*21  - 04 - 2021*

# Εξισώσεις LAGRANGE

# ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

T= Κινητική Ενέργεια

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$\dot{q}_i$ = Γενικευμένες ταχύτητες

$Q_j$= Γενικευμένες Δυνάμεις

$q_j$= Γενικευμένες συντεταγμένες

όπου :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

και j=1,2,…., k

# Εξισώσεις LAGRANGE

Στην περίπτωση κατά την οποία οι εξωτερικές δυνάμεις απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, δηλαδή:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

όπου: $V=V(r_1, r_2, ...., r_N)$

και $r_i = r_i\,(q_1, q_2, ...., q_k)$

οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

γίνονται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

# Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = -\frac{\partial (V-V)}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

Εφόσον η $V$ δεν εξαρτάται από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$

$$V=V(r_1, r_2, \ldots, r_N)$$

Επομένως εισάγοντας μια καινούργια συνάρτηση $L$ που ορίζεται ως $L$ :

$$L = T - V$$

θα έχουμε :

# Εξισώσεις LAGRANGE

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \\ \\ \boxed{L = T - V} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση Lagrange**

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

# ΑΣΚΗΣΗ 1

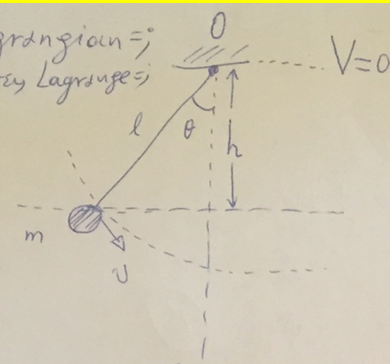
***1.*** Θεωρήστε το απλό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία μάζα $m$ αναρτημένη από ένα μη-εκτατό αβαρές νήμα μήκους $l$ .

*(i)* Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

*(ii)* Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

i) Lagrangian =;

ii) Εξισώσεις Lagrange =;




$\boxed{q_1=\theta}$

$$\boxed{L=T-V} \quad (*)$$

$$L=L(\theta,\dot{\theta},t)$$

i)

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m\upsilon^2} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon=\omega l\\ \omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\upsilon=\dot{\theta}l} \quad (2) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2} \quad (3)$$

$$V=-mgh \Rightarrow \boxed{V=-mgl\cos\theta} \quad (4)$$

Η σχέση $(*) \xrightarrow[(4)]{(3)}$ $L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-(-mgl\cos\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta} \quad (5)$$

# ΑΣΚΗΣΗ 1 (συνέχεια)

***1.*** Θεωρήστε το απλό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία μάζα $m$ αναρτημένη από ένα μη-εκτατό αβαρές νήμα μήκους $l$ .

*(i)* Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

*(ii)* Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta} \quad (5)$$

$\boxed{q = \theta}$

Η Εξίσωση Lagrange (είναι μόνο μία γιατί έχω μόνο μία γενικευμένη συντεταγμένη) θα είναι:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}} m l^2 \cancel{2} \dot{\theta} = m l^2 \dot{\theta} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot{\theta}\right) = m l^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = m l^2 \ddot{\theta} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad (9)$$

Οπότε η (6) γίνεται, εξαιτίας των (7),(8),(9):

$$m l^2 \ddot{\theta} - (-mgl\sin\theta) = 0$$

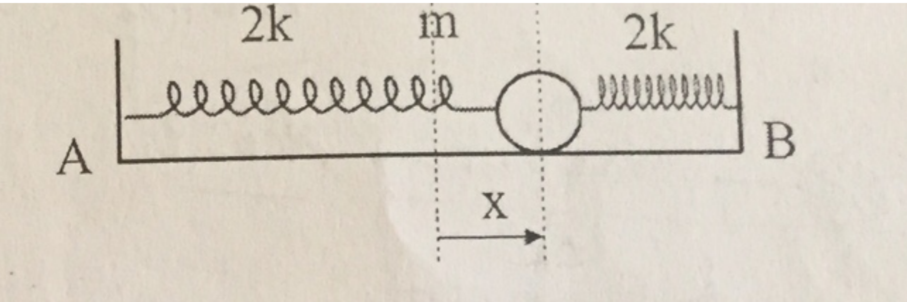
$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

$$\ddot{\theta} + \frac{\cancel{m}g\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΗ 11




**ΘΕΜΑ 3:** Μία μικρή μάζα $m$ συνδέεται με δύο όμοια ελατήρια σταθεράς $2k$ το καθένα απ΄ αυτά. Η μάζα $m$ είναι ελεύθερη να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια ευθεία πάνω σ' ένα οριζόντιο τραπέζι ΑΒ (σχήμα 2) και αρχικά τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Τα σημεία Α και Β όπου στερεώνονται τα άκρα των ελατηρίων είναι σταθερά. Θεωρώντας σαν μοναδική γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση $x$ της μάζας $m$ σε μια τυχαία θέση από την θέση ισορροπίας να βρείτε:

(α) την συνάρτηση Lagrange του συστήματος **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

(β) την εξίσωση Lagrange που διέπει την κίνηση του συστήματος **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

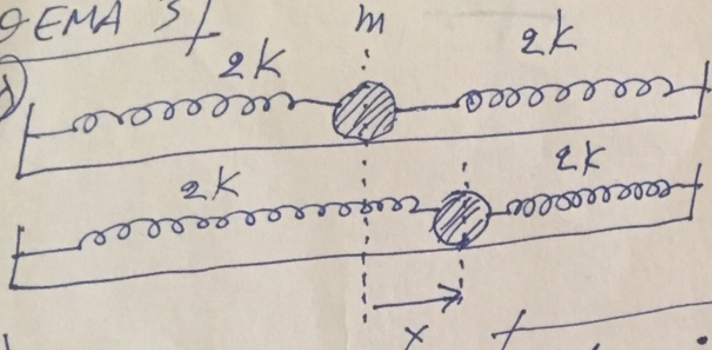
ΑΣΚΗΣΗ 11

ΘΕΜΑ 3

ΜΟΝ: 4

ΜΟΝ: 2 (i) $L = ;$

ΜΟΝ: 2 (ii) Εξισώσεις Lagrange




(i)

$$T=\frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{2} m \dot{x}^2}$$

$$V=\frac{1}{2}\, 2k x^2 + \frac{1}{2}\, 2k (-x)^2 \Rightarrow V = kx^2 + kx^2 \Rightarrow \boxed{V = 2kx^2}$$

Οπότε: $\boxed{L = T - V} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2kx^2}$

ΜΟΝ: 2

(ii)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \cancel{2} \dot{x} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + 4kx = 0}$$

# ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή $t_1$ έως την χρονική στιγμή $t_2$ είναι τέτοια ώστε το συναρτησιοειδές :

$$F=\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k, \mathrm{q}, \mathrm{t})dt$$

όπου $L=T-V$ , να λαμβάνει ακρότατη τιμή (συνήθως ελάχιστο)

Με άλλα λόγια το μηχανικό σύστημα από όλες τις δυνατές τροχιές $q_k(t)$ στον θεσεογραφικό χώρο, επιλέγει εκείνη για την οποία η ποσότητα F γίνεται ακρότατο. Το ολοκλήρωμα F ονομάζεται δράση του συστήματος

# ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η ποσότητα

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

είναι σταθερή και ονομάζεται Hamiltonian του συστήματος

Ορίζοντας ως γενικευμένη ορμή την ποσότητα που ορίζεται ως

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

τότε η Hamiltonian του συστήματος γράφεται:

$$H = \sum_j p_j \, \dot{q}_j - L$$

# Εξισώσεις HAMILTON

Οι εξισώσεις :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Είναι γνωστές ως κανονικές εξισώσεις του Hamilton

# Εξισώσεις HAMILTON

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την επίπεδη κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων V(r). Δεν υπάρχει σύνδεσμος, επομένως:

$$\boxed{H = T + V}$$

$$\boxed{L = T - V}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες ($r,\theta$) σαν γενικευμένες συντεταγμένες, τότε:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2r\,\dot{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2r\,\dot{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}$$

# Εξισώσεις HAMILTON

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επομένως :

$$T = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m\,(\underline{\dot{r}^2 \cos^2\theta} + \underline{r^2 \sin^2\theta\,\dot{\theta}^2} - \underline{2r\,\dot{r}\,\cancel{\sin\theta \cos\theta\,\dot{\theta}}} + \underline{\dot{r}^2 \sin^2\theta} + \underline{r^2 \cos^2\theta\,\dot{\theta}^2} + \underline{2r\,\dot{r}\,\cancel{\sin\theta \cos\theta\,\dot{\theta}}}) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m\,(\underline{\dot{r}^2 \cos^2\theta} + \underline{r^2 \sin^2\theta\,\dot{\theta}^2} + \underline{\dot{r}^2 \sin^2\theta} + \underline{r^2 \cos^2\theta\,\dot{\theta}^2}) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m\,[\,\dot{r}^2\,\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + r^2\,\dot{\theta}^2\,\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1}\,] \longrightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2)}$$

# Εξισώσεις HAMILTON

Επομένως :

$$\boxed{L = T - V}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \\ \\ V = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Οπότε :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \longrightarrow p_r = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{2} \dot{r} \longrightarrow p_r = m \dot{r}$$

Ομοίως :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \longrightarrow p_\theta = \cancel{\frac{1}{2}} m r^2 \cancel{2} \dot{\theta} \longrightarrow p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$$

# Εξισώσεις HAMILTON

Συνεπώς :

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L} \\ &q_r = \mathrm{r} \\ &q_\theta = \theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} &H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L \\ &p_r = m\,\dot{r} \\ &p_\theta = m r^2 \dot{\theta} \\ &L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - V(r) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

Οπότε :

$$H = m\,\dot{r}\dot{r} + m r^2 \dot{\theta}\dot{\theta} - \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) + V(r) \longrightarrow$$

$$H = \underline{m\,\dot{r}^2} + \underline{m r^2 \dot{\theta}^2} \underline{- \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2}\ \underline{- \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot{\theta}^2} + V(r) \longrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot{\theta}^2 + V(r) \longrightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

# Εξισώσεις HAMILTON

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Συνεπώς οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton γράφονται :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \longrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{2p_r}{2m} = \dfrac{p_r}{m} & \longrightarrow \boxed{\dot{r} = \dfrac{p_r}{m}} \\[2ex] \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{2p_\theta}{2mr^2} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} & \longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}} \end{cases}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \longrightarrow \begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\right] = -\left[\dfrac{p_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r}\right] \\[2ex] \qquad = -\left[\dfrac{p_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r}\right] \longrightarrow \boxed{\dot{p}_r = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r}} \\[2ex] \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \longrightarrow \boxed{\dot{p}_\theta = 0} \end{cases}$$

από την οποία, επειδή sinθ ≠ 0, συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι

$$\phi = \text{σταθερά} .$$

Επομένως η κίνηση γίνεται με σταθερά φ, δηλαδή επί του μεσημβρινού της σφαίρας που είναι γεωδαισιακή γραμμή.

SOS

## 7.4 Αρχή της Ελάχιστης Δράσης

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε τις εξισώσεις Lagrange και τονίσαμε ότι η γνώση της $L$ γιά το τυχόν ιδανικό μηχανικό πρόβλημα μας οδηγεί αυτομάτως στην λύση του προβλήματος της αναλυτικής δυναμικής μέσω των εξισώσεων (7.49). Η μέθοδος των εξισώσεων Lagrange είναι τόσο ισχυρή ώστε μπορεί να εφαρμοσθεί και σε περιοχές όπου δεν έχουμε καμιά απεικονιστική ιδέα του τί συμβαίνει, π.χ. πυρηνική φυσική. Τέτοιες περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των εξισώσεων Lagrange σε άλλες περιοχές της φυσικής βάζουν αυτομάτως ορισμένα ερωτήματα, όπως:

α) Είναι αυτοδύναμη η αναλυτική περιγραφή; δηλαδή μπορεί κανείς να ξεκινήσει πάντοτε από μιά γενική αρχή αναφερομένη στην ίδια την Lagrangian και όχι στους νόμους του Νεύτωνος;

β) Επειδή η $L$ ορίζεται στην θεσεογραφικό χώρο, τι είδους γεωμετρική εικόνα μπορούμε να έχουμε στον χώρο αυτόν; Ποιό παραστατικά θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε: Είναι δυνατή η αναγωγή του αναλυτικού προβλήματος σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο θεσεογραφικό χώρο, και αν ναι, τί είδους νέα γεωμετρία θέτει το αναλυτικό πρόβλημα;

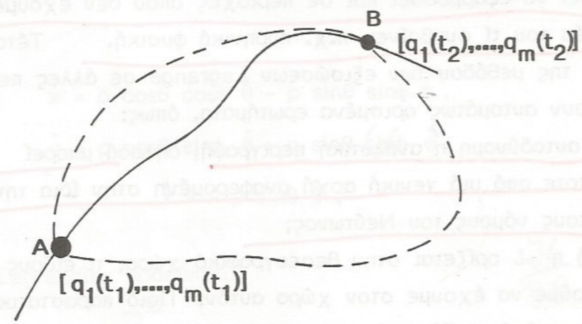
γ) Τι άλλα πράγματα η Lagrangian μπορεί να μας δόσει εκτός από τις εξισώσεις κίνησης; Μπορεί η Lagrangian να μας δόσει διατήρηση ενέργειας, ορμής, φορτίου και με ποιό τρόπο;

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε λεπτομερώς στο ερώτημα (α). Θα δείξουμε δηλαδή ότι οι εξισώσεις Lagrange, που προήλθαν ουσιαστικά από τον νόμο του Νεύτωνος μέσω της αρχής των δυνατών έργων, προέρχονται επίσης από μιά αρχή η οποία αναφέρεται αυστηρά στην συνάρτηση Lagrange $L$. Η αρχή αυτή καλείται **αρχή της ελαχίστης δράσης** συναντάται δε και ως **αρχή Hamilton.** Η διατύπωση της είναι ως εξής: *Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή $t_1$ στην χρονική στιγμή $t_2$ είναι τέτοια ώστε το συναρτησειοειδές* δράση

$$F = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k, q_k, t)\, dt \,, \tag{7.51}$$

*όπου $L$ = T - V, να λαμβάνει ακρότατη τιμή (συνήθως ελάχιστη).*

Με άλλα λόγια το μηχανικό σύστημα διαλέγει απ΄ όλες τις δυνατές τροχιές $q_k(t)$ στον θεσεογραφικό χώρο εκείνη γιά την οποία η ποσότητα $F$ γίνεται ακρότατο. Το ολοκλήρωμα $F$ καλείται **δράση του συστήματος.** Ας εξηγήσουμε τώρα λεπτομερέστερα τι εννοούμε λέγοντας εξέλιξη του φυσικού συστήματος στον θεσεογραφικό χώρο. Την χρονική στιγμή $t_1$ το σύστημα χαρακτηρίζεται πλήρως από τις m τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων $q_k$ (k = 1, ... ,m). Έστω λοιπόν το αντίστοιχο σημείο του θεσεογραφικού χώρου (Σχ. 7.5).




*Σχήμα 7.5: Σημεία στον θεσεογραφικό χώρο.*

Ομοίως, την χρονική στιγμή $t_2$ θα έχουμε ένα νέο σημείο του θεσεογραφικού χώρου. Τα ενδιάμεσα σημεία όμως είναι άγνωστα, δηλαδή η τροχιά του φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο είναι άγνωστη και δίνεται από την αρχή της ελαχίστης δράσης όπως προαναφέραμε.

Φυσικά η τροχιά που θα προκύψει πρέπει να είναι η ίδια με εκείνη που προκύπτει από τις εξισώσεις Lagrange (7.49). Με άλλα λόγια πρέπει να δείξουμε ότι η αρχή της ελαχίστης δράσης οδηγεί στις εξισώσεις Lagrange. Ξεκινάμε από την τροχιά $q_k(t)$, η οποία κάνει το συναρτησοειδές $F$ ακρότατο. Αυτό σημαίνει πως γι΄ αυτήν την τροχιά και γιά πολύ μικρές μεταβολές της (μεταβολή από την $q_k(t)$ στην $q_k(t) + \delta q_k(t)$ ) η μεταβολή του $F$ θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\delta F = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k,\ q_k,\ t)\ dt = 0\ . \tag{7.52}$$

Φυσικά όλες οι τροχιές που δοκιμάζουμε θα πρέπει κατά τις χρονικές στιγμές $t_1$, $t_2$ να διέρχονται από τα σημεία A και B του θεσεογραφικού χώρου αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει

$$\delta q_k(t_1) = 0\ ,\quad \delta q_k(t_2) = 0\ ,\quad \delta q_k(t) \neq 0\ , \tag{7.53}$$

με $k = 1, 2, \ldots, m$, $t\epsilon(t_1, t_2)$ .

Με αυτή την προϋπόθεση το σύμβολο της ολοκλήρωσης και της μεταβολής δ εναλλάσσονται και επομένως παίρνουμε

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\ dt = 0 \tag{7.54}$$

ή

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\,\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta\dot{q}_k\right)\ dt = 0\ . \tag{7.55}$$

Ο όρος $\frac{\partial L}{\partial t}\delta t$ δεν εμφανίζεται δεδομένου ότι δεν μεταβάλλεται ο χρόνος, δηλαδή η παράμετρος της τροχιάς, αλλά μόνον το είδος της τροχιάς στον θεσεογραφικό χώρο. Γιά να μας δόσει τώρα αποτέλεσμα η εξίσωση (7.55) πρέπει να εκφράσουμε το $\delta\dot{q}_k$ συναρτήσει του $\delta q_k$. Γιά τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης συναρτήσεων, δηλαδή

$$f\,\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}\,(fg) - \left(\frac{df}{dt}\right).g\ .$$

Στην περίπτωσή μας η εναλλαγή του δ με το σύμβολο της παραγώγισης $\frac{d}{dt}$ είναι επιτρεπτή, δεδομένου ότι η μεταβολή δ δεν αναφέρεται στον χρόνο t. Συνεπώς γράφουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta\dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\frac{d}{dt}\,(\delta q_k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\ .$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην (7.55) ευρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\, dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt\,. \quad (7.56)$$

Ο δεύτερος όρος της (7.56) παρέχει

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}=0 \quad (7.56a)$$

λόγω των συνθηκών (7.53). Κατά συνέπεια η αρχή της ελάχιστης δράσης καταλήγει στην συνθήκη

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\, dt=0\,. \quad (7.57)$$

Η $L$ είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $[t_1, t_2]$ και επομένως γιά να ισχύει η (7.57) γιά αυθαίρετες μεταβολές των $q_k$ πρέπει να έχει κανείς εκ ταυτότητος

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0\,, \quad (7.58)$$

με $k = 1, \ldots, m$, που είναι ακριβώς οι εξισώσεις Lagrange (7.49).

Ισχύει επίσης και το αντίστροφο, δηλαδή οι εξισώσεις Lagrange κάνουν το ολοκλήρωμα της δράσης ακρότατο. Τούτο προκύπτει αμέσως γιατί όλα τα βήματα από τις (7.53) στις (7.58) είναι αντιστρεπτά. Υπολογίζονται κατά συνέπεια το $\delta F$ και χρησιμοποιώντας τις (7.58) καταλήγουμε στην (7.56a) που είναι μηδέν, άρα και $\delta F = 0$.

## 7.5 Θεωρήματα Διατήρησης και Ιδιότητες των Εξισώσεων Lagrange

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μορφή των εξισώσεων Lagrange είναι αναλλοίωτη στην αλλαγή των γενικευμένων συντεταγμένων. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες

$$q_k \longrightarrow q'_k = q'_k(q_1, \ldots, q_m, t)\,, \quad (7.59)$$

με $k = 1, \ldots, m$ . Τότε αν καλέσουμε με $L'(q'_k, \dot{q}'_k, t)$ την νέα Lagrangian αποδεικνύεται ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_k} = \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right]\frac{\partial q_s}{\partial q'_k} . \tag{7.60}$$

Επειδή οι μετασχηματισμοί είναι παραδεκτοί, δηλαδή επειδή $\left|\frac{\partial q_s}{\partial q'_k}\right| \neq 0$, συνάγεται ότι αν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 ,$$

τότε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_s}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_s} = 0 .$$

Δεύτερη πολύ σπουδαία παρατήρηση είναι ότι η Lagrangian ενός μηχανικού προβλήματος, ακόμη και γιά δεδομένο γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων, δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Πράγματι, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$L \longrightarrow L' = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\, g(q,t) \tag{7.61}$$

όπου γιά ευκολία έχουμε παραλείψει τους δείκτες. Οι εξισώσεις Lagrange γιά την $L'$ είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} . \tag{7.62}$$

Η (7.62) μας λέει ότι η καινούργια Lagrangian $L'$ η οποία κατασκευάσθηκε μέσω του μετασχηματισμού (7.61), οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις του Lagrange στις οποίες οδηγεί και η $L$. Με άλλα λόγια οι εξισώσεις Lagrange είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς της μορφής (7.61). Οι μετασχηματισμοί (7.61) καλούνται **μετασχηματισμοί βαθμίδος** και επομένως συμπεραίνουμε ότι:

***Οι εξισώσεις Lagrange είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδος.*** Δύο Lagrangian που συνδέονται με ένα μετασχηματισμό βαθμίδος θα καλούνται **ισοδύναμοι.**

Ύστερα από τις δύο παραπάνω θεμελιώδεις παρατηρήσεις διατυπώνουμε το εξής ερώτημα: ***Πώς εμφανίζονται τα θεωρήματα διατήρησης στην αναλυτική μηχανική των ολονόμων συστημάτων;***

***Πρώτη περίπτωση:*** Η $L(\dot{q}_k, q_k, t)$ δεν εξαρτάται από την μεταβλητή $q_i$. Τότε η i - εξίσωση Lagrange (7.49) παρέχει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

ή

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{σταθ.} \qquad (7.63)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ διατηρείται και την ονομάζουμε **γενικευμένη ορμή.**

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η γενικευμένη συντεταγμένη που διατηρείται δεν είναι πάντοτε και κάποια φυσική ποσότητα, και αν ακόμη δεν μας είναι εύκολο να διακρίνουμε σε ποιά ποσότητα της απεικονιστικής (Νευτώνειας) μηχανικής αντστοιχεί.

Η μεταβλητή $q_i$, η οποία δεν εμφανίζεται στην Lagrangian, καλείται **κυκλική.** Η εξίσωση δε (7.63) σημαίνει ότι σε κάθε κυκλική μεταβλητή της Lagrangian ενός συστήματος αντιστοιχεί και ένα διατηρούμενο μέγεθος.

***Δεύτερη περίπτωση:*** Η $L(\dot{q}_k, q_k, t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο t, δηλαδή

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ .$$

Τότε μέσω των εξισώσεων Lagrange (7.49) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\dot{q}_j) = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\dot{q}_j)\right] \ .$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left( L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \,.} \tag{7.64}$$

Συνεπώς, η ποσότητα

$$\boxed{L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - H} \tag{7.65}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L}$$

$p_j$

$$\boxed{H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L}$$

είναι σταθερή και καλείται **Hamiltonian** του συστήματος.

Διατυπώνουμε τώρα τα εξής δύο θεωρήματα:

**Θεώρημα 7.1:** Η Hamiltonian ενός συστήματος είναι μιά σταθερά των εξισώσεων κίνησης του συστήματος τότε και μόνον τότε όταν η Lagrangian $L$ δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δηλαδή τότε και μόνον τότε όταν

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \,.$$

**Θεώρημα 7.2:** Η Hamiltonian ενός μηχανικού συστήματος συμπίπτει με την σταθερά της ολικής ενέργειας τότε και μόνον τότε όταν

α) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$,

β) Οι σύνδεσμοι του συστήματος είναι ανεξάρτητοι του χρόνου (σκληρόνομοι σύνδεσμοι)

**Απόδειξη:**

α) Από τον ορισμό της $L = T - V$ έχουμε

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \,.$$

Συνεπώς

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - L \,. \tag{7.66}$$

β) Με βάση την υπόθεση, οι σύνδεσμοι δεν εξαρτώνται από τον χρόνο. Επομένως γράφουμε

$$\upsilon_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

και

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \Big( \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k ,$$

στην οποία

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} .$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_k$$

και

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_k \dot{q}_k = 2T . \qquad (7.67)$$

Από τις (7.66), (7.67) και τον ορισμό της $L$ παίρνουμε

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V . \qquad (7.68)$$

Επειδή ακόμη

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

λόγω του θεωρήματος 7.1 είναι

$$H = \text{σταθερά}$$

και συνεπώς

$$H = T + V = \text{σταθ.} = E_{\text{ολ.}} \qquad (7.69)$$

Χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες ορμές

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} ,$$

η Hamiltonian γράφεται

$$\boxed{H = \sum_j \dot{q}_j \; p_j - L} \qquad (7.70)$$

$L = T - V$

## 7.6 Κανονική Εξίσωση Hamilton

Έχουμε ήδη ορίσει την Hamiltonian ως

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) ,$$

όπου

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i} .$$

Λόγω του ορισμού της γενικευμένης ορμής μπορεί κανείς να εκφράσει την H ως H(p, q, t). Είναι δυνατόν τώρα να θεμελιώσει κανείς την μηχανική μέσω της Hamiltonian H κατά τρόπο ανάλογο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε γιά τις εξισώσεις Lagrange. Αυτή η θεμελίωση είναι πρόσφορη γιά γενικεύσεις (κβαντική μηχανική, θεωρία πεδίων). Γιά να γίνει αντιληπτή η διαφορά ανάμεσα στις δύο θεμελιώσεις παρατηρούμε ότι στην μηχανική του Lagrange ένα μηχανικό σύστημα περιγράφεται πλήρως όταν δοθούν οι αρχικές τιμές των γενικευμένων θέσεων $q_i(0)$ και γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_i(0)$ · στην μηχανική του Hamilton ξεχνάμε τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_i$ και δουλεύουμε με τις γενικευμένες ορμές $p_i$, οι οποίες τώρα νοούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Η διαφορά είναι ουσιώδης, γιατί ενώ στην μηχανική του Lagrange γιά k βαθμούς ελευθερίας έχουμε k διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, στην μηχανική του Hamilton έχουμε 2k διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Διαφορίζοντας την H νοουμένη ως συνάρτηση των p, q, t έχουμε

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \, dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \, dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} \, dt . \qquad (7.71)$$

Διαφορίζοντας την (7.70) έχουμε επίσης

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i + \sum_i p_i \, d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \,. \quad (7.72)$$

Επειδή από τον ορισμό της γενικευμένης ορμής και τις εξισώσεις Lagrange ισχύει

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \,,$$

η (7.72) παρέχει

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \dot{p}_i \, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \,. \quad (7.73)$$

Συγκρίνοντας τις (7.71), (7.73) καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \,, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \,.} \quad (7.74)$$

Οι (7.74) είναι γνωστές ως **κανονικές εξισώσεις του Hamilton** και, εφ΄ όσον δοθεί η H, αποτελούν διαφορικό σύστημα 2k εξισώσεων πρώτης τάξης.

Η φυσική σημασία της H έχει ήδη μελετηθεί. Μπορούμε όμως να ξαναδούμε μερικά από τα χαρακτηριστικά της με την βοήθεια των (7.74). Ισχύει

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \,. \quad (7.75)$$

Μέσω τώρα των (7.74) η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \,. \quad (7.76)$$

συνεπώς

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (7.77)$$

και επομένως αν η Lagrangian δεν εξαρτάται από τον χρόνο το ίδιο συμβαίνει με την Hamiltonian και επιπλέον

$$H = \text{σταθερά} \,. \quad (7.78)$$

Ας θεωρήσουμε γιά παράδειγμα την επίπεδη κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων $V(r)$. Δεν υπάρχει σύνδεσμος και

$$H = T + V\ ,$$

$$L = T - V\ ,$$

$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$\dot{x}=\cos\theta\,\dot{r} \to \dot{x}^2=\cos^2\theta\,\dot{r}^2$

$\dot{y}=\sin\theta\,\dot{r} \to \dot{y}^2=\sin^2\theta\,\dot{r}^2$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι πολικές συντεταγμένες

γεν. συν. $(r, \theta)$

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ .$$

$\to \dot{x}=-r\sin\theta\,\dot{\theta} \to \dot{x}^2=r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2$

$\to \dot{y}=r\cos\theta\,\dot{\theta} \to \dot{y}^2=r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2$

$+$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2=r^2\dot{\theta}^2$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τις γενικευμένες ορμές

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\ , \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L \Rightarrow H = p_r\dot{q}_r + p_\theta\dot{q}_\theta - L \Rightarrow$

$\Rightarrow H = m\dot{r}\,\dot{r} + mr^2\dot{\theta}\,\dot{\theta} - L$

$\Rightarrow H = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - L$ $(T-V)$

$\Rightarrow H = \frac{m^2\dot{r}^2}{m} + \frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{mr^2} - L$

$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - T + V$

και συνεπώς

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\ .$$

Οι τέσσερεις κανονικές εξισώσεις Hamilton είναι

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\ , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}\ , \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}\ , \quad \dot{p}_\theta = 0\ .$$

Οι δύο πρώτες είναι απλώς ταυτότητες και μας δίδουν την σχέση μεταξύ γενικευμένων ταχυτήτων και γενικευμένων ορμών. Οι δύο τελευταίες είναι οι εξισώσεις κίνησης και ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange.