

31/03/2021

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ
2. ΜΑΖΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ - ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ
3. ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
4. ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ
5. ΚΥΡΙΟΙ ΑΞΟΝΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ
6. ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
7. ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΠΕΡΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ
8. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER

1.1 Δυναμικά Συστήματα και Εσωτερικές Δυνάμεις

Ένα μηχανικό σύστημα καθορίζεται ως ένα σύνολο υλικών σημείων ή σωμάτων, όπου η θέση ή η κίνηση κάθε υλικού σημείου ή σώματος του συστήματος εξαρτάται από την θέση ή κίνηση των άλλων σημείων ή σωμάτων. Στο εξής ένα απολύτως στερεό σώμα θα το θεωρούμε σύστημα των υλικών σημείων του. Κλασικό παράδειγμα μηχανικού συστήματος είναι το ηλιακό σύστημα, όπου τα συνιστώμενα σώματα συνδέονται με δυνάμεις αμοιβαίας έλξης.

Εξωτερικές δυνάμεις $F_i^{ΕΞ}$ σε ένα τέτοιο σύστημα είναι εκείνες που ασκούνται στα στοιχεία του συστήματος από υλικά σημεία ή σώματα που δεν ανήκουν στο δοθέν σύστημα. Εσωτερικές $F_i^{ΕΩ}$ χαρακτηρίζονται οι δυνάμεις αλληλοεπιδράσεων μεταξύ των στοιχείων του ίδιου του συστήματος. Τόσο οι εξωτερικές όσο και οι εσωτερικές δυνάμεις μπορεί να είναι είτε ενεργούσες δυνάμεις είτε αντιδράσεις των συνδέσμων. Ειδικότερα τώρα όσον αφορά τις εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος πρέπει να αναφέρουμε τις εξής ιδιότητες:

i) Το γεωμετρικό άθροισμα όλων των εσωτερικών δυνάμεων του συστήματος ισούται προς μηδέν, δηλαδή

$$\sum_i F_i^{ΕΩ} = 0, \quad (4.1)$$

και

ii) Το άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων ενός συστήματος ως προς ένα σημείο O ή άξονα l_0 είναι ίσο προς μηδέν, δηλαδή

$$\left(\sum_i r_i \times F_i^{ΕΩ} \right) = 0, \quad (4.2)$$

$$\left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \cdot \boldsymbol{\ell}_0 = 0, \quad (4.3)$$

όπου στην εξίσωση (4.2) \mathbf{r}_i παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από το τυχόν σημείο O στο υλικό σημείο, ενώ στην (4.3) \mathbf{r}_i παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από το τυχόν σημείο O του άξονα $\boldsymbol{\ell}_0$ στο υλικό σημείο.

Οι εσωτερικές δυνάμεις αμοιβαία ισορροπούν και δεν επηρεάζουν την κίνηση του συστήματος, εφ' όσον το τελευταίο ^{δομή} απολύτως στερεό σώμα αντίθετα, σε μηχανικό σύστημα υλικών σημείων οι εφαρμοζόμενες εσωτερικές δυνάμεις σε διάφορα σημεία ή σώματα μπορούν να προκαλέσουν αμοιβαίες μετακινήσεις.

4.2 Μάζα Συστήματος - Κέντρο Μάζας

Μάζα ενός συστήματος γενικά ορίζεται το βαθμωτό άθροισμα όλων των μαζών των υλικών σημείων και σωμάτων που το αποτελούν, δηλαδή

$$m = \sum_i m_i. \quad (4.4)$$

Η θέση του κέντρου μάζας S ενός συστήματος ως προς απόλυτο τρισορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται, όπως είναι γνωστό, από τις συντεταγμένες του

$$x_S = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_S = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_S = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}. \quad (4.5)$$

Το γεωμετρικό σημείο S του οποίου η θέση καθορίζεται από τις εξισώσεις (4.5) καλείται, όπως ήδη έχει αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, **κέντρο μάζας** ή **κέντρο αδρανείας** του μηχανικού συστήματος. Οι αναλυτικές σχέσεις (4.5) μπορούν να γραφούν υπό την μορφή της διανυσματικής εξίσωσης

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (4.6)$$

όπου \mathbf{r}_S παριστάνει την διανυσματική ακτίνα του κέντρου μάζας και \mathbf{r}_i την διανυσματική ακτίνα του τυχόντος σημείου i .

Μολονότι σε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο βάρους, οι δύο αυτές έννοιες δεν είναι ταυτόσημες. Η έννοια του κέντρου βάρους εισάγεται από το ότι αυτό ορίζεται ως το σημείο διά του οποίου διερχεται η συνισταμένη των δυνάμεων βαρύτητας επομένως, το κέντρο βάρους

έχει έννοια για ένα στερεό σώμα που ευρίσκεται σε ομοιόμορφο πεδίο βαρύτητας. Από την άλλη μεριά, η έννοια του κέντρου μάζας ως χαρακτηριστικού της κατανομής της μάζας σε ένα σύστημα σημείων ή σωμάτων έχει υπόσταση άσχετα από το αν το σύστημα υπόκειται ή όχι στην ενέργεια δυνάμεων.

Αναφέρουμε εδώ συντόμως τις γνωστές σχέσεις για το κέντρο μάζας στερεού σώματος

$$m\mathbf{u}_S = \sum_i m_i \mathbf{u}_i, \quad m\mathbf{y}_S = \sum_i m_i \mathbf{y}_i. \quad (4.7)$$

Αν, σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, τεθεί

$$m\mathbf{y}_i = \mathbf{P}_i,$$

όπου \mathbf{P}_i παριστάνει την επί του i - σημείου ενεργούσα δύναμη, θα προκύψει

$$m\mathbf{y}_S = \sum_i \mathbf{P}_i = \mathbf{R}. \quad (4.8)$$

Η ανάλυση της τελευταίας διανυσματικής εξίσωσης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων καταλήγει στις αναλυτικές εξισώσεις

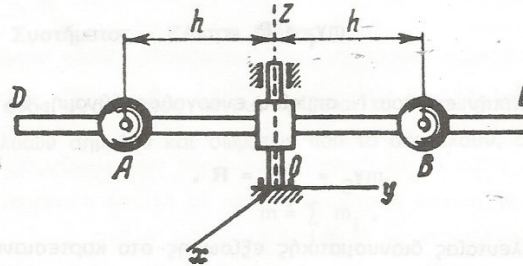
$$m\ddot{x}_S = \sum_i X_i = \mathbf{R}_x, \quad m\ddot{y}_S = \sum_i Y_i = \mathbf{R}_y, \quad m\ddot{z}_S = \sum_i Z_i = \mathbf{R}_z. \quad (4.9)$$

Το άθροισμα $\sum_i \mathbf{P}_i$ αναφέρεται, όπως ήδη έχει λεχθεί, μόνο στις ενεργούσες εξωτερικές δυνάμεις* δηλαδή, η επιτάχυνση \mathbf{y}_S του κέντρου μάζας είναι η ίδια που θα καθοριζόταν αν συγκεντρωνόταν στο σημείο αυτό η ολική μάζα του συστήματος και ενεργούσε πάνω σ' αυτό δύναμη ίση προς το γεωμετρικό άθροισμα όλων των επί του συστήματος ενεργουσών εξωτερικών δυνάμεων. Σημειώνουμε εδώ ότι η σχέση (4.8) αναφέρεται σε σώματα αρκετά μικρά, ώστε κάθε τιμή r_i να μη επηρεάζεται από την θέση του σημείου στο σώμα. Αν τούτο δεν συμβαίνει, θα πρέπει το σώμα να χωρίζεται σε μικρότερα τμήματα και σε κάθε ένα από αυτά να φέρεται η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα. Λόγω τώρα της αναλογίας που υπάρχει μεταξύ βαρών και μαζών, όταν τα σώματα ευρίσκονται στην ίδια περιοχή επάνω στην επιφάνεια της γής, το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Έτσι, μπορούμε να μιλάμε για κέντρο μάζας γής και σελήνης, ενώ δεν έχει νόημα να μιλάμε για κέντρο βάρους των σωμάτων αυτών.

4.3 Ροπές Αδρανείας Στερεού Σώματος

4.3.1 Ροπή αδρανείας και φυγόκεντρη ροπή αδρανείας

Η θέση του κέντρου μάζας δεν χαρακτηρίζει πλήρως την κατανομή της μάζας σε ένα σύστημα. Γιατί, αν ως προς έναν άξονα Oz (Σχ. 4.1) η απόσταση ή δύο συμμετρικά κειμένων ίσων σφαιρών από τον Oz μεταβληθεί κατά την αυτή ποσότητα, η θέση του κέντρου μάζας δεν θα αλλάξει, μολονότι η κατανομή μάζας θα μεταβληθεί και θα επηρεάσει την κίνηση του συστήματος (η περιστροφή περί τον Oz θα γίνει βραδύτερη).



Σχήμα 4.1: Περιστροφή συστήματος δύο ίσων μαζών περί άξονα.

Έτσι, ένα άλλο χαρακτηριστικό της κατανομής της μάζας εισέρχεται στην μηχανική, που καλείται **ροπή αδρανείας**. Η ροπή αδρανείας ενός υλικού σημείου προς άξονα Oz ορίζεται από τον τύπο

$$J_z = mh^2, \quad (4.10)$$

όπου m είναι η μάζα του σημείου και h παριστάνει την κάθετη απόσταση της μάζας από τον άξονα Oz .

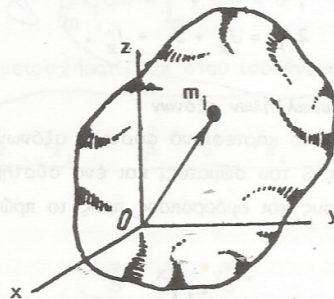
Ροπή αδρανείας στερεού προς επίπεδο κάθετο επί τον άξονα Oz , ορίζεται η ποσότητα

$$J_{(z)} = \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (4.11)$$

όπου ρ_i είναι η απόσταση του τυχόντος υλικού σημείου από το επίπεδο (z).

Με βάση τους τύπους (4.10), (4.11) και το σχήμα 4.2 εξάγουμε τα εξής

είδη ροπών αδρανείας του στερεού προς τους τρεις άξονες και τα τρία επίπεδα του τρισσορθογωνίου συστήματος $Oxyz$ αντίστοιχα:



Σχήμα 4.2: Στερεό αναφερόμενο προς απόλυτο σύστημα αξόνων $Oxyz$.

➔ α) Ροπές αδρανείας προς άξονες x, y, z

$$J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (4.12)$$

β) Ροπές αδρανείας προς τα επίπεδα $(x) \equiv yOz, (y) \equiv xOz, (z) \equiv xOy$

$$J_{(x)} = \sum_i m_i x_i^2, \quad J_{(y)} = \sum_i m_i y_i^2, \quad J_{(z)} = \sum_i m_i z_i^2. \quad (4.13)$$

γ) Φυγόκεντροι ροπές αδρανείας (ροπές εκτροπής) προς τα επίπεδα (y) και $(z), (z)$ και $(x), (x)$ και (y)

$$J_{yz} = J_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i, \quad J_{zx} = J_{xz} = \sum_i m_i z_i x_i, \quad J_{xy} = J_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i \quad (4.14)$$

➔ δ) Πολική ροπή αδρανείας προς το κέντρο O

$$J_p = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_x + J_y + J_z \quad (4.15)$$

Ο συνδυασμός των (4.13) και (4.15) παρέχει τον τύπο

$$2J_p = J_x + J_y + J_z \quad \leftarrow \text{and}$$

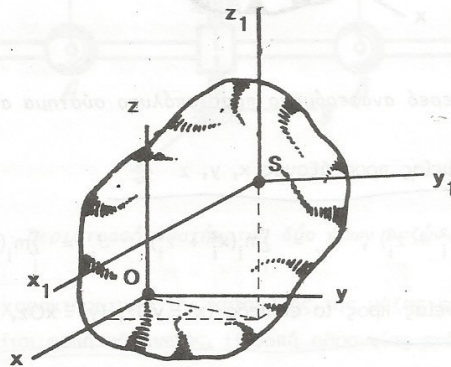
$$J_P = J_{(x)} + J_{(y)} + J_{(z)}, \quad (4.16)$$

ενώ ο συνδυασμός των (4.12) και (4.15) τον τύπο

$$2J_P = J_x + J_y + J_z. \quad (4.17)$$

4.3.2 Θεώρημα των παραλλήλων αξόνων

Θεωρήσουμε το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Sx_1y_1z_1$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας S του σώματος, και ένα σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ με άξονες παράλληλους και ομόρροπους προς το πρώτο (Σχ. 4.3).



Σχήμα 4.3: Κεντροβαρικό και απόλυτο σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων απολύτως στερεού σώματος.

Αν x_S, y_S, z_S παριστούν τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας του στερεού ως προς το $Oxyz$ -σύστημα, βάσει των σχέσεων (4.12) έχουμε

$$\begin{aligned} J_z &= \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_m [(x_S + x_1)^2 + (y_S + y_1)^2] dm = \\ &= (x_S^2 + y_S^2) \int_m dm + 2x_S \int_m x_1 dm + 2y_S \int_m y_1 dm + \int_m (x_1^2 + y_1^2) dm. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Δεδομένου όμως ότι οι άξονες x_1, y_1, z_1 είναι κεντροβαρικοί, και επομένως ως προς το σύστημα $Sx_1y_1z_1$ οι κεντροβαρικές αποστάσεις είναι μηδέν ($x_S = y_S = z_S = 0$), από τις εξισώσεις (4.5) συνάγουμε

$$\int_m x_1 dm = \int_m y_1 dm = 0 .$$

Έτσι, ο τύπος (4.18) μετασχηματίζεται στον ισοδύναμο

$$J_z = J_{z_1} + m(x_S^2 + y_S^2) = J_{z_1} + mr_S^2 , \quad (4.19)$$

όπου

$$r_S^2 = x_S^2 + y_S^2 . \quad (4.20)$$

Η εξίσωση (4.19) καθορίζει την ροπή αδρανείας ενός σώματος ως προς άξονα Oz ίση προς το άθροισμα της ροπής αδρανείας προς παράλληλο κεντροβαρικό άξονα Sz_1 , και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.

Για την φυγόκεντρο ροπή αδρανείας παίρνουμε

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_m xy dm = \int_m (x_1 + x_S)(y_1 + y_S) dm = y_S \int_m x_1 dm + x_S \int_m y_1 dm + \\ &+ \int_m x_1 y_1 dm + x_S y_S \int_m dm , \end{aligned}$$

από την οποία, με βάσει τα παραπάνω, προκύπτει

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + m x_S y_S . \quad (4.21)$$

Η εξίσωση (4.21) καθορίζει την φυγόκεντρο ροπή αδρανείας ενός σώματος ως προς δοθέν σύστημα δύο καθέτων αξόνων ίση προς το άθροισμα της φυγόκεντρος ροπής αδρανείας προς το αντίστοιχο κεντροβαρικό σύστημα παραλλήλων αξόνων προς τους αρχικούς, και του γινομένου της μάζας του σώματος επί τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας προς τους δοθέντες άξονες.

Οι τύποι (4.19) και (4.21) εκφράζουν το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα Huyghens.

4.3.3. Κύριοι άξονες αδρανείας

Θεωρήσουμε ομογενές σώμα που έχει έναν άξονα συμμετρίας. Καθορίζουμε το σύστημα αναφοράς $Oxyz$ έτσι ώστε ο άξονας Oz να συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας. Τότε, σε κάθε σημείο $m_i(x_i, y_i, z_i)$ αντιστοιχεί το συμμετρικό του ίσης μάζας με συντεταγμένες $(-x_i, -y_i, z_i)$ επομένως προκύπτει:

$$\sum_i m_i x_i z_i = 0, \quad \sum_i m_i y_i z_i = 0,$$

δηλαδή

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad (4.22)$$

Συνεπώς, η συμμετρία της κατανομής της μάζας ως προς τον άξονα Oz χαρακτηρίζεται με δύο μηδενικές φυγόκεντρες ροπές, τις J_{xz} και J_{yz} . Ο άξονας Oz ως προς τον οποίο ισχύουν οι εξισώσεις (4.22) λέγεται **κύριος άξονας αδρανείας** του σώματος ως προς το σημείο O . Επομένως, αν ένα σώμα έχει έναν άξονα συμμετρίας, αυτός είναι κύριος άξονας αδρανείας ως προς κάθε σημείο. Ο κύριος άξονας αδρανείας δεν είναι υποχρεωτικά και άξονας συμμετρίας.

Θεωρήσουμε τώρα ένα ομογενές σώμα που έχει ένα επίπεδο συμμετρίας το οποίο και ορίζουμε ως επίπεδο Oxy . Φέρουμε τον Oz κάθετο στο επίπεδο τούτο* τότε, λόγω της συμμετρίας, σε κάθε σημείο μάζας m_i με συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i) αντιστοιχεί ένα σημείο της ίδιας μάζας με συντεταγμένες $(x_i, y_i, -z_i)$. Συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0.$$

*Ετσι, αν ένα σώμα έχει ένα επίπεδο συμμετρίας κάθε άξονας κάθετος πάνω σ' αυτό είναι κύριος άξονας αδρανείας του σώματος ως προς το σημείο O , που ο άξονας τέμνει το επίπεδο. Οι εξισώσεις (4.22) εκφράζουν την συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ο άξονας Oz να είναι κύριος άξονας αδρανείας ενός σώματος ως προς O . Επομένως αν ισχύουν

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0, \quad (4.23)$$

κάθε άξονας του συστήματος $Oxyz$ είναι κύριος άξονας αδρανείας ως προς O .

Οι ροπές αδραναίας ως προς τους κύριους άξονες λέγονται κύριες ροπές αδραναίας και συμβολίζονται με J_1, J_2, J_3 . Οι κύριοι άξονες αδραναίας ως προς το κέντρο μάζας S καλούνται κύριοι κεντροβαρικοί άξονες αδραναίας. Ένας άξονας συμμετρίας ή ένα επίπεδο συμμετρίας διέρχονται διά του κέντρου μάζας S. Έχουμε ήδη τονίσει ότι αν το σώμα έχει επίπεδο συμμετρίας, πχ. το Oxy, ισχύουν οι σχέσεις (4.22). Αν τώρα το σώμα έχει και ένα άλλο επίπεδο συμμετρίας κάθετο προς το πρώτο, πχ. το Oxz, θα ισχύει επιπλέον και $J_{xy} = 0$. Συνεπώς προκύπτει ότι ορθογώνιοι άξονες συντεταγμένων x,y,z, που καθορίζουν επίπεδα συμμετρίας, είναι κύριοι άξονες αδραναίας και μάλιστα κεντροβαρικοί, γιατί όπως είναι ήδη γνωστό τα επίπεδα συμμετρίας διέρχονται από το κέντρο μάζας.

Πολλά σώματα στα οποία αναφέρεται η Μηχανική έχουν ένα ή περισσότερα επίπεδα συμμετρίας. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις ο υπολογισμός της φυγόκεντρης ροπής αδραναίας του σώματος ως προς ένα ζεύγος ορθογωνίων αξόνων, που ορίζουν επίπεδο κάθετο προς ένα επίπεδο συμμετρίας, είναι απλός. Πράγματι, η φυγόκεντρη ροπή αδραναίας προς ένα αντίστοιχο παράλληλο ζεύγος κεντροβαρικών αξόνων θα είναι ίση προς μηδέν, και επομένως βάσει της (4.21) θα προκύψει ως το γινόμενο της μάζας του σώματος επί τις δύο συντεταγμένες του κέντρου μάζας.

Τα ανωτέρω αναφέρονται σε συμμετρικά σώματα. Γενικότερα θα αποδείξουμε ότι από κάθε σημείο ενός σώματος άγονται τουλάχιστον τρεις κάθετοι μεταξύ τους κύριοι άξονες αδραναίας ως προς το σημείο αυτό. Αν οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων Oxyz είναι κύριοι άξονες αδραναίας, τότε όλες οι φυγόκεντρες ροπές αδραναίας μηδενίζονται, πράγμα που απλοποιεί σημαντικά τις εξισώσεις στην δυναμική των στερεών σωμάτων, στην θεωρία κρούσης κλπ.

Συνάγουμε τώρα το εξής θεώρημα:

Αν η ροπή αδραναίας J_z ως προς ένα άξονα Oz είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την ροπή αδραναίας ως προς οιοδήποτε γειτονικό από το O άξονα Oz', δηλαδή ισχύει για οιαδήποτε στοιχειώδη περιστροφή του Oz περί το O $dJ_z = 0$, τότε ο άξονας Oz είναι κύριος άξονας αδραναίας ως προς το O.

Η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με την εξής διαδικασία.

Έστω το σύστημα συντεταγμένων Oxyz και ότι στρέφουμε τον Oz περί τον Ox κατά γωνία $d\phi$ (Σχ. 4.4) Για τυχόν σημείο A_i του σώματος θα ισχύει

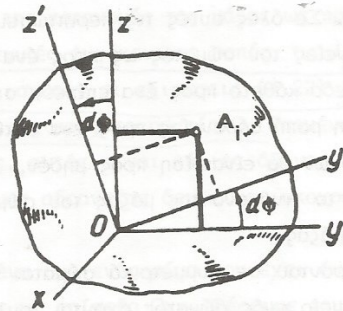
$$y'_i = y_i \cos d\phi + z_i \sin d\phi \approx y_i + z_i d\phi \quad (4.24)$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + 2y_i z_i d\phi + z_i^2 d\phi^2) = \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + 2 \sum_i m_i y_i z_i d\phi = J_z + 2J_{yz} d\phi, \end{aligned}$$

και

$$J_{z'} - J_z = (dJ_z)_1 = 2J_{yz} d\phi.$$



Σχήμα 4.4: Απειροστή στροφή του άξονα Oz περί τον Ox.

Καθ' όμοιον τρόπο, για απειροστή στροφή περί τον άξονα Oy κατά γωνία $d\psi$ προκύπτει:

$$(dJ_z)_2 = J_{z'} - J_z = 2J_{xz} d\psi.$$

Δεδομένου ότι κάθε στοιχειώδης μετακίνηση του Oz συντίθεται από δύο τέτοιες περιστροφές, η οριακή συνθήκη της J_z παίρνει την μορφή

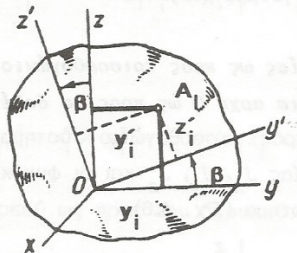
$$dJ_z = (dJ_z)_1 + (dJ_z)_2 = 2J_{yz} d\phi + 2J_{xz} d\psi = 0.$$

Επειδή $d\phi, d\psi \neq 0$ και ϕ, ψ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, η τελευταία εξίσωση οδηγεί στη σχέση

$$J_{yz} = J_{xz} = 0,$$

δηλαδή στο συμπέρασμα ότι ο Oz είναι κύριος άξονας αδρανείας ως προς το O .

Συνοπώς προκύπτει ότι υπάρχουν δύο ακραίες θέσεις του Oz όπου στην μία αντιστοιχεί ένα μέγιστο της J και στην άλλη ένα ελάχιστο. Επομένως, από κάθε σημείο του σώματος διέρχονται τουλάχιστον δύο κύριοι άξονες Oz και Oz' αδρανείας. Οι άξονες αυτοί είναι κάθετοι μεταξύ τους, γιατί αν υποθέσουμε ότι β είναι η γωνία μεταξύ των Oz και Oz' και φέρουμε στο επίπεδο zOz' τους άξονες Oy και Oy' κάθετους στους Oz , Oz' (Σχ. 4.5), θα έχουμε:



Σχήμα 4.5: Στροφή του άξονα Oz κατά γωνία β .

$$y'_i = y_i \cos \beta + z_i \sin \beta, \quad z'_i = z_i \cos \beta - y_i \sin \beta. \quad (4.25)$$

Εφ' όσον ο Oz είναι κύριος άξονας έπεται $J_{yz} = 0$. Γράφοντας

$$J_{y'z'} = \sum_i m_i y'_i z'_i,$$

αντικαθιστώντας τα y'_i , z'_i με τα ίσα τους από τις (4.25) και λαμβάνοντας υπ όψη ότι

$$J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = 0,$$

καταλήγουμε στην σχέση

$$J_{y'z'} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (z_i^2 - y_i^2) \sin 2\beta = \frac{1}{2} (J_y - J_z) \sin 2\beta . \quad (4.26)$$

Επειδή τώρα και ο Oz' είναι κύριος άξονας αδρανείας συνάγουμε

$$J_{y'z'} = 0 ,$$

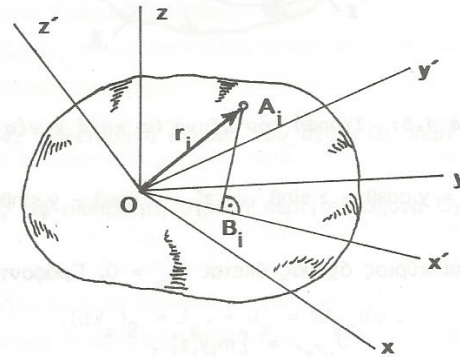
η οποία, βάσει της (4.26), για $J_y \neq J_z$ παρέχει

$$\sin 2\beta = 0 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \quad (4.27)$$

Στην περίπτωση που $J_y = J_z$ συμπεραίνουμε ότι κάθε άξονας στο επίπεδο zOz' είναι κύριος άξονας συμμετρίας.

4.3.4 Ροπές αδρανείας ως προς τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων $Ox'y'z'$ έχον την ίδια αρχή O ως προς το δοθέν $Oxyz$.

Υποθέσουμε ότι ως προς τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ είναι γνωστές οι ροπές αδρανείας J_x, J_y, J_z και οι φυγόκεντρες ροπές J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} ως προς το παραπάνω σύστημα (Σχ. 4.6).



Σχήμα 4.6: Στερεό αναφερόμενο προς δύο συστήματα συντεταγμένων με κοινή αρχή O .

Ζητούμε να καθορίσουμε συναρτήσει των έξι αυτών μεγεθών τις ροπές αδρανείας $J_{x'}, J_{y'}, J_{z'}, J_{x'y'}, J_{x'z'}, J_{y'z'}$ ως προς άλλο τρισσορθογώνιο σύστημα $Ox'y'z'$ που έχει την ίδια αρχή O με το δοθέν $Oxyz$. Παριστάνουμε με

i, j, k και i', j', k' τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox, Oy, Oz του $Oxyz$ και των αξόνων Ox', Oy', Oz' του $Ox'y'z'$ αντίστοιχα. Το σύστημα $Ox'y'z'$ καθορίζεται ως προς το $Oxyz$ με τα διευθύνοντα συνημίτονα των αξόνων Ox', Oy', Oz' , δηλαδή με τα $i'(a_1, \beta_1, \gamma_1), j'(a_2, \beta_2, \gamma_2), k'(a_3, \beta_3, \gamma_3)$.

Έστω A_i το τυχόν σημείο του σώματος και $r_i = OA_i = (x_i, y_i, z_i)$ η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα (Σχ. 4.6). Ας ζητήσουμε πρώτα τον καθορισμό της $J_{x'}$. Είναι

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Αν OB_i παριστάνει την προβολή του OA_i πάνω στον άξονα x' , θα έχουμε

$$OB_i = r_i \cdot i' = a_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i.$$

Επομένως προκύπτει

$$(A_i B_i)^2 = (OA_i)^2 - (OB_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (a_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i)^2. \quad (4.28)$$

Η ροπή αδρανείας του στερεού ως προς τον άξονα Ox' καθορίζεται ως

$$J_{x'} = \int_V [x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (a_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i)^2] dm_i, \quad (4.29)$$

όπου το ολοκλήρωμα επεκτείνεται σε όλο τον όγκο του σώματος.

Δεδομένου τώρα ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$a_j^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2 = 1 \quad (j = 1, 2, 3), \quad a_\kappa a_\lambda + \beta_\kappa \beta_\lambda + \gamma_\kappa \gamma_\lambda = 0 \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, 3 \text{ με } \kappa \neq \lambda) \quad (4.30)$$

η εξίσωση (4.29), μετά την εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων, καταλήγει

$$J_{x'} = J_x a_1^2 + J_y \beta_1^2 + J_z \gamma_1^2 - 2J_{xy} a_1 \beta_1 - 2J_{yz} \beta_1 \gamma_1 - 2J_{xz} a_1 \gamma_1. \quad (4.31)$$

Καθ' όμοιο τρόπο προκύπτουν οι ροπές αδρανείας $J_{y'}, J_{z'}$.

Από την άλλη μεριά, ο προσδιορισμός της φυγόκεντρης ροπής αδρανείας

$J_{x'y'}$ απαιτεί την εξής διαδικασία:

Οι συντεταγμένες x'_i, y'_i, z'_i του σημείου A_i ως προς το $Ox'y'z'$ προκύπτουν με βάση τις εξισώσεις

$$x'_i = \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i, \quad y'_i = \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i, \quad z'_i = \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i. \quad (4.32)$$

Εξ' άλλου, η $J_{x'y'}$ ορίζεται ως

$$J_{x'y'} = \int_V x'_i y'_i dm_i. \quad (4.33)$$

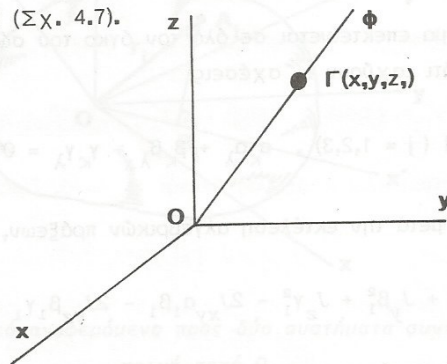
Εισάγοντας τις (4.32) στην (4.33) και κάνοντας χρήση της σχέσης (4.31) για $\kappa = 1, \lambda = 2$, μετά από αρκετή άλγεβρα ευρίσκουμε

$$J_{x'y'} = -\alpha_1 \alpha_2 J_x - \beta_1 \beta_2 J_y - \gamma_1 \gamma_2 J_z + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) J_{xy} + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) J_{yz} + (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) J_{xz}. \quad (4.34)$$

Καθ' όμοιο τρόπο προκύπτουν οι φυγόκεντρες ροπές αδρανείας $J_{y'z'}$ και $J_{x'z'}$.

4.3.5 Ελλειψοειδές αδρανείας

Εστω $Oxyz$ τρισσορθογώνιο σύστημα αναφοράς στο οποίο αναφέρεται στερεό σώμα και έστω ότι προς τους άξονες του συστήματος αυτού είναι γνωστά τα μεγέθη $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$. Ας είναι $O\phi$ ένας άξονας διερχόμενος από το O του οποίου η θέση στο σύστημα $Oxyz$ καθορίζεται με τα συνημίτονα κατεύθυνσης α, β, γ (Σχ. 4.7).



Σχήμα 4.7: Υπολογισμός ροπής αδρανείας στερεού ως προς γνωστό άξονα $O\phi$.

Βάσει της σχέσης (4.31) η ροπή αδρανείας J_ϕ του στερεού καθορίζεται με την εξίσωση

$$J_{\phi} = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha\beta - 2J_{yz} \beta\gamma - 2J_{zx} \alpha\gamma. \quad (4.35)$$

Αν m παριστάνει την συνολική μάζα του σώματος, η ακτίνα περιφοράς ρ_{ϕ} προς τον άξονα $O\phi$ καθορίζεται όπως είναι γνωστό από την

$$\rho_{\phi} = (J_{\phi} / m)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.36)$$

Επί της $O\phi$ λαμβάνουμε το μήκος $(O\Gamma) = c^2 / \rho_{\phi}$, όπου c είναι μιά σταθερά, και συμβολίζουμε με x, y, z τις συντεταγμένες του Γ στο σύστημα $Oxyz$.

Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις

$$x = (O\Gamma)\alpha = c^2 \alpha / (J_{\phi} / m)^{\frac{1}{2}}, \quad y = c^2 \beta / (J_{\phi} / m)^{\frac{1}{2}}, \quad z = c^2 \gamma / (J_{\phi} / m)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.37)$$

Συνεπώς, η εξίσωση (4.35), μέσω των (4.37), μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη

$$\frac{x^2}{\frac{J_x}{mc^4}} + \frac{y^2}{\frac{J_y}{mc^4}} + \frac{z^2}{\frac{J_z}{mc^4}} - \frac{2J_{xy}}{mc^4} xy - \frac{2J_{yz}}{mc^4} yz - \frac{2J_{zx}}{mc^4} zx = 1 \quad (4.38)$$

η οποία παριστάνει επιφάνεια δευτέρου βαθμού και η οποία, δεδομένου ότι δεν έχει σημεία στο άπειρο, είναι ελλειψοειδές καλούμενο **ελλειψοειδές αδρανείας** του σώματος ως προς το σημείο O . Αν θέσουμε

$$c^2 = 1 / \sqrt{m}$$

προκύπτει

$$(O\Gamma) = 1 / \sqrt{J_{\phi}}$$

και η (4.38) παίρνει την μορφή

$$\frac{x^2}{\frac{1}{J_x}} + \frac{y^2}{\frac{1}{J_y}} + \frac{z^2}{\frac{1}{J_z}} - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = 1. \quad (4.39)$$

Το ελλειψοειδές αδρανείας λέγεται κεντρικό όταν συμπίπτει με το κέντρο βάρους του σώματος. Στην περίπτωση κατά την οποία οι άξονες Ox, Oy, Oz είναι

κύριοι άξονες αδρανείας η τελευταία εξίσωση μετασχηματίζεται στην ακόλουθη ισοδύναμη

$$\frac{x^2}{\frac{1}{J_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{J_2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{J_3}} = 1. \quad (4.40)$$

Αν υποθέσουμε ότι ο μικρός άξονας του ελλειψοειδούς αδρανείας συμπίπτει με τον άξονα Oz και ο μεγάλος άξονας με τον Ox, τότε η σχέση (4.35) γράφεται

$$J_\phi = J_1 a^2 + J_2 \beta^2 + J_3 (1 - a^2 - \beta^2) = J_3 - (J_3 - J_1) a^2 - (J_3 - J_2) \beta^2. \quad (4.41)$$

Δεδομένου ότι $(O\Gamma) = 1 / \sqrt{J_\phi}$, βάσει των ανωτέρω ισχύει

$$J_3 > J_1, \quad J_3 > J_2$$

και συνεπώς

$$J_\phi < J_3.$$

Επομένως, η μέγιστη ροπή αδρανείας είναι αυτή ως προς τον μικρό άξονα του ελλειψοειδούς αδρανείας και η ελαχίστη ως προς τον μεγάλο άξονα του ελλειψοειδούς.

4.4 Ποσότητα Κίνησης Συστήματος

4.4.1 Ορισμοί

Ποσότητα κίνησης ενός συστήματος ορίζεται το διάνυσμα \mathbf{J} ίσο προς το γεωμετρικό άθροισμα των ποσοτήτων κίνησης όλων των υλικών σημείων του συστήματος, δηλαδή

$$\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (4.42)$$

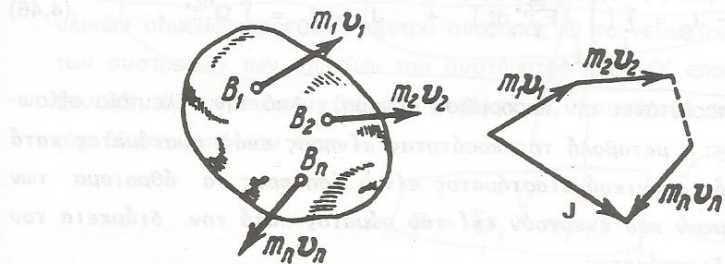
Το διάνυσμα της ποσότητας κίνησης δεν χαρακτηρίζει πλήρως την κίνηση του συστήματος, αφού μπορεί για κλειστό πολύγωνο των $m_i \mathbf{v}_i$ να είναι $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ (Σχ. 4.8). Από την εξίσωση (4.42) προκύπτει

Εξίσωση $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_S \rightarrow \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m \dot{\mathbf{r}}_S$ $\sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_S$

και επομένως $\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{J} = m \mathbf{v}_S \mathbf{v}_S$ (4.43)

που μεταφράζεται στο ότι: η ποσότητα κίνησης ενός συστήματος είναι ίση προς το γινόμενο της συνολικής μάζας του συστήματος επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας. Συνεπώς, η εξίσωση (4.43) συντελεί στον εύκολο υπολογισμό της ποσότητας κίνησης του συστήματος.

Από την αντίστοιχη έννοια στο κεφάλαιο του υλικού σημείου προκύπτει ότι αν το κέντρο μάζας του κινουμένου συστήματος παραμένει ακίνητο, τότε το διάνυσμα \mathbf{J} είναι ίσο προς μηδέν. Επομένως, η ποσότητα κίνησης \mathbf{J} ενός συστήματος που περιστρέφεται περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας είναι ίση προς μηδέν. Εύκολα κανείς συμπεραίνει ότι η ποσότητα κίνησης χαρακτηρίζει μόνο την μεταβατική συνιστώσα της κίνησης ενός συστήματος μαζί με το κέντρο μάζας του.



Σχήμα 4.8: Κλειστό διάγραμμα ταχυτήτων στερεού.

4.4.2 Θεώρημα μεταβολής της ποσότητας κίνησης

Θεωρήσουμε σύστημα n υλικών σημείων. Γράφουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος, δηλαδή

$$m_1 \gamma_1 = F_1^{\epsilon\xi} + F_1^{\epsilon\sigma}, \quad m_2 \gamma_2 = F_2^{\epsilon\xi} + F_2^{\epsilon\sigma}, \quad \dots, \quad m_n \gamma_n = F_n^{\epsilon\xi} + F_n^{\epsilon\sigma},$$

προσθέτουμε κατά μέλη και εξάγουμε

$$\sum_i m_i \gamma_i = \sum_i F_i^{\epsilon\xi} \quad \left(\sum_i F_i^{\epsilon\sigma} = 0 \right). \quad (4.44)$$

Συμπεπώς, προκύπτει η εξίσωση

$$\sum_i m_i \gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \right) = \frac{dJ}{dt} = \sum_i F_i^{\epsilon\xi}. \quad (4.45)$$

η οποία διατυπώνει το θεώρημα μεταβολής της ποσότητας κίνησης σε διαφορική μορφή, δηλαδή: *Η παράγωγος προς τον χρόνο της ποσότητας κίνησης του συστήματος ισούται προς το γεωμετρικό άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν επί του συστήματος.*

Έστω τώρα J_0 το διάνυσμα της ποσότητας κίνησης στον χρόνο $t=0$ και J_1 το αντίστοιχο μέγεθος στον χρόνο $t = t_1$. Από την (4.45) υπολογίζουμε την διαφορά

$$J_1 - J_0 = \sum_i \left(\int_{t_0}^{t_1} F_i^{\epsilon\xi} dt \right) \rightarrow J_1 - J_0 = \sum_i \Omega_i^{\epsilon\xi}. \quad (4.46)$$

στην οποία Ω_i παριστάνει την *παρορμώσα δύναμη*. Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε: *Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης ενός συστήματος κατά την διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος είναι ίση προς το άθροισμα των παρορμωσών δυνάμεων που ενεργούν επί του σώματος κατά την διάρκεια του αυτού χρονικού διαστήματος.*

4.5 Κίνηση Στερεού Περί Σταθερό Σημείο

4.5.1 Γωνιακή ταχύτητα και συστροφή - Κινητική ενέργεια

Κατά την κίνηση στερεού σώματος περί σταθερό άξονα έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια για την γωνιακή ταχύτητα ω . Κάθε σημείο Σ_i

του σώματος διατηρεί σταθερή απόσταση από τον άξονα και διαγράφει περιφέρεια κύκλου κέντρου K πάνω σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα. Η καλυπτόμενη από την ακτίνα $(K\Sigma_i) = \rho_i$ γωνία $d\phi$ κατά τον χρόνο dt είναι η ίδια για όλα τα σημεία του σώματος (Σχ. 2.2). Το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας περί τον άξονα καθορίζεται από την γνωστή σχέση $\omega = d\phi/dt$, ενώ το ίδιο το διάνυσμα ω επίσης από την γνωστή σχέση $\omega = \omega \omega_0$, όπου ω_0 παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση του άξονα περιστροφής. Σε σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων είναι

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

Ενός τυχόντος σημείου $\Sigma_i(\rho_i)$ το διάνυσμα της ταχύτητας v_i έχει αλγεβρική τιμή $\omega \rho_i$, κατευθύνεται δε κάθετα προς το επίπεδο (ω, ρ_i) με φορά τέτοια ώστε το σύστημα (ω, ρ_i, v_i) να είναι δεξιόστροφο. Εδώ ρ_i παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από το σημείο τομής του καθέτου προς τον άξονα περιστροφής επιπέδου του διερχόμενου από Σ_i προς το σημείο Σ_i . Γενικά γράφουμε

$$v_i = \omega \times r_i, \quad (4.47)$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση r_i παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από το κέντρο αναφοράς προς το σημείο Σ_i .

Ορίζουμε ως συστροφή ή στροφομή ή κινητική ροπή G ενός συστήματος υλικών σημείων προς ένα κέντρο αναφοράς O το γεωμετρικό άθροισμα όλων των συστροφών των σημείων του συστήματος προς O' επομένως, βάσει αυτών που ήδη έχουν αναπτυχθεί στο κεφάλαιο β, η συστροφή του εν λόγω συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$G = \sum_i r_i \times m_i v_i. \quad (4.48)$$

Συνεπώς, όπως η ποσότητα κίνησης ενός συστήματος χαρακτηρίζει την μεταβατική κίνηση, η συστροφή ενός συστήματος χαρακτηρίζει την περιστροφική κίνηση. Η εξίσωση (4.48) γράφεται μέσω της (4.47) υπό την μορφή

$$G = \sum_i m_i [r_i \times (\omega \times r_i)], \quad (4.49)$$

$G \cdot \omega = \int \omega \cdot \omega^2$
 ↑ αυτό NAI

$$G = \sum_i m_i [\omega r_i^2 - (r_i \cdot \omega) r_i]$$

$$G = \sum_i m_i r_i^2 \omega - \sum_i m_i (r_i \cdot \omega) r_i \Rightarrow G \cdot \omega = \sum_i m_i r_i^2 \omega - \sum_i m_i (r_i \cdot \omega) (r_i \cdot \omega)$$

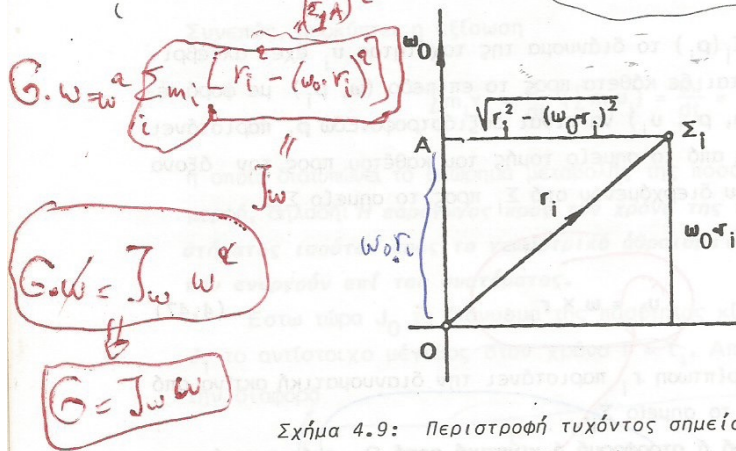
η οποία, ως τριπλό εξωτερικό γινόμενο, μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη

$$G = \sum_i m_i [\omega r_i^2 - (r_i \cdot \omega) r_i] = \sum_i (m_i r_i^2) \omega - \sum_i m_i (r_i \cdot \omega) r_i \quad (4.50)$$

Ο τύπος (4.50) καθορίζει την εξάρτηση της συστροφής G από την γωνιακή ταχύτητα ω και αντιστρόφως. Πολλαπλασιάζοντας τώρα αμφότερα τα μέλη της (4.50) εσωτερικά με ω καταλήγουμε

$$G \cdot \omega = \sum_i (m_i r_i^2) \omega^2 - \sum_i m_i (r_i \cdot \omega) (\omega \cdot r_i) \quad G \cdot \omega = \omega^2 \sum_i m_i [r_i^2 - (\omega \cdot r_i)^2] \quad (4.51)$$

$J_\omega = \rho \sum_i r_i^2$



Σχήμα 4.9: Περιστροφή τυχόντος σημείου Σ_i του στερεού περί τον άξονα ω_0 .

Αναφερόμενοι στο Σχ. 4.9 εξάγουμε

$$r_i^2 - (\omega_0 \cdot r_i)^2 = (\Sigma_i A)^2,$$

όπου $(\Sigma_i A)$ παριστάνει την κάθετη απόσταση από τον άξονα ω_0 . Επομένως, βάσει της σχέσης (4.51), παίρνουμε

$$G \cdot \omega = \omega^2 \sum_i m_i (\Sigma_i A)^2 = J_\omega \omega^2, \quad G = J_\omega \omega \quad (4.52)$$

στην οποία J_ω είναι η ροπή αδρανείας του σώματος προς τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής.

Από την άλλη μεριά, το θεώρημα μεταβολής της στροφορμής G του στερεού

σώματος αναφορικά προς το κέντρο O προκύπτει από το αντίστοιχο θεώρημα που προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο του υλικού σημείου. Συνεπώς, γιά το στερεό σώμα (σύστημα υλικών σημείων) είναι

ΑΥΤΟ ΝΑΙ

$$G = \sum_i (r_i \times m_i v_i)$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i (r_i \times m_i v_i) \right] = \sum_i \left(r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt} \right) = \sum_i (r_i \times m_i a_i) = \sum_i (r_i \times F_i^{ext}) \quad (4.53)$$

Προβάλλοντάς αμφότερα τα μέλη της τελευταίας εξίσωσης στους άξονες x, y, z του συστήματος αναφοράς Oxyz (με μοναδιαία i, j, k) ευρίσκουμε

$$\frac{dG_j}{dt} = \left[\sum_i (r_i \times F_i^{ext}) \right] \cdot a_j = M_j \quad (j = x, y, z; \quad a_j = i, j, k) \quad (4.54)$$

στην οποία M_j παριστάνει την ροπή όλων των εξωτερικών δυνάμεων προς τον άξονα j του συστήματος συντεταγμένων. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε ότι: **Το άθροισμα των ροπών όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν επί του συστήματος προς σταθερό κέντρο O ισούται προς την ανά μονάδα χρόνου ε-περχομένη μεταβολή της συνολικής συστροφής αναφορικά προς το ίδιο κέντρο.**

Η κινητική ενέργεια του συστήματος (στερεού σώματος) εκφράζεται μέσω των τύπων

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

$v_i = \omega \times r_i \Rightarrow v_i = \omega r_i$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i (m_i v_i) \cdot v_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J_w \quad (4.55)$$

Κατά την περιστροφή περί στιγμιαίο άξονα διερχόμενο από το σταθερό σημείο O (κέντρο), η τελευταία εξίσωση, δυνάμει της (4.47), μετασχηματίζεται στην

$$T = \frac{1}{2} \sum_i (m_i v_i) \cdot v_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \times r_i) \cdot v_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega \cdot (r_i \times v_i) = \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_i (r_i \times m_i v_i) = \frac{1}{2} \omega \cdot G \quad (4.56)$$

από την οποία, λαμβανομένης υπ' όψη της (4.52), ευρίσκουμε

$$T = \frac{1}{2} J_w \omega^2, \quad G \cdot \omega = 2T \quad \text{ΝΑΙ} \quad (4.57)$$

Από την εξίσωση (4.50) μπορούμε ακόμη να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες προβολές της συστροφής $G(G_x, G_y, G_z)$. Πράγματι έχουμε

Ονόματι

$$G_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}, \quad G_y = \frac{\partial T}{\partial \omega_y}, \quad G_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_z}$$

$$G_x = \sum_i (m_i r_i^2) \omega \cdot i - \sum_i (m_i x_i \omega \cdot r_i), \quad \text{όπου } r_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Επειδή όμως

$$\omega \cdot i = \omega_x, \quad \omega \cdot r_i = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i,$$

$$\sum_i (m_i r_i^2) \omega \cdot i = \omega_x \sum_i [m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)],$$

$$\sum_i (m_i x_i \omega \cdot r_i) = \sum_i m_i (\omega_x x_i^2 + \omega_y x_i y_i + \omega_z x_i z_i).$$

η συνιστώσα G_x και αναλογικά οι G_y, G_z προκύπτουν

$$G_x = \omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{zx},$$

$$G_y = -\omega_x J_{xy} + \omega_y J_y - \omega_z J_{yz}, \quad (4.58)$$

$$G_z = -\omega_x J_{zx} - \omega_y J_{yz} + \omega_z J_z.$$

Οι τελευταίες αυτές αναλυτικές εξισώσεις προσδιορίζουν το διάνυσμα της συστροφής G μέσω του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας $\omega (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Τέλος, από τις σχέσεις (4.57) και (4.58), μετά την εκτέλεση απλών πράξεων, εξαγάγουμε τους τύπους

$$G_x = \frac{\partial L}{\partial \omega_x}, \quad G_y = \frac{\partial L}{\partial \omega_y}, \quad G_z = \frac{\partial L}{\partial \omega_z}. \quad (4.59)$$

Αν το σύστημα Οxyz είναι σύστημα κυρτών αξόνων του στερεού, τότε οι (4.58) μετασχηματίζονται στις απλούστερες

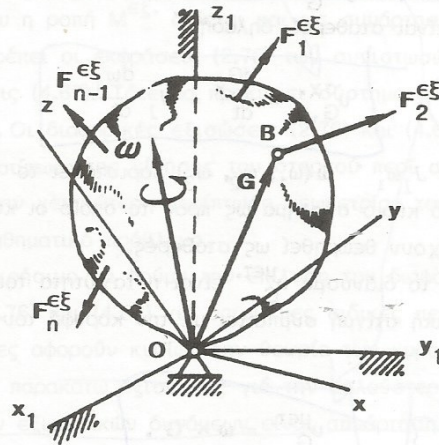
$$G_x = \omega_1 J_1, \quad G_y = \omega_2 J_2, \quad G_z = \omega_3 J_3 \quad (4.60)$$

όπου J_1, J_2, J_3 είναι οι κύριες ροπές αδρανείας. Εξ άλλου, η κινητική ενέργεια προκύπτει

$$L = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2), \quad (4.61)$$

4.5.2 Δυναμικές εξισώσεις Euler

Θεωρήσουμε ένα σύστημα εξωτερικών δυνάμεων $F_i^{ΕΞ}$, που ενεργούν πάνω σε στερεό σώμα το οποίο έχει σταθερό σημείο O (Σχ. 4.10).



Σχήμα 4.10: Περιστροφή στερεού περί σταθερό σημείο.

Επίσης, επί του σώματος ενεργεί και η αντίδραση A που διέρχεται από το O (η ροπή της προς O είναι μηδέν). Γράφουμε την εξίσωση (4.53) υπό την μορφή

$$\frac{dG}{dt} = u_G = \sum_i M_i^{ΕΞ}, \quad (4.62)$$

όπου u_G δηλώνει την παράγωγο του διανύσματος G προς τον χρόνο, δηλαδή τρόπον τινά έχει την έννοια της ταχύτητας που αντιστοιχεί στο διάνυσμα G . Θεωρούμε τώρα το κύριο σύστημα αδρανείας $Oxyz$ του σώματος συνδεδεμένο στερεά με αυτό και έχον κοινή αρχή O με το σταθερό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1y_1z_1$. Στην περίπτωση αυτή οι προβολές του διανύσματος G στο κύριο σύστημα παίρνουν την απλή μορφή (4.60) και οι κύριες ροπές αδρανείας εισέρχονται ως σταθερές. Για να υπολογίσουμε τις προβολές της απόλυτης ταχύτητας u_G στο κινητό σύστημα αξόνων $Oxyz$ γράφουμε αυτήν ως διανυσματικό άθροισμα της σχετικής ταχύτητας $u_G^{\sigma X}$ και της μετοχικής $u_G^{\mu\epsilon\tau}$. Η $u_G^{\mu\epsilon\tau}$ είναι η ταχύτητα του στερεού που οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του κινητού συστήματος $Oxyz$ ως προς το σταθερό $Ox_1y_1z_1$, ενώ $u_G^{\sigma X}$ είναι η ταχύτητα του στερεού ως προς το κινητό σύστημα $Oxyz$. Επομένως, η εξίσωση (4.62) γράφεται

(1) $\omega \times G$

$$v_G^{μετ.} + v_G^{\sigma x.} = \sum_i M_i^{\epsilon \xi.} \quad (4.63)$$

Οι προβολές του διανύσματος $v_G^{\sigma x.}$ στους κινητούς άξονες υπολογίζονται ωςάν οι άξονες αυτοί να είναι σταθεροί, δηλαδή

(2)

$$v_{G,x}^{\sigma x.} = \frac{dG_x}{dt} = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \quad (4.64)$$

δεδομένου ότι $G_x = J_1 \omega_1$ ο $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ παριστάνει το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας στο κύριο σύστημα ως προς το οποίο οι κύριες ροπές αδρανείας του στερεού έχουν θεωρηθεί ως σταθερές.

Από την άλλη μεριά, το διάνυσμα $v_G^{μετ.}$ είναι η ταχύτητα του σημείου B που στην δεδομένη χρονική στιγμή συμπίπτει με την κορυφή του διανύσματος G. Συνεπώς είναι

$\omega \times G = \begin{vmatrix} 0 & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$

(3) $v_G^{μετ.} = \omega \times G \quad (4.65)$

Η προβολή της διανυσματικής εξίσωσης (4.65) επί του κυρίου άξονος $x \equiv 1$ παρέχει

$$\frac{dG_x}{dt} = v_{G,x}^{μετ.} = \omega_2 G_z - \omega_3 G_y = (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 \quad (4.66)$$

Εν τέλει ο συνδυασμός των (4.63) έως (4.66) καταλήγει στις παρακάτω μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης του στερεού σώματος:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= \sum_i M_{i,1}^{\epsilon \xi.}, \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= \sum_i M_{i,2}^{\epsilon \xi.}, \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= \sum_i M_{i,3}^{\epsilon \xi.}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως δυναμικές εξισώσεις Euler και είναι προφανές ότι μία των εξισώσεων αυτών είναι δυνατόν, εφ' όσον τυχαίνει αναγκαίο, να αντικατασταθεί με την εξίσωση του θεωρήματος της μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οι (4.67) είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως εφ' όσον η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων

εκφράζεται ως συνάρτηση του χρόνου. Στην περίπτωση αυτή επιλύονται χωριστά από τις επίσης διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως (2.76). Οι μεν (4.67) ορίζουν την γωνιακή ταχύτητα ω ως προς κύριο σύστημα αδρανείας, οι δε (2.76) την θέση του στερεού μέσω των παραμέτρων $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$. Στην περίπτωση όμως που η ροπή $M^{E\bar{E}}$ δίδεται και ως συνάρτηση της θέσης, ή μόνο της θέσης, θα πρέπει οι εκφράσεις (2.76) των συνιστωσών του διανύσματος ω να εισαχθούν στις (4.67). Τότε θα προκύψει σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως. Οι διαφορικές εξισώσεις (2.76) και (4.67) παρέχουν την πλήρη μαθηματική διατύπωση της κίνησης του στερεού περί σταθερό σημείο και η επίλυση τους, στην γενικότερη περίπτωση γεωμετρίας του στερεού, αποτελεί δυσχερέστατο μαθηματικό πρόβλημα.

Είναι τώρα χρήσιμο να δούμε την επίλυση του διαφορικού συστήματος των έξι εξισώσεων (2.76) και (4.67) για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις κινήσεως στερεού, οι οποίες αφορούν κυρίως την θεωρία των γυροσκοπίων. Ξαναγράφουμε λοιπόν τις παρακάτω εξισώσεις για την απλούστερη περίπτωση κατά την οποία η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι συνάρτηση μόνον του χρόνου, ενώ οι άξονες του κινητού είναι κύριοι άξονες αδρανείας του στερεού:

i) Κινηματικές εξισώσεις

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (4.68a)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (4.68b)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (4.68c)$$

ii) Δυναμικές εξισώσεις

$$J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \quad (4.69a)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \quad (4.69b)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = M_3. \quad (4.69c)$$

Η υπόθεση των κυρίων αξόνων αδρανείας γίνεται για απλοποίηση των τύπων και πράξεων ενώ, από την άλλη μεριά, δεν περιορίζει καθόλου την γενικότητα του προβλήματος.

4.5.2.1 Περίπτωση μηδενικής ροπής

Αν η ροπή M των εξωτερικών δυνάμεων παραμένει ίση προς μηδέν, αν λ.χ.

το στερεό στηρίζεται ελευθέρως κατά το κέντρο βάρους των, ουδεμία άλλη δύναμη πλὴν του ἰδίου βάρους ενεργεῖ και συνεπῶς οι δυναμικές εξισώσεις παίρνουν την ομογενή μορφή

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ J_2 \ddot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= 0, \\ J_3 \ddot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι η περιστροφή γίνεται περὶ στιγμιαίο ἄξονα ἓνα των κυρίων αξόνων του ελλειψοειδούς αδρανείας, λ.χ. τὸν $z \equiv 3$ ἄξονα. Τότε $\omega_1 = \omega_2 = 0$ και οι (4.70) παρέχουν

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = c_1 \quad (4.71)$$

ὅπου c_1 εἶναι μιά σταθερά ολοκλήρωσης.

Συνάγουμε επομένως ότι η περιστροφή συνεχίζεται περὶ τὸν ἴδιο ἄξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Εξ αὐτοῦ οι κύριοι ἄξονες του ελλειψοειδούς αδρανείας καλούνται και **ελεύθεροι ἄξονες**.

Γιὰ $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη των (4.70) με ω_1 , την δεύτερη με ω_2 , την τρίτη με ω_3 , προσθέτουμε κατὰ μέλη τις προκύπτουσες νέες εκφράσεις και ευρίσκουμε

$$J_1 \omega_1 \ddot{\omega}_1 + J_2 \omega_2 \ddot{\omega}_2 + J_3 \omega_3 \ddot{\omega}_3 = 0$$

ἀπὸ την οποία δι' ολοκληρώσεως καταλήγουμε στον τύπο

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = c_2, \quad (4.72)$$

ὅπου c_2 παριστάνει μιά νέα σταθερά ολοκλήρωσης.

Συνειπῶς, συνάγουμε ότι στην περίπτωση κατὰ την οποία $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ η κινητική ενέργεια (τύπος (4.61)) παραμένει σταθερά.

Καθ' ὅμοιο τρόπο πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των (4.70) με $\ddot{\omega}_1 \neq 0$, την δεύτερη με $J_2 \omega_2 \neq 0$, την τρίτη με $J_3 \omega_3 \neq 0$ και προσθέτοντας κατὰ μέλη, παίρνουμε

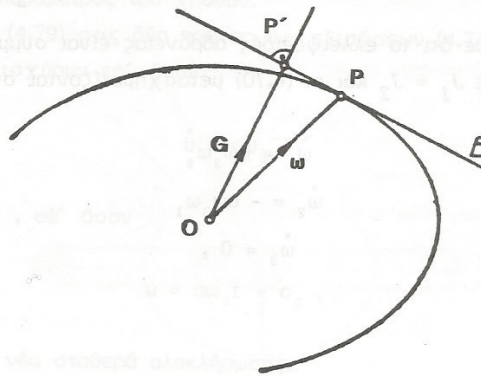
$$J_1^2 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2^2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + J_3^2 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

μέσω της οποίας δι' ολοκλήρωσης καταλήγουμε

$$J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = c_3 \quad (4.73)$$

Συνάγουμε επομένως ότι εφ' όσον $\mathbf{M} = 0$ παραμένει αμετάβλητο και το μέτρο της στροφορμής \mathbf{G} του στερεού (τύπος (4.49)),

Τα παραπάνω πορίσματα έπρεπε να αναμένονται. Δεδομένου ότι δεν επιτελείται έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις, η κινητική ενέργεια δεν μεταβάλλεται, όπως επίσης δεν μεταβάλλεται η προς το σημείο στήριξης O συστροφή \mathbf{G} εφ' όσον δεν υφίσταται ροπή των εξωτερικών δυνάμεων. Αξιοσημείωτο είναι ότι κατά την υποθεθείσα κίνηση το εφαπτόμενο επίπεδο E του ελλειψοειδούς της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ στην αιχμή P του $\boldsymbol{\omega}$ παραμένει αμετακίνητο (Σχ. 4.11).



Σχήμα 4.11: Εφαπτόμενο επίπεδο του ελλειψοειδούς της γωνιακής ταχύτητας στην αιχμή του διανύσματος $\boldsymbol{\omega}$.

Και τούτο συμβαίνει γιατί:

- i) Το επίπεδο αυτό είναι κάθετο προς το αμετάβλητο διάνυσμα της συστροφής \mathbf{G} , και

ii) Αποτέμνει επί του διανύσματος \mathbf{G} τμήμα (ΟΤ) σταθερό. Πράγματι, αν \mathbf{g}_0 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του \mathbf{G} έχουμε με βάση την (4.57)

$$\omega \cdot \mathbf{g}_0 = \frac{\omega \cdot \mathbf{G}}{G} = \frac{2L}{G} = \text{σταθ.}$$

Συνεπώς, το ελλειψοειδές της γωνιακής ταχύτητας, παρακολουθεί την κίνηση του στερεού, κυλίνεται επί του αμετακίνητου επιπέδου E (το σημείο επαφής P έχει μηδενική ταχύτητα) και παίρνει τέτοιες θέσεις, ώστε η απόσταση (ΟΤ) του σημείου στήριξης O από το αμετακίνητο επίπεδο E να μη μεταβάλλεται. Η παραπάνω γεωμετρική εικόνα υποδείχθηκε από τον Poinsot. Δεν επαρκεί όμως για την πλήρη περιγραφή της κίνησης, αφού δεν καθορίζει τις θέσεις του στερεού συναρτήσει του χρόνου.

4.5.2.2 Περίπτωση ελλειψοειδούς αδρανείας εκ περιστροφής

Η ολοκλήρωση των ομογενών εξισώσεων (4.70) επιτύγχάνεται γενικώς μέσω ελλειπτικών συναρτήσεων. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η ολοκλήρωση αυτή μπορεί να γίνει απλούστερα. Μία τέτοια περίπτωση, χρήσιμη στις εφαρμογές, είναι αυτή κατά την οποία το ελλειψοειδές αδρανείας είναι εκ περιστροφής.

Ας υποθέσουμε ότι το ελλειψοειδές αδρανείας είναι συμμετρικό περί τον άξονα $z \equiv 3$. Τότε $J_1 = J_2$ και οι (4.70) μετασχηματίζονται στις

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= a\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= -a\omega_3\omega_1 \\ \dot{\omega}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.74)$$

όπου

$$a = (J_1 - J_3) / J_1. \quad (4.75)$$

Από την τρίτη των (4.74) προκύπτει

$$\omega_3 = c_1, \quad (4.76)$$

όπου c_1 είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της πρώτης των (4.74) με $\omega_1 \neq 0$, της δεύτερης με $\omega_2 \neq 0$ και προσθέτοντας κατά μέλη τις νέες προκύπτουσες εξισώσεις, ευρίσκουμε

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0$$

$$\text{ή} \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = c_2^2, \quad (4.77)$$

όπου $c_2^2 \neq 0$ είναι μία νέα σταθερά ολοκλήρωσης.

Ένα πρώτο λοιπόν βασικό συμπέρασμα είναι ότι κατά την θεωρουμένη κίνηση το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας παραμένει σταθερό, δεδομένου ότι

$$\omega^2 = c_1^2 + c_2^2. \quad (4.78)$$

Λόγω της (4.78) μπορούμε να θέσουμε

$$\omega_1 = c_2 \sin u, \quad \omega_2 = c_2 \cos u, \quad (4.79)$$

όπου u είναι μία παράμετρος του χρόνου.

Αν εισάγουμε τις (4.79) στις δύο πρώτες των εξισώσεων (4.74) συμπεραίνουμε ότι οι τελευταίες ισχύουν εφ' όσον

$$\dot{u} = a\omega_3,$$

ή, επειδή $\omega_3 = c_1$, εφ' όσον

$$u = a\omega_3 t + c_3, \quad (4.80)$$

όπου c_3 είναι μία νέα σταθερά ολοκλήρωσης.

Συνεπώς, η λύση του συστήματος (4.74) δίδεται από τις

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \sin(a c_1 t + c_3),$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos(a c_1 t + c_3), \quad (4.81)$$

$$\omega_3 = c_1.$$

Μετά την ολοκλήρωση των δυναμικών εξισώσεων Euler για την προκειμένη περίπτωση, απομένει και η ολοκλήρωση των κινηματικών εξισώσεων (4.68) για τον καθορισμό της θέσης του στερεού σε κάθε χρονική στιγμή. Λαμβάνουμε τον άξονα z_1 του σταθερού συστήματος αναφοράς του σχήματος 2.26 να συμπίπτει με την αμετακίνητη διανυσματική ακτίνα του διανύσματος της στροφής \mathbf{G} . Η προβολή του διανύσματος \mathbf{G} επάνω στον άξονα συμμετρίας $z \equiv 3$ προκύπτει (ση προς $J_3\omega_3$ σύμφωνα με τους τύπους (4.60)). Αλλά, σύμφωνα με την σχέση (4.76) η προβολή ω_3 είναι σταθερά. Επομένως γράφουμε

$$\cos\theta = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} = \frac{J_3\omega_3}{G} = \text{σταθ.} \rightarrow \theta = \text{σταθ.},$$

όπου, σύμφωνα με το σχήμα 2.26, \mathbf{k} παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα $z \equiv 3$.

Συνεπώς, οι κινηματικές εξισώσεις Euler (4.68) διατυπώνονται υπό την μορφή

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi, \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (4.82)$$

Από τις δύο πρώτες των (4.82) συνάγουμε

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \tan\psi,$$

η οποία, βάσει των δύο πρώτων των σχέσεων (4.81), παρέχει

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \tan(\alpha c_1 t + c_3).$$

Άρα

$$\psi = \alpha c_1 t + c_3 + k\pi = \alpha c_1 t + c_4, \quad (4.83)$$

όπου c_4 είναι σταθερά.

Επομένως, ο τελευταίος των τύπων (4.82) γράφεται

$$\omega_3 = \dot{\phi} \frac{J_3\omega_3}{G} + \alpha c_1 = \dot{\phi} \frac{J_3\omega_3}{G} + \alpha\omega_3$$

από τον οποίο προκύπτει

$$\dot{\phi} = (1 - a) \frac{G}{J_3} = \frac{G}{J_1}$$

δεδομένου ότι από τον ορισμό του a είναι

$$J_3 = (1 - a) J_1 .$$

Έτσι παίρνουμε

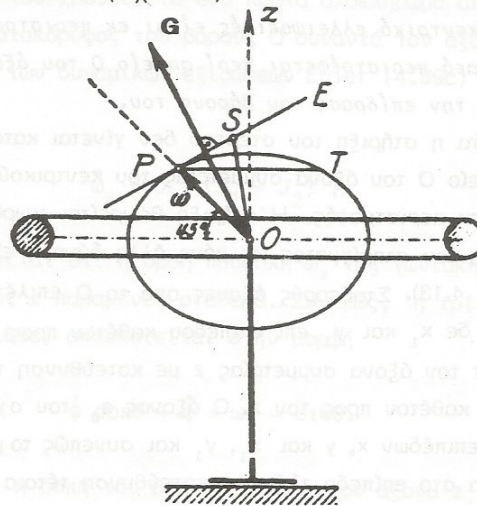
$$\phi = \frac{G}{J_1} t + c_5 \quad (4.84)$$

όπου c_5 είναι μία νέα σταθερά ολοκλήρωσης.

Στην εξετασθείσα λοιπόν κίνηση του στερεού αποδείξαμε ότι η θέση αυτή ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\theta = c^* , \quad \psi = ac_1 t + c_4 , \quad \phi = \frac{G}{J_1} t + c_5 . \quad (4.85)$$

Ως εφαρμογή των ανωτέρω ως εξετάσουμε την χωρίς τριβή κίνηση δακτυλίου περί το κέντρο του O (Σχ. 4.12).



Σχήμα 4.12: Περιστροφή δακτυλίου περί το κέντρο του.

Υποθέτουμε ότι κατά την θεωρούμενη χρονική στιγμή ο δακτύλιος ευρίσκεται

στην θέση που φαίνεται στο σχήμα 4.12(a), η δε περιστροφή του γίνεται με γνωστή γωνιακή ταχύτητα ω περί στιγμιαίο άξονα που σχηματίζει γωνία $\pi/4$ προς τον οριζόντιο. Στο σχήμα έχει χαραχθεί με ορισμένη κλίμακα το ελλειψοειδές της γωνιακής ταχύτητας.

Η ροπή αδράνειας J_3 ως προς τον κύριο άξονα $z \equiv 3$ λαμβάνεται προσεγγιστικά ίση προς $m\rho^2$, όπου m είναι η μάζα του δακτυλίου και ρ η ακτίνα του. Ισχύει επίσης η εξίσωση

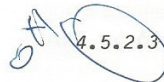
$$2J_1 = J_3.$$

Το ελλειψοειδές της γωνιακής ταχύτητας παριστάνεται από την εξίσωση

$$\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{\omega_3^2}{1} = \frac{2L}{J_3}$$

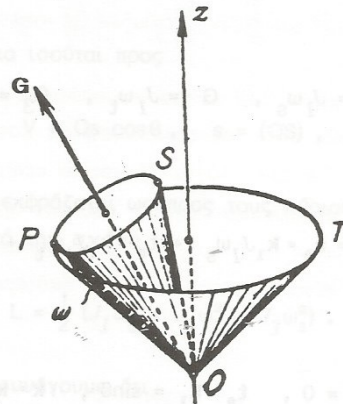
και ο λόγος των εγκάρσιων αξόνων προς τον άξονα συμμετρίας είναι $\sqrt{2}$.

Το σταθερό επίπεδο E εφάπτεται του ελλειψοειδούς κατά την αιχμή P της ακτίνας ω , η οποία αιχμή διαγράφει επί του ελλειψοειδούς τον παράλληλο κύκλο PT του σχήματος 4.12(b), ενώ επί του εφαπτομένου επιπέδου E τον κύκλο PS με κέντρο το ίχνος της διανυσματικής ακτίνας της συστροφής G .

 4.5.2.3 Το κεντρικό ελλειψοειδές είναι εκ περιστροφής και το στερεό περιστρέφεται περί σημείο O του άξονα συμμετρίας υπό την επίδραση του βάρους του.

Υποθέτουμε ότι η στήριξη του στερεού δεν γίνεται κατά το κέντρο βάρους S , αλλά κατά σημείο O του άξονα συμμετρίας του κεντρικού ελλειψοειδούς, το οποίο υποτίθεται εκ περιστροφής. Η στήριξη θεωρείται χωρίς τριβές και εκτός από την αντίδραση του στηρίγματος ως μόνη άλλη δύναμη είναι το βάρος Q του στερεού (Σχ. 4.13). Σταθερούς άξονες από το O επιλέγουμε τον μεν z_1 κατακόρυφο τους δε x_1 και y_1 επί επιπέδου καθέτου προς τον z_1 κινητούς άξονες επιλέγουμε τον άξονα συμμετρίας z με κατεύθυνση την OS και τους x, y επί επιπέδου καθέτου προς τον z . Ο άξονας s_0 του σχήματος 2.26 είναι η τομή των επιπέδων x, y και x_1, y_1 και συνεπώς το μοναδιαίο διάνυσμα διευθύνεται κάθετα στο επίπεδο $z'Oz$ με κατεύθυνση τέτοια ώστε το σύστημα k_1, k, s_0 να είναι δεξιόστροφο. Ας καλέσουμε επίσης t_0 το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς τα k και s_0 έτσι ώστε το σύστημα k_1, s_0, t_0 να είναι δεξιόστροφο. Τα διανύσματα s_0, t_0 καθώς επίσης και οι άξονες x, y διευθύνονται

παραλλήλως προς το ισημερινό επίπεδο του ελλειψοειδούς της γωνιακής ταχύτητας και συνεπώς προς καθένα από τους τελευταίους η ροπή αδρανείας έχει την ίδια τιμή J_1 . Έστω δε J_3 η προς τον άξονα z ροπή αδρανείας.



Σχήμα 4.13: Στήριξη του στερεού κατά σημείο O διάφορο του κέντρου βάρους του S .

Στην προκειμένη περίπτωση είναι δυνατόν να διατυπωθούν τρεις διαφορετικές εξισώσεις πρώτης τάξης για τον προσδιορισμό της θέσης θ, ϕ, ψ του στερεού συναρτήσει του χρόνου. Το ένα πρώτο ολοκλήρωμα απορρέει από την παρατήρηση ότι η κατακόρυφος του βάρους Q συναντά τον άξονα z . Επομένως $M_3 = 0$ και η τρίτη των δυναμικών εξισώσεων Euler (4.69c) απλοποιείται στην

$$\dot{\omega}_3 = 0 \quad (J_1 = J_2) ,$$

από την οποία συνάγεται ότι η ορθή προβολή ω_3 της γωνιακής ταχύτητας επί του άξονα συμμετρίας z παραμένει σταθερά. Συνεπώς, η τρίτη των κινηματικών εξισώσεων (4.68c) απλοποιείται στην μορφή

$$\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} = \omega_3 = \text{σταθ.} \quad (4.86)$$

Από την άλλη μεριά, η ροπή του βάρους Q προς τον άξονα z_1 μηδενίζεται με αποτέλεσμα το εσωτερικό γινόμενο της συστρόφης $G \cdot k_1$ να παραμένει σταθερό. Το διάνυσμα της συστρόφης G αναφερόμενο στους κύριους άξονες κατά τις διευθύνσεις s_0, t_0, k εκφράζεται από την ισότητα

$$G = s_0 G_s + t_0 G_t + k G_3 ,$$

όπου

$$G_s = J_1 \omega_s , \quad G_t = J_1 \omega_t , \quad G_3 = J_3 \omega_3 .$$

Παίρνουμε επομένως

$$G \cdot k_1 = s_0 \cdot k_1 J_1 \omega_s + t_0 \cdot k_1 J_1 \omega_t + k \cdot k_1 J_3 \omega_3$$

και δεδομένου ότι

$$s_0 \cdot k_1 = 0 , \quad t_0 \cdot k_1 = \sin \theta , \quad k \cdot k_1 = \cos \theta ,$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$G \cdot k_1 = J_1 \omega_t \sin \theta + J_3 \omega_3 \cos \theta . \quad (4.87)$$

Από τον τύπο (2.70) ευρίσκουμε

$$\omega = \dot{\phi} k_1 + \dot{\theta} s_0 + \dot{\psi} k ,$$

και επομένως

$$\omega_t = \omega \cdot t_0 = \dot{\phi} k_1 \cdot t_0 + \dot{\theta} s_0 \cdot t_0 + \dot{\psi} k \cdot t_0 .$$

Επειδή όμως ισχύουν οι σχέσεις

$$k_1 \cdot t_0 = \sin \theta , \quad s_0 \cdot t_0 = 0 , \quad k \cdot t_0 = 0 ,$$

η παραπάνω έκφραση της ω_t παίρνει την μορφή

$$\omega_t = \dot{\phi} \sin \theta .$$

Έτσι, η εξίσωση (4.87) καταλήγει στην ισοδύναμη

$$J_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + J_3 \omega_3^2 \cos \theta = c_1 \quad (4.88)$$

όπου c_1 είναι σταθερά.

Η δυναμική ενέργεια ισούται προς

$$V = Qs \cos \theta, \quad s = (QS),$$

η δε κίνητική ενέργεια εκφράζεται ως προς τους κύριους άξονες κατά τις διευθύνσεις $\mathbf{s}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{k}$ από την σχέση

$$L = \frac{1}{2} (J_1 \omega_s^2 + J_1 \omega_t^2 + J_3 \omega_3^2).$$

Μέσω του τύπου (2.70) συνάγουμε ότι

$$\omega_s = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{s}_0 \dot{\phi} + \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_0 \dot{\theta} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_0 \dot{\psi},$$

και επειδή

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{s}_0 = 0, \quad \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_0 = 0$$

η ω_s προκύπτει

$$\omega_s = \dot{\theta}.$$

Επομένως, η συνολική μηχανική ενέργεια, η οποία πρέπει να είναι σταθερή δεδομένου ότι η κίνηση γίνεται εντός αστροβιλιου πεδίου, εκφράζεται από την εξίσωση

$$L + V = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + Qs \cos \theta = c_2, \quad (4.89)$$

όπου c_2 είναι μία νέα σταθερά.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο διαφορικό σύστημα των εξισώσεων κίνησης στην δεδομένη περίπτωση είναι το ακόλουθο:

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \omega_3,$$

$$J_1 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \omega_3 \cos \theta = c_1, \quad (4.90)$$

$$\frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + Q_s \cos \theta = c_2.$$

Με βάση τώρα το σχήμα 4.13 τίθεται το ερώτημα εάν είναι δυνατή η κίνηση του άξονα συμμετρίας (OS) του ελλειψοειδούς κατά κανονικό κώνο γύρω από την κατακόρυφο \mathbf{k}_1 . Με άλλα λόγια τίθεται το ερώτημα εάν είναι δυνατή η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης υπό την προϋπόθεση ότι η γωνία θ είναι σταθερή. Την κίνηση αυτή ορίζουμε ως **κανονική μετάπτωση**. Επειδή η συνιστώσα ω_3 είναι σταθερά, από την δεύτερη των (4.90) συνάγεται ότι

$$\ddot{\phi} = \text{σταθερά},$$

ενώ από την πρώτη των ίδιων εξισώσεων ότι

$$\ddot{\psi} = \text{σταθερά}.$$

Επομένως, ο τύπος (2.70) απλοποιείται στην μορφή

$$\boldsymbol{\omega} = k_1 \dot{\phi} + k \dot{\psi}. \quad (4.91)$$

Η κίνηση αυτή είναι δυνατό να θεωρηθεί ότι συντίθεται από μία περιστροφή του στερεού περί τον άξονα συμμετρίας του ελλειψοειδούς με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\psi}$ σταθερού μέτρου, καθώς επίσης και από μία σύγχρονη περιστροφή περί την κατακόρυφο \mathbf{k}_1 με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$ σταθερού επίσης μέτρου. Αν το μέτρο της $\dot{\phi}$ συμβολισθεί με u το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$ της συνολικής γωνιακής ταχύτητας, κείμενο στο επίπεδο $\mathbf{k}_1 \mathbf{k}$, διατηρεί σταθερό το μέτρο του (Σχ. 4.14).

Ισχύουν οι εκφράσεις

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k}_1 = -\mathbf{s}_0 \sin \theta, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \quad (4.92)$$

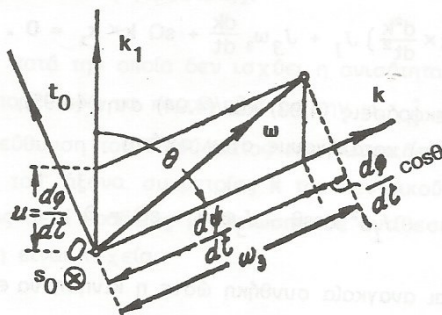
και λόγω της (4.91) οι σχέσεις

$$\frac{dk}{dt} = s_0 u \sin\theta, \quad k \times \frac{dk}{dt} = k \times s_0 u \sin\theta = t_0 u \sin\theta, \quad (4.93)$$

$$\frac{d}{dt} \left(k \times \frac{dk}{dt} \right) = k \times \frac{d^2k}{dt^2} = \frac{dt_0}{dt} u \sin\theta.$$

Επειδή η παράγωγος dt_0/dt παριστάνει την ταχύτητα της αιχμής της ακτίνας t_0 έχουμε:

$$\frac{dt_0}{dt} = -s_0 u \cos\theta, \quad k \times \frac{d^2k}{dt^2} = -s_0 u^2 \sin\theta \cos\theta. \quad (4.94)$$



Σχήμα 4.14: Μεταπτωτική κίνηση περί τον άξονα k_1 .

Αν τώρα το διάνυσμα ω της γωνιακής ταχύτητας αναλυθεί σε μία διανυσματική συνιστώσα ω_3 κατά τον k που είναι άξονας συμμετρίας του ελλειψοειδούς αδρανείας του στερεού και σε έναν άλλον, κάθετο προς αυτόν, προκύπτει

$$\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k = k \times (\omega \times k) + \omega_3 k$$

Επειδή δε ισχύει

$$\omega \times k = \frac{dk}{dt},$$

η παραπάνω εξίσωση της ω γράφεται

$$\omega = k \times \frac{dk}{dt} + \omega_3 k .$$

Αναλύοντας κατά τον ίδιο τρόπο το διάνυσμα της συστροφής G παίρνουμε

$$G = (\omega_1 i + \omega_2 j) J_1 + \omega_3 k J_3 = \left(k \times \frac{dk}{dt} \right) J_1 + \omega_3 k J_3 .$$

Δεδομένου τώρα ότι η ροπή της εξωτερικής δύναμης Q προς O ισούται

$$s \times Q = -sQ k \times k_1 ,$$

Το θεώρημα της συστροφής διατυπώνεται από την εξίσωση

$$\left(k \times \frac{d^2 k}{dt^2} \right) J_1 + J_3 \omega_3 \frac{dk}{dt} + sQ k \times k_1 = 0 . \quad (4.95)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (4.93) και (4.94) στην (4.95) και διαιρώντας με $\sin\theta \neq 0$ ($\theta \geq 0$, $\theta \leq \pi$) καταλήγουμε στην σχέση

$$J_1 u^2 \cos\theta - J_3 \omega_3 u + sQ = 0 , \quad (4.96)$$

που είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η κίνηση να είναι αυτή της κανονικής μετάπτωσης.

Η εξίσωση (4.96) δίνει για την ταχύτητα $u = \dot{\phi}$ πάντοτε πραγματικές τιμές όταν το $\cos\theta$ έχει αρνητική τιμή, δηλαδή όταν το κέντρο βάρους S ευρίσκεται κάτω από την στάθμη του σημείου στήριξης O . Όταν το $\cos\theta$ έχει τιμή θετική, τότε η ταχύτητα $u = \dot{\phi}$ έχει πραγματικές τιμές μόνον όταν

$$\omega_3^2 \geq \frac{4J_1 sQ \cos\theta}{J_3^2} ,$$

η οποία προκύπτει από την λύση της (4.96) προς u , δηλαδή από την

$$u = \frac{J_3 \omega_3}{2J_1 \cos\theta} \pm \sqrt{-\frac{sQ}{J_1 \cos\theta} + \left\{ \frac{J_3 \omega_3}{2J_1 \cos\theta} \right\}^2} . \quad (4.97)$$

Διακρίνουμε επομένως δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση *a*:

$$\left| \frac{sQ}{J_1 \cos\theta} \right| \ll \left(\frac{J_3 \omega_3}{2J_1 \cos\theta} \right)^2. \quad (4.98)$$

Εδώ, η τιμή της u στην (4.97) που αντιστοιχεί στο αρνητικό σημείο του ριζικού είναι πολύ μικρή. Τότε, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω διαφέρει πολύ ολίγον από την ω_3 και από την $\dot{\psi}$, όπως επίσης πολύ ολίγον απέχει και η κατεύθυνσή της από του άξονος συμμετρίας του ελλειψοειδούς.

Ένα τέτοιο στερεό, που έχει κεκτημένη μεγάλη ροπή αδρανείας περί τον άξονα συμμετρίας του κεντρικού ελλειψοειδούς και το οποίο περιστρέφεται περί σημείο του άξονος αυτού με ισχυρή γωνιακή ταχύτητα, όπως επίσης και περί άξονα περιστροφής κοντά στον εν λόγω άξονα συμμετρίας, καλείται **συμμετρικός στρόβος** ή **γυροσκόπιο** ή **γυροστάτης**.

Περίπτωσης *b*:

Είναι η περίπτωση κατά την οποία δεν ισχύει η ανισότητα (4.98). Συνεπώς, η ταχύτητα $u = \dot{\phi}$ μπορεί εδώ να παραβληθεί με την ω_3 , $\dot{\psi}$ και επομένως με την ω . Τότε και η κατεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας ω αποκλίνει σημαντικά από του άξονα συμμετρίας \mathbf{k} του κεντρικού ελλειψοειδούς. Πρόκειται επομένως περί **βραδείας μετάπτωσης** σε αντίθεση με την περίπτωση *a* που η μετάπτωση είναι ταχεία.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

⊙

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΑΙ

ΕΣΟΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{εσωτ}) = 0 \quad \text{Η ΡΟΠΗ}$$

ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗΣ ΤΩΝ ΕΣΟΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ = 0

⊙

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΑΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Στην γενική περίπτωση

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (1)$$

Γενικά : Το Κ.Μ ≠ Κ.Β

Παραχωρίζονται τίν (1) ~~φί~~ ~~κου~~ ~~ε~~: \vec{v}_{CM} , $\vec{\delta}_{CM}$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i \quad \text{ή} \quad \boxed{m \ddot{x}_{CM} = F_x} \quad \left[-2 \right]$$

$$\hookrightarrow m \vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

$\vec{F}_i =$ είναι οι ενεργούσες δυνάμεις επί σφαιρίδι i

⊙

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΜΑΖΑΣ

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm}$$

Ομοίως $\boxed{y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm}$, $\boxed{z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm}$

ΓΕΝΙΚΑ :

$$\boxed{r_{CM} = \frac{1}{M} \int r dm}$$

4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Εφαρμογή 4.1:

4.1.1 Υπολογισμός κέντρου βάρους ομογενούς επιφάνειας ή ομογενούς όγκου

Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους δίνονται από τους τύπους

$$x_s = \frac{\int_m x dm}{\int_m dm}, \quad y_s = \frac{\int_m y dm}{\int_m dm}, \quad z_s = \frac{\int_m z dm}{\int_m dm}, \quad (10.144)$$

$$dm = \rho d\mathcal{V} \quad \text{ή} \quad dm = \rho dV,$$

όπου $d\mathcal{V}$ παριστάνει το στοιχειώδες εμβαδόν της υλικής επιφάνειας, dV του στοιχειώδη όγκου του υλικού στερεού και ρ την πυκνότητα.

Εφαρμογή των τύπων (10.144) θα κάνουμε στις εξής χρήσιμες για την πράξη περιπτώσεις:

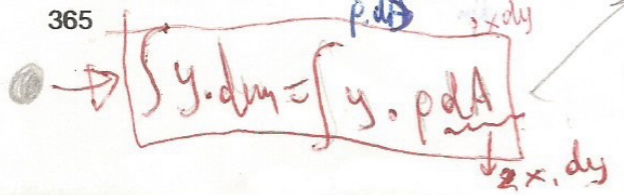
ΑΥΤΟ

Κέντρο βάρους ομογενούς ημικυκλίου (Σχ. 10.30).

Εφ' όσον ο άξονας y είναι άξονας συμμετρίας του ημικυκλίου σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα το κέντρο βάρους κείται επ' αυτού. Συνεπώς, απομένει ο υπολογισμός μόνο της συντεταγμένης y_s δεδομένου ότι πρόκειται περί επίπεδης ομογενούς επιφάνειας.

Αποκόπτουμε στοιχειώδη εμβαδά dA όπως φαίνεται στο σχήμα 10.30 και εφαρμόζουμε τον δεύτερο των τύπων (10.144), δηλαδή

$$y_s \int_m dm = \int_m y dm = \int_F y \rho d\mathcal{A} = \rho \int_0^R 2xy dy = 2\rho \int_0^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy =$$



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ x^2 &= R^2 - y^2 \\ x &= \pm \sqrt{R^2 - y^2} \end{aligned}$$

$$= \rho \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy^2 = -\frac{2\rho}{3} \sqrt{R^2 - y^2} \Big|_0^R = \frac{2\rho}{3} R^3.$$

$$= -\rho \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} d(R-y)$$

$$R^2 - y^2 = \epsilon$$

$x=0 \rightarrow \epsilon = R^2$
 $x=R \rightarrow \epsilon = 0$

$$= -\rho \int_{\epsilon=R^2}^{\epsilon=0} \epsilon^{1/2} d\epsilon = -\rho \frac{2}{3} [\epsilon^{3/2}]_{\epsilon=R^2}^{\epsilon=0} = -\rho \frac{2}{3} [0 - R^3] = \frac{2}{3} \rho R^3$$

Σχήμα 10.30: Ομογενές ημικύκλιο.

Το ολοκλήρωμα όμως της στοιχειώδους μάζης είναι $dm = \rho dA \Rightarrow \int dm = \int \rho dA \Rightarrow m = \rho A \Rightarrow m = \rho \frac{\pi R^2}{2}$

Επομένως έχουμε

$$y_s = \frac{2\rho}{3} R^3 \frac{2}{\pi R^2 \rho} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \quad (10.145)$$

Κέντρο βάρους ομογενούς ημισφαιρίου (Σχ. 10.31):

Δεδομένου ότι ο άξονας z είναι άξονας συμμετρίας του στερεού, το κέντρο βάρους του κείται επ' αυτού. Απομένει επομένως ο προσδιορισμός της συντεταγμένης z_s. Αποκόπτουμε τον στοιχειώδη δγκο πάχους dz και εφαρμόζουμε τον τρίτο των τύπων (10.144), δηλαδή

$$z_s = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm} \Rightarrow z_s \int dm = \int z dm = \int_V z \rho dV = \int_0^R z \rho \pi r^2 dz$$

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό των σφαιρικών συντεταγμένων

$$r = R \cos\phi, \quad z = R \sin\phi, \quad dz = R \cos\phi \, d\phi$$

οπότε, επειδή για $r = R \Rightarrow \phi = 0$ και για $r = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$, παίρνουμε

$$z_s m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{R}_{z} \sin\phi \underbrace{\rho \pi}_{r^2} \underbrace{R^2 \cos^2\phi}_{r^2} \underbrace{R \cos\phi \, d\phi}_{dz} = R^4 \rho \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \cos^3\phi \, d\phi =$$

$$= -R^4 \rho \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi \, d\cos\phi = -R^4 \rho \pi \left. \frac{\cos^4\phi}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4 \rho \pi}{4}$$

Επειδή τέλος $dm = \rho \, dV \Rightarrow dm = \rho \int dV \Rightarrow m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

$$m = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

ευρίσκουμε

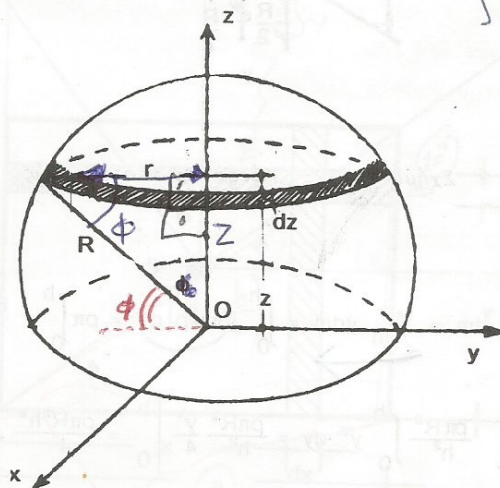
$$z_s = \frac{3R}{8}$$

(10.146)

$$z_s = \frac{\int z \, dm}{\int dm} = \frac{\frac{R^4 \rho \pi}{4}}{\rho \frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3R}{8}$$

$$\frac{R^4 \rho \pi \cdot 2}{4 \cdot \frac{4}{3} \rho \pi R^3} = \frac{R^3}{8}$$

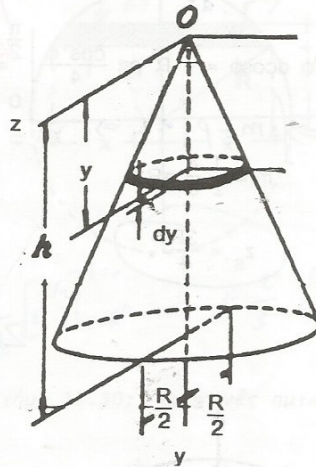
$$z_s = \frac{3R}{8}$$



Σχήμα 10.31: Ομογενές ημισφαίριο.

Κέντρο βάρους ομογενούς κώνου εκ περιστροφής (Σχ. 10.32).

Το κέντρο βάρους κείται επί του άξονος y . Εφαρμόζουμε τον δεύτερο των τύπων (10.144), δηλαδή



Σχήμα 10.32: Κώνος εκ περιστροφής.

$$y_s \int_m dm = \int_m y dm = \int_0^h y \rho \pi z^2 dy = \rho \pi \int_0^h y \frac{R^2 y^2}{h^2} dy =$$

$$\frac{\rho \pi R^2}{h^2} \int_0^h y^3 dy = \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{\rho \pi R^2 h^2}{4}.$$

Επειδή

$$\int_m dm = \rho \int_V dV = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

ευρίσκουμε

$$y_s = \frac{3h}{4}. \quad (10.147)$$

4.1.2 Υπολογισμός ροπών αδράνειας ομογενών επιφανειών ή ομογενών όγκων

ΑΥΤΟ

Ομογενές ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Σχ. 10.33)

Για την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x θεωρούμε τα στοιχειώδη εμβαδά ($a dy$). Σύμφωνα με τον πρώτο των τύπων (4.12) έχουμε

$$J_x = \int_m y^2 dm = \int_0^b y^2 \rho a dy = \rho a \int_0^b y^2 dy = \frac{\rho a b^3}{3}$$

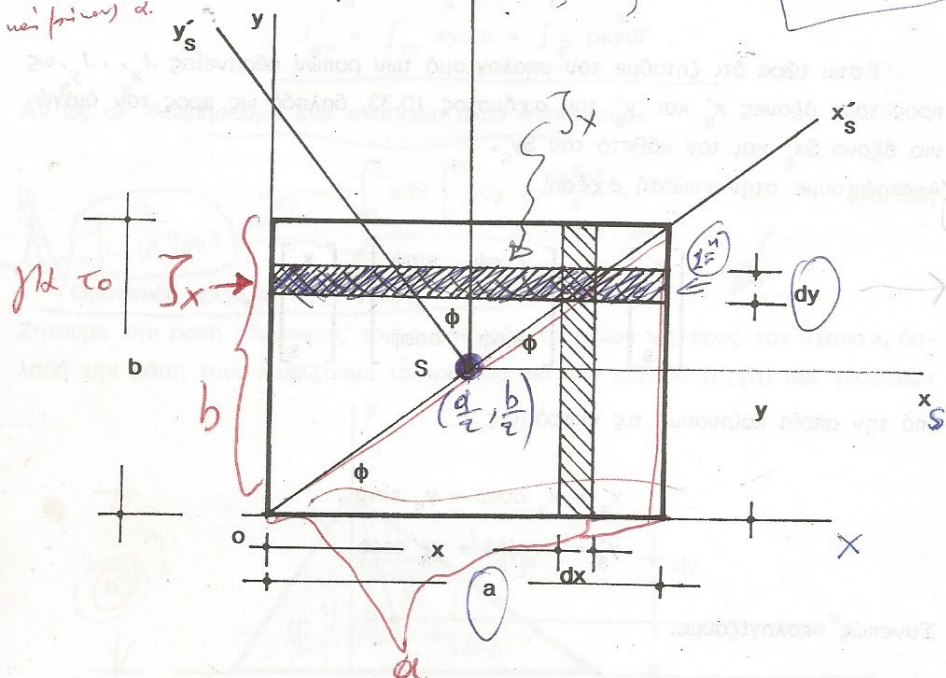
$J_x = \frac{mb^2}{3}$

από την J_x παίρνω χωρίδα // με τον x άξονα dy και παίρνω a .

$dm = \rho \cdot dS$

$dS = \rho \cdot dS$

$m = \rho \int dS = \rho \cdot S = \rho \cdot ab$



Σχήμα 10.33: Ομογενές ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Επειδή $F = ab$, $m = ab\rho$ τελικώς ευρίσκουμε

$$J_x = \frac{mb^2}{3}. \quad (10.148)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε

$$J_y = \int_m x^2 dm = \frac{ma^2}{3}. \quad (10.149)$$

Κατά το θεώρημα Huyghens (ή Steiner για το επίπεδο) υπολογίζουμε τις ροπές αδρανείας ως προς τους x_s, y_s κεντροβαρικούς άξονες, δηλαδή τις κύριες ροπές αδρανείας από τους τύπους:

$$\boxed{J_x = J_{x_s} + m r^2} \Rightarrow J_{x_s} = \frac{mb^2}{3} - m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{12}, \quad (10.150)$$

$$J_{y_s} = \frac{ma^2}{3} - m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{12}.$$

Έστω τώρα ότι ζητούμε τον υπολογισμό των ροπών αδρανείας $J_{x_s'}, J_{y_s'}$ ως προς τους άξονες x_s', y_s' του σχήματος 10.33, δηλαδή ως προς τον διαγώνιο άξονα Sx_s' και τον κάθετό του Sy_s' .

Ανατρέχουμε στην γνωστή σχέση

$$\begin{bmatrix} x_s' \\ y_s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix},$$

από την οποία παίρνουμε τις εκφράσεις

$$x_s' = x_s \cos\phi + y_s \sin\phi,$$

$$y_s' = -x_s \sin\phi + y_s \cos\phi.$$

Συνεπώς υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} J_{x_s'} &= \int_m y_s'^2 dm = \int_m (-x_s \sin\phi + y_s \cos\phi)^2 dm = \\ &= \sin^2\phi \int_m x_s^2 dm + \cos^2\phi \int_m y_s^2 dm - 2\sin\phi \cos\phi \int_m x_s y_s dm \end{aligned}$$

$\underbrace{\int_m x_s^2 dm}_{J_{x_s}} \quad \underbrace{\int_m y_s^2 dm}_{J_{y_s}}$

Επίσης είναι οι αψίδες
αξόνες αδρανείας

και επειδή οι x_s, y_s είναι κύριοι άξονες αδρανείας

$$\int_m x_s y_s dm = 0,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} J_{x_s'} &= \sin^2\phi \int_m x_s^2 dm + \cos^2\phi \int_m y_s^2 dm = \frac{mb^2}{12} \sin^2\phi + \frac{ma^2}{12} \cos^2\phi = \\ &= \frac{mb^2}{12} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{ma^2}{12} \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{m(a^4+b^4)}{12(a^2+b^2)} \end{aligned} \quad (10.151)$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned} J_{y_s'} &= \int_m x_s^2 dm = \cos^2\phi \int_m x_s^2 dm + \sin^2\phi \int_m y_s^2 dm = \frac{mb^2}{12} \cos^2\phi + \frac{ma^2}{12} \sin^2\phi = \\ &= \frac{mb^2}{12} \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{ma^2}{12} \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}. \end{aligned} \quad (10.152)$$

Η φυγόκεντρη ροπή αδρανείας J_{xy} ως προς τους άξονες x, y προκύπτει σύμφωνα με τους τύπους (4.14) ως εξής:

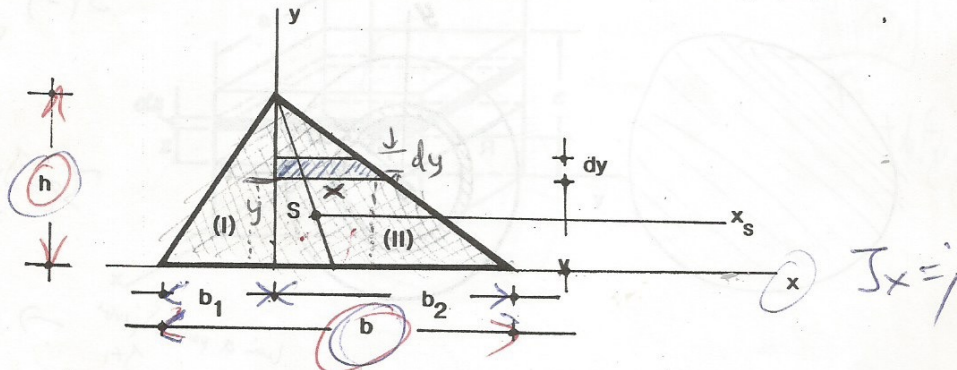
$$J_{xy} = \int_m xy dm = \int_F \rho xy dF.$$

Αν ως dF θεωρήσουμε ένα στοιχείο $dx dy$ ευρισκόμε

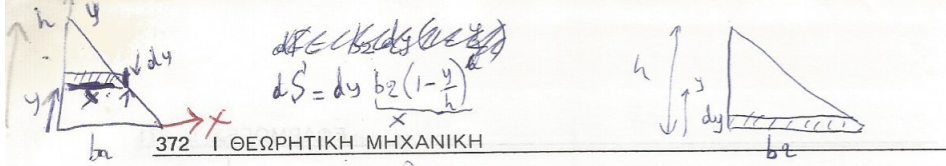
$$J_{xy} = \rho \int_0^a x dx \int_0^b y dy = \frac{\rho a^2 b^2}{4} = \frac{mab}{4}. \quad (10.153)$$

Ομογενές τρίγωνο (Σχ. 10.34).

Ζητούμε την ροπή αδρανείας του ομογενούς τριγώνου ως προς τον άξονα x , δηλαδή την βάση του. Χωρίζουμε το τρίγωνο στα δύο εμβαδά (I), (II) και γράφουμε



Σχ. 10.34: Ομογενές τρίγωνο.



$y=0$
 $y=h$

$b_2(1 - \frac{y}{h})$

$J_x = J_{x(I)} + J_{x(II)}$

Είναι:

$$J_{x(I)} = \int_m y^2 dm = \int_F \rho y^2 dF = \rho \int_0^h b_2 y^2 \frac{h-y}{h} dy = \frac{\rho b_2}{h} \int_0^h y^2(h-y) dy =$$

$$J_{x(I)} = \frac{\rho b_2 h^3}{12}$$

$$J_{x(II)} = \frac{\rho b_1 h^3}{12}$$

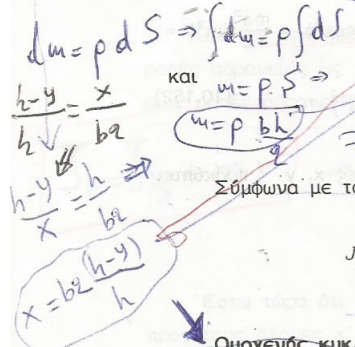
$$J_x = \frac{\rho h^3 b}{12} = \frac{\rho b h}{2} \frac{h^2}{6} = \frac{m h^2}{6}$$

και $m = \rho S \Rightarrow$
 $m = \rho \frac{b h}{2}$

Σύμφωνα με το θεώρημα Huyghens (ή Steiner στο επίπεδο) ευρίσκουμε

$$J_{x_S} = J_x - \frac{m b h}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{m h^2}{6} - \frac{m h^2}{9} = \frac{m h^2}{18}$$

(10.154)
(10.155)



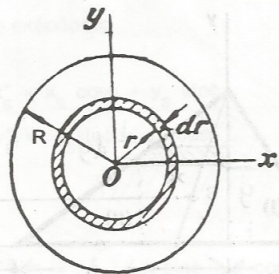
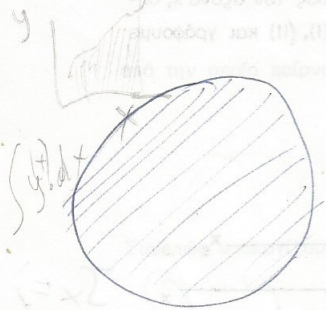
Ομογενής κυκλικός δίσκος (Σχ. 10.35).

Λόγω συμμετρίας ισχύει

$J_x = J_y$

ενώ, βάσει των τύπων (4.10) και (4.12) συμπεραίνουμε ότι

$J_z = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$



Με υποβοήθεια
 ή παλαιά ποινή
 δεικνύμε
 (ως πρώτο βήμα 0)

$J_P = \int r^2 dm$
 $\rho \cdot dS$
 $\rho \cdot 2\pi r dr$

$J_P = J_x + J_y = 2J_x$
 $J_x = J_y$

$J_z = J_x + J_y = 2J_x$

Σχήμα 10.35: Ομογενής κυκλικός δίσκος. J_x, J_y

Χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο στους στοιχειώδεις δακτυλλούς ακτίνας r όπως φαίνεται στο σχήμα 10.35. Η ροπή αδραναίας κάθε τέτοιου δακτυλλού ως προς το σημείο O είναι

$$J_0 = \int_m r^2 dm = \int_F \rho r^2 dF = \int_0^R \rho r^2 (2\pi r dr) = \frac{2\pi\rho R^4}{4} = \frac{\pi\rho R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}.$$

$\Rightarrow J_0 = J_x + J_y + J_z$

Από τον τύπο (4.16) έχουμε

$$J_0 = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y,$$

δηλαδή

$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4} \quad (10.157)$$

και ακόμη

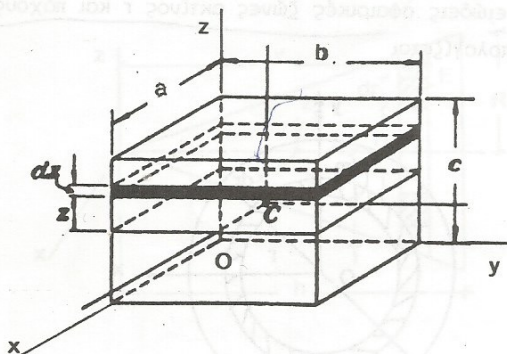
$$J_z = \frac{mR^2}{2} = J_0. \quad (10.158)$$

Είναι τώρα σαφές ότι στην περίπτωση ημικυκλικού ομογενούς δίσκου έχουμε

$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{8}, \quad J_z = \frac{mR^2}{4} = J_0. \quad (10.159)$$

Ομογενές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (Σχ. 10.36).

Θεωρούμε τους στοιχειώδεις όγκους $abdz$ όπως φαίνεται στο σχήμα 10.36. Με βάση τους τύπους (4.13) υπολογίζουμε την ροπή αδραναίας ως προς το επίπεδο $(z) = (xy)$, δηλαδή



Σχήμα 10.36: Ομογενές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

$$J_{(z)} = \int_m z^2 dm = \int_0^c z^2 \rho ab dz = \frac{\rho abc^3}{3} = \rho abc \frac{c^2}{3} = \frac{mc^2}{3}. \quad (10.160)$$

Καθ' ὄμοιο τρόπο οι ροπές αδραναίας ως προς τα επίπεδα $(y) = (xz)$ και $(x) = (yz)$ είναι:

$$J_{(y)} = \frac{mb^2}{3}, \quad J_{(x)} = \frac{ma^2}{3}. \quad (10.161)$$

Από τους τύπους (4.12) και (4.13) συνάγουμε ότι οι ροπές αδραναίας ως προς τους άξονες x, y, z δίνονται ως εξής:

$$J_x = J_{(y)} + J_{(z)}, \quad J_y = J_{(x)} + J_{(z)}, \quad J_z = J_{(x)} + J_{(y)},$$

δηλαδή με βάση τα αποτελέσματα (10.160), (10.161) παίρνουμε

$$J_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{3}, \quad J_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{3}, \quad J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}. \quad (10.162)$$

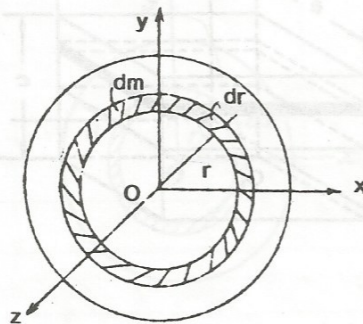
Μπορούμε τώρα μέσω του θεωρήματος Huyghens να υπολογίσουμε την ροπή αδραναίας προς κεντροβαρικό άξονα, έστω τον Sx . Είναι

$$J_{Sx} = J_x - m\left(\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{m(b^2 + c^2)}{12} \quad (10.163)$$

Σημείωση

Ομογενής σφαίρα (Σχ. 10.37).

Χωρίζουμε σε στοιχειώδεις σφαιρικές ζώνες ακτίνας r και πάχους dr . Η στοιχειώδης μάζα dm υπολογίζεται



Σχήμα 10.37: Ομογενής σφαίρα.

$$dm = \rho dV = \rho \frac{4}{3} \pi [(r + dr)^3 - r^3] \approx 4 \rho \pi r^2 dr .$$

Επομένως, η ροπή αδρανεας ως προς το O είναι

$$J_p = J_O = \int_m r^2 dm = \int_0^R 4 \rho \pi r^4 dr = \frac{4 \rho \pi R^5}{5} = \frac{4 \pi R^3}{3} \rho \frac{3 R^2}{5} = \frac{3}{5} m R^2 . \quad (10.164)$$

Μέσω του τύπου (4.17) και δεδομένου ότι λόγω συμμετρίας είναι

$$J_x = J_y = J_z ,$$

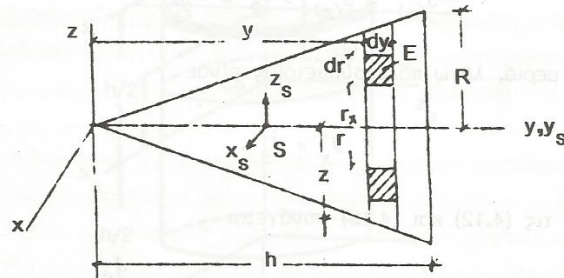
παίρνουμε

$$J_x = \frac{2}{3} J_O = \frac{2}{3} \frac{3}{5} m R^2 = \frac{2}{5} m R^2 . \quad \checkmark \quad (10.165)$$

Ομογενής κώνος εκ περιστροφής (σχ. 10.38).

Ζητούμε την ροπή αδρανεας J_y . Έστω dJ_y η ροπή αδρανεας του τμήματος του κώνου που αποκόπτεται από δύο επίπεδα απέχοντα κατά dy και είναι κάθετα στον άξονα Oy. Έστω dm_1 η μάζα του δακτυλλίου που προκύπτει από την περιστροφή του ορθογωνίου E περί τον Oy. Είναι

$$dm_1 = \rho \pi [(r + dr)^2 - r^2] dy \approx 2 \pi r dr dy$$



Σχήμα 10.38: Ομογενής κώνος εκ περιστροφής.

$$y = R\phi \rightarrow y = \frac{R\omega_{y_1}}{2K} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{y_1}}{\omega_{y_1}}\right)^2} = 1.96 \frac{R\omega_{y_1}}{K}. \quad (10.192)$$

✓ **Εφαρμογή 4.4:** Για να καθορίσουμε πλήρως την κίνηση στερεού σώματος, που είναι παράλληλη προς επίπεδο, χρειαζόμαστε τρεις συντεταγμένες* δύο, που να καθορίζουν την θέση ενός σημείου του σώματος στο επίπεδο και μία που να καθορίζει την γωνία στροφής αυτού ως προς άξονα διερχόμενο από το σημείο. Έτσι, αν ορίσουμε ορθογώνιο καρτεσιανό επίπεδο σύστημα συντεταγμένων xOy και υποθέσουμε το σημείο C του στερεού, οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν συνοπτικά κάτω από την μορφή:

$$\left(\begin{array}{l} m\ddot{x}_C = F_X, \\ m\ddot{y}_C = F_Y, \\ J_C \ddot{\theta} = M_C, \end{array} \right) \rightarrow \text{ζ. D.E. Euler} \quad (10.193)$$

στις οποίες \ddot{x}_C, \ddot{y}_C παριστούν τις συνιστώσες της επιτάχυνσης του σημείου C ως προς το xOy -σύστημα* F_X και F_Y είναι οι συνιστώσες της εξωτερικής συνολικής δύναμης που ενεργεί στο σώμα ως προς το ίδιο σύστημα* M_C παριστάνει την ροπή της δύναμης αυτής ως προς άξονα διερχόμενο από το C * J_C είναι η ροπή αδραειας του σώματος ως προς τον παραπάνω άξονα και m είναι η μάζα του σώματος. Σημειώνουμε εδώ ότι η τρίτη των (10.193) αντιστοιχεί στην μία των δυναμικών εξισώσεων Euler (4.67).

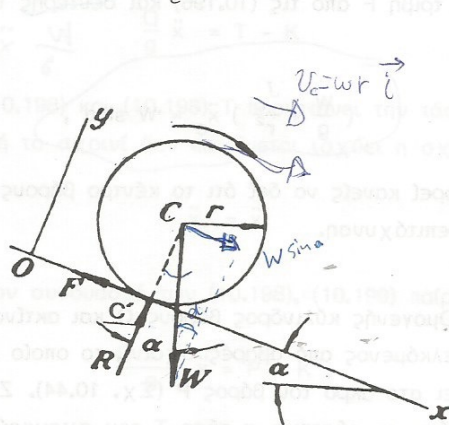
Ως εφαρμογή των παραπάνω ζητούμε να καθορίσουμε τις εξισώσεις κίνησης στερεού εκ περιστροφής, το οποίο υπό την επίδραση της βαρύτητας κυλά (χωρίς ολίσθηση) πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας α , όπως φαίνεται στο σχήμα 10.43.

Λύση: Με βάση το σχήμα 10.43 και συμβολίζοντας με W το βάρος του σώματος, R την κάθετη προς το κεκλιμένο επίπεδο αντίδραση και F την συνολική τριβή, οι εξισώσεις κίνησης (10.193) του κέντρου βάρους C του στερεού γράφονται αναφορικά προς το σύστημα xOy ως εξής:

$$m\ddot{x} = \sum f_x \Rightarrow m\ddot{x} = \sum f_x \Rightarrow \frac{W}{g} \ddot{x}_C - W \sin \alpha + F = 0,$$

$$\frac{W}{g} \ddot{y}_C - W \cos \alpha - R = 0, \quad (10.194)$$

$$J_C \ddot{\theta} = rF.$$



$$F_x = W \sin \alpha - F$$

$$F_y = R - W \cos \alpha = 0$$

Σχήμα 10.43: Στερεό εκ περιστροφής σε κεκλιμένο επίπεδο.

Από την υπόθεση ότι δεν υπάρχει ολίσθηση συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του σημείου επαφής μεταξύ καθέτου στον άξονα του κυλίνδρου τομής και του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση προς μηδέν. Αν ονομάσουμε το σημείο αυτό C' έχουμε

$$v_{C'} = 0.$$

(10.195)

Έτσι, από τον τύπο (2.51) προκύπτει

$$v_C = v_{C'} + \omega \times r_{C'C} = \omega \times r_{C'C} = \omega r i,$$

όπου i παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα x .

Συνεπώς εξαγάγουμε τις σχέσεις

$$\dot{x}_C = v_C = \omega r = \dot{\theta} r,$$

$$\ddot{x}_C = \ddot{\theta} r, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_C}{r}$$

$$v = \omega r \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \dot{\theta} r \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = \ddot{\theta} r \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

όπου $\theta = \theta(t)$ παριστάνει την γωνία στροφής του στερεού. Επομένως, η τρίτη των εξισώσεων (10.194) γίνεται

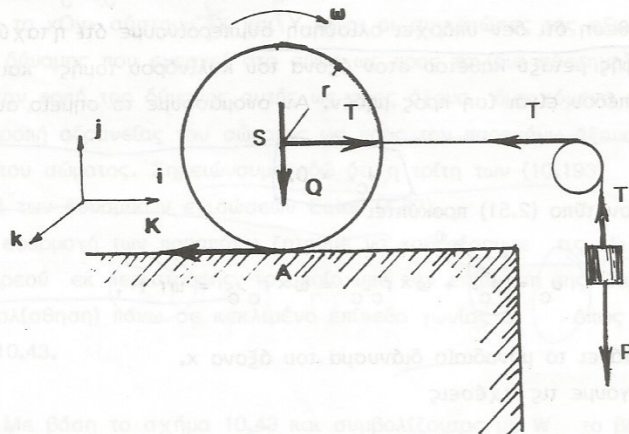
$$J_C \frac{\ddot{x}_C}{r} = rF \quad (10.196)$$

Απαλείφοντας την τριβή F από τις (10.196) και δεύτερης των (10.194) ευρίσκουμε

$$\left(\frac{W}{g} + \frac{J_C}{r^2} \right) \ddot{x}_C = W \sin \alpha, \quad (10.197)$$

από την οποία μπορεί κανείς να δει ότι το κέντρο βάρους C κινείται προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση.

Εφαρμογή 4.5: Ομογενής κύλινδρος βάρους Q και ακτίνας r κυλίνεται επί οριζοντίου εδάφους ελκόμενος από αβαρές σχοινί, το οποίο περιβάλλει αβαρή τροχαλία και φέρει στο άκρο του βάρος P (Σχ. 10.44). Ζητείται η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σύστημα, η τάση T του σχοινιού, η ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει το σύστημα όταν το P κατέλθει κατά h , και πόσος είναι ο λόγος των μέτρων P/Q ώστε να μη λαμβάνει χώρα ολίσθηση. Ο συντελεστής πρόσφυσης μεταξύ κυλίνδρου εδάφους είναι μ .



Σχήμα 10.44: Κύλινδρος κυλιόμενος επί οριζοντίου επιπέδου.

Λύση: Με βάση το τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος 10.44 οι αναλυτικές εξισώσεις κίνησης του βάρους P και του κέντρου βάρους του

Λαμβανομένου υπ' όψη της τελευταίας εξίσωσης και της (10.204) η έκφραση

$$K = \frac{Q\ddot{x}}{2g}$$

γίνεται

$$\mu Q = \frac{1}{2g} Q \frac{2gP}{3Q + 2P}$$

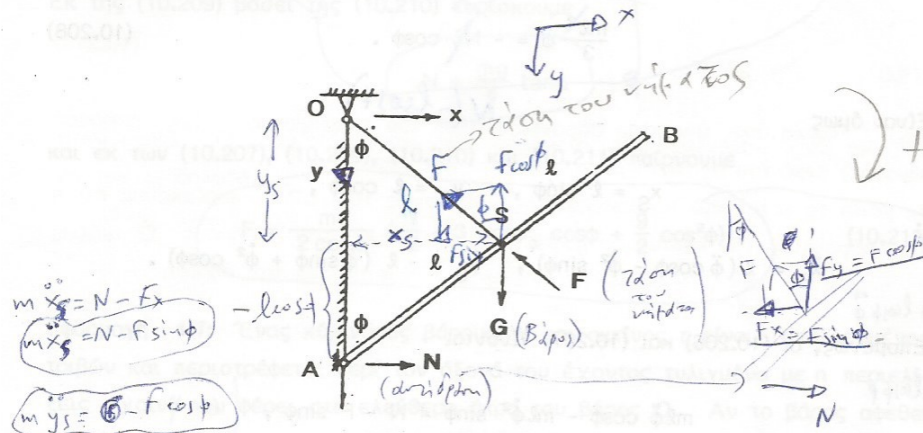
εκ της οποίας παίρνουμε

$$P = 3\mu Q + 2\mu P,$$

δηλαδή

$$\frac{P}{Q} = \frac{3\mu}{1 - 2\mu}. \quad (10.205)$$

Εφαρμογή 4.6: Λεπτή πρισματική ράβδος AB μήκους $2l$ αναρτάται μέσω σχοινού μήκους l από το κέντρο βάρους της και σημείου O, ενώ το ένα άκρο της A ολισθαίνει άνευ τριβής επί της κατακόρυφου από το σημείο ανάρτησης (Σχ. 10.45). Ζητείται η εξίσωση της κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας αυτής με την κατακόρυφο, καθώς και οι αντιδράσεις.



Σχήμα 10.45: Ράβδος ανηρτημένη εκ του κέντρου βάρους της.

Λύση: Οι αναλυτικές εξισώσεις του κέντρου βάρους της ράβδου ως προς το

σύστημα συντεταγμένων xOy (Σχ. 10.45) εκφράζονται μέσω των εξισώσεων:

$$m\ddot{x}_S = N - F \sin\phi, \quad (10.206)$$

$$m\ddot{y}_S = G - F \cos\phi, \quad (10.207)$$

στις οποίες N παριστάνει την κάθετη αντίδραση στο A λόγω μη υπάρξεως τριβής, G είναι το βάρος της ράβδου και F παριστάνει την τάση του σχοινοῦ.

Λόγω ολίσθησης του A επί του κατακόρυφου επιπέδου έχουμε και περιστροφή της ράβδου περί άξονα κάθετο στο κατακόρυφο επίπεδο διά του κέντρου βάρους S . Συνεπώς, η τρίτη των δυναμικών εξισώσεων Euler (4.67) δίδει:

$$J_S \ddot{\phi} = M_S = -Nl \cos\phi$$

Λαμβανομένου υπ' όψη ότι η ράβδος είναι πρισματική και λεπτή από τον τύπο (10.163) παίρνουμε

$$J_S = \frac{(2l)^2}{12} m = \frac{l^2 m}{3}$$

και έτσι η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\phi} = -Nl \cos\phi. \quad (10.208)$$

Είναι όμως

$$x_S = l \sin\phi, \quad y_S = l \cos\phi,$$

$$\dot{x}_S = l \cos\phi \dot{\phi}$$

$$\ddot{x}_S = l (\dot{\phi} \cos\phi - \dot{\phi}^2 \sin\phi), \quad \ddot{y}_S = -l (\dot{\phi} \sin\phi + \dot{\phi}^2 \cos\phi).$$

$$\dot{x}_S = l \sin\phi \dot{\phi} + l \cos\phi \dot{\phi}$$

Επομένως, οι (10.206) και (10.207) γίνονται

$$\dot{x}_S = -l \sin\phi \dot{\phi}^2 + l \cos\phi \dot{\phi}$$

$$ml\dot{\phi} \cos\phi - ml\dot{\phi}^2 \sin\phi = N - F \sin\phi,$$

$$-(ml\dot{\phi} \sin\phi + ml\dot{\phi}^2 \cos\phi) = mg - F \cos\phi$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση

$$N \cos \phi = m \ell \ddot{\phi} + mg \sin \phi .$$

(10.209)

Εισάγοντας την σχέση αυτή στην (10.208) ευρίσκουμε

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{4} \frac{g}{\ell} \sin \phi = 0 .$$

(10.210)

Πολλαπλασιάζοντας με $\dot{\phi} \neq 0$ αμφότερα τα μέλη της (10.210) γράφουμε

$$\frac{(\dot{\phi}^2)'}{2\dot{\phi}} + \frac{3g}{4\ell} \left(-\frac{(\cos \phi)'}{\dot{\phi}} \right) \Rightarrow (\dot{\phi}^2)' - \frac{3g}{2\ell} (\cos \phi)' = 0$$

από την ολοκλήρωση της οποίας υπολογίζουμε

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \cos \phi + C .$$

Θεωρώντας την αρχική συνθήκη για $t = 0$ $\dot{\phi}(0) = 0$, $\phi(0) = \phi_0$ τελικά στην έκφραση

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} (\cos \phi - \cos \phi_0) .$$

(10.211)

Εκ της (10.209) βάσει της (10.210) ευρίσκουμε

$$N = \frac{mg}{4} \tan \phi$$

και εκ των (10.207), (10.209), (10.210) και (10.211) παίρνουμε

$$F = \frac{mg}{2 \cos \phi} \left(\frac{1}{2} - 3 \cos \phi_0 \cos \phi + \frac{9}{2} \cos^2 \phi \right) .$$

(10.212)

$$\begin{aligned} (\dot{\phi}^2)' &= 2\dot{\phi}\ddot{\phi} \Rightarrow \\ \dot{\phi} &= \frac{(\dot{\phi}^2)'}{2\dot{\phi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad (\cos \phi)' &= -\sin \phi \dot{\phi} \Rightarrow \\ \sin \phi &= -\frac{(\cos \phi)'}{\dot{\phi}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \cos \phi_0$$

καταλήγουμε