3}$$

Υπολογίστε την τιμή της λύσης αυτής και συγκρίνετέ την με την απάντησή σας στο (β).

## Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

T 1. *Ανάθεση τιμής στο $0^0$* Σύμφωνα με τους κανόνες των εκθετών, $a^0 = 1$ για κάθε μη μηδενικό $a$· επίσης, $0^n = 0$ για κάθε θετικό $n$.

Αν επιχειρούσαμε να επεκτείνουμε τους κανόνες αυτούς στο $0^0$, θα παίρναμε αντιφατικά αποτελέσματα. Ο πρώτος κανόνας δίνει $0^0 = 1$, ενώ ο δεύτερος δίνει $0^0 = 0$.

Δεν τίθεται θέμα ποιος από τους δύο κανόνες είναι σωστός και ποιος λάθος. Κανείς από τους δύο δεν ισχύει ως έχει, άρα δεν υπάρχει αντίφαση. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ότι το $0^0$ ισούται με όποιον αριθμό μάς κάνει κέφι, αρκεί να μπορούσαμε να πείσουμε και τους άλλους για την επιλογή μας.

Ποια τιμή θα θέλατε να δώσετε στο $0^0$; Ενδεχομένως το ακόλουθο παράδειγμα να σας δώσει μια ιδέα. (Δείτε την Άσκηση 2 πιο κάτω για άλλο ένα παράδειγμα.)

(α) Υπολογίστε το $x^x$ για $x = 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001$, κ.ο.κ. μέχρι όπου φτάνει το κομπιουτεράκι σας. Καταγράψτε τις τιμές που πήρατε. Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

(β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = x^x$ για $0 < x \le 1$. Αν και η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \le 0$, η γραφική παράσταση θα τείνει στον άξονα $y$ από δεξιά. Σε ποια τιμή του $y$ σας φαίνεται ότι συγκλίνει; Εστιάστε (σχεδιάζοντας την καμπύλη με μεγαλύτερη ανάλυση) για να υποστηρίξετε την άποψή σας.

T 2. *Ένας λόγος που θα θέλατε το $0^0$ να μην ισούται με 0 ή 1* Καθώς το $x$ αυξάνεται παίρνοντας θετικές τιμές, οι αριθμοί $1/x$ και $1/(\ln x)$ τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Πώς συμπεριφέρεται ο αριθμός

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

καθώς το $x$ αυξάνεται; Υπάρχουν δύο τρόποι να το διερευνήσετε:

(α) Υπολογίστε τις τιμές της $f$ για $x = 10, 100, 1000$, κ.ο.κ. μέχρι όπου φτάνει το κομπιουτεράκι σας. Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

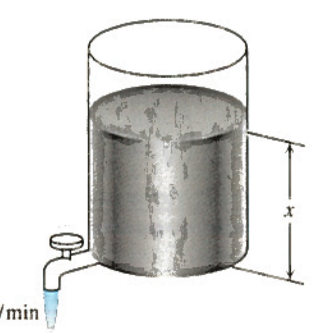
(β) Σχεδιάστε την $f$ για διάφορες περιοχές σχεδίασης, φροντίζοντας σε μερικές από αυτές να περιλαμβάνεται η αρχή των αξόνων. Τι παρατηρείτε; Παρακολουθήστε την εξέλιξη των τιμών του $y$ σε κάθε σχήμα. Τι συμπεραίνετε;

**3.** *Συστολή Lorentz* Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας, το μήκος ενός σώματος, π.χ. ενός πυραύλου, όπως μετριέται από κάποιον παρατηρητή, δείχνει να εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος ως προς τον παρατηρητή. Έτσι, αν ο παρατηρητής μετρά το μήκος του ακίνητου πυραύλου ως $L_0$, τότε για ταχύτητα $\upsilon$ το φαινόμενο μήκος θα είναι

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ο τύπος συστολής μήκους του Lorentz. Εδώ, $c$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, περίπου $3 \times 10^8$ m/sec. Τι παθαίνει το $L$ καθώς αυξάνεται το $\upsilon$; Βρείτε το όριο $\lim_{\upsilon\to c^-} L$. Γιατί έπρεπε να πάρουμε το αριστερό όριο;

**4.** *Ελέγχοντας τη ροή μιας δεξαμενής που αδειάζει* Ο νόμος του Torricelli μάς λέει ότι αν αδειάσουμε μια δεξαμενή σαν κι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, ο ρυθμός εκροής $y$ του νερού ισούται με ένα σταθερό πολλαπλάσιο της τετραγωνικής ρίζας του ύψους $x$ της στάθμης του νερού (δείτε το σχήμα). Η πολλαπλασιαστική σταθερά εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (σχήμα και μέγεθος) της βαλβίδας εκροής.




Έστω ότι $y = \sqrt{x}/2$ για μια δεδομένη δεξαμενή. Επιθυμείτε να διατηρήσετε περίπου σταθερό τον ρυθμό εκροής προσθέτοντας περιοδικά νερό στη δεξαμενή με μια αντλία. Σε πόσο ύψος πρέπει να διατηρήσετε τη στάθμη του νερού αν ο επιθυμητός ρυθμός εκροής είναι

**(α)** $y_0 = 1$ m$^3$/min με απόκλιση το πολύ 0,2 m$^3$/min;

**(β)** $y_0 = 1$ m$^3$/min με απόκλιση το πολύ 0,1 m$^3$/min;

**5.** *Θερμική διαστολή σε εξοπλισμό ακριβείας* Όπως μάλλον γνωρίζετε, τα περισσότερα μέταλλα διαστέλλονται όταν θερμαίνονται και συστέλλονται όταν ψύχονται. Μερικές φορές οι διαστάσεις εργαστηριακών συσκευών πρέπει να είναι τόσο αυστηρά καθορισμένες, ώστε ακόμη και το εργοστάσιο που τις κατασκευάζει πρέπει να διατηρείται στην ίδια θερμοκρασία με αυτήν του εργαστηρίου που θα τις χρησιμοποιήσει. Μια συνήθης ράβδος αλουμινίου πλάτους 10 cm στους 20°C, θα έχει πλάτος

$$y = 10 + (t - 20) \times 10^{-4}$$

εκατοστά σε μια παραπλήσια θερμοκρασία $t$. Έστω ότι χρησιμοποιείτε μια τέτοια ράβδο σε έναν ανιχνευτή βαρυτικών κυμάτων, όπου η επιτρεπόμενη απόκλιση από το ιδανικό πλάτος των 10 cm είναι 0,0005 cm. Πόσο κοντά στην τιμή $t_0 = 20$°C πρέπει να διατηρήσετε τη θερμοκρασία για να μην υπερβεί τις καθορισμένες διαστάσεις διαστελλόμενη η ράβδος;

**6.** *Μάθετε γράφοντας:* Έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι θα πρέπει να υπάρχει πάντα ένα ζεύγος διαμετρικά αντίθετων σημείων στον ισημερινό της Γης, των οποίων οι θερμοκρασίες θα είναι οι ίδιες; Εξηγήστε την άποψή σας.

Τ **7.** *Ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης που είναι σχεδόν γραμμική* Η εξίσωση $ax^2 + 2x - 1 = 0$, όπου $a$ είναι σταθερά, έχει δύο ρίζες αν $a > -1$ και $a \neq 0$, μια θετική και μια αρνητική:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1 + a}}{a}.$$

**(α)** Τι θα συμβεί στην $r_+(a)$ καθώς $a \to 0$; Καθώς $a \to -1^+$;

**(β)** Τι θα συμβεί στην $r_-(a)$ καθώς $a \to 0$; Καθώς $a \to -1^+$;

**(γ)** Επιβεβαιώστε τις παραπάνω απαντήσεις σας σχεδιάζοντας τις $r_+(a)$ και $r_-(a)$ ως συναρτήσεις του $a$. Περιγράψτε τι βλέπετε.

**(δ)** Για περαιτέρω κατοχύρωση, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα πέντε εκδοχές της $f(x) = ax^2 + 2x - 1$, δηλαδή για $a = 1$, $0{,}5$, $0{,}2$, $0{,}1$, και $0{,}05$.

**8.** *Πλευρικά όρια* Αν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$, να βρεθούν τα:

**(α)** $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$

**(β)** $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

**(γ)** $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$

**(δ)** $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

**9.** *Όρια και συνέχεια* Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν, και ποιες όχι; Αν αληθεύουν, πείτε γιατί. Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα (δηλαδή, ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει το ψευδές τους).

**(α)** Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x)$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

**(β)** Αν δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x\to a}(f(x)$ ούτε το $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε και το $\lim_{x\to a} f(x) + g(x))$ δεν υπάρχει.

**(γ)** Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x$, τότε και η $|f|$ είναι συνεχής.

**(δ)** Αν η $|f|$ είναι συνεχής στο $a$, τότε και η $f$ είναι συνεχής.

**10.** *Ρίζα εξίσωσης* Δείξτε ότι η εξίσωση $x + 2\cos x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

## Αυστηρός ορισμός του ορίου

Στις Ασκήσεις 11-14, χρησιμοποιήστε τον αυστηρό ορισμό του ορίου για να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0$.

**11.** $f(x) = x^2 - 7$, $x_0 = 1$

**12.** $g(x) = 1/(2x)$, $x_0 = 1/4$

**13.** $h(x) = \sqrt{2x - 3}$, $x_0 = 2$

**14.** $F(x) = \sqrt{9 - x}$, $x_0 = 5$



**15.** *Συνάρτηση συνεχής μόνο σε ένα σημείο* Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

**(α)** Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x = 0$.

**(β)** Βάσει του γεγονότος ότι κάθε μη κενό ανοιχτό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς, δείξτε ότι η $f$ είναι ασυνεχής για κάθε $x$ διάφορο του μηδενός.

**16.** *Η συνάρτηση Dirichlet* Κάθε ρητός αριθμός $x$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως πηλίκο ακεραίων $m/n$, όπου $n > 0$ και οι $m$ και $n$ δεν έχουν κοινούς παράγοντες πλην της μονάδας. (Λέμε τότε ότι το κλάσμα αυτό είναι ανάγωγο. Για παράδειγμα, ο 6/4 γράφεται ως 3/2.) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε $x$ στο διάστημα $[0, 1]$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{αν } x = m/n \text{ ρητό ανάγωγο κλάσμα} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$, κ.ο.κ.

**(α)** Δείξτε ότι η $f$ είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$.

**(β)** Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$. (*Υπόδειξη:* Αν $\epsilon$ είναι ένας δοσμένος θετικός αριθμός, δείξτε ότι υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος ρητών αριθμών $r$ στο $[0, 1]$ τέτοιοι ώστε $f(r) \geq \epsilon$.)

**(γ)** Παραστήστε γραφικά την $f$.

## Π.2 Αποδείξεις Θεωρημάτων ορίων της Ενότητας 1.2

Στο Παράρτημα αυτό αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 1 και 4 της Ενότητας 1.2.

**Θεώρημα 1** **Ιδιότητες ορίων**

Οι ακόλουθοι κανόνες ισχύουν αν $\lim_{x \to c} f(x) = L$ και $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ($L$ και $M$ πραγματικοί αριθμοί).

1. *Όριο αθροίσματος:* $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. *Όριο διαφοράς:* $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. *Όριο γινομένου:* $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$
4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{x \to c} k f(x) = k\, L$ (για κάθε $k$)
5. *Όριο πηλίκου:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, αν $M \neq 0$
6. *Όριο δύναμης:* Αν $m$ και $n$ είναι ακέραιοι, τότε $\lim_{x \to c} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

εφόσον ο $L^{m/n}$ είναι πραγματικός αριθμός.

**Απόδειξη του τύπου ορίου αθροίσματος** Δίδεται ο αριθμός $\epsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε έναν θετικό αριθμό $\delta$ τέτοιον ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους, παίρνουμε

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Τριγωνική ανισότητα: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Εφόσον $\lim_{x \to c} f(x) = L$, θα υπάρχει αριθμός $\delta_1 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

Ομοίως, εφόσον $\lim_{x \to c} g(x) = M$, θα υπάρχει αριθμός $\delta_2 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ο μικρότερος των $\delta_1$ και $\delta_2$. Αν $0 < |x - c| < \delta$ τότε $|x - c| < \delta_1$, οπότε $|f(x) - L| < \epsilon/2$, και $|x - c| < \delta_2$, άρα $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Συνεπώς,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$.

Ο τύπος του ορίου διαφοράς προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το $g(x)$ με $-g(x)$ και το $M$ με $-M$ στον τύπο ορίου αθροίσματος. Ο τύπος του ορίου σταθερού πολλαπλασίου είναι η ειδική περίπτωση $g(x) = k$ του τύπου ορίου γινομένου. Ο τύπος ορίου δύναμης αποδεικνύεται σε



CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
John Wallis
(1616-1703)

πιο προχωρημένα συγγράμματα, ενώ παρακάτω θα αποδείξουμε τους τύπους των ορίων γινομένου και πηλίκου.

**Απόδειξη του τύπου ορίου γινομένου** Θα δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$ που ανήκει στην τομή $D$ των πεδίων ορισμού των $f$ και $g$,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)\, g(x) - LM| < \epsilon.$$

Έστω λοιπόν ότι ο $\epsilon$ είναι θετικός αριθμός. Γράφουμε τις $f(x)$ και $g(x)$ ως εξής

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Πολλαπλασιάζουμε τις δύο αυτές εκφράσεις κατά μέλη και αφαιρούμε την ποσότητα $LM$:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + \\ &\quad (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \tag{1}$$

Εφόσον οι $f$ και $g$ έχουν όρια $L$ και $M$ καθώς $x \to c$, υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, και $\delta_4$ τέτοιοι ώστε για κάθε $x$ στο $D$

$$\begin{aligned} &0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ &0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ &0 < |x - c| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ &0 < |x - c| < \delta_4 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)). \end{aligned} \tag{2}$$

Παίρνοντας το $\delta$ ως τον μικρότερο των $\delta_1$ έως $\delta_4$, οι ανισότητες στο δεξιό μέλος της (2) θα ισχύουν ταυτόχρονα για $0 < |x - c| < \delta$. Κατά συνέπεια, για κάθε $x$ στο $D$, η $0 < |x - c| < \delta$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} &|f(x) \cdot g(x) - LM| \\ &\quad \leq |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\quad \leq (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\quad \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στην Εξ. (1)

Τιμές που προκύπτουν από την Εξ. (2)

Αποδείξαμε λοιπόν τον τύπο ορίου γινομένου.

**Απόδειξη του τύπου ορίου πηλίκου** Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \to c} (1/g(x)) = 1/M$. Κατόπιν θα βασιστούμε στον τύπο ορίου γινομένου για να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \left( f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

Έστω ότι δίνεται $\epsilon > 0$. Για να δείξουμε ότι $\lim_{x \to c} (1/g(x)) = 1/M$, αρκεί να δείξουμε ότι θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon.$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Gilles Personne de Roberval
(1602 — 1675)

Εφόσον $|M| > 0$, θα υπάρχει θετικός αριθμός $\delta_1$ τέτοιος ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \left| \frac{M}{2} \right|. \tag{3}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι για τυχόντες $A$ και $B$ ισχύουν οι $|A| - |B| \leq |A - B|$ και $|B| - |A| \leq |A - B|$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $||A| -$

$||B|| \le |A - B|$. Για $A = g(x)$ και $B = M$, η ανισότητα αυτή παίρνει τη μορφή

$$||g(x)| - |M|| \le |g(x) - M|,$$

η οποία, συνδυαζόμενη με την ανισότητα στο δεξιό μέλος της Εξ. (3), μας δίνει διαδοχικά,

$$||g(x)| - |M|| < \frac{|M|}{2}$$
$$-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2}$$
$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2} \tag{4}$$
$$|M| < 2|g(x)| < 3|M|$$
$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}.$$

Έτσι, η $0 < |x - c| < \delta_1$ συνεπάγεται ότι

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \le \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M - g(x)| \tag{5}$$
$$< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)|. \qquad \text{Ανισότητα (4)}$$

Εφόσον $(1/2)|M|^2 \epsilon > 0$, θα υπάρχει αριθμός $\delta_2 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Παίρνοντας ως $\delta$ τον μικρότερο των $\delta_1$ και $\delta_2$, οι σχέσεις (5) και (6) ισχύουν ταυτόχρονα για κάθε $x$ τέτοιο ώστε $0 < |x - c| < \delta$. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα αυτά παίρνουμε

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη του τύπου ορίου πηλίκου.

**Θεώρημα 4** **Θεώρημα «σάντουιτς»**
Έστω ότι η ανισότητα $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ισχύει για κάθε $x$ κάποιου ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το $c$, εκτός ίσως από το ίδιο το $x = c$. Έστω ακόμη ότι $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Τότε θα είναι $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

**Απόδειξη για δεξιά όρια** Έστω ότι $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$ η ανισότητα $c < x < c + \delta$ να συνεπάγεται ότι

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{και} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Συνδυαζόμενες οι παραπάνω με την $g(x) \le f(x) \le h(x)$ μας δίδουν

$$L - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \epsilon,$$
$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,$$
$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $x$, η ανισότητα $c < x < c + \delta$ συνεπάγεται ότι $|f(x) - L| < \epsilon$.



**Απόδειξη για αριστερά όρια** Έστω ότι $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x$ η ανισότητα $c - \delta < x < c$ να συνεπάγεται ότι

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{και} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν όπως και πριν πως για κάθε $x$, η ανισότητα $c - \delta < x < c$ συνεπάγεται ότι $|f(x) - L| < \epsilon$.

**Απόδειξη για αμφίπλευρα όρια** Αν $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, τότε οι $g(x)$ και $h(x)$ τείνουν ταυτόχρονα στο $L$ καθώς $x \to c^+$ και καθώς $x \to c^-$· οπότε θα έχουμε $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ και $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Συνεπώς, το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $L$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ Π.2

1. *Γενικός τύπος ορίου αθροίσματος* Έστω ότι οι συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, και $f_3(x)$ έχουν όρια $L_1$, $L_2$, και $L_3$, αντίστοιχα, καθώς $x \to c$. Δείξτε ότι το άθροισμά τους έχει όριο $L_1 + L_2 + L_3$. Εφαρμόστε μαθηματική επαγωγή (Παράρτημα 1) για να γενικεύσετε το αποτέλεσμα αυτό στο άθροισμα κάθε πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων.

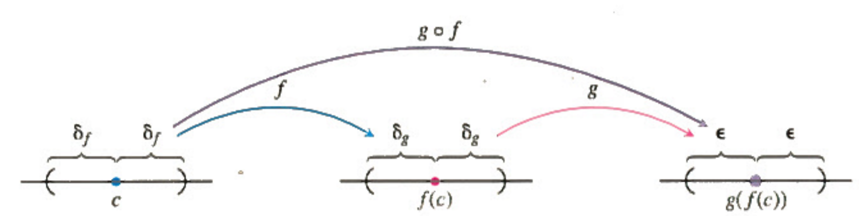
2. *Γενικός τύπος ορίου γινομένου* Εφαρμόστε τη μαθηματική επαγωγή και τον τύπο ορίου γινομένου του Θεωρήματος 1 για να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ έχουν όρια $L_1, L_2, \ldots, L_n$ καθώς $x \to c$, τότε
$$\lim_{x\to c} f_1(x) f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$

3. *Όριο θετικής ακέραιας δύναμης* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to c} x = c$ και το αποτέλεσμα της Άσκησης 2 για να δείξετε ότι $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ για κάθε ακέραιο $n > 1$.

4. *Όρια πολυωνύμων* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to c}(k) = k$ για κάθε $k$, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 1 και 3, για να δείξετε ότι $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

5. *Όρια ρητών συναρτήσεων* Εφαρμόστε το Θεώρημα 1 και το αποτέλεσμα της Άσκησης 4 για να δείξετε ότι αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και $g(c) \ne 0$, τότε
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. *Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων* Στο Σχήμα Π.1 δίδεται μια διαγραμματική απόδειξη του ότι η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Με βάση το σχήμα, να δοθεί η απόδειξη. Η αποδεικτέα πρόταση είναι η ακόλουθη: Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x = c$ και η $g$ είναι συνεχής στο $f(c)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $c$.
Έστω ότι το $c$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $f$ και ότι το $f(c)$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $g$. Θα χρησιμοποιήσετε λοιπόν αμφίπλευρα όρια. (Στην περίπτωση που έχουμε πλευρικά όρια, η επιχειρηματολογία είναι παρόμοια.)

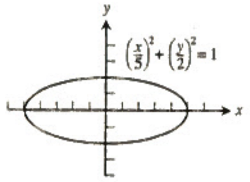



**ΣΧΗΜΑ Π.1** Διάγραμμα για την απόδειξη της πρότασης ότι η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Η συνέχεια της τελικής συνάρτησης ισχύει για κάθε σύνθεση πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων. Μοναδική απαίτηση είναι ότι η κάθε συνάρτηση οφείλει να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Στο σχήμα, η $f$ είναι συνεχής στο $c$ και η $g$ στο $f(c)$.

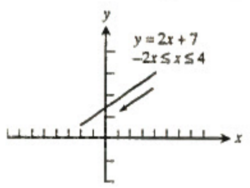
## Π.3 Απόδειξη του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

Εδώ θα αποδείξουμε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης της Ενότητας 2.5, χρησιμοποιώντας έννοιες από την Ενότητα 3.6.

**101.** **(α)** Ορίζεται· υπάρχει γωνία εφαπτομένης 2.
**(β)** Δεν ορίζεται· δεν υπάρχει γωνία συνημιτόνου 2.
**103.** **(α)** Δεν ορίζεται· δεν υπάρχει γωνία τέμνουσας 0.
**(β)** Δεν ορίζεται· δεν υπάρχει γωνία ημιτόνου $\sqrt{2}$.
**105.** $\approx 16{,}98$ m **107.** **(β)** $4\pi$
**109.** **(α)** $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$· όλη η καμπύλη
**(β)** Αρχικό σημείο: (5, 0), τελικό σημείο: (5, 0)



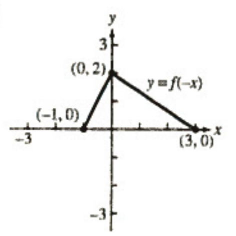

**111.** **(α)** $y = 2x + 7$· από (4, 15) έως (−2, 3)
**(β)** Αρχικό σημείο: (4, 15), τελικό σημείο: (−2, 3)



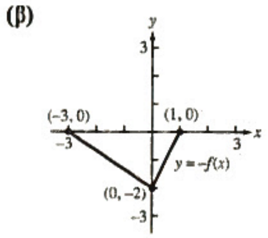

**113.** Πιθανή απάντηση: $x = -2 + 6t$, $y = 5 - 2t$, $0 \leq t \leq 1$
**115.** Πιθανή απάντηση: $x = 2 - 3t$, $y = 5 - 5t$, $0 \leq t$

## Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 0, σελ. 80-83

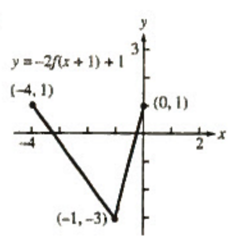
**1.** **(α)**



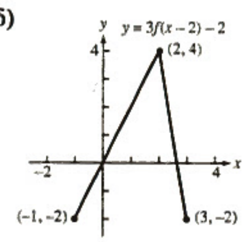

**(β)**



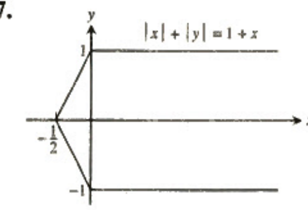

**(γ)**



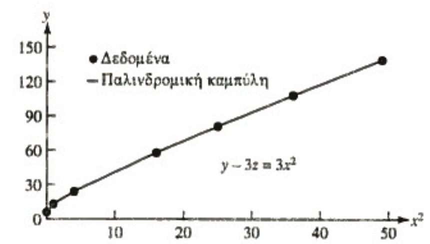

**(δ)**



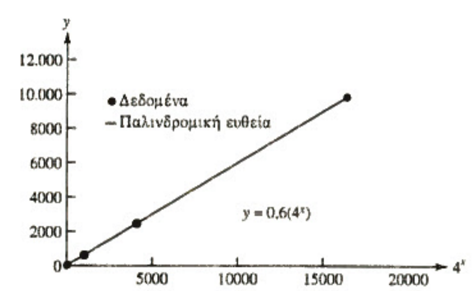

**3.** **(α)** $y = 100.000 - 10000x$, $0 \leq x \leq 10$
**(β)** Μετά από 4,5 έτη
**5.** Μετά από $\dfrac{\ln (10/3)}{\ln 1.08} \approx 15{,}6439$ έτη. (Αν η τράπεζα πληρώνει τον τόκο στο τέλος κάθε έτους, θα χρειαστούν 16 έτη.)
**11.** **(α)** Ναι
**(β)** Όχι πάντοτε. Αν η $f$ είναι περιττή, τότε η $h$ είναι περιττή.
**13.** Ναι. Για παράδειγμα: $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, ή $f(x) = 2x$ και $g(x) = \frac{x}{2}$, ή $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$.
**15.** Αν η $f(x)$ είναι περιττή, τότε η $g(x) = f(x) - 2$ δεν είναι περιττή. Ούτε και η $g(x)$ είναι άρτια, εκτός αν $f(x) = 0$ για κάθε $x$. Αν η $f$ είναι άρτια, τότε και η $g(x) = f(x) - 2$ είναι άρτια.
**17.**




**21.** Αν η γραφική παράσταση της $f(x)$ ικανοποιεί το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας, τότε και η $g(x) = -f(x)$ θα ικανοποιεί το κριτήριο, ως έχουσα το ίδιο γράφημα, απλώς κατοπτρισμένο ως προς τον άξονα $x$.
**23.** **(α)** Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών. Πεδίο τιμών: Αν $a > 0$, τότε $(d, \infty)$· αν $a < 0$, τότε $(-\infty, d)$.
**(β)** Πεδίο ορισμού: $(c, \infty)$, πεδίο τιμών: το σύνολο των πραγματικών
**25.** **(α)** Η γραφική παράσταση δεν υποστηρίζει την υπόθεση $y \propto x^2$.



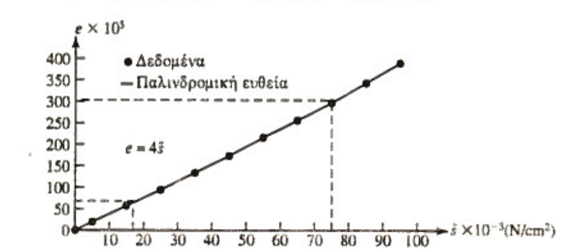

**(β)** Η γραφική παράσταση υποστηρίζει την υπόθεση $y \propto 4^x$. Η σταθερά αναλογίας μπορεί να εκτιμηθεί από την κλίση της παλινδρομικής ευθείας, που ισούται με 0,6· συνεπώς, $y = 0{,}6(4^x)$.




**27.** **(α)** Εφόσον η επιμήκυνση του ελατηρίου μηδενίζεται όταν η τάση είναι $5(10^{-3})(\text{N/cm}^2)$, τα δεδομένα θα πρέπει να τροποποιηθούν αφαιρώντας την ποσότητα αυτή από κάθε τιμή τάσης στον πίνακα. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας, όπου $\bar{s} = s - 5(10^{-3})$.

Η κλίση της καμπύλης είναι $\dfrac{(297 - 57)(10^5)}{(75 - 15)(10^{-3})} = 4{,}00(10^8)$

και το μοντέλο είναι
$e = 4(10^8)\bar{s}$ ή $e = 4(10^8)(s - 5(10^{-3}))$.

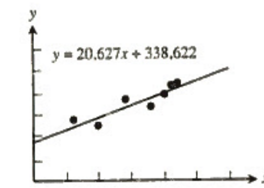



| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{s} \times 10^{-3}$ | 0 | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 |
| $e \times 10^5$ | 0 | 19 | 57 | 94 | 134 | 173 | 216 | 256 | 297 | 343 | 390 |

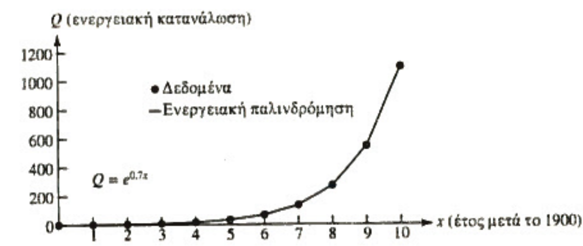


**(β)** Το μοντέλο προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα.
**(γ)** $c = 780(10^5)$(cm/cm). Εφόσον η τιμή
$$s = 200(10^{-3})(\text{N/cm}^2)$$
πέφτει κατά πολύ έξω από το εύρος δεδομένων που χρησιμοποιήσαμε για το μοντέλο αυτό, δεν θα τρέφαμε τυφλή εμπιστοσύνη στην πρόβλεψη αυτή προτού κάνουμε περαιτέρω πειραματικές δοκιμές του ελατηρίου.

**29.** **(α)** $y = 20{,}627x + 338{,}622$




**(β)** Περίπου 957
**(γ)** Η κλίση ισούται με 20,627. Ο αριθμός αυτός αντιπροσωπεύει την κατά προσέγγιση ετήσια αύξηση του αριθμού των διδακτορικών διατριβών που εκπονήθηκαν από ισπανόφωνους Αμερικανούς κατ' έτος.
**31.** **(α)** $f(x) = 2{,}000268 \sin(2{,}999187x - 1{,}000966) + 3{,}999881$
**(β)** $f(x) = 2 \sin(3x - 1) + 4$
**33.** **(α)** $Q = 1{,}00(2{,}0138^x) = 1{,}00e^{0{,}7x}$




**(β)** Η κατανάλωση το 1996 ήταν 828,82. Ο ετήσιος ρυθμός αύξησης το έτος αυτό ήταν 7,25%.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Ενότητα 1.1, σελ. 92-96

**1.** **(α)** 19 **(β)** 1
**3.** **(α)** $-\frac{4}{\pi}$ **(β)** $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$
**5.** Είναι δυνατόν, κατά τη διαδικασία της εκτύπωσης του βιβλίου, μερικές γραφικές παραστάσεις να έχουν μετατοπιστεί ως προς τους άξονες συντεταγμένων. Έτσι οι εκτιμήσεις σας μπορεί να μην συμπίπτουν απόλυτα με αυτές που παραθέτουμε εδώ.
**(α)**

| $PQ_1$ | $PQ_2$ | $PQ_3$ | $PQ_4$ |
|---|---|---|---|
| 43 | 46 | 49 | 50 |

Οι κατάλληλες μονάδες είναι μέτρα ανά δευτερόλεπτο.
**(β)** $\approx 50$ m/sec δηλ. 180 km/h
**7.** Κάτω φράγμα: $a = 7{,}15$ m/sec, άνω φράγμα: $b = 8{,}8$ m/sec, $v(2) \approx \dfrac{a + b}{2} = 7{,}975$ m/sec
**9.** **(α)** Δεν υπάρχει. Καθώς το $x$ τείνει στο 1 από δεξιά, η $g(x)$ τείνει στο 0. Καθώς το $x$ τείνει στο 1 από αριστερά, η $g(x)$ τείνει στο 1. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμός $L$ στον οποίο τείνουν απεριόριστα όλες οι τιμές της $g(x)$ καθώς $x \to 1$.
**(β)** 1
**(γ)** 0
**11.** **(α)** Αληθής **(β)** Αληθής **(γ)** Ψευδής
**(δ)** Ψευδής **(ε)** Ψευδής **(στ)** Αληθής
**13.** Καθώς το $x$ τείνει στο 0 από αριστερά, το $x/|x|$ τείνει στο −1. Καθώς το $x$ τείνει στο 0 από δεξιά, το $x/|x|$ τείνει στο1. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμός $L$ στον οποίο τείνουν απεριόριστα όλες οι τιμές της συναρτήσεως καθώς $x \to 0$.
**15.** Δεν μπορούμε να πούμε τίποτε.
**17.** Όχι
**19.** **(α)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | −3,1 | −3,01 | −3,001 | −3,0001 | −3,00001 | −3,000001 |
| $f(x)$ | −6,1 | −6,01 | −6,001 | −6,0001 | −6,00001 | −6,000001 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | −2,9 | −2,99 | −2,999 | −2,9999 | −2,99999 | −2,999999 |
| $f(x)$ | −5,9 | −5,99 | −5,999 | −5,9999 | −5,99999 | −5,999999 |

**(γ)** $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$
**21.** **(α)** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | −5,9 | −5,99 | −5,999 |
| $G(x)$ | −0,126582 | −0,1251564 | −0,1250156 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | −5,9999 | −5,99999 | −5,999999 |
| $G(x)$ | −0,1250016 | −0,12500016 | −0,12500002 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | −6,1 | −6,01 | −6,001 |
| $G(x)$ | −0,123457 | −0,1248439 | −0,1249844 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | −6,0001 | −6,00001 | −6,000001 |
| $G(x)$ | −0,1249984 | −0,12499984 | −0,12499998 |

**(γ)** $\lim_{x \to -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
**23.** **(α)** $g(\theta) = (\sin \theta)/\theta$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 |
| $g(\theta)$ | 0,998334 | 0,999983 | 0,999999 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | 0,0001 | 0,00001 | 0,000001 |
| $g(\theta)$ | 0,999999 | 0,999999 | 0,999999 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | −0,1 | −0,01 | −0,001 |
| $g(\theta)$ | 0,998334 | 0,999983 | 0,999999 |

| $\theta$ | $-0{,}0001$ | $-0{,}00001$ | $-0{,}000001$ |
|---|---|---|---|
| $g(\theta)$ | 0,999999 | 0,999999 | 0,999999 |

$\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = 1$

**25.(α)** $f(x) = x^{1/(1-x)}$

| $x$ | 0,9 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,348678 | 0,366032 | 0,367695 |

| $\theta$ | 0,9999 | 0,99999 | 0,999999 |
|---|---|---|---|
| $g(\theta)$ | 0,367861 | 0,367878 | 0,367879 |

| $x$ | 1,1 | 1,01 | 1,001 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,385543 | 0,369711 | 0,368063 |

| $\theta$ | 1,0001 | 1,00001 | 1,000001 |
|---|---|---|---|
| $g(\theta)$ | 0,367898 | 0,367881 | 0,367880 |

$\lim_{x\to 1} f(x) \approx 0{,}36788$

**27.** $\delta = 0{,}1$

**29.** $\delta = \frac{7}{16}$

**31.** $(3{,}99, 4{,}01)$, $\delta = 0{,}01$

**33.** $(-0{,}19, 0{,}21)$, $\delta = 0{,}19$

**35.** $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$, $\delta = \frac{2}{3}$

**37.** [3,384, 3,387]. Για να είμαστε βέβαιοι, στρογγυλοποιήσαμε την τιμή του αριστερού άκρου προς τα πάνω, και την τιμή του δεξιού άκρου προς τα κάτω.

**39.** **(β)** Μία πιθανή απάντηση: $a = 1{,}75$, $b = 2{,}28$
**(γ)** Μία πιθανή απάντηση: $a = 1{,}99$, $b = 2{,}01$

**41.** **(α)** 14,7 m/sec
**(β)** 29,4 m/sec

**43.** **(α)**

| $x$ | $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0{,}054402$ | $-0{,}005064$ | $-0{,}000827$ | $-0{,}000031$ |

**(β)**

| $x$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0{,}054402$ | $-0{,}005064$ | $-0{,}000827$ | $-0{,}000031$ |

Το όριο δείχνει να είναι το 0.

**45.** **(α)**

| $x$ | $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,0567 | 2,2763 | 2,2999 | 2,3023 |

**(β)**

| $x$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,5893 | 2,3293 | 2,3052 | 2,3029 |

Το όριο δείχνει να είναι το 2,3.

## Ενότητα 1.2, σελ. 105-108

**1.** **(α)** 3 **(β)** $-2$ **(γ)** Δεν υπάρχει το όριο **(δ)** 1

**3.** **(α)** $-4$ **(β)** $-4$ **(γ)** $-4$ **(δ)** $-4$

**5.** **(α)** 4 **(β)** $-3$ **(γ)** Δεν υπάρχει το όριο **(δ)** 4

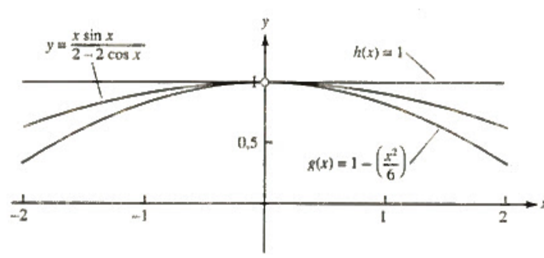
**7.** **(α)** Όριο πηλίκου
**(β)** Όρια διαφοράς και δύναμης
**(γ)** Όρια αθροίσματος και σταθερού πολλαπλασίου

**9.** **(α)** $-10$ **(β)** $-20$ **(γ)** $-1$ **(δ)** $\frac{5}{7}$

**11.** **(α)** $-9$ **(β)** $-8$ **(γ)** $\frac{1}{5}$ **(δ)** $\frac{3}{2}$

**13.** **(α)** $-7$ **(β)** $-\frac{1}{2}$ **(γ)** 4

**15.** **(α)** $\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = 1 - \frac{0}{6} = 1$ και $\lim_{x\to 0} 1 = 1$·
λόγω του θεωρήματος σάντουιτς, $\lim_{x\to 0}\frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} = 1$.
**(β)** Για $x \neq 0$, η $y = (x \sin x)/(2 - 2\cos x)$ κείται μεταξύ των άλλων δύο καμπυλών στο σχήμα, και τα γραφήματα συμπίπτουν καθώς $x \to 0$.




**17.** $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2 + h) = 2$

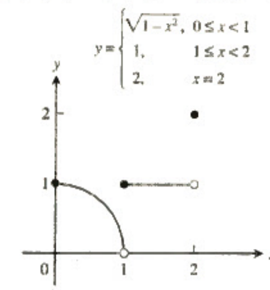
**19.** $\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{-2+h}\right) - \left(\frac{1}{-2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(4-2h)} = -\frac{1}{4}$

**21.** **(α)** Αληθής **(β)** Αληθής **(γ)** Ψευδής **(δ)** Αληθής **(ε)** Αληθής **(στ)** Αληθής **(ζ)** Ψευδής **(η)** Ψευδής **(θ)** Ψευδής **(ι)** Ψευδής **(κ)** Αληθής **(λ)** Ψευδής

**23.** **(α)** Όχι **(β)** Ναι, 0 **(γ)** Όχι



**25.** **(α)** $D: 0 \le x \le 2$, $R: 0 < y \le 1$ και $y = 2$
**(β)** $(0, 1) \cup (1, 2)$ **(γ)** $x = 2$ **(δ)** $x = 0$




**27.** $\sqrt{3}$

**29.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

**31.** **(α)** 1 **(β)** $-1$

**35.** **(α)** 4 **(β)** $-2$

**37.** Ναι

**39.** $\delta = \epsilon^2$, $\lim_{x\to 5^+}\sqrt{x-5} = 0$

**41.** Ναι, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

## Ενότητα 1.3, σελ. 118-120

**1.** **(α)** $\pi$ **(β)** $\pi$

**3.** **(α)** $-\frac{5}{3}$ **(β)** $-\frac{5}{3}$

**5.** $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin 2x}{x} \le \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x} = 0$ λόγω του θεωρήματος σάντουιτς

**7.** **(α)** $\frac{2}{5}$ **(β)** $\frac{2}{5}$

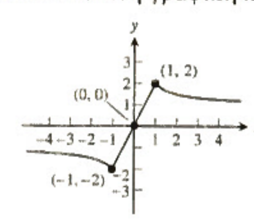
**9.** **(α)** $-\infty$ **(β)** $\infty$

**11.** **(α)** $\infty$ **(β)** $-\infty$

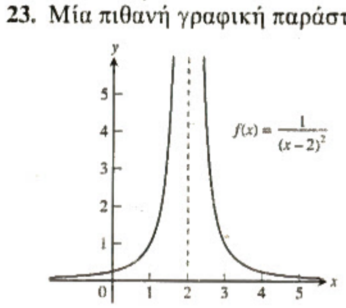
**13.** **(α)** $-\frac{2}{3}$ **(β)** $-\frac{2}{3}$

**15.** 0 **17.** 1 **19.** $\infty$

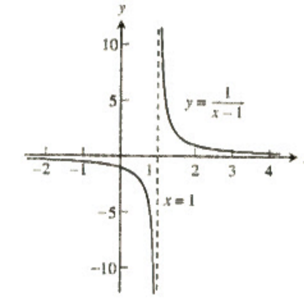
**21.** Μία πιθανή γραφική παράσταση.



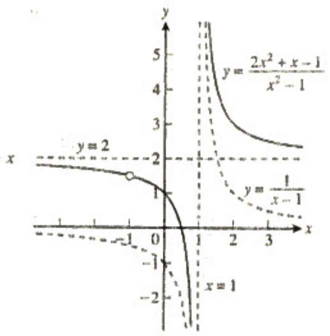

**23.** Μία πιθανή γραφική παράσταση.



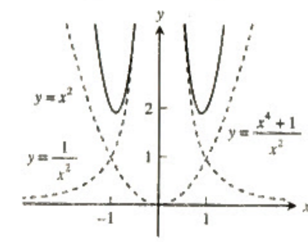

**25.** $y = \frac{1}{x-1}$



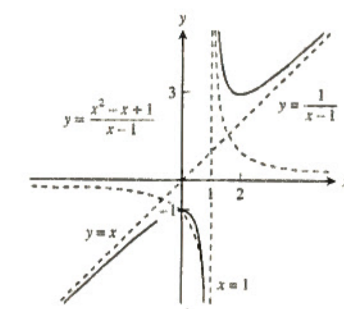

**27.** $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$



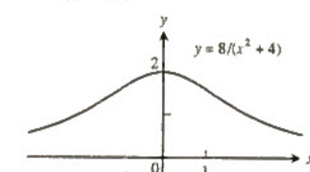

**29.** $y = \frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$




**31.** $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$




**33.** $y = \frac{8}{x^2 + 4}$




**35.** Γραφική παράσταση (α)

**37.** Γραφική παράσταση (δ)

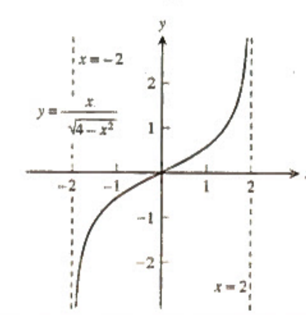
**39.** **(α)** $e^x$ **(β)** $-2x$

**41.** **(α)** $x$ **(β)** $x$

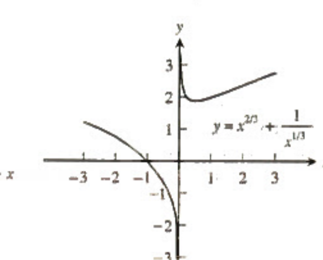
**43.** **(α)** $\frac{1}{2}$ **(β)** $\frac{1}{2}$

**45.** Το πολύ 2

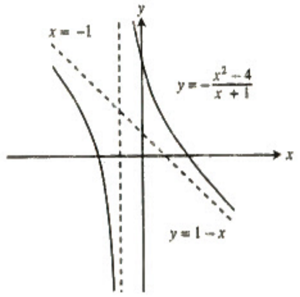
**47.** $y = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$



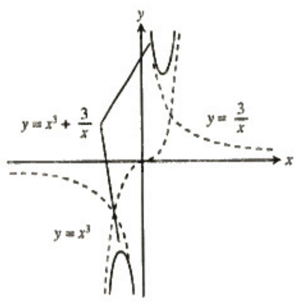

**49.** $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$



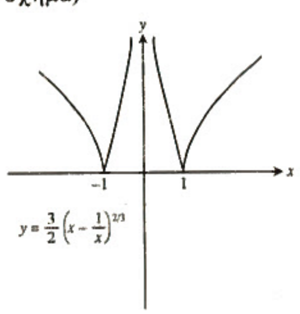
51. Στο $\infty$: $\infty$, στο $-\infty$: 0
53. Στο $\infty$: 0, στο $-\infty$: 0
55. 1
57. 3
59. $y = -\dfrac{x^2-4}{x+1} = 1 - x + \dfrac{3}{x+1}$




61. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ακολουθεί τον όρο που κυριαρχεί σε κάθε περιοχή.

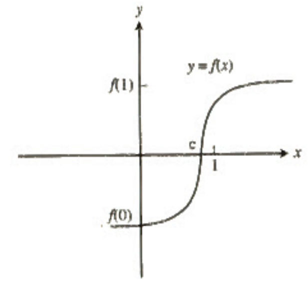



63. (α) $y \to \infty$ (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα)
(β) $y \to \infty$ (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα)
(γ) Σημεία ανακάμψεως για $x = \pm 1$ (δείτε το ακόλουθο σχήμα)

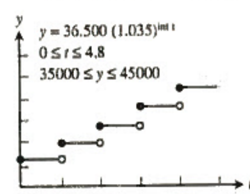



## Ενότητα 1.4, σελ. 128-130

1. Όχι· ασυνεχής στο $x = 2$· δεν ορίζεται στο $x = 2$
3. Συνεχής
5. (α) Ναι (β) Ναι (γ) Ναι (δ) Ναι
7. (α) Όχι (β) Όχι
9. 0
13. Ασυνεχής για $x = 2$
15. Ασυνεχής για $t = 3$ και για $t = 1$
17. Ασυνεχής για $\theta = 0$
19. Συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$
21. 0· συνεχής
23. 1· συνεχής
25. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) < 0$, $f(1) > 0 \Rightarrow$ λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής η $f(x)$ θα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(0)$ και $f(1) \Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει τουλάχιστον μια λύση μεταξύ $x = 0$ και $x = 1$.



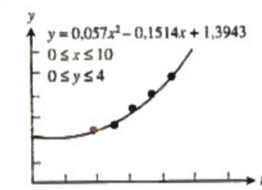

27. Και τα πέντε ερωτήματα ζητούν το ίδιο πράγμα, εξαιτίας της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής συνεχών συναρτήσεων.
29. Υπάρχουν πολλές πιθανές εξηγήσεις. Για παράδειγμα, η $f(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ είναι ασυνεχής στο $x = 2$ εφόσον δεν ορίζεται στο σημείο αυτό. Ωστόσο η ασυνέχεια μπορεί να αρθεί, διότι η $f$ έχει όριο (ίσο με 1) καθώς $x \to 2$.
31. $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \approx -1{,}791$, $r_2 = r_3 = r_4 = 0$, και $r_5 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}791$
35. Ναι, εξαιτίας της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής
39. (β) Συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού $[0, 5)$ εκτός στα $t = 1, 2, 3, 4$




45. $x \approx 1{,}8794$, $-1{,}5321$, $-0{,}347347$. $x \approx 1{,}7549$
49. $x \approx 3{,}5156$
51. $x \approx 0{,}7391$

## Ενότητα 1.5, σελ. 134-137

1. $P_1$: $m_1 = 1$, $P_2$: $m_2 = 5$
3. $P_1$: $m_1 = \frac{5}{2}$, $P_2$: $m_2 = -\frac{1}{2}$
5. $y = 2x + 5$
7. $y = 12x + 16$
9. $y + 1 = -3(x - 1)$
11. $y - 3 = -2(u - 3)$
13. $-\frac{1}{4}$
15. $(-2, -5)$
17. Στο $x = 0$, $y = -(x + 1)$· στο $x = 2$, $y = -(x - 3)$.
19. 19,6 m/sec
21. $6\pi$
23. 3,72 m/sec
25. Ναι
27. Ναι
29. (α) $\dfrac{1-e^{-2}}{2} \approx 0{,}432$ (β) $\dfrac{e^3-e}{2} \approx 8{,}684$
31. (α) $-\dfrac{4}{\pi} \approx -1{,}273$ (β) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx -1{,}654$
33. (α) 0,3 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
(β) 0,5 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
(γ) $y = 0{,}057x^2 - 0{,}1514x + 1{,}3943$

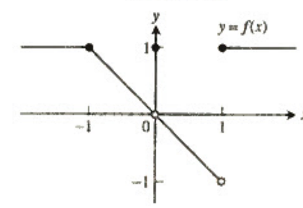





(δ) 1994 έως 1995: 0,31 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος, 1995 έως 1997: 0,53 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
(ε) 0,65 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
35. (α) Πουθενά
37. (α) Στο $x = 0$
39. (α) Πουθενά
41. (α) Στο $x = 1$
43. (α) Στο $x = 0$

## Ασκήσεις κεφαλαίου 1, σελ. 137-139

1. Στο $x = -1$: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$, άρα $\lim_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$· συνεχής στο $x = -1$
Στο $x = 0$: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ωστόσο, $f(0) \neq 0$, άρα η $f$ είναι ασυνεχής στο $x = 0$. Η ασυνέχεια μπορεί να αρθεί αν ορίσουμε εκ νέου την τιμή $f(0)$) ως 0.
Στο $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, άρα το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 1$, και η ασυνέχεια δεν είναι αιρόμενη.




3. (α) $-21$ (β) 49 (γ) 0 (δ) 1 (ε) 1 (στ) 7 (ζ) $-7$ (η) $-\frac{1}{7}$
5. 4
7. (α) $(-\infty, +\infty)$ (β) $[0, \infty)$ (γ) $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ (δ) $(0, \infty)$
9. (α) Δεν υπάρχει (β) 0
11. $\frac{1}{2}$
13. $2x$
15. $-\frac{1}{4}$
17. $\frac{2}{5}$
19. 0
21. $-\infty$
23. 0
25. 1
27. 0
29. (β) 1,324717957

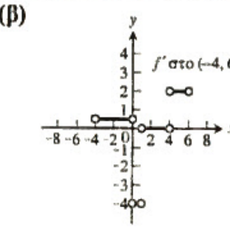
## Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 1, σελ. 139-141

3. 0· χρειαστήκαμε το αριστερό όριο διότι η συνάρτηση δεν ορίζεται για $v > c$.
5. $15 \le t \le 25$· εντός 5°C
7. (α) $\lim_{a\to 0} r_+(a) = 0{,}5$, $\lim_{a\to -1^+} r_+(a) = 1$
(β) Το $\lim_{a\to 0} r_-(a)$ δεν υπάρχει, $\lim_{a\to -1^+} r_-(a) = 1$
9. (α) Αληθής (β) Ψευδής (γ) Αληθής (δ) Ψευδής

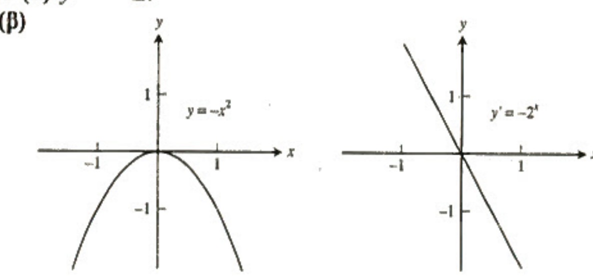
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Ενότητα 2.1, σελ. 152-155

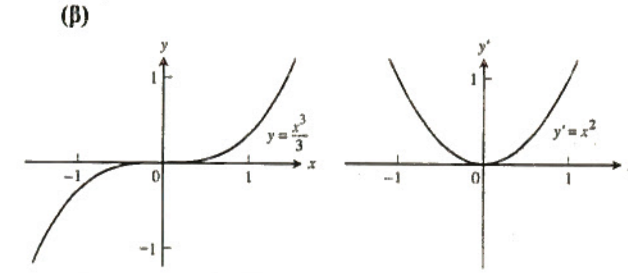
1. $-2x, 6, 0$
3. $3t^2 - 2t, 5$
5. $\dfrac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \sqrt{3}$
7. $2x + 1, 2$
9. $4x^2, 8x$
11. $y' = 2x^3 - 3x - 1 \Rightarrow y'' = 6x^2 - 3 \Rightarrow y''' = 12x \Rightarrow y^{(4)} = 12 \Rightarrow y^{(n)} = 0$ για κάθε $n \ge 5$
13. (α) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$, $y - 1 = 8(x - 2)$
(β) $[-4, \infty)$
(γ) Η εξίσωση μιας τέτοιας εφαπτομένης βρέθηκε ήδη στο ερώτημα (α) για $x = 2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης την καμπύλης στο σημείο $(-2, 1)$ είναι $y - 1 = 8(x - (-2))$.
15. (β)
17. (δ)
19. (α) Η $f'$ δεν ορίζεται για $x = 0, 1, 4$. Στα σημεία αυτά, οι αριστερές και οι δεξιές παράγωγοι δεν είναι ίσες.
(β)




21. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$, $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \Rightarrow$ η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει
23. (α) Η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της $-2 \le x \le 3$.
(β) Πουθενά (γ) Πουθενά
25. (α) Για $-1 \le x < 0$ και $0 < x \le 2$
(β) Στο $x = 0$ (γ) Πουθενά
27. (α) $y' = -2x$
(β)




(γ) $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$
(δ) $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$
29. (α) $y' = x^2$
(β)




(γ) $x \neq 0$, $x = 0$, πουθενά
(δ) $-\infty < x < \infty$, πουθενά