ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. **ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ**
2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
5. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ
6. ΚΡΟΥΣΗ
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE
8. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON
9. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1: Η επίπεδη κίνηση υλικού σημείου μάζας m, σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων, καθορίζεται από τις εξισώσεις $x = 3a\cos\omega t$ και $y = (b/2)\sin\omega t$, όπου a, b, ω είναι γνωστές σταθερές. (α) Να προσδιορίσετε το είδος της τροχιάς του σωματιδίου και τα χαρακτηριστικά της, (β) Να βρεθεί ο λόγος F_x / F_y, όπου F_x και F_y είναι οι συνιστώσες της ενεργούσης δύναμης.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ – ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ | ΣΕΠ 2014 | 03/09/14

$x = 3a\cos\omega t$

ΜΟΝ: 3 $\quad y = \frac{b}{2}\sin\omega t$

α) είδος τροχιάς

β) $\frac{F_x}{F_y} = ;$

ΛΥΣΗ

(α)

$x = 3a\cos\omega t \Rightarrow \frac{x}{3a} = \cos\omega t \Rightarrow \frac{x^2}{(3a)^2} = \cos^2\omega t$

$y = \frac{b}{2}\sin\omega t \Rightarrow \frac{y}{b/2} = \sin\omega t \Rightarrow \frac{y^2}{(b/2)^2} = \sin^2\omega t$

$+$

$$\boxed{\frac{x^2}{(3a)^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1}$$ έλλειψη

β) $x = 3a\cos\omega t \Rightarrow \dot{x} = -3a\,\omega\sin\omega t \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -3a\omega^2\cos\omega t}$

$y = \frac{b}{2}\sin\omega t \Rightarrow \dot{y} = \frac{b}{2}\omega\cos\omega t \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\frac{b}{2}\omega^2\sin\omega t}$

Οπότε:

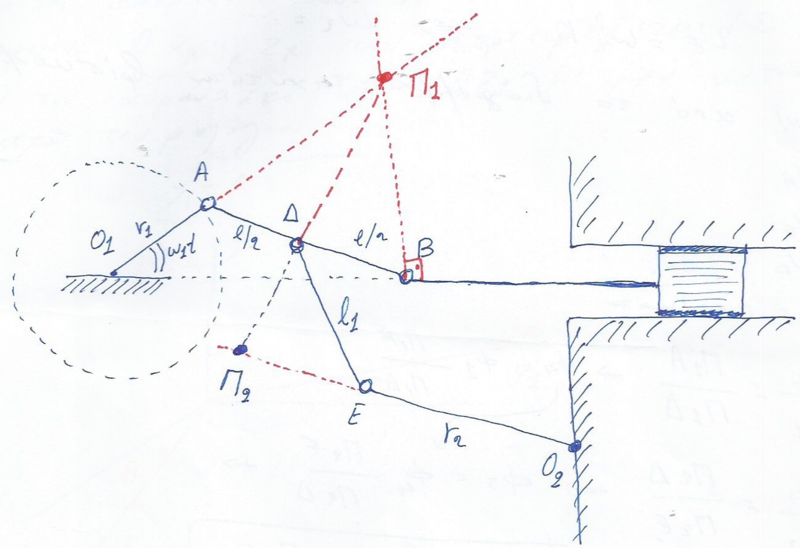
$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{\cancel{m}\ddot{x}}{\cancel{m}\ddot{y}} = \frac{\cancel{-}3a\cancel{\omega^2}\cos\omega t}{\cancel{-}\frac{b}{2}\cancel{\omega^2}\sin\omega t} \Rightarrow \frac{F_x}{F_y} = \frac{3a\cos\omega t}{\frac{b}{2}\sin\omega t} \Rightarrow \boxed{\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y}}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
2. **ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ**
3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
5. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ
6. ΚΡΟΥΣΗ
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE
8. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON
9. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

2.8) Να προσδιορισθούν τα στιγμιαία κέντρα περιστροφής των ράβδων AB και ΔΕ του σχήματος για την θέση που καθορίζεται με την γωνία $\omega_1 t$. Να βρεθούν επίσης η γων. ταχύτητα ω_2 της ράβδου O_2E.

Δίνονται: r_1, l, l_1, α.



Το σημείο A κινείται επί της περιφέρειας (O_1, r_1) και έχει ταχύτητα $\upsilon_A \perp r_1$. Η ορθή ταχύτητα φ_1 βρίσκεται επί της O_1A.

Το B κινείται ευθύγραμμα και η υ_B κείται πάνω στην O_1B,

Η ορθή ταχύτητα φ_2 κείται πάνω στην κάθετη στο σημείο B της O_1B

Επομένως το στιγμιαίο κέντρο στροφής (Απόλυτος πόλος) της AB είναι το σημείο Π_1.

Η ορθή ταχύτητα του Δ η φ_4 κείται πάνω στην $\Pi_1\Delta$

Το σημείο E έχει ταχύτητα $\upsilon_E \perp r_2$ και επί της O_2E.

Αλλά το Δ είναι ο σχετικός πόλος των AB και ΔΕ

Αλλά γνωρίζουμε ότι 3 πόλοι βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία

Άρα ο απόλυτος πόλος της ΔΕ είναι το σημείο τομής των $\Pi_1\Delta$ και O_2E.

Αν είναι:

$v_A = r_1 \omega_1$, το Ε κινείται επί περιφέρεια κέντρου O_2 και ακτίνας r_2 , δηλαδή η ορθή ταχύτητα ϕ_3 κείται πάνω στην O_2E.

Έτσι

γνωρίζοντας την v_A κατασκευάζουμε το διάγραμμα ορθών ταχυτήτων και βρίσκουμε την v_E.

Επειδή $v_E = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \dots$

Επομένως από το διάγραμμα ταχυτήτων βρίσκουμε τα

$\phi_1 = v_A$

$\phi_3 = v_E$

$\phi_4 = v_\Delta$

όπως παρακάτω

$$\frac{\phi_4}{\phi_1} = \frac{\Pi_1 A}{\Pi_1 \Delta} \Rightarrow \phi_4 = \phi_1 \frac{\Pi_1 A}{\Pi_1 \Delta}$$

$$\frac{\phi_4}{\phi_3} = \frac{\Pi_2 \Delta}{\Pi_2 E} \Rightarrow \phi_3 = \phi_4 \frac{\Pi_2 E}{\Pi_2 \Delta} \Rightarrow$$

$$v_E = \boxed{\phi_3 = \phi_1 \frac{\Pi_1 A}{\Pi_1 \Delta} \frac{\Pi_2 E}{\Pi_2 \Delta}}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. **ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ**
4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
5. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ
6. ΚΡΟΥΣΗ
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE
8. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON
9. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

3.1) Η επίπεδη κίνηση υλικού σημείου Μ μάζας m καθορίζεται από τις εξισώσεις

$x = \alpha \cos \gamma t$
$y = \beta \sin \gamma t$ όπου α, β, γ = γνωστές σταθερές

Ζητούνται: (i) η τροχιά
(ii) η ασκούμενη δύναμη
(iii) ο χρόνος μιας πλήρους περιγραφής και
(iv) το καλυπτόμενο εμβαδό από την ακτίνα ΟΜ ανά μονάδα χρόνου, σε περίπτωση που η τροχιά είναι κλειστή.

(i) Απαλείφοντας τον χρόνο t παίρνουμε:

$\cos\gamma t = \frac{x}{\alpha} \Rightarrow \cos^2\gamma t = \frac{x^2}{\alpha^2}$

$\sin\gamma t = \frac{y}{\beta} \Rightarrow \sin^2\gamma t = \frac{y^2}{\beta^2}$

$+$

$$\boxed{1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}} \rightarrow \text{έλλειψη}$$

(ii) Αν F_x και F_y είναι οι συνιστώσες της ασκούμενης δύναμης τότε

$F_x = m\ddot{x}$ και $F_y = m\ddot{y}$

όμως $x = \alpha\cos\gamma t \Rightarrow \dot{x} = -\alpha\gamma\sin\gamma t \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\alpha\gamma^2\cos\gamma t}$

$y = \beta\sin\gamma t \Rightarrow \dot{y} = \beta\gamma\cos\gamma t \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\beta\gamma^2\sin\gamma t}$

Άρα $F_x = m\ddot{x} = -m\gamma^2\underbrace{\alpha\cos\gamma t}_{=x} \Rightarrow \boxed{F_x = -m\gamma^2 x} \Rightarrow \boxed{\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y}} \Rightarrow$

$F_y = m\ddot{y} = -m\gamma^2\underbrace{\beta\sin\gamma t}_{=y} \Rightarrow \boxed{F_y = -m\gamma^2 y}$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. **ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ**
5. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ
6. ΚΡΟΥΣΗ
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE
8. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON
9. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$\boxed{\sum_i \left(\vec{r_i} \times \vec{F_i}^{\,\varepsilon\sigma\omega\tau}\right) = 0}$$

Η ΡΟΠΗ ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗΣ ΤΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ = 0

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

$$\boxed{X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}}$$

Στην γενική περίπτωση

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i}} \quad (1)$$

Γενικά: Το Κ.Μ ≠ Κ.Β

Παραγωγίζοντας την (1) βρίσκουμε: $\vec{v}_{CM}$, $\vec{\gamma}_{CM}$

$$m_i \vec{\gamma}_i = \vec{F}_i \quad \text{ή} \quad \boxed{m\, \ddot{x}_{KM} = F_x}$$

$$m\, \vec{\gamma}_{KM} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

$\vec{F}_i$ = είναι οι ενεργούσες δυνάμεις επί σημείου i

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΜΑΖΑΣ

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow x_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \Rightarrow$$

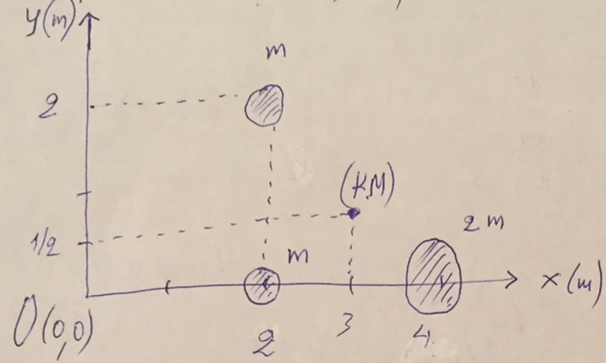
$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm}$$

Ομοίως $\boxed{y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm}$, $\boxed{z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm}$

ΓΕΝΙΚΑ : $\boxed{r_{CM} = \frac{1}{M}\int r\, dm}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Να βρεθεί το Κ.Μ. για τις διακριτές μάζες του παρακάτω σχήματος



ΛΥΣΗ

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m \cdot 2 + 2m \cdot 4 + m \cdot 2}{m + m + 2m} = \frac{2m + 8m + 2m}{4m} =$$

$$= \frac{12\cancel{m}}{4\cancel{m}} = 3 \Rightarrow \boxed{x_{CM} = 3}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m \cdot 2 + \cancel{m \cdot 0}^{\,0} + \cancel{2m \cdot 0}^{\,0}}{m + m + 2m} = \frac{2\cancel{m}}{4\cancel{m}} \Rightarrow$$

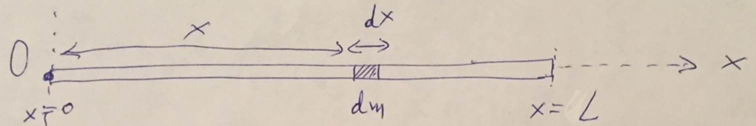
$$\boxed{y_{CM} = \frac{1}{2}}$$

Επομένως: $(x_{CM}, y_{CM}) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρεθεί το Κ.Μ ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L, και γραμμική κατανομή μάζας λ.

ΛΥΣΗ



Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ράβδος εκτείνεται κατά τον άξονα των x.

Θεωρώντας μία στοιχειώδη μάζα (dm) με μήκος dx που βρίσκεται σε απόσταση x από το $O(0,0)$ έχουμε:

$$\boxed{X_{CM} = \frac{1}{m}\int x \, dm} \quad (1)$$

Θεωρώντας ότι η ράβδος έχει μία σταθερή κατανομή μάζας (λ) η οποία είναι γραμμική, έχουμε:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \Rightarrow \boxed{dm = \lambda \, dx} \quad (2)$$

$$\text{Η } (1) \xRightarrow{(2)} X_{CM} = \frac{1}{m}\int_{x=0}^{x=L} x \lambda \, dx = \frac{1}{m}\cdot\lambda\int_{0}^{L} x \, dx \Rightarrow$$

$$X_{CM} = \frac{1}{m}\lambda\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L \Rightarrow \boxed{X_{CM} = \frac{1}{m}\lambda\frac{L^2}{2}} \quad (3)$$

Επίσης ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε:

$$dm = \lambda \cdot dx \Rightarrow \int_m dm = \int_L \lambda \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_0 dm = \lambda \int_0 dx$$

$$\Rightarrow m = \lambda \cdot L \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{m}{L}} \quad (4)$$

Τελικά:

$$Η \ (3) \xRightarrow{(4)} \quad X_{CM} = \frac{1}{\cancel{m}} \frac{\cancel{m}}{\cancel{L}} \frac{L^{\cancel{2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{X_{CM} = \frac{L}{2}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $y_{CM} = 0$, $z_{CM} = 0$

Λαμβανομένου υπ΄ όψη της τελευταίας εξίσωσης και της (10.204) η έκφραση

$$K = \frac{Q\ddot{x}}{2g}$$

γίνεται

$$\mu Q = \frac{1}{2g}\, Q\, \frac{2gP}{3Q + 2P}$$

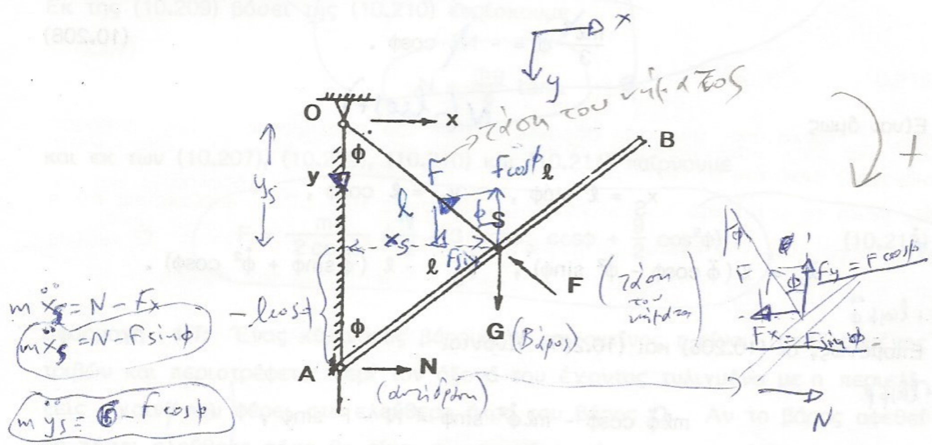
εκ της οποίας παίρνουμε

$$P = 3\mu Q \mp 2\mu P ,$$

δηλαδή

$$\frac{P}{Q} = \frac{3\mu}{1 - 2\mu} . \qquad (10.205)$$

Εφαρμογή 4.6: Λεπτή πρισματική ράβδος AB μήκους 2ℓ αναρτάται μέσω σχοινιού μήκους ℓ από το κέντρο βάρους της και σημείου O, ενώ το ένα άκρο της A ολισθαίνει άνευ τριβής επί της κατακορύφου από το σημείο ανάρτησης (Σχ. 10.45). Ζητείται η εξίσωση της κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας αυτής με την κατακόρυφο, καθώς και οι αντιδράσεις.



Σχήμα 10.45: Ράβδος ανηρτημένη εκ του κέντρου βάρους της.

Λύση: Οι αναλυτικές εξισώσεις του κέντρου βάρους της ράβδου ως προς το σύστημα συντεταγμένων xOy (Σχ. 10.45) εκφράζονται μέσω των εξισώσεων:

$$m\ddot{x}_S = N - F\sin\phi\ , \tag{10.206}$$

$$m\ddot{y}_S = G - F\cos\phi\ , \tag{10.207}$$

στις οποίες N παριστάνει την κάθετη αντίδραση στο A λόγω μη υπάρξεως τριβής, G είναι το βάρος της ράβδου και F παριστάνει την τάση του σχοινιού. Λόγω ολίσθησης του A επί του κατακορύφου επιπέδου έχουμε και περιστροφή της ράβδου περί άξονα κάθετο στο κατακόρυφο επίπεδο διά του κέντρου βάρους S. Συνεπώς, η τρίτη των δυναμικών εξισώσεων Euler (4.67) δίδει:

$$J_S\ddot{\phi} = M_S = -N\ell\cos\phi\ .$$

Αντίδραση άξονα y

Λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι η ράβδος είναι πρισματική και λεπτή από τον τύπο (10.163) παίρνουμε

$$J_S \simeq \frac{(2\ell)^2}{12}\ m = \frac{\ell^2 m}{3}$$

$J_S = \frac{1}{12} m\ell^2$

και έτσι η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\phi} = -N\ell\cos\phi\ . \tag{10.208}$$

$N(-\ell\cos\phi)$

Είναι όμως

$$x_S = \ell\sin\phi\ ,\qquad y_S = \ell\cos\phi\ ,$$

$\dot{x}_S = \ell\cos\phi\,\dot{\phi}$

$$\ddot{x}_S = \ell(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi)\ ,\qquad \ddot{y}_S = -\ell(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi)\ .$$

$\ddot{x}_S = \ell\sin\phi\,\dot{\phi}\,\dot{\phi} + \ell\cos\phi\,\ddot{\phi}$

$\ddot{x}_S = -\ell\sin\phi\,\dot{\phi}^2 + \ell\cos\phi\,\ddot{\phi}$

Επομένως, οι (10.206) και (10.207) γίνονται

$$m\ell\ddot{\phi}\cos\phi - m\ell\dot{\phi}^2\sin\phi = N - F\sin\phi\ ,$$ cosφ

$$-(m\ell\ddot{\phi}\sin\phi + m\ell\dot{\phi}^2\cos\phi) = mg - F\cos\phi$$ sinφ

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση

$$N \cos\phi = m\ell\ddot{\phi} + mg \sin\phi \, . \tag{10.209}$$

Εισάγοντας την σχέση αυτή στην (10.208) ευρίσκουμε

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{4}\frac{g}{\ell} \sin\phi = 0 \, . \tag{10.210}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\dot{\phi} \neq 0$ αμφότερα τα μέλη της (10.210) γράφουμε

$$\frac{(\dot{\phi}^2)'}{2\dot{\phi}} + \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\left(-\frac{(\cos\phi)'}{\dot{\phi}}\right) \Rightarrow$$

$$(\dot{\phi}^2)^{\cdot} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} (\cos\phi)^{\cdot} = 0$$

$$(\dot{\phi}^2)' = 2\dot{\phi}\ddot{\phi} \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{(\dot{\phi}^2)'}{2\dot{\phi}}}$$

και $(\cos\phi)' = -\sin\phi\,\dot{\phi} \Rightarrow \boxed{\sin\phi = -\frac{(\cos\phi)'}{\dot{\phi}}}$

από την ολοκλήρωση της οποίας υπολογίζουμε

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} \cos\phi + C \, .$$

$\Rightarrow C = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\phi_0$

Θεωρώντας την αρχική συνθήκη γιά $t = 0$ $\dot{\phi}(0) = 0$, $\phi(0) = \phi_0$ καταλήγουμε τελικά στην έκφραση

Εξ. κίνησης

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} (\cos\phi - \cos\phi_0) \, . \tag{10.211}$$

Εκ της (10.209) βάσει της (10.210) ευρίσκουμε

$$N = \frac{mg}{4} \tan\phi$$

και εκ των (10.207), (10.209), (10.210) και (10.211) παίρνουμε

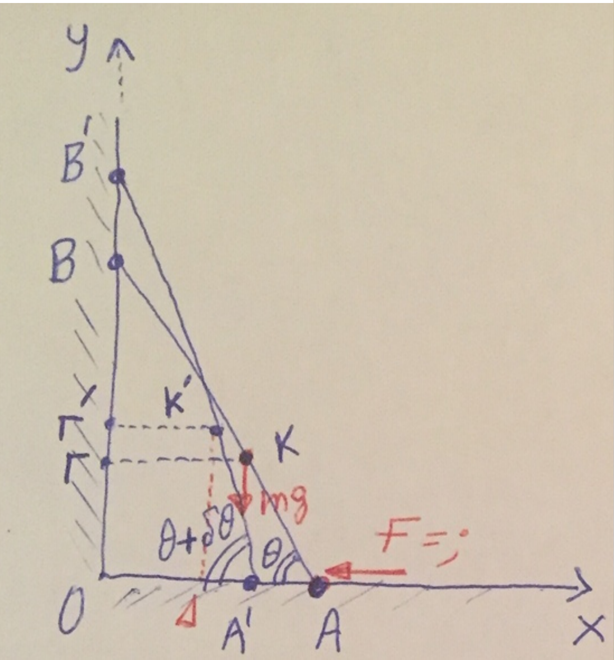
$$F = \frac{mg}{2\cos\phi} \left(\frac{1}{2} - 3 \cos\phi_0 \cos\phi + \frac{9}{2} \cos^2\phi \right) . \tag{10.212}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
5. **ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ**
6. ΚΡΟΥΣΗ
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE
8. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON
9. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Δίνεται ομογενής ράβδος ΑΒ μάζας m και μήκους *l*. Τα άκρα Α και Β της ράβδου δύναται να ολισθαίνουν χωρίς τριβή επί του οριζοντίου άξονα Οx και επί του κατακόρυφου άξονα Οy αντίστοιχα. Ζητείται να καθορισθεί η απαιτούμενη δύναμη στο σημείο Α ώστε η ράβδος να ισορροπεί.



ΛΥΣΗ.

Από την αρχή των δυνατών έργων έχουμε: $\boxed{\Sigma W^{F_{εξωτ}} = 0}$ (1)

$$\Rightarrow \underset{-}{F}\cdot\underset{-}{(AA')} + \underset{-}{(mg)}\cdot\underset{+}{(\Gamma\Gamma')} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(AA') - mg(\Gamma\Gamma') = 0} \quad (2)$$

Όμως $AA' = OA - OA'$

$$AA' = l\cos\theta - l\cos(\theta+\delta\theta)$$

$$AA' = l\cos\theta - l(\cos\theta \underbrace{\cos\delta\theta}_{1\approx} - \sin\theta \underbrace{\sin\delta\theta}_{\delta\theta\approx})$$

$$AA' = l\cos\theta - l(\cos\theta - \sin\theta\,\delta\theta)$$

$$AA' = \cancel{l\cos\theta} - \cancel{l\cos\theta} + l\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\boxed{AA' = l\sin\theta\,\delta\theta} \quad (3)$$

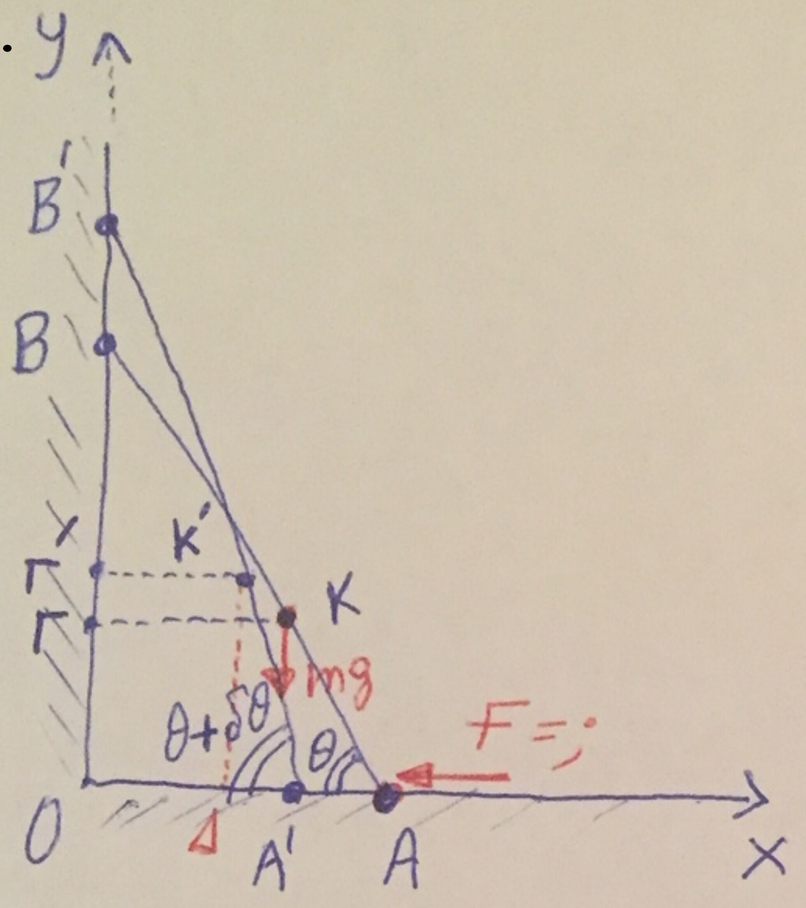
Ομοίως $\Gamma\Gamma' = O\Gamma' - O\Gamma$

$$\Gamma\Gamma' = \frac{l}{2}\sin(\theta+\delta\theta) - \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\Gamma\Gamma' = \frac{l}{2}(\sin\theta \underbrace{\cos\delta\theta}_{1\approx} + \cos\theta \underbrace{\sin\delta\theta}_{\delta\theta\approx}) - \frac{l}{2}\sin\theta$$

ΑΣΚΗΣΗ 1 (συνέχεια)

1.



$$\Gamma\Gamma' = \frac{\ell}{2}\left(\sin\theta + \cos\theta\,\delta\theta\right) - \frac{\ell}{2}\sin\theta$$

$$\Gamma\Gamma' = \cancel{\frac{\ell}{2}\sin\theta} + \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\delta\theta - \cancel{\frac{\ell}{2}\sin\theta}$$

$$\boxed{\Gamma\Gamma' = \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\delta\theta} \quad (4)$$

Επομένως η $(2) \xrightarrow[(4)]{(3)}$

$$F\cdot \ell\sin\theta\,\delta\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\delta\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\ell\,\delta\theta}\cdot\left(F\sin\theta - \frac{mg}{2}\cos\theta\right) = 0 \\ \ell \neq 0 \\ \delta\theta \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\sin\theta - \frac{mg}{2}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow F\sin\theta = \frac{mg}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg}{2}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{mg}{2}\cot\theta}$$

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
5. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ
6. **ΚΡΟΥΣΗ**
7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE
8. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON
9. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
5. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ
6. ΚΡΟΥΣΗ
7. **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE**
8. **ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON**
9. **ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

T= Κινητική Ενέργεια

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$\dot{q}_i$ = Γενικευμένες ταχύτητες

Q_j= Γενικευμένες Δυνάμεις

q_j= Γενικευμένες συντεταγμένες

όπου :
$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

και j=1,2,…., k

Εξισώσεις LAGRANGE

Στην περίπτωση κατά την οποία οι εξωτερικές δυνάμεις απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, δηλαδή:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

όπου: $V = V(r_1, r_2, \ldots., r_N)$

και $r_i = r_i\,(q_1, q_2, \ldots., q_k)$

οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

γίνονται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = -\frac{\partial (V-V)}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

Εφόσον η V δεν εξαρτάται από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$

$$V=V(r_1, r_2, ..., r_N)$$

Επομένως εισάγοντας μια καινούργια συνάρτηση L που ορίζεται ως L :

$$L = T - V$$

θα έχουμε :

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

$$\boxed{L = T - V}$$

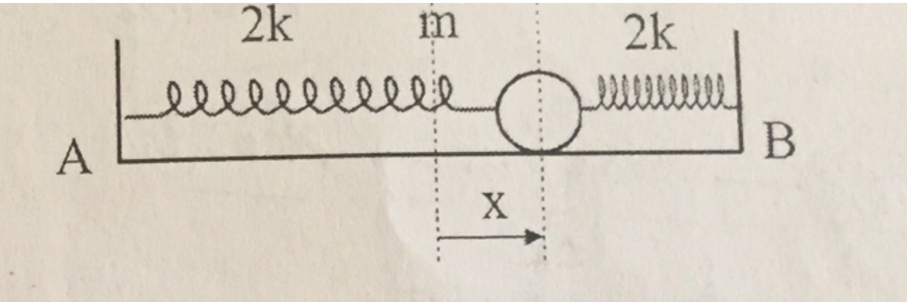
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση Lagrange**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΗ 11



ΘΕΜΑ 3: Μία μικρή μάζα m συνδέεται με δύο όμοια ελατήρια σταθεράς $2k$ το καθένα απ΄ αυτά. Η μάζα m είναι ελεύθερη να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια ευθεία πάνω σ' ένα οριζόντιο τραπέζι ΑΒ (σχήμα 2) και αρχικά τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Τα σημεία Α και Β όπου στερεώνονται τα άκρα των ελατηρίων είναι σταθερά. Θεωρώντας σαν μοναδική γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση x της μάζας m σε μια τυχαία θέση από την θέση ισορροπίας να βρείτε:

(α) την συνάρτηση Lagrange του συστήματος **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

(β) την εξίσωση Lagrange που διέπει την κίνηση του συστήματος **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

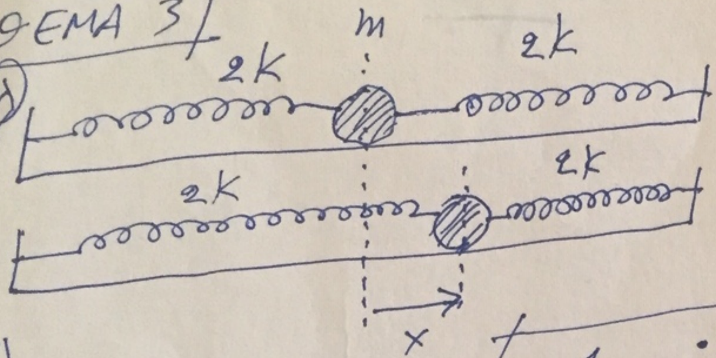
ΑΣΚΗΣΗ 11

ΘΕΜΑ 3

ΜΟΝ: 4

ΜΟΝ: 2 (i) $L = ;$

ΜΟΝ: 2 (ii) Εξισώσεις Lagrange



(i)

$T = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2}$

$V = \frac{1}{2} 2k x^2 + \frac{1}{2} 2k (-x)^2 \Rightarrow V = kx^2 + kx^2 \Rightarrow \boxed{V = 2kx^2}$

ΜΟΝ: 2

Οπότε: $\boxed{L = T - V} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2kx^2}$

(ii) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \cancel{2} \dot{x} = m\dot{x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -4kx$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \Rightarrow$

$\boxed{m\ddot{x} + 4kx = 0}$