17/03/2021

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

	ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
i)	Εξ. κίνησ	F=;
ii)	F	Εξ. κίνησης;

3.1 Τα Προβλήματα της Δυναμικής γιά το Ελεύθερο και το Έχον Εξηναγκασμένη Κίνηση Υλικό Σημείο

Τα προβλήματα της δυναμικής γιά ένα ελεύθερο υλικό σημείο είναι:

i) Ο καθορισμός της ενεργούσας δύναμης όταν είναι γνωστή η εξίσωση της κίνησης, και

ii) Ο καθορισμός της εξίσωσης κίνησης, όταν είναι γνωστές οι ενεργούσες δυνάμεις (κύριο πρόβλημα της δυναμικής).

Αμφότερα τα προβλήματα αυτά επιλύονται με βάση τις εξισώσεις

$$\mathbf{P} = m\boldsymbol{\gamma} = m\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{u})}{dt}\,, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{P}_i = m\sum_i \boldsymbol{\gamma}_i = m\boldsymbol{\gamma}\,. \tag{3.2}$$

Συνήθως είναι αναγκαίο να ερευνηθεί η εξηναγκασμένη κίνηση υλικού σημείου, δηλαδή η κίνηση την οποία το σημείο υποχρεούται να κάνει πάνω σε επιφάνεια ή καμπύλη γραμμή. Στην περίπτωση αυτή, όπως και στην στατική, αντικαθιστούμε τους συνδέσμους με τις αντιδράσεις και θεωρούμε το σημείο ελεύθερο υπό την ενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων και αντιδράσεων **A**. Τότε, η θεμελιώδης αρχή της δυναμικής γιά την εξηναγκασμένη κίνηση ενός υλικού σημείου παίρνει την μορφή

$$\boxed{\sum_i \mathbf{P}_i + \mathbf{A} = m\boldsymbol{\gamma}\,.} \tag{3.3}$$

Γιά την εξηναγκασμένη κίνηση το πρώτο πρόβλημα είναι να καθορισθούν οι αντιδράσεις των συνδέσμων όταν η κίνηση και οι εξωτερικές δυνάμεις είναι γνωστές. Το δεύτερο και κύριο πρόβλημα είναι να καθορισθούν η εξίσωση κίνησης και οι αντιδράσεις, εφ΄ όσον είναι γνωστές οι εξωτερικές δυνάμεις.

3.2 Ευθύγραμμη Κίνηση Υλικού Σημείου

Γνωρίζουμε ότι στην ευθύγραμμη κίνηση η ταχύτητα και επιτάχυνση ενός υλικού σημείου διευθύνονται συνεχώς κατά μήκος της ίδιας ευθείας γραμμής. Επειδή η διεύθυνση της επιτάχυνσης συμπίπτει με την διεύθυνση της ενεργούσας δύναμης προκύπτει ότι ένα ελεύθερο σημείο κινείται σε ευθεία γραμμή όταν η ενεργούσα επ΄ αυτού εξωτερική δύναμη P έχει σταθερή διεύθυνση και η αρχική ταχύτητα είναι είτε μηδενική είτε συγγραμμική με την δύναμη. Λαμβάνοντας την γραμμή της κίνησης ως άξονα x (Σχ. 3.1) εξάγουμε την εξίσωση της κίνησης σύμφωνα με την σχέση

$$\boxed{m\ddot{x} = P,} \tag{3.4}$$

Εφαρμογή §3.2.2

στην οποία

xy   t=0: x=0, y=0, u_0 θετική κατά τον άξονα y

$$\upsilon = \dot{x}, \quad \gamma = \ddot{x}. \tag{3.5}$$

$\vec{F} = (a-bt)\vec{i} - bt\vec{j}$

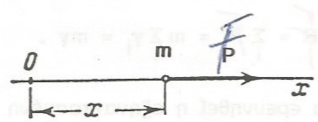
a, b > 0 = σταθ.

i) Ε.Κ. κίνησης

ii) υ(t) = ;

iii) x(t) = ;

Βλέπε §3.2.2 a



Σχήμα 3.1: Ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου μάζας m.

Η (3.4) αποτελεί την διαφορική εξίσωση της ευθύγραμμης κίνησης του υλικού σημείου. Πολλές φορές ενδείκνυται η διάσπαση της (3.4) στις διαφορικές εξισώσεις

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt} = P, \tag{3.6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon. \tag{3.7}$$

Όσες φορές η λύση του προβλήματος απαιτεί η ταχύτητα να καθορισθεί ως συνάρτηση του x και όχι του t, ή επίσης οι δυνάμεις να εξαρτώνται από το x, τότε μετατρέπουμε την εξίσωση (3.6) με μεταβλητή το x, βάσει της εξής σχέσης που προκύπτει με παραγώγιση μέσω του κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\overset{\upsilon}{\frac{dx}{dt}} = \upsilon\,\frac{d\upsilon}{dx} \,.$$

i) $F = \sigma\tau\alpha\theta$
ii) $F = F(t)$
iii) $F = F(x)$
iv) $F = F(\upsilon)$

Συνεπώς, η (3.6) παίρνει την μορφή

$$\boxed{m\upsilon\,\frac{d\upsilon}{dx} = P} \,. \qquad (3.8)$$

Το κύριο πρόβλημα της δυναμικής είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.4) και ο καθορισμός, μέσω αυτής, της συνάρτησης $x = x(t)$. Όπως και προηγούμενα αναφέρθηκε η εξωτερική δύναμη P εξαρτάται από τον χρόνο t, την θέση x του κινητού και την ταχύτητα $\upsilon = \dot{x}$. Επομένως στην γενικότερη περίπτωση η διαφορική εξίσωση (3.4) είναι της μορφής

$F(x, \dot{x}, t)$

$$\ddot{x} = f(t,\, x,\, \dot{x}) \,. \qquad (3.9)$$

Η (3.9) δομεί μία εν γένει μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, μετά την ολοκλήρωση της οποίας εισέρχονται δύο σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες θα καθορισθούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Γιά την ευθύγραμμη κίνηση αυτές οι συνθήκες είναι:

$$\text{Γιά } t = 0\,, \quad x = x_0 \quad \text{και} \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \,. \qquad (3.10)$$

Αξίζει εδώ να επιλύσουμε το προαναφερθέν πρόβλημα γιά μερικές ειδικές χρήσιμες περιπτώσεις.

(i) $F = \sigma\tau\alpha\theta$

3.2.1 *Ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ενεργούσα δύναμη*

Στην περίπτωση αυτή, εφ' όσον P = σταθερά, μιά πρώτη ολοκλήρωση της (3.4) δίνει

$m\ddot{x} = F \Rightarrow m\frac{d\dot{x}}{dt} = F \Rightarrow m\,d\dot{x} = F\cdot dt \Rightarrow \int m\,d\dot{x} = \int F\cdot dt \Rightarrow m\int d\dot{x} = F\int dt \Rightarrow \boxed{m\dot{x} = F\cdot t + c_1}$

$$m\dot{x} = Pt + c_1 \,,$$

ενώ μιά δεύτερη καταλήγει στην έκφραση

Γιά $t=0: \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$

$$mx = \frac{Pt^2}{2} + c_1 t + c_2 , \tag{3.11}$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Εισάγοντας τις αρχικές συνθήκες (3.10) ευρίσκουμε την συνάρτηση $x(t)$ από τον τύπο

$$x(t) = \frac{Pt^2}{2m} + \dot{x}_0 t + x_0 \tag{3.12}$$

(ii) $F=F(t)$

3.2.2 *Ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία η ενεργούσα δύναμη είναι συνάρτηση του χρόνου*

Εφ΄ όσον υποθέσουμε ότι

$$P = P(t)$$

Παράδειγμα

$x\,y$

$\vec{F} = (a-bt)\,\vec{i} - bt\,\vec{j}$

$a, b > 0 =$ σταθ.

$t=0$: $x=0$, $y=0$, υ_0 θετική κατά τον άξονα y

η εξίσωση (3.4) γράφεται ως

$$m\ddot{x} = P(t) . \tag{3.13}$$

i) Εξ. κίνησης;

ii) $v(t)=$;

iii) $x(t)=$;

Συνεπώς, με ολοκλήρωση κατά μέρη της (3.13) παίρνουμε

$$m\dot{x} = \int_0^t P(t)dt + c_1 . \tag{3.14}$$

΄Εχουμε όμως ότι γιά $t = 0$ και $\dot{x} = \dot{x}_0$ η σταθερά c_1 προκύπτει ίση προς $m\dot{x}_0$. Επομένως, ολοκληρώνοντας και πάλι την (3.14) κατά μέρη ευρίσκουμε

$$mx = m\dot{x}_0 t + \int_0^t \int_0^t [P(t)dt]\,dt + c_2 , \tag{3.15}$$

όπου c_2 είναι μιά νέα σταθερά ολοκλήρωσης. Λαμβάνοντας ακόμη υπ΄ όψη μας ότι γιά $t = 0$ είναι $x = x_0$, καταλήγουμε στον υπολογισμό της σταθεράς c_2 ίσης προς mx_0. ΄Ετσι, το γενικό ολοκλήρωμα (3.15) γράφεται

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m}\int_0^t \cdot \int_0^t [P(t)dt]\,dt + \dot{x}_0 t + x_0} . \tag{3.16}$$

$F=F(x)$ (iii)

3.2.3 *Ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία η ενεργούσα δύναμη είναι συνάρτηση της μετακίνησης*

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης (3.4) στην περίπτωση αυτή, δεδομένου ότι

$F \; F \; \ddot{x} =$

$$P = P(x)\ , \quad \dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}\ ,$$

γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή

$m\ddot{x} = F \rightarrow$

$$m\upsilon\,\frac{d\upsilon}{dx} = P(x)\ ,$$

ή

$$\boxed{m\dot{x}\,\frac{d\dot{x}}{dx} = P(x)}\ . \tag{3.17}$$

Εάν μετατρέψουμε την εξίσωση (3.17) στην

$$m d\dot{x}^2 = 2P(x)dx\ ,$$

ύστερα από μιά πρώτη ολοκλήρωση ευρίσκουμε

$$m\dot{x}^2 = f(x) + c_1\ , \quad f(x) = 2\int_0^x P(x)dx\ , \tag{3.18}$$

όπου c_1 είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Εύκολα τώρα προκύπτει από την (3.18) ότι

$$m^{\frac{1}{2}}\dot{x} = \pm\,[\,f(x) + c_1]^{\frac{1}{2}}\ , \tag{3.19}$$

η οποία, γραφόμενη ως

$$\frac{dx}{[\,f(x) + c_1]^{\frac{1}{2}}} = \pm\,\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\,dt\ , \tag{3.20}$$

μετά από ολοκλήρωση παρέχει

$$\int\frac{dx}{[f(x) + c_1]^{\frac{1}{2}}} = \pm\,\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\,t + c_2\ , \tag{3.21}$$

όπου c_2 είναι μιά νέα σταθερά ολοκλήρωσης. Οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

3.2.4 Ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία η ενεργούσα δύναμη είναι συνάρτηση της ταχύτητας

Εδώ έχουμε

$F = F(\upsilon)$

$m\ddot{x} = F$

$m\frac{du}{dt} = F(\dot{x}) \Rightarrow m\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = F(\dot{x})$

(iv) $\boxed{\text{Αν } F = F(\upsilon) = F(\dot{x})}$

$m\upsilon\frac{du}{dx} = F(\dot{x})$

$\boxed{m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = F(\dot{x})}$

$$P = P(\upsilon) = P(\dot{x})$$

και επομένως η διαφορική εξίσωση κίνησης (3.4) μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη

$m\frac{du}{dt} = F \Rightarrow m\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = F(\upsilon) \Rightarrow m\upsilon\frac{du}{dx} = F \Rightarrow$

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = P(\dot{x}) ,$$

$\boxed{\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{dx}{m}}$

ή

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{P(\dot{x})} = \frac{1}{m}dx . \tag{3.22}$$

Η ολοκλήρωση της τελευταίας σχέσης καταλήγει στην έκφραση

$$\int\frac{\dot{x}d\dot{x}}{P(\dot{x})} = \frac{x}{m} + c_1 , \tag{3.23}$$

η οποία παρέχει την ταχύτητα $\upsilon = \dot{x}$ με παράμετρο το x. Από την άλλη μεριά, η εξίσωση (3.22) γράφεται

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{P(\dot{x})} = \frac{1}{m}dx$$

ή

$$\frac{d\dot{x}}{P(\dot{x})} = \frac{1}{m}dt ,$$

από την οποία ευρίσκουμε

$$\int\frac{d\dot{x}}{P(\dot{x})} = \frac{t}{m} + c_2 . \tag{3.24}$$

Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των αριστερών μελών των σχέσεων (3.23) και (3.24) απαλείφουμε την ποσότητα $\dot{x}$ και έτσι καθορίζουμε την εξίσωση κίνησης με μορφή

$$\phi(x,t,c_1,c_2) = 0 .$$

Η επιλογή των κατάλληλων αρχικών συνθηκών στην τελευταία πεπλεγμένη συνάρτηση κίνησης προσδιορίζει τις αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης c_1 και c_2.

3.3 Καμπυλόγραμμη Κίνηση Υλικού Σημείου

THIS

Θεωρήσουμε ελεύθερο υλικό σημείο M κινούμενο υπό την ενέργεια δυνάμεων $P_1, P_2, \ldots, P_n$ με συνισταμένη **R.** Την κίνηση αυτή αναφέρουμε σε τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς Oxyz (Σχ. 3.2).

xy

$\vec F = (a - bt)\,\hat i - bt\,\hat j$

$a, b > 0$ = σταθ

i) εξ. κίνησης

ii) $v(t) =$

iii) $x(t) =$

$t = 0$: $x = 0$, $y = 0$, $v = v_0 > 0$, $v_y = 0$

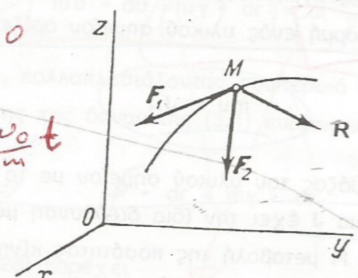
$m\ddot y = F_y = -bt$

$m\dot y = -\frac{bt^2}{2} + c_1$

$\boxed{y = -\frac{b}{2m}\frac{t^3}{3} + c_2}$

$x = \frac{a}{2m}t^2 - \frac{b}{2m}\frac{t^3}{3} + \frac{v_0}{m}t$

$x - y = \frac{a}{2m}t^2 + \frac{v_0 t}{m}$



$m\ddot x = F_x \to m\ddot x = a - bt$

$m\ddot y = F_y \to m\ddot y = -bt$

$m\dot x = at - \frac{bt^2}{2} + c_1$

$\dot x = \frac{a}{m}t - \frac{b}{2m}t^2 + \frac{v_0}{m}$

Σχήμα 3.2: Κίνηση υλικού σημείου μάζας m στον χώρο.

$x = \frac{a}{m}\frac{t^2}{2} - \frac{b}{2m}\frac{t^3}{3} + \frac{v_0 t}{m}$

Προβάλοντας την διανυσματική εξίσωση $R = m\gamma$ στους άξονες του συστήματος παίρνουμε τις εξής αναλυτικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου

$$m\ddot x = R_x, \quad m\ddot y = R_y, \quad m\ddot z = R_z. \tag{3.25}$$

Εφ' όσον οι ενεργούσες δυνάμεις, στην γενική περίπτωση, είναι συναρτήσεις του χρόνου, της μετακίνησης και της ταχύτητας, τα δεύτερα μέλη των (3.25) θα είναι συναρτήσεις όλων των μεταβλητών $t, x, y, z, \dot x, \dot y, \dot z$. Μέσω τώρα των εξισώσεων (3.25) επιλύεται και το πρώτο και το δεύτερο πρόβλημα της δυναμικής. Γιά την λύση του πρώτου προβλήματος πρέπει να είναι γνωστές οι εξωτερικές δυνάμεις και οι αρχικές συνθήκες:

Γιά, $t = 0 \to x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ και $\dot x = \dot x_0$, $\dot y = \dot y_0$, $\dot z = \dot z_0$.

Με ολοκλήρωση των (3.25) ευρίσκουμε τις συντεταγμένες x, y, z ως συναρτήσεις του χρόνου t. Οι λύσεις αυτές θα περιέχουν έξι σταθερές που θα καθορισθούν από τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες.

3.4 Γενικά Θεωρήματα της Δυναμικής του Υλικού Σημείου

3.4.1 Ποσότητα κίνησης και κινητική ενέργεια υλικού σημείου. Το θεώρημα της κινητικής ενέργειας

Ποσότητα κίνησης ή ορμή ενός υλικού σημείου ορίζεται το διάνυσμα

$$m\mathbf{\upsilon} = \mathbf{J}, \tag{3.26}$$

δηλαδή το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου με το διάνυσμα της ταχύτητας. Συνεπώς, το διάνυσμα **J** έχει την ίδια διεύθυνση με το **υ**, είναι δηλαδή εφαπτόμενο στην τροχιά. Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης είναι ανάλογη προς την **παρορμώσα δύναμη** και γίνεται προς την κατεύθυνση αυτής. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της ισότητας

Insert (*) Απόδειξη του ΘΜΚΕ (για προκύπτει) (A) (B) Από ΘΜΚΕ ή Θεώρ. Huyghens

(A) $\gamma = \frac{d\upsilon}{dt}$

$$d\mathbf{\upsilon} = \mathbf{\gamma}\,dt \Rightarrow$$

$\upsilon = \frac{dr}{dt}$

$\upsilon \cdot d\upsilon = \upsilon \cdot \gamma dt \Rightarrow \upsilon \cdot d\upsilon = \frac{dr}{dt} \cdot \gamma \cdot dt \Rightarrow$

εσωτερικά με το διάνυσμα **υ** προκύπτει

$$\boxed{\mathbf{\upsilon}\cdot d\mathbf{\upsilon} = \mathbf{\gamma}\cdot\overset{dr/dt}{\mathbf{\upsilon}}\,dt = \mathbf{\gamma}\cdot d\mathbf{r}}\,. \tag{3.27}$$

Γράφουμε τώρα

$$\mathbf{\upsilon}\cdot d\mathbf{\upsilon} = \upsilon\mathbf{\varepsilon}_0\cdot d(\upsilon\mathbf{\varepsilon}_0) = \upsilon\mathbf{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{\varepsilon}_0 d\upsilon + \upsilon^2\mathbf{\varepsilon}_0\cdot d\mathbf{\varepsilon}_0 = \upsilon d\upsilon + \upsilon^2\mathbf{\varepsilon}_0\cdot d\mathbf{\varepsilon}_0$$

όπου $\mathbf{\varepsilon}_0$ παριστάνει το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της τροχιάς. Επειδή

$$\mathbf{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{\varepsilon}_0 = 1$$

έπεται

$$\mathbf{\varepsilon}_0\cdot d\mathbf{\varepsilon}_0 = 0$$

και συνεπώς το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{\upsilon}\cdot d\mathbf{\upsilon}$ γίνεται

$$\mathbf{\upsilon}\cdot d\mathbf{\upsilon} = \upsilon\,d\upsilon\,.$$

Έτσι, η εξίσωση (3.27) μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη

$$\upsilon \cdot d\upsilon = \gamma \cdot dr = \upsilon\, d\upsilon = d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right).$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$m\upsilon \cdot d\upsilon = m\gamma \cdot dr = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right). \tag{3.28}$$

Από την άλλη μεριά, πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με dr αμφότερα τα μέλη της θεμελιώδους εξίσωσης της δυναμικής (3.1) ευρίσκουμε

$F = m\gamma \Rightarrow$

$$P \cdot dr = m\gamma \cdot dr$$

$F \cdot dr = m\upsilon\, d\upsilon$

$F \cdot dr = \frac{m\, d\upsilon^2}{2}$

$W = F \cdot dr = dK$

που με βάση την (3.28) παρέχει

Θ.Μ.Κ.Ε.

Θ. Huygens

$$P \cdot dr = dL, \quad L = \frac{m\upsilon^2}{2} \tag{3.29}$$

Η ποσότητα $P \cdot dr$ είναι το **στοιχειώδες έργο** της δύναμης P κατά την διεύθυνση dr, ενώ το μέγεθος $L = m\upsilon^2/2$ καλείται **κινητική ενέργεια** του υλικού σημείου. Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ***το στοιχειώδες έργο*** $dA = P \cdot dr$ ***που εκτελεί η ενεργούσα στο ελεύθερο υλικό σημείο δύναμη*** P ***κατά την μετάθεση*** dr ***ισούται προς την μεταβολή της κινητικής ενέργειας.*** Έτσι, το επιτελούμενο έργο από την ενεργούσα δύναμη P επί του υλικού σημείου, που κινείται επί της τροχιάς του από την θέση 1 στην θέση 2, ορίζεται

$dW = F \cdot dr$

$$A_{12} = \int_1^2 P \cdot dr = \frac{m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)}{2}, \tag{3.30}$$

δηλαδή ισούται με την διαφορά των κινητικών ενεργειών του υλικού σημείου στις θέσεις 1 και 2

$$A_{12} = L_2 - L_1. \tag{3.31}$$

Από την εξίσωση (3.29) παίρνουμε επίσης την σχέση

$dW = F \cdot dr$

$$\frac{dA}{dt} = P \cdot \frac{dr}{dt} = P \cdot \upsilon = \frac{dL}{dt}, \tag{3.32}$$

$\frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = F \cdot \upsilon$

$\frac{dK}{dt} = F \cdot \upsilon$

από την οποία προκύπτει γενικά ότι: ***το έργο που επιτελείται από την δύναμη σε κάθε χρονική στιγμή ισούται προς την ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της κινητικής ενέργειας.***

Οι εξισώσεις (3.29) και (3.32) εκφράζουν το θεώρημα της κινητικής ενέργειας που οφείλεται στον Huyghens.

Στο κεφάλαιο 1 της κινηματικής του υλικού σημείου είδαμε ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\mathbf{\gamma}$, που κείται πάνω στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης τροχιάς, αναλύεται στο τυχόν σημείο σε δύο συνιστώντα διανύσματα· στο διάνυσμα της επιτροχίου ή εφαπτομενικής επιτάχυνσης $\mathbf{\gamma}_\varepsilon$ με μέτρο du/dt και στο διάνυσμα της κεντρομόλου ή κάθετης επιτάχυνσης $\mathbf{\gamma}_K$ με μέτρο υ^2/R (τύπος (1.20). Επομένως, η θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής (3.1) γράφεται

$$\mathbf{P} = m\mathbf{\gamma} = \mathbf{E} + \mathbf{N}\,, \tag{3.33}$$

$$\mathbf{E} = m\dot{\upsilon}\varepsilon_0\,, \quad \mathbf{N} = \frac{m\upsilon^2}{R}\mathbf{k_0}\,,$$

που σημαίνει ότι η ενεργούσα επί του υλικού σημείου δύναμη αναλύεται σε δύο συνιστώσες δυνάμεις, την επιτρόχιο **E** και την κεντρομόλο **N.** Είναι φανερό ότι η κεντρομόλος δύναμη δεν παρέχει έργο ως διευθυνόμενη κάθετα προς την τροχιά και εξαναγκάζει το υλικό σημείο M σε εκτροπή από της ευθύγραμμης κίνησης. ΄Εργο παρέχει μόνο η επιτρόχιος συνιστώσα **E.**

Αν

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

είναι το διάνυσμα της δύναμης που ενεργεί επί του υλικού σημείου ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς, το έργο αυτής κατά την πεπερασμένη κίνησή της από το σημείο M_1 στο M_2 δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} (P_x,P_y,P_z)\cdot(dx,dy,dz) = \int_{M_1}^{M_2} P_x dx + P_y dy + P_z dz. \tag{3.34}$$

Η **στοιχειώδης παρόρμηση** μιάς δύναμης **P** ορίζεται από το διάνυσμα $d\mathbf{\Omega}$, ίσο προς το γινόμενο της **P** επί τον στοιχειώδη χρόνο dt. Η παρόρμηση της **P** κατά το χρονικό διάστημα [0 , t] δίνεται μέσω της σχέσης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Παρόρμηση = ίσον

$$\Omega = \int_0^t \mathbf{F}\,dt \,. \tag{3.35}$$

Θ - ΩΘΗΣΗ - ΟΡΜΗΣ

Σύμφωνα με την θεμελιώδη εξίσωση (3.1) ισχύει

$$F = m\gamma = m\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(m\upsilon)}{dt}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\upsilon)}{dt} \,,$$

$$F \cdot dt = d(m\upsilon) \Rightarrow \int_1^2 F \cdot dt = \int_1^2 d(m\upsilon) \Rightarrow$$

όπου $m\upsilon$ είναι η ποσότητα κίνησης. Ο συνδυασμός της τελευταίας εξίσωσης με την (3.35) καταλήγει στον τύπο

$$\Rightarrow \Omega = m(\upsilon_2 - \upsilon_1) \Rightarrow \Omega = J_2 - J_1$$

$$\Omega = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 = J_1 - J_0 \,.$$

Ο τύπος αυτός εκφράζει γενικώτερα το θεώρημα της **μεταβολής της ποσότητας κίνησης** σημείου, που μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης υλικού σημείου σε ένα χρονικό διάστημα είναι ίση προς το γεωμετρικό άθροισμα των παρορμήσεων όλων των ενεργουσών δυνάμεων πάνω στο σημείο κατά το χρονικό αυτό διάστημα. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$m\upsilon_1 - m\upsilon_0 = \sum_i \Omega_i \,. \tag{3.37}$$

Θ2

3.4.2 Συστροφή ή κινητική ροπή ή στροφορμή υλικού σημείου. Το θεώρημα της συστροφής ή θεώρημα επιφανειών

Εκτός από τα θεωρήματα της κινητικής ενέργειας και της μεταβολής της ποσότητας κίνησης, που προέκυψαν από την θεμελιώδη εξίσωση δυναμικής (3.1), συνάγεται και τρίτο θεώρημα αναφορικά προς σταθερό κέντρο Ο. Από την εξίσωση

$$L = \Theta = \mathbf{r} \times m\upsilon \qquad L = r \times P \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec r \times m\vec\upsilon)$$

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \upsilon)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \upsilon + \mathbf{r} \times \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon \times \upsilon + \mathbf{r} \times \frac{d\upsilon}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\upsilon}{dt} = \mathbf{r} \times \gamma \,,$$

όπου $\mathbf{r}$ παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από σταθερό σημείο Ο προς το υλικό σημείο μάζας m, προκύπτει η σχέση

L Θ = αναφορά ή στροφορμή

άρα το

$$\frac{d(\mathbf{r} \times m\upsilon)}{dt} = \mathbf{r} \times m\gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \,. = M \tag{3.38}$$

$$\frac{dL}{dt} = M = r \times F$$

Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{r} \times m\upsilon$, δηλαδή η στατική ροπή της ποσότητας κίνησης

$J = m\upsilon$

Θ3

$m\upsilon$ προς το σταθερό σημείο O, καλείται **συστροφή** ή **κινητική ροπή** ή **στροφορμή** του υλικού σημείου προς O και συμβολίζεται με **G.** Δεδομένου ότι $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ παριστάνει την ροπή της ενεργούσας επί του υλικού σημείου δύναμης προς O, από την (3.38) εξάγουμε την ισότητα

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \tag{3.39}$$

που μορφώνει την ακόλουθη πρόταση:

Η στατική ροπή της κινούσας υλικό σημείο μάζας m δύναμης P προς σταθερό κέντρο O είναι ίση προς την ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της συστροφής G αναφορικά προς το αυτό κέντρο.

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **θεώρημα της συστροφής** ή **κινητικής ροπής** ή **στροφορμής**, ή ακόμη, ως **θεώρημα επιφανειών.**

Στην ειδική περίπτωση της κεντρικής κίνησης, δηλαδή όταν η δύναμη διέρχεται από το ίδιο κέντρο, είναι **M = 0**, οπότε βάσει των εξισώσεων (3.38) και (3.39) έχουμε

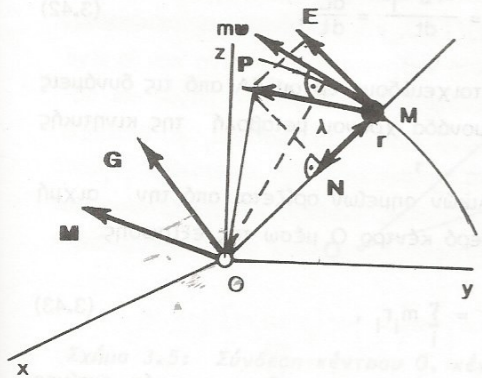
$$\mathbf{r} \times m\boldsymbol{\upsilon} = \text{σταθερό} \;\rightarrow\; \mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon} = \text{σταθερό}\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση συντελείται πάνω στο ίδιο επίπεδο και ότι η αλγεβρική τιμή $(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon})/2$, που είναι ίση προς $r\,\upsilon \sin(\mathbf{r},\boldsymbol{\upsilon})/2 = r^2\, d\phi\,/\,2\,dt$, είναι ακριβώς το εμβαδό της ανά μονάδα χρόνου καλυπτόμενης επιφάνειας από την ακτίνα $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ · αυτό το εμβαδό επομένως είναι σταθερό. Αντίστροφα τώρα, όταν $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon}$ = σταθερό και $r^2\, d\phi\,/2\,dt$ = σταθερό, έπεται $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{\upsilon}$ = σταθερό δηλαδή **M = 0.** Συνεπώς, η κίνηση είναι κεντρική εφ' όσον ο μηδενισμός της ροπής της κινούσης δύναμης προς O δεν σημαίνει τίποτε άλλο παρά το ότι η διεύθυνση της δύναμης διέρχεται από το O.

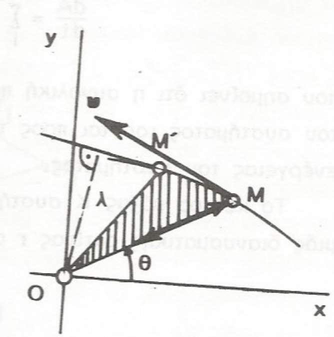
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι την επίπεδη κεντρική κίνηση χαρακτηρίζει η ιδιότητα του ανά μονάδα χρόνου καλυπτόμενου σταθερού εμβαδού από την διανυσματική ακτίνα θέσης **r.** Γι' αυτό ακριβώς τον λόγο το θεώρημα της συστροφής ονομάζεται και θεώρημα των επιφανειών.

Στα σχήματα 3.3 και 3.4 φαίνονται τα αντίστοιχα μεγέθη. Ειδικώτερα στο σχήμα 3.4, όπου παριστάνεται η επίπεδη κεντρική κίνηση, είναι

$$\lambda\, ds = 2dE\,, \qquad \lambda\upsilon = 2\,\frac{dE}{dt}\,.$$



Σχήμα 3.3: Γεωμετρική παράσταση στροφορμής.



Σχήμα 3.4: Γεωμετρική παράσταση θεωρήματος επιφανειών.

Το μέγεθος dE/dt παριστάνει το ανά μονάδα χρόνου καλυπτόμενο εμβαδό από την διανυσματική ακτίνα **OM** και καλείται **εμβαδική ταχύτητα.** Στην περίπτωση αυτή η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή, δηλαδή

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\,|\mathbf{r}\times\mathbf{\upsilon}| = \frac{\upsilon\lambda}{2} = \text{σταθερό}\ . \qquad (3.40)$$

Στην επίπεδη κίνηση η κινούσα δύναμη **P** αναλύεται, σχετικά προς σταθερό κέντρο O, στην κεντρική συνιστώσα **N** και στην κάθετη προς την **r** συστρέφουσα **E** (Σχ. 3.3). Από αυτές τις δύο μόνο η **E** μεταβάλλει το εμβαδό της ανά μονάδα χρόνου καλυπτόμενης επιφάνειας.

Σε τρισορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η διανυσματική εξίσωση (3.38) ισοδυναμεί με τις εξής αναλυτικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} yP_z - zP_y &= d[m(y\upsilon_z - z\upsilon_y)]/dt \\ zP_x - xP_z &= d[m(z\upsilon_x - x\upsilon_z)]/dt \qquad (3.41) \\ xP_y - yP_x &= d[m(x\upsilon_y - y\upsilon_x)]/dt\ . \end{aligned}$$

3.4.3 Σύστημα υλικών σημείων - Κέντρο μάζας - Περίκεντρος κινητική ενέργεια και κινητική ενέργεια μεταφοράς

Γιά σύστημα υλικών σημείων αληθεύει η σχέση

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \mathbf{P}_i \cdot \boldsymbol{\upsilon}_i = \frac{d(\sum L_i)}{dt} = \frac{dL}{dt}, \tag{3.42}$$

που σημαίνει ότι η συνολική παροχή στοιχειώδους έργου dA από τις δυνάμεις του συστήματος ισούται προς την ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Το κέντρο μάζας Κ συστήματος υλικών σημείων ορίζεται από την αιχμή μιάς διανυσματικής ακτίνας $\mathbf{r}$ από σταθερό κέντρο Ο μέσω της εξίσωσης

$$\left(\sum_i m_i\right) \mathbf{r} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i , \tag{3.43}$$

στην οποία m_i είναι οι μάζες του συστήματος και $\mathbf{r}_i$ οι διανυσματικές ακτίνες από το Ο προς τα σημεία.

Από τον τύπο (3.43) παίρνουμε

$$\left(\sum_i m_i\right) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad \text{ή} \quad \left(\sum_i m_i\right) \boldsymbol{\upsilon}_K = \sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_i . \tag{3.44}$$

Επομένως προκύπτει ότι η ποσότητα κίνησης ή η ορμή του συστήματος των υλικών σημείων ως προς ένα σύστημα αξόνων ισούται προς το άθροισμα των ποσοτήτων κίνησης των υλικών σημείων. Τέλος, από την παραγώγιση της τελευταίας εξίσωσης καταλήγουμε στην σχέση

$$\left(\sum_i m_i\right) \boldsymbol{\gamma}_K = \sum_i m_i \boldsymbol{\gamma}_i = \sum \mathbf{P}_i = \mathbf{R} . \tag{3.45}$$

Στην εξίσωση (3.42) περιλαμβάνονται όλες τις δυνάμεις (εξωτερικές και εσωτερικές). Μπορούν όμως να παραλειφθούν εκείνες που δεν εκτελούν έργο, όπως είναι οι αντιδράσεις των συνδέσμων χωρίς τριβή και οι εσωτερικές δυνάμεις σε συστήματα απολύτως στερεά. Συνεπώς, σε συστήματα απολύτως στερεά η ισότητα (3.42) αναφέρεται μόνο σε εξωτερικές δυνάμεις και επομένως, μέσω των (3.43) έως (3.45), συνάγουμε ότι στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση των κέντρων μάζας $\boldsymbol{\gamma}_K$ είναι η ίδια με εκείνη που θα προέκυπτε αν συνεκεντρούτο εκεί όλη η μάζα του συστήματος και ενεργούσε δύναμη ίση προς το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε κάθε σημείο.

Θεωρήσουμε ήδη σταθερό κέντρο Ο και φέρουμε την διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r} = \mathbf{OK}$ από το Ο προς το κέντρο μάζας Κ του συστήματος, καθώς επίσης και την $\mathbf{r}_i$ από το Ο προς κάθε υλικό σημείο M_i του συστήματος (Σχ. 3.5).

Από την εξίσωση (3.47) προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια αναλύεται στην **περίκεντρο ενέργεια**, ίση προς $[\sum_i m_i(dr_i'/dt)^2]/2$, και την **ενέργεια μεταφοράς**, ίση προς $[(\sum_i m_i)\upsilon_r^2]/2$ · η τελευταία αυτή ενέργεια είναι εκείνη που θα είχε το σύστημα αν όλη η μάζα του ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας και παρακολουθούσε την κίνηση αυτού. Η παραπάνω διατύπωση αποτελεί το θεώρημα Koening.

Η συστροφή συστήματος υλικών σημείων προς σταθερό κέντρο Ο είναι το γεωμετρικό άθροισμα των προς το Ο συστροφών των υλικών σημείων του συστήματος. Επομένως ισχύει

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{r}_i \times m\boldsymbol{\upsilon}_i \ , \qquad \mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \ . \tag{3.48}$$

Λαμβανομένου υπ΄ όψη με βάση την παραπάνω ανάλυση ότι

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i' = \mathbf{0} \ , \qquad \sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_i' = \mathbf{0} \ ,$$

η πρώτη των εξισώσεων (3.48) παρέχει

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \Big(\sum_i m_i\Big)\boldsymbol{\upsilon}_r + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i' \ , \tag{3.49}$$

που σημαίνει ότι η συστροφή αναλύεται και αυτή στην **περίκεντρο συστροφή**, ίση προς $\sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i'$, και την **συστροφή μεταφοράς**, ίση προς $\mathbf{r} \times (\sum_i m_i)\boldsymbol{\upsilon}_r$ · η τελευταία είναι εκείνη που θα είχε το σύστημα προς σταθερό κέντρο Ο, εφ΄ όσον η μάζα του ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας Κ και παρακολουθούσε την κίνηση αυτή. Αν το κέντρο μάζας Κ παραμένει ακίνητο, τότε προκύπτει

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i' = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \tag{3.50}$$

ως προς οιοδήποτε σημείο Ο του χώρου.

3.4.4 *Έκφραση της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της συστροφής και της γωνιακής ταχύτητας*

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των υλικών σημείων δίνεται, ως γνωστόν, από τον τύπο

Θ4

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \cdot \vec{\upsilon}_i \ , \tag{3.51}$$

$\vec{\omega} \times \vec{r}_i$

Κατά την περιστροφή του συστήματος περί στιγμιαίον άξονα διερχόμενο από σταθερό κέντρο Ο είναι:

$$\upsilon_i = \omega \times r_i ,$$

όπου r_i παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από το Ο προς το τυχόν σημείο i του συστήματος. Συνεπώς, η κινητική ενέργεια L του τύπου (3.51) στην προκειμένη περίπτωση γράφεται

SOS

Θ4 K L

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega\times r_i)\cdot\upsilon_i = \frac{1}{2}\omega\cdot\sum_i m_i r_i\times\upsilon_i = \frac{1}{2}\omega\cdot\sum_i r_i\times m_i\upsilon_i = \frac{1}{2}\omega\cdot G ,$$

$\Rightarrow \boxed{K=\frac{1}{2}\omega\cdot G}$

$G = r\times m\upsilon$

δηλαδή ευρίσκουμε

ΑΥΤΟ (ΝΑΙ)

$$\boxed{2L = \omega\cdot G} , \qquad (3.51α)$$

K L Θ.4

όπου G εκφράζει την συστροφή του συστήματος περί το Ο.

3.4.5 *Έκφραση της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας*

Από την ισότητα

$$\upsilon_i = \omega\times r_i$$

αναφορικά προς το κέντρο Ο, συνάγεται

$$\upsilon_i^2 = (\omega\times r_i)^2 = (\omega\rho_i)^2 ,$$

ΑΥΤΟ

όπου ρ_i παριστάνει την απόσταση του αντίστοιχου υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής διά του σημείου Ο (Σχ. 2.2). Επομένως

Θ.5

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega\rho_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i\rho_i^2 = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2 \qquad (3.52)$$

5

όπου έχουμε θέση

$\boxed{K=\frac{1}{2}J\omega^2}$

$$J_\omega = \sum_i m_i\rho_i^2$$

ΑΥΤΟ

$G = r\times m\underset{\omega\cdot r}{\upsilon} = rm\omega r = m\omega r^2$ Θ.6

$= mr^2\omega \Rightarrow \boxed{G = J\cdot\omega}$ 6 και, όπως θα δούμε στην δυναμική του στερεού, η ποσότητα J_ω ορίζεται ως ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο O.

Στον τύπο (3.47) μπορούμε να θέσουμε

$$\frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} = \boldsymbol{\upsilon}_i' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' ,$$

οπότε ευρίσκουμε

$$L = \frac{1}{2}\Big(\sum_i m_i\Big)\upsilon_r^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i'^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum_i m_i\Big)\upsilon_r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \rho_i'^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum_i m_i\Big)\upsilon_r^2 + \frac{1}{2}J_K\omega^2, \tag{3.53}$$

όπου ρ_i' παριστάνει την απόσταση του αντίστοιχου υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής διά του κέντρου μάζας K, και

$$J_K = \sum_i m_i \rho_i'^2$$

ορίζεται ως ροπή αδράνειας του σώματος προς τον άξονα περιστροφής του διερχόμενου από το κέντρο μάζας K. Είναι λοιπόν σαφές ότι η περίκεντρος κινητική ενέργεια στην προκειμένη περίπτωση εκφράζεται από την ποσότητα $J_K\,\omega^2/2$.

3.4.6 Έκφρασης του στοιχειώδους έργου συναρτήσει της στατικής ροπής και της γωνιακής ταχύτητας

Έχουμε ήδη ονομάσει στοιχειώδες έργο της ενεργούσης επί υλικού σημείου δύναμης $\mathbf{P}$ κατά την διεύθυνση $d\mathbf{r}$ το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{P}\cdot d\mathbf{r}$. Αν το υλικό σημείο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ περί άξονα διερχόμενο διά σταθερού σημείου O, τότε το έργο που επιτελείται από την δύναμη σε κάθε χρονική στιγμή και δίνεται από τον τύπο (3.32), παίρνει την ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{P}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{P})\cdot\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{3.54}$$

όπου $\mathbf{M}$ δηλώνει την στατική ροπή $\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ της δύναμης $\mathbf{P}$ προς το σταθερό σημείο O. Επειδή το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}$ γράφεται

$$\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega} = M_\omega \omega ,$$

όπου M_ω παριστάνει την στατική ροπή της δύναμης P προς τον άξονα περιστροφής διά του σημείου Ο, έχουμε

$$\frac{dA}{dt} = M_\omega \omega . \qquad (3.55)$$

Ο τύπος (3.55), ο οποίος ουσιαστικά εκφράζει την **παροχή έργου** ή **ισχύ κατά την περιστροφική κίνηση** είναι ιδιαίτερα χρήσιμος γιά τον υπολογισμό αυτής ακριβώς της ισχύος, την οποία μεταβιβάζει ο κινητήριος άξονας μηχανής. Από τον αριθμό n των στροφών του άξονα ανά πρώτο λεπτό καθορίζεται η γωνιακή ταχύτητα σύμφωνα με την σχέση

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30 .$$

Επομένως, αν δίνεται η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων προς τον άξονα περιστροφής, προσδιορίζεται βάσει του τύπου (3.55) η ισχύς του άξονα, και αντιστρόφως· αν είναι γνωστή η ισχύς (dA/dt) του άξονα περιστροφής και δεδομένος ο αριθμός n των στροφών ανά λεπτό, υπολογίζεται η στατική ροπή M_ω των εξωτερικών δυνάμεων προς τον άξονα περιστροφής.

3.4.7 Στατική ροπή και γωνιακή επιτάχυνση

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (3.32) και (3.54) έχουμε

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{u} = \frac{dL}{dt}, \quad \frac{dA}{dt} = \mathbf{P}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega} = M_\omega \omega = \frac{dL}{dt} . \qquad (3.56)$$

Αν η κίνηση συνεχίζεται περί άξονα σταθερό διά του κέντρου Ο, τότε η ποσότητα $\sum_i m_i \rho_i^2 = J_\omega$ του τύπου (3.52) είναι σταθερή, και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(J_\omega \omega^2) = J_\omega \omega \frac{d\omega}{dt} . \qquad (3.57)$$

Από τον συνδυασμό της τελευταίας εξίσωσης με την δεύτερη των (3.56) καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$M_\omega = J_\omega \frac{d\omega}{dt} = J_\omega \dot{\omega} = J_\omega \varepsilon , \qquad (3.58)$$

όπου ε δηλώνει το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης.

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι η προς σταθερό άξονα περιστροφής ροπή M_ω ισούται προς το γινόμενο της ροπής αδράνειας του υλικού σημείου προς τον άξονα αυτόν επί την γωνιακή επιτάχυνση.

3.4.8 *Συστροφή περί άξονα περιστροφής*

Έχουμε ήδη ορίσει ότι η συστροφή **G** συστήματος υλικών σημείων m_i προς σταθερό κέντρο δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \,.$$

Παράλληλα γιά την μεταβολή της συστροφής **G** συναρτήσει του χρόνου αποδείξαμε ότι αυτή ισούται προς την ροπή όλων των εξωτερικών δυνάμεων προς το κέντρο Ο, δηλαδή

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \mathbf{M} \,.$$

Αν η κίνηση του συστήματος είναι περιστροφή περί σταθερόν άξονα διερχόμενο διά του Ο με γωνιακή ταχύτητα **ω**, τότε ορίζεται η προβολή G_ω της συστροφής **G** κατά τον άξονα αυτόν από την εξίσωση

$$G_\omega = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_i) \,,$$

όπου $\boldsymbol{\omega}_0$ παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας **ω**. Με βάση το σχήμα 2.2 το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_i$ είναι διάνυσμα ομόρροπο προς το διάνυσμα της ταχύτητας υ_i και έχει αλγεβρική τιμή ίση προς ρ_i, δηλαδή ίση προς την κάθετη απόσταση του υλικού σημείου m_i από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς, γράφουμε

$$G_\omega = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \sum_i m_i \upsilon_i \rho_i$$

και επειδή

$$\upsilon_i = \omega \rho_i$$

η προβολή G_ω της συστροφής γράφεται

$$G_\omega = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J_\omega . \qquad (3.59)$$

Από την άλλη μεριά, η μεταβολή dG_ω/dt προκύπτει

$$\frac{dG_\omega}{dt} = J_\omega \frac{d\omega}{dt} = J_\omega \varepsilon , \qquad (3.60)$$

όπου ε παριστάνει το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης κατά τον άξονα περιστροφής και $J_\omega = \sum_i m_i \rho_i^2$ την ροπή αδράνειας του συστήματος των υλικών σημείων ως προς τον άξονα αυτόν.

Τέλος, από τον συνδυασμό των τύπων (3.58) και (3.60) συνάγουμε ότι

$$M_\omega = \frac{dG_\omega}{dt} , \qquad (3.61)$$

που δηλώνει ότι η μεταβολή της προβολής του διανύσματος της συστροφής επί του άξονα περιστροφής ισούται προς την προβολή του διανύσματος της ροπής προς το κέντρο Ο επί του ίδιου άξονα.

Ανακεφαλαιώνοντας όλα τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.4, που αφορούν τα βασικά γενικά θεωρήματα της δυναμικής του υλικού σημείου, μπορούμε να μορφώσουμε τον εξής πίνακα στον οποίο παρουσιάζεται η αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών που αναφέρονται στην κίνηση του υλικού σημείου (ή συστήματος υλικών σημείων) και στην περιστροφή περί άξονα:

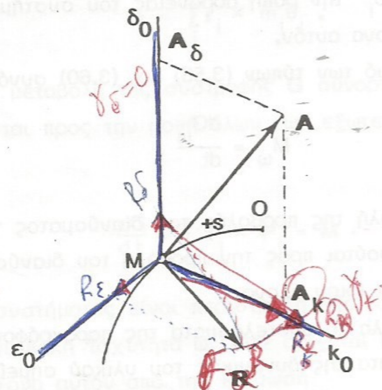
Κίνηση υλικού σημείου (ή παράλληλη μεταφορά)	Περιστροφή περί άξονα διερχόμενο από σταθερό κέντρο Ο
υ	ω
$\frac{d\upsilon}{dt}$	$\frac{d\omega}{dt}$
P	M_ω
m	$m\rho^2 = J_\omega$ (ή $\sum_i m_i \rho_i^2 = J_\omega$)
$\frac{dA}{dt} = P \cdot \upsilon$	$\frac{dA}{dt} = M_\omega \omega$
$L = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i\right) \upsilon_r^2$	$L = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2$
$m\upsilon$	$G_\omega = J_\omega \omega$
$L = \frac{1}{2} (m\upsilon) \cdot \upsilon$	$L = \frac{1}{2} G_\omega \omega$
$P = m \frac{d\upsilon}{dt}$	$M_\omega = J_\omega \frac{d\omega}{dt}$ (ως προς σταθερό άξονα περιστροφής)

3.5 Εξηναγκασμένη Κίνηση Υλικού Σημείου. - Καθορισμός Αντιδράσεων

Θεωρήσουμε υλικό σημείο M κινούμενο επί ορισμένης καμπύλης γραμμής κάτω από την ενέργεια συστήματος εφαρμοσμένων δυνάμεων $P_1, P_2, \ldots, P_n$ που έχουν συνισταμένη R. Υποθέτουμε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα χωρίς τριβή. Αν O είναι η αρχή μέτρησης των τόξων η κίνηση του σημείου M καθορίζεται με την συντεταγμένη OM = s. Έστω ακόμη $M\varepsilon_0 k_0 \delta_0$ το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (τρίεδρο Frénet) στο σημείο M (Σχ. 3.6).

R(Rε, Rk, Rδ)

A(Ak, Aδ)



Σχήμα 3.6: Εξηναγκασμένη κίνηση υλικού σημείου επί καμπύλης γραμμής.

Η αναπτυσσόμενη αντίδραση **A**, επειδή δεν υπάρχει τριβή, θα κείται στο κάθετο επίπεδο $Mk_0\delta_0$, δηλαδή θα ισχύει

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_\delta . \tag{3.62}$$

Σύμφωνα τώρα με την θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής έχουμε

$$m\gamma = \mathbf{R} + \mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_\delta . \tag{3.63}$$

Αναλύοντας την τελευταία διανυσματική εξίσωση στις αντίστοιχες αναλυτικές εξισώσεις κατά τους άξονες του τοπικού συστήματος, παίρνουμε

$$m\gamma_\varepsilon = \sum_i P_{i,\varepsilon} = R_\varepsilon$$

$$m\gamma_k = \sum_i P_{i,k} + A_k = R_k + A_k$$

$$m\gamma_\delta = \sum_i P_{i,\delta} + A_\delta = R_\delta + A_\delta , \qquad (3.64)$$

όπου

$$\gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon} = \ddot{s} , \qquad \gamma_k = \frac{\upsilon^2}{R} , \qquad \gamma_\delta = 0 . \qquad (3.65)$$

Η τελευταία των (3.65) είναι προφανής δεδομένου ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης γ κείται στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης γραμμής $\varepsilon_0 M k_0$. Οι σχέσεις (3.64) μετασχηματίζονται στις εξής εξισώσεις, που χαρακτηρίζουν την κίνηση του υλικού σημείου κατά μήκος μιάς δεδομένης καμπύλης:

κ.αθ. μήκος

$$\boxed{m\frac{d\upsilon}{dt} = R_\varepsilon \Longleftrightarrow m\frac{d^2 s}{dt^2} = R_\varepsilon ,} \qquad (3.66)$$

από ΘΜΚΕ

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = R_k + A_k , \qquad (3.67)$$

άγνωστα

$$R_\delta + A_\delta = 0 . \qquad (3.68)$$

Η εξίσωση (3.66) δεν περιέχει συνιστώσες της αντίδρασης **A** και επομένως ενδείκνυται γιά τον καθορισμό της εξίσωσης κίνησης ενός υλικού σημείου κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή τον καθορισμό της συνάρτησης $s = f(t)$.
Με τις δύο επομένως εξισώσεις (3.67) και (3.68) καθορίζουμε την αντίδραση **A** υπολογίζοντας τις συνιστώσες A_k και A_δ κατά την πρώτη κάθετο και την δικάθετο της καμπύλης της κίνησης.
Στην περίπτωση κατά την οποία το μέτρο της ταχύτητας υ, που εισέρχεται στην σχέση (3.67), δεν είναι γνωστό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της κινητικής ενέργειας. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, λόγω μη ύπαρξης τριβής, το έργο της αντίδρασης **A** ισούται προς μηδέν, εφ΄ όσον το διάνυσμα **A** κείται στο κάθετο προς την καμπύλη επίπεδο $k_0 M \delta_0$ (Σχ. 3.6). Επομένως γράφουμε

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum_i \int_0^s \cancel{P_i}\, ds \qquad (3.69)$$

από την οποία προσδιορίζεται το μέτρο υ. Στην συνέχεια βάσει των (3.67) και (3.62) υπολογίζουμε την αντίδραση $\mathbf{A} = (A_k, A_\delta)$.

3.6 Πεδία - Συντηρητικά Συστήματα - Δυναμικό - Διατήρηση Ενέργειας - Νευτώνειο Δυναμικό Πεδίο

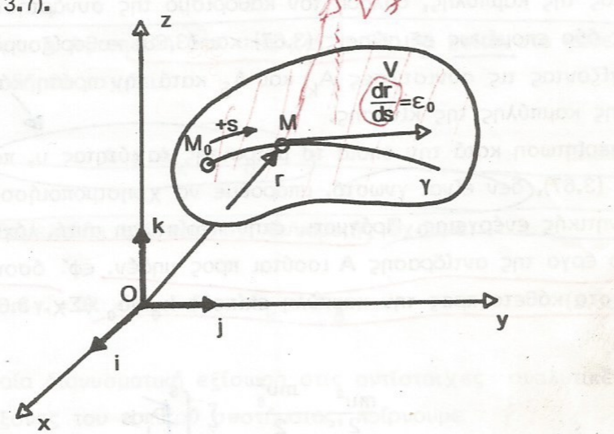
Μιά περιοχή του χώρου σε κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί με ένα νόμο μιά ορισμένη τιμή ενός βαθμωτού ή διανυσματικού ή τανυστικού μεγέθους καλείται **βαθμωτό** ή **διανυσματικό** ή **τανυστικό πεδίο.**

Ας είναι V μιά περιοχή του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου και σημείο M της περιοχής αυτής. Έστω επίσης $\mathbf{r} = (x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης του σημείου M ως προς απόλυτο (σταθερό) σύστημα τρισορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων με τα γνωστά μοναδιαία διανύσματα **i, j, k.** Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο τυχόν σημείο M της περιοχής V αντιστοιχεί η τιμή του βαθμωτού μεγέθους f. Γράφουμε

$$f = f(\mathbf{r}) = f(x,y,z)$$

και λέμε ότι οι τιμές της βαθμωτής συνάρτησης f που συσχετίζονται με όλα τα σημεία της V αποτελούν **βαθμωτό πεδίο.**

Έστω λεία καμπύλη γ της V διερχόμενη από το M. Αν s παριστάνει το μήκος τόξου της καμπύλης μετρούμενο από το σημείο M_0, η παράγωγος $d\mathbf{r}/ds$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ της γ κατά την αύξουσα διεύθυνση πάνω στο s (Σχ. 3.7).



Σχήμα 3.7: Γεωμετρία και σήμανση περιοχής V του τρισδιάστατου Ευκλείδειου μετρικού χώρου.

Ας είναι τώρα f(x,y,z) μιά βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη σε όλη την περιοχή V, η οποία είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη προς s. Η f είναι επίσης ορισμένη σε κάθε σημείο της καμπύλης γ και η παράγωγος της ως προς το μήκος τόξου δίνεται από την σχέση

$$\boxed{\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}} \; . \qquad (3.70)$$

Αν θεωρήσουμε όλες τις καμπύλες της περιοχής V που διέρχονται από το σημείο M και έχουν κοινή εφαπτόμενη στο M, τότε οι τιμές των ολικών παραγώγων στο δεξί μέλος της (3.70) είναι ίδιες. Συνεπώς, σε κάθε σημείο M υπάρχει μονοσήμαντη τιμή df/ds συσχετισμένη με κάθε διεύθυνση, που καλείται **κατευθυνόμενη παράγωγος.**

Καλούμε **τελεστή ανάδελτα** το διάνυσμα

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) .$$

Εφαρμόζοντες αυτόν επί του βαθμωτού πεδίου f παίρνουμε

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) . \qquad (3.71)$$

Το διάνυσμα ∇f καλείται **κλίση** της βαθμωτής συνάρτησης f και γράφεται ***grad f***. Έτσι, η εξίσωση (3.70) δίνεται και υπό την μορφή

$$\boxed{\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \frac{dr}{ds}} \; , \qquad (3.72)$$

110

$\Rightarrow \boxed{dr \cdot \nabla f = df}$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \varepsilon_0} \qquad (3.73)$$

όπου εδώ ε_0 συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση κατά την οποία έχει ληφθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την πρόταση ότι: ***Η συνιστώσα του διανύσματος ∇f κατά την διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος ε_0 είναι ίση με την κατευθυνόμενη παράγωγο της f κατά την διεύθυνση αυτή.***

Πράγματι, η συνιστώσα του διανύσματος ∇f κατά την διεύθυνση ε_0 δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\nabla f \cdot \varepsilon_0 = |\nabla f|\,|\varepsilon_0| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta ,$$

όπου θ παριστάνει την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ∇f και ε_0. Ο συνδυασμός της τελευταίας αυτής εξίσωσης με την (3.73) καταλήγει

$$\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cos\theta \,. \tag{3.74}$$

Ένα άμεσο πόρισμα της παραπάνω πρότασης είναι ότι: ***Το διάνυσμα ∇f είναι κάθετο προς τις επιφάνειες $f(x,y,z) = c$ = σταθερά.***
Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από τις εξισώσεις (3.72) και (3.74) παρατηρώντας ότι $\nabla f \cdot \varepsilon_0 = 0$ όταν $\cos\theta = 0$, δηλαδή όταν $\theta = \pi/2$. Σημειώνουμε εδώ ότι οι επιφάνειες $f(x,y,z) = c$, όταν c είναι σταθερά παράμετρος, καλούνται **ισοσταθμικές επιφάνειες.** Επομένως, ήδη έχουμε αποδείξει ότι η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης f γιά δεδομένη κατεύθυνση ε_0 γίνεται μεγίστη, όταν η απειροστή μετάθεση dr κατά την κατεύθυνση ε_0 είναι κάθετη προς την ισοσταθμική επιφάνεια. Επομένως, οι συνθήκες

$$dr \cdot \nabla f = df = 0 \,,$$
$$dr \times \nabla f = \mathbf{0} \,, \tag{3.75}$$

καθορίζουν αντίστοιχα στοιχεία dr διά σημείου M της περιοχής V κάθετα προς την κλίση, δηλαδή κείμενα επί της ισοσταθμικής επιφάνειας, και στοιχεία dr διά σημείου M της περιοχής V συγγραμμικά προς την κλίση που σχηματίζουν καμπύλες εφαπτόμενες της κλίσης σε κάθε θέση και που καλούνται **δυναμικές γραμμές ή γραμμές δυναμικού πεδίου.**

Υποθέτουμε τώρα ότι σε κάθε θέση M περιοχής χώρου ενεργεί επί υλικού σημείου που ευρίσκεται στην θέση αυτή μιά δύναμη F, πού μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση βαθμωτής συνάρτησης $-V(x,y,z)$. Συνεπώς γράφουμε

$$F = \textbf{\textit{grad}}\,(-V) = \nabla(-V) \,. \tag{3.76}$$

Κατά την μετακίνηση της δύναμης από το σημείο M_1 στο M_2 το ολοκλήρωμα

$$\int_{M_1}^{M_2} F \cdot dr = \int_{M_1}^{M_2} -dr \cdot \nabla V = -\int_{M_1}^{M_2} dr \cdot \textbf{\textit{grad}}\, V = -\int_{M_1}^{M_2} dV = V_1 - V_2, \tag{3.77}$$

$dr \cdot \nabla V = dV$

παριστάνει το έργο της F και τούτο άσχετα προς την μορφή της τροχιάς M_1M_2,

$$\int_{M_1}^{M_2} F \cdot dr = \int_{M_1}^{M_2} dr \cdot F = \int_{M_1} dr \cdot \nabla(-V) = -\int_{M_1} dV = V_1 - V_2$$

δηλαδή είναι ίσο προς την διαφορά τιμών της βαθμωτής συνάρτησης (-V) στα άκρα της τροχιάς M_1M_2. Παρατηρούμε ακόμη, ότι γιά κλειστή διαδρομή M_1M_2 ($M_1 \equiv M_2$) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (3.77) γίνεται ίσο προς μηδέν, δηλαδή το έργο είναι μηδενικό. Το πεδίο αυτό γιά το οποίο το έργο σε μιά κλειστή διαδρομή είναι μηδενικό καλείται **συντηρητικό** και η δύναμη **P** **συντηρητική**. Είναι τώρα προφανές ότι μιά δύναμη τριβής ή γενικά μία δύναμη αντίστασης δεν είναι δύναμη συντηρητική γιατί το παραγόμενο έργο είναι πάντοτε θετικό. Πολλά πεδία που συναντάμε στην μηχανική είναι συντηρητικά, δηλαδή δίνουν έργο κατά την μετακίνηση από ένα σημείο M_1 στο άλλο M_2 που εξαρτάται από την αρχή και το τέλος και όχι από την διαδρομή, και επομένως σε κάθε μετακίνηση κατά μήκος κλειστής γραμμής το έργο αυτό είναι μηδενικό.

Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές ότι, σε ένα συντηρητικό πεδίο το έργο της επιστροφής από του τελικού σημείου M_2 στο αρχικό M_1, και αν ακόμη γίνεται με διαφορετική διαδρομή, είναι αντίθετο προς το έργο που επιτελείται κατά την αρχική μετάθεση. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο προς μιά αποθήκευση του έργου αυτού υπό μορφή ενέργειας που εξαρτάται μόνο από τη θέση. Η συνάρτηση V δηλώνει την ενέργεια αυτή θέσης που αποθηκεύεται και ονομάζεται **δυναμική ενέργεια** ή **δυναμικό** του υλικού σημείου.

ΘΜΚΕ

Κατά το θεώρημα της κινητικής ενέργειας ισχύει

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1 ,$$

$\int F \cdot dr = K_2$

$\parallel$

$V_1 - V_2$

και επομένως βάσει της σχέσης (3.77) προκύπτει

$V_1 - V_2 = K_2 - K_1 \Rightarrow$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 . \qquad (3.78)$$

Επομένως συνεπάγεται ότι σε κάθε θέση του συντηρητικού πεδίου το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου και της δυναμικής ενέργειας αυτού, που αποτελεί και την όλη μηχανική ενέργειά του, παραμένει σταθερό. Η συνιστώσα της δύναμης P κατά την διεύθυνση $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ δίνεται βάσει των (3.72), (3.73) από την εξίσωση

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{P} = -\frac{dV}{ds} = -\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \textbf{\textit{grad}}\ V , \qquad (3.79)$$

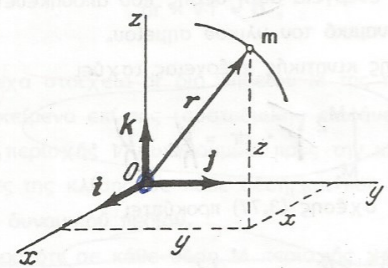
δηλαδή είναι ίση με την πτώση της δυναμικής ενέργειας κατά την διεύθυνση αυτή. Η δύναμη διευθύνεται κάθετα προς την ισοσταθμική επιφάνεια -V = σταθ., που περνάει από το σημείο και γίνεται μεγαλύτερη εκεί όπου πυκνώνονται οι ισοσταθμικές επιφάνειες.

Ο Newton διατύπωσε την εξής αρχή: ***Δύο οιαδήποτε υλικά σημεία έλκονται αμοιβαία ανάλογα των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασής τους.*** Η αρχή αυτή ονομάζεται και **νόμος της παγκόσμιας έλξης,** γιατί υποτίθεται ότι αληθεύει γιά όλα τα σημεία του διαστήματος. Ιδιαίτερη σημασία έχει το πεδίο βαρύτητας. Έστω τώρα μιά ελκτική μάζα m σε ελκτικό κέντρο O. Αν λάβουμε το O ως αρχή ορθογώνιου συστήματος αναφοράς, η ασκούμενη ελκτική δύναμη πάνω σε μοναδιαία μάζα στο σημείο A, με βάση την παραπάνω αρχή και το σχήμα 3.8, ισούται προς

$f = -f\frac{m}{r^2}$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{r}_0 \frac{fm}{r^2} = -\frac{fm}{r^3}\,\mathbf{r}, \tag{3.80}$$

όπου $\boxed{\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0}$ είναι η διανυσματική ακτίνα και f η σταθερά της παγκόσμιας έλξης ίση προς 6.685×10^{-8} dyn cm² gr^{-2}.



Σχήμα 3.8: Παράσταση ελκτικού κέντρου O μάζης m.

Είναι όμως

$$\mathbf{r} = (x,y,z)\ , \quad \nabla\cdot\mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(x,y,z)^T = 3\ ,$$

$$\nabla r = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \mathbf{r}_0,$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)^T = -\frac{1}{r^2}\,\mathbf{r}_0 = -\frac{1}{r^3}\,\mathbf{r}\ ,$$

Τώρα

$f = -f\frac{m}{r^2} = fm\left(-\frac{1}{r^2}\right) = fm\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{fm}{r}\right)$

$$\Delta V = \nabla\cdot\nabla V = \nabla\cdot\nabla\left(-\frac{fm}{r}\right) = -fm\,\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -fm\,\nabla\left(-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$= -fm\,\nabla\left(-\frac{1}{r^3}r\right) = +fm\,\nabla\left(\frac{1}{r^3}r\right) = fm\left\{\frac{1}{r^3}(\nabla\cdot r) + r\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\}$$

$$= fm\left\{\frac{1}{r^3}\cdot 3 + r\left(-\frac{3r^2}{r^6}\right)\right\} = fm\left\{\frac{3}{r^3} - \frac{3r^3}{r^6 r^3}\right\} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V = 0}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^4}\mathbf{r}, \ \ldots, \ \nabla\left(\frac{1}{r^n}\right) = \frac{n}{r^{n+2}}\mathbf{r}.$$

Έτσι, η εξίσωση (3.80) παίρνει την μορφή

$$\mathbf{P} = fm\left(-\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\right) = fm\ \nabla\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3.81}$$

δηλαδή με βάση τα προηγούμενα η P μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση μιάς βαθμωτής συνάρτησης -V αν θέσουμε

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-f\frac{m}{r}\right)$$

$F = \nabla(-V)$ $\quad V = -\frac{fm}{r}$

$$V = -\frac{fm}{r}. \tag{3.82}$$

Η V λέγεται **Νευτώνειο δυναμικό.** Αν τώρα εισάγουμε τον τελεστή Laplace

Από εδώ ξεκινάμε

$$\boxed{\Delta = \nabla\cdot\nabla}$$

$\Delta V = 0$

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right)$$

ευρίσκουμε

$$\Delta V = \nabla\cdot\nabla V \qquad \Delta f = \nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta V = \nabla\cdot\nabla\left(-\frac{fm}{r}\right)$$

$$\Delta V = -fm\,\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -fm\,\nabla\cdot\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = fm\left[\frac{1}{r^3}\ \nabla\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] =$$

$$-\frac{3r^2}{r^6} = -\frac{3}{r^4}$$

$$= fm\left(\frac{3}{r^3} - \mathbf{r}\cdot\frac{3\mathbf{r}}{r^5}\right) = fm\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) = 0, \tag{3.83}$$

$\Delta V = 0$ $\quad$ $r\cdot\left(-\frac{3}{r^4}\right) = \frac{3}{r^3}$

δηλαδή ότι το **Νευτώνειο δυναμικό** πληροί την εξίσωση Laplace σε όλες τις θέσεις εκτός από αυτή του έλκοντος σημείου.

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τις προτάσεις:

α) Το Νευτώνειο δυναμικό πεδίο που οφείλεται σε ελκτικό κέντρο απορρέει από δυναμική συνάρτηση,

β) Η απόκλιση της δύναμης σε ολόκληρη την περιοχή του Νευτώνειου δυναμικού πεδίου, που οφείλεται σε ελκτικό κέντρο, είναι ίση προς το μηδέν σε κάθε σημείο πλην του ελκτικού κέντρου.

Πράγματι, η απόκλιση της P είναι

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = fm\,\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = fm\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

και

γ) Το δυναμικό του Νευτώνειου δυναμικού πεδίου, που οφείλεται σε ελκτικό

$-V = \frac{fm}{r}$ $\qquad$ $F = \nabla(-V)$

κέντρο, επαληθεύει σε όλα τα σημεία του πεδίου (εκτός από το ελκτικό κέντρο) την εξίσωση Laplace.

Στην περίπτωση που αντί σημείου υπάρχει έλκον σώμα με μεταβαλλόμενη την πυκνότητά του από θέση σε θέση ($\delta = dm/d\omega$), όπου dm παριστάνει την στοιχειώδη μάζα του απειροστού στοιχείου $d\omega$, το Νευτώνειο δυναμικό προκύπτει

$$V = -\int \frac{\delta\, d\omega}{r}\,.$$

Το σημείο A με μάζα ίση προς την μονάδα ή θα κείται εκτός του έλκοντος σώματος, οπότε παντού με $r \neq 0$, θα είναι

$$\Delta\left(\int \frac{\delta\, d\omega}{r}\right) = \int \delta\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\omega = 0 \quad (\text{και } \Delta V = 0)\,,$$

ή θα ανήκει στο σώμα, οπότε προκύπτει

$$\Delta V = -4\omega\delta\,,$$

που αληθεύει σε όλη την περιοχή του σώματος περιλαμβάνουσα το A.

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την εξίσωση **Poisson.** Στην εξίσωση αυτή περιλαμβάνουμε και σημεία που δεν ανήκουν στο σώμα αρκεί να τεθεί $\delta = 0$, οπότε από την τελευταία σχέση προκύπτει και η εξίσωση **Laplace.** Μόνον κατά την επιφάνεια του σώματος όπου η πυκνότητα δ μεταβάλλεται συνεχώς δεν ισχύει η σχέση

$$\Delta V = 0\,,$$

όπως επίσης και η εξίσωση

$$\Delta V = -4\omega\delta\,.$$

50

3.7 Αρχή D΄ Alembert

3.7.1 Οι εξισώσεις ισορροπίας του υλικού σημείου και του υλικού συστήματος

Οι μέχρι τώρα αναπτυχθείσες μέθοδοι επίλυσης των δυναμικών προβλημάτων έχουν βασισθεί σε εξισώσεις που προέκυψαν είτε κατ΄ ευθείαν από την εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα είτε από γενικά θεωρήματα που προήλθαν από τους νόμους αυτούς. Εν τούτοις οι εξισώσεις ισορροπίας και οι εξισώσεις κίνησης ενός μηχανικού συστήματος μπορούν να προκύψουν και από άλλες γενικές προτάσεις, οι οποίες ονομάζονται **Αρχές της Μηχανικής**, μέσω των οποίων προσφέρονται ταχύτερες μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων αυτών.

Μεταξύ των προαναφερθέντων βασικών αρχών της μηχανικής είναι η **αρχή D΄ Alembert,** η οποία αναπτύσσεται παρακάτω.

Μέχρι τώρα εξετάσθηκε η περίπτωση του ελεύθερου υλικού συστήματος. Ας υποθέσουμε ήδη ότι το υλικό σύστημα υπόκειται και σε ορισμένους εξωτερικούς συνδέσμους, οι οποίοι, με βάση τα εκτεθέντα στην στατική, αντικαθίστανται από δυνάμεις που καλούνται και αντιδράσεις συνδέσμων.

Έστω σύστημα n υλικών σημείων και ένα σημείο αυτού Σ_i με μάζα m_i επί του οποίου ενεργούν:

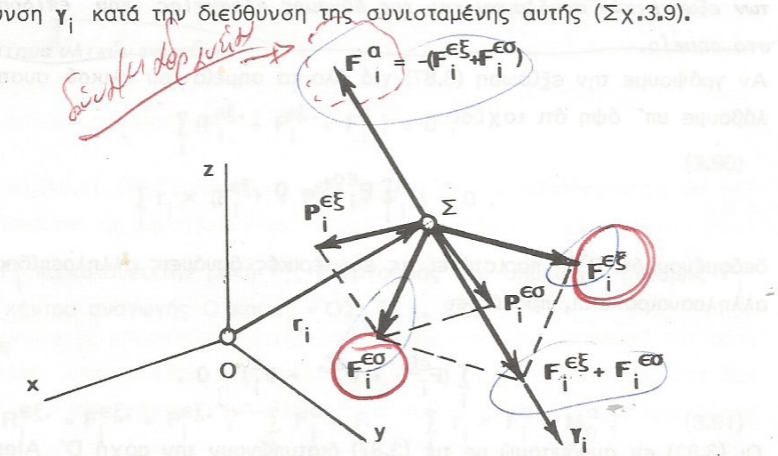
i) Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων $F_i^{\varepsilon\xi.}$, και

ii) Η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων $F_i^{\varepsilon\sigma.}$.

Η συνισταμένη $F_i^{\varepsilon\sigma.}$ είναι το γεωμετρικό άθροισμα της συνισταμένης $P_i^{\varepsilon\sigma.}$ των δυνάμεων των εσωτερικών συνδέσμων και της συνισταμένης $P_i^{\varepsilon\xi.}$ των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων, δηλαδή

$$F_i^{\varepsilon\sigma.} = P_i^{\varepsilon\sigma.} + P_i^{\varepsilon\xi.} \qquad (3.84)$$

Το σημείο Σ_i **δύναται να θεωρηθεί ως ελεύθερο** υπό την ενέργεια της συνισταμένης των παραπάνω δυνάμεων $F_i^{\varepsilon\xi.} + F_i^{\varepsilon\sigma.}$, η οποία του προσδίδει μία επιτάχυνση γ_i κατά την διεύθυνση της συνισταμένης αυτής (Σχ.3.9).



Σχήμα 3.9: Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις ενεργούσες επί υλικού σημείου θεωρούμενου ως ελευθέρου.

Στο τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς Oxyz του σχήματος 3.9 έστωσαν x_i, y_i, z_i οι συντεταγμένες του Σ_i. Σύμφωνα με την θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής ισχύει

$$F_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{\epsilon\sigma.} = m_i \gamma_i \ . \qquad (3.85)$$

Την δύναμη

$$F_i^{a} = - m_i \gamma_i = - (F_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{\epsilon\sigma.}) \ , \qquad (3.86)$$

ίση με το γινόμενο της μάζας του σημείου επί την επιτάχυνση γ_i και με διεύθυνση αντίθετη προς αυτήν της επιτάχυνσης, καλούμε **δύναμη αδρανείας** ή ποιό σύγκεκριμένα **δύναμη αδράνείας D΄ Alembert** του υλικού σημείου.

Οι εξισώσεις (3.85) και (3.86) καταλήγουν στην σχέση

$$F_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{\epsilon\sigma.} + F_i^{a} = 0 \ , \qquad (3.87)$$

η οποία εκφράζει την ακόλουθη θεμελιώδη αρχή της δυναμικής ή **αρχή D΄ Alembert**, γιά ένα υλικό σημείο:

Κατά την κίνηση υλικού σημείου, κάθε χρονική στιγμή, υπάρχει ισορροπία μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, των εσωτερικών δυνάμεων, των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων και της δύναμης αδρανείας που επιδρούν πάνω στο σημείο.

Αν γράψουμε την εξίσωση (3.87) γιά όλα τα σημεία του υλικού συστήματος και λάβουμε υπ΄ όψη ότι ισχύει

$$\sum_i P_i^{\epsilon\sigma.} = 0 \ ,$$

δεδομένου ότι $P_i^{\epsilon\sigma.}$ παριστάνει τις εσωτερικές δυνάμεις αλληλοεπίδρασης που αλληλοαναιρούνται, προκύπτει

$$\sum_i (F_i^{\epsilon\xi.} + P_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{a}) = 0 \ . \qquad (3.88)$$

Οι (3.82) εν συνδυασμώ με τις (3.87) διατυπώνουν την αρχή D΄ Alembert γιά το υλικό σύστημα, δηλαδή:

Κατά την κίνηση του συστήματος υλικών σημείων, κάθε χρονική στιγμή υπάρχει

ισορροπία μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων και των δυνάμεων αδρανείας, που επιδρούν πάνω στο σύστημα.

Οι παραπάνω θεμελιώδεις προτάσεις της δυναμικής τόσο του υλικού σημείου όσο και του υλικού συστήματος οφείλονται στον Γάλλο μαθηματικό D´Alembert (1717-1783) και αποτελούν την γενική αρχή της μηχανικής. Η σημασία της αρχής αυτής έγκειται στην δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος της δυναμικής με την εφαρμογή των γνωστών εξισώσεων ισορροπίας της στατικής, πράγμα που απλουστεύει σε πολλές περιπτώσεις τους υπολογισμούς και επιταχύνει την λύση του προβλήματος.

Πράγματι, γνωρίζουμε από την στατική ότι:

i) Το γεωμετρικό άθροισμα ενεργουσών επί υλικού σημείου ισορροπουσών δυνάμεων ισούται προς μηδέν, και

ii) Το γεωμετρικό άθροισμα ενεργουσών επί σώματος ισορροπουσών δυνάμεων ισούται προς μηδέν και το γεωμετρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων προς ένα κέντρο αναγωγής Ο είναι μηδέν.

Συνεπώς, σύμφωνα με την αρχή D´Alembert, οι στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας ενός υλικού σημείου ή ενός στερεού σώματος υπό την ενέργεια δυνάμεων εκφράζονται με τις ακόλουθες διανυσματικές εξισώσεις αντίστοιχα:

1. Γιά υλικό σημείο:

$$F_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{\epsilon\sigma.} + F_i^{\alpha} = 0 \qquad (3.89)$$

2. Γιά σύστημα υλικών σημείων:

$$\sum_i (F_i^{\epsilon\xi.} + P_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{\alpha}) = 0 \,,$$

$$\sum_i r_i \times (F_i^{\epsilon\xi.} + P_i^{\epsilon\xi.} + F_i^{\alpha}) = 0 \,, \qquad (3.90)$$

όπου $r_i \times F_i$ παριστάνει την ροπή της ενεργούσας στο σημείο Σ_i δύναμης F_i ως προς το κέντρο αναγωγής Ο και $r_i = O\Sigma_i$ (Σχ. 3.9).

Καλούμε

$$R_i^{\epsilon\xi.} = F_i^{\epsilon\xi.} + P_i^{\epsilon\xi.} \,, \quad \sum_i F_i^{\alpha} = R^{\alpha}, \quad \sum_i r_i \times F_i^{\alpha} = M_0^{\alpha} \,, \qquad (3.91)$$

οπότε οι εξισώσεις (3.90) γράφονται ισοδύναμα υπό την μορφή

$$\sum_i \mathbf{R}_i^{\epsilon\xi.} + \mathbf{R}^{\alpha} = \mathbf{0} \,,$$
$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\xi.} + \mathbf{M}_0^{\alpha} = \mathbf{0} \,. \tag{3.92}$$

Τα διανύσματα $\mathbf{R}^{\alpha}$ και $\mathbf{M}_0^{\alpha}$ καλούνται αντίστοιχα **συνισταμένη των δυνάμεων αδρανείας** και **συνισταμένη ροπή των δυνάμεων αδρανείας προς Ο.**

Δεδομένου ότι στις εξισώσεις (3.92) δεν περιέχονται οι εσωτερικές δυνάμεις, η εφαρμογή τους απλοποιεί σημαντικά την λύση του δυναμικού προβλήματος. Από την άλλη μεριά, οι εξισώσεις αυτές είναι ισοδύναμες προς τις εξισώσεις οι οποίες εκφράζονται μέσω των θεωρημάτων της μεταβολής της ποσότητας κίνησης και της συνολικής συστροφής του συστήματος. Αν τώρα προβάλουμε τις (3.90) και (3.92) στους άξονες x,y,z του συτήματος Oxyz, ευρίσκουμε τις εξής, γνωστές από την στατική, εξισώσεις ισορροπίας:

$$F_{ix}^{\epsilon\xi.} + F_{ix}^{\epsilon\sigma.} + F_{ix}^{\alpha} = 0, \quad F_{iy}^{\epsilon\xi.} + F_{iy}^{\epsilon\sigma.} + F_{iy}^{\alpha} = 0, \quad F_{iz}^{\epsilon\xi.} + F_{iz}^{\epsilon\sigma.} + F_{iz}^{\alpha} = 0 \tag{3.93}$$

και

$$\sum_i R_{ix}^{\epsilon\xi.} + R_x^{\alpha} = 0, \quad \sum_i R_{iy}^{\epsilon\xi.} + R_y^{\alpha} = 0, \quad \sum_i R_{iz}^{\epsilon\xi.} + R_z^{\alpha} = 0,$$

$$\Big[\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\xi.})\Big] \cdot \mathbf{i} + M_{0x}^{\alpha} = 0, \quad \Big[\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\xi.})\Big] \cdot \mathbf{j} + M_{0y}^{\alpha} = 0,$$

$$\Big[\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\xi.})\Big] \cdot \mathbf{k} + M_{0z}^{\alpha} = 0 \,. \tag{3.94}$$

Γιά να χρησιμοποιήσουμε το σύνολο των σχέσεων (3.93), (3.94) με σκοπό την λύση συγκεκριμένων προβλημάτων πρέπει να γνωρίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{R}^{\alpha}$ και και $\mathbf{M}_0^{\alpha}$ των δυνάμεων αδρανείας. Όπως και προηγουμένως τονίσθηκε, η μεγάλη σημασία της αρχής D΄Alembert είναι ότι με την εφαρμογή της σε προβλήματα της δυναμικής των συστημάτων οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν υπό την μορφή γνωστών εξισώσεων ισορροπίας, πράγμα που απλοποιεί τους υπολογισμούς, δεδομένου ότι στις τελευταίες δεν περιέχονται οι εσωτερικές δυνάμεις. Επί πλέον η αρχή D΄Alembert, σε συνδυασμό με την αρχή των δυνατών έργων που θα αναλυθεί στο κεφάλαιο της δυναμικής του στερεού σώματος, καταλήγει σε μιά γενική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Ειδικώτερα γιά τα ιδανικά συστήματα, όπου όπως θα δούμε το δυνατό έργο των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων είναι ίσο προς μηδέν, τα προβλήματα απλοποιούνται ακόμη περισσότερο εφ΄ όσον δεν απαιτείται ούτε η γνώση των αντιδράσεων, με αποτέλεσμα στις σχέσεις (3.91) και (3.92) να ισχύει

$$R_i^{\epsilon\xi.} = F_i^{\epsilon\xi.} \; . \tag{3.95}$$

Σημειώνουμε τέλος ότι στην περίπτωση που κατά την δυνατή μετακίνηση αναπτύσσονται τριβές αυτές μπορούν να περιληφθούν στις $F_i^{\epsilon\xi.}$.

3.7.2 Καθορισμός των διανυσμάτων R^a και M_0^a

Από τις (3.92) παρατηρούμε ότι το σύστημα των ενεργουσών σ΄ ένα στερεό σώμα δυνάμεων αδρανείας μπορεί να αναχθεί σε μοναδική δύναμη $\mathbf{R}^a$, που εφαρμόζεται στο κέντρο αναγωγής O, και σε μοναδική ροπή $\mathbf{M}_0^a$ των δυνάμεων αυτών ως προς το O. Το διάνυσμα R^a δεν εξαρτάται από το κέντρο αναγωγής, που μπορεί να είναι οιοδήποτε, και συνεπώς λαμβάνεται να συμπίπτει με το κέντρο μάζας S. Επομένως, βάσει των εξισώσεων (3.86) και δεύτερη των (3.91), προκύπτει

$$R^a = - \sum_i m_i \gamma_i = - m\gamma_S \; , \tag{3.96}$$

στην οποία m παριστάνει την συνολική μάζα, συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζης, και γ_S την επιτάχυνση του κέντρου αυτού. Αναλύοντας την επιτάχυνση αυτή στην εφαπτομενική $\boldsymbol{\gamma}_{S\epsilon}$ και κεντρομόλο $\boldsymbol{\gamma}_{S\kappa}$ εκφράζουμε το διάνυσμα $\mathbf{R}^a$ μέσω των διανυσματικών εξισώσεων

$$R_\epsilon^a = - m\gamma_{S\epsilon} \quad , \qquad R_\kappa^a = - m\gamma_{S\kappa} \; . \tag{3.97}$$

3.7.3 Μεταβατική κίνηση

Στην περίπτωση αυτή το σώμα δεν περιστρέφεται περί το κέντρο μάζας και ισχύει

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times F_i^{\epsilon\xi.} = \mathbf{0} \tag{3.98}$$

Επίσης, με βάση την δεύτερη των (3.90), ισχύει και η

$$\mathbf{M}_S^a = 0 \,. \tag{3.99}$$

Συνεπώς, κατά την μεταβατική κίνηση το σύστημα των δυνάμεων αδρανείας ενός στερεού σώματος ανάγεται σε μοναδική συνισταμένη $\mathbf{R}^a$ διά του κέντρου μάζας.

3.7.4 *Επίπεδη κίνηση*

Όπως έχουμε αναλυτικά εξετάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η επίπεδη κίνηση ενός στερεού σώματος ανάγεται στην έρευνα μιάς επίπεδης τομής του. Θεωρήσουμε τώρα ένα σώμα που έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και ότι η κίνηση γίνεται παράλληλα προς το επίπεδο τούτο. Λόγω της συμμετρίας η συνισταμένη των δυνάμεων αδρανείας $\mathbf{R}^a$ θα κείται μαζί με το κέντρο μάζας στο επίπεδο αυτό, η δε συνισταμένη ροπή $\mathbf{M}_S^a$ των δυνάμεων αδρανείας προς το S θα είναι κάθετη στο επίπεδο τούτο. Συνεπώς, βάσει των εξισώσεων της πρώτης παραγράφου θα είναι

$$\mathbf{M}_S^a = -\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi.} = -\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{\gamma}_i \,. \tag{3.100}$$

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5 της δυναμικής του απολύτως στερεού, ισχύει

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi.} = J_S\, \boldsymbol{\varepsilon} \,, \tag{3.101}$$

όπου J_S παριστάνει την ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της τομής του διερχόμενον από το κέντρο μάζης S. Επομένως έχουμε

$$\mathbf{M}_S^a = -\,J_S\, \boldsymbol{\varepsilon} \,. \tag{3.102}$$

Η $\mathbf{M}_S^a$ έχει αντίθετη φορά προς την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση, οι δυνάμεις αδρανείας ανάγονται σε μία συνισταμένη $\mathbf{R}^a$ διερχόμενη διά του S και κείμενη στο επίπεδο συμμετρίας, και μιά ροπή $\mathbf{M}_S^a$ κάθετη στο επίπεδο τούτο και καθοριζόμενη με τον τύπο (3.102).

3.7.5 *Περιστροφή περί άξονα διερχόμενο διά του κέντρου μάζας*

Θεωρούμε την περίπτωση στερεού της προηγούμενης παραγράφου και τον άξονα περιστροφής z κάθετο στο επίπεδο συμμετρίας και διερχόμενο από το κέντρο μάζης S. Επειδή στην περίπτωση αυτή είναι $\gamma_S = 0$ θα είναι και $R^a = 0$ και $M_z^a = - J_z \varepsilon$. Δηλαδή το σύστημα των δυνάμεων αδράνειας ανάγεται μόνο σε μιά ροπή M_z^a κάθετη στο επίπεδο συμμετρίας.

3.7.6 *Σχετική κίνηση*

Στην περίπτωση της σχετικής κίνησης στερεού σώματος σε κάθε σημείο Σ_i μάζας m_i ενεργούν τρείς δυνάμεις αδρανείας:

$$F_{i\sigma}^a = - m_i \gamma_{\sigma i} \ , \quad F_{i\mu}^a = - m_i \gamma_{\mu i} \ , \quad F_{ic}^a = - m_i \gamma_{ci} \ , \qquad (3.103)$$

που αντιστοιχούν στην σχετική, μετοχική και συμπληρωματική ή κοριόλειο επιτάχυνση. Συνεπώς, το σύστημα των ενεργουσών στο σώμα δυνάμεων, αποτελούμενο από τις τρείς παραπάνω δυνάμεις αδράνειας και τις εξωτερικές σε κάθε σημείο δυνάμεις, συνιστά σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία, γιά το οποίο μπορούμε να καταστρώσουμε τις εξισώσεις σχετικής κίνησης του σώματος ως εξισώσεις ισορροπίας τις οποίες εκφράζουν οι έξ στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας.

Σημειώνουμε τέλος εδώ, ότι στα επόμενα κεφάλαια της δυναμικής του στερεού σώματος θα επανέλθουμε πάνω στην αρχή D΄Alembert και στις εφαρμογές της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εφαρμογή 3.1: Η επίπεδη κίνηση υλικού σημείου Μ μάζης m καθορίζεται σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων από τις εξισώσεις

$$x = \alpha \cos\gamma t \ , \qquad y = \beta \sin\gamma t \ ,$$

όπου α, β ,γ είναι γνωστές σταθερές.

Ζητούνται: α) Η τροχιά, β) Η ασκούμενη δύναμη, και γ) Ο χρόνος μιάς πλήρους περιφοράς και το καλυπτόμενο εμβαδό από την ακτίνα ΟΜ ανά μονάδα χρόνου σε περίπτωση που η τροχιά είναι κλειστή.

Λύση: Απαλείφοντας τον χρόνο t μεταξύ των αναλυτικών δεδομένων εξισώσεων ευρίσκουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ , \tag{10.85}$$

που σημαίνει ότι η τροχιά είναι έλλειψη. Αν P_x, P_y είναι οι συνιστώσες της ενεργούσης δύναμης, οι αναλυτικές εξισώσεις της θεμελειώδους εξίσωσης δυναμικής παίρνουν την μορφή

$$P_x = m\ddot{x} = -m\alpha\gamma^2 \cos\gamma t = -m\gamma^2 x \ , \quad P_y = m\ddot{y} = -m\beta\gamma^2 \sin\gamma t = -m\gamma^2 y.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{x}{y} \ , \tag{10.86}$$

που σημαίνει ότι η δύναμη διευθύνεται προς το κέντρο Ο της έλλειψης (κεντρική κίνηση) και είναι ανάλογη της απόστασης του σημείου από το Ο. Γιά

$$\cos\gamma t = \cos\gamma t_1 \ , \quad \sin\gamma t = \sin\gamma t_1 \ ,$$

το σημείο Μ επανέρχεται σε κάθε χρονική στιγμή t_1 στην ίδια θέση. Από αυτή την παρατήρηση συνάγεται ότι

$$t_1 - t = \frac{2\pi\lambda}{\gamma} \ , \quad \lambda = \text{ακέραιος} \ ,$$

και ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\gamma} \ .$$

Τέλος, το εμβαδό που καλύπτει η ακτίνα ΟΜ ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο προς το εμβαδό της έλλειψης διά της περιόδου Τ, δηλαδή $\alpha\beta\gamma/2$.

Εφαρμογή 3.2: Σώμα βάρους W και μάζης m κινείται πάνω στην χορδή περιφέρειας ακτίνος R κάτω από την ενέργεια δύναμης P (F) ελκτικής προς το κέντρο O της περιφέρειας. Το σώμα κινείται από το σημείο Α προς το Β (Σχ. 10.22). Η έλκουσα δύναμη είναι ανάλογη της απόστασης r του σώματος από του ελκτικού κέντρου Ο. Επίσης, πάνω στο σώμα αναπτύσσεται τριβή από ολίσθηση ίση προς μW, όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής. Το σώμα στην αρχή της κίνησης ευρίσκεται στο Α και έχει ταχύτητα υ_A ίση προς 0. $v(x)=, \ x(t)=$

Να καθορισθούν: α) Η (διαφορική) εξίσωση της κίνησης, β) Ο χρόνος t_1 που απαιτείται γιά να διανύσει το μήκος ΑΒ = 2α, γ) Η μέγιστη τιμή υ_{max} της ταχύτητας. Δίνονται ότι στο σημείο Α η ελκτική δύναμη είναι ίση προς W και ότι $\frac{\alpha}{R} < \frac{\mu}{2}$.

Σημείωση: Τα διανύσματα δυνάμεων, ταχυτήτων κλπ. έχουν δοθεί με τα μέτρα τους, δεδομένου ότι μέσω του σχήματος 10.22 είναι γνωστές και οι κατευθύνσεις τους.

$F_{\epsilon\lambda} = W$ Οπότε $F = kr \Rightarrow$

Λύση: Στο άκρο Α η ελκτική δύναμη έχει μέτρο

$$P = \kappa R \ , \quad \Rightarrow W = kR \Rightarrow k = \frac{W}{R}$$

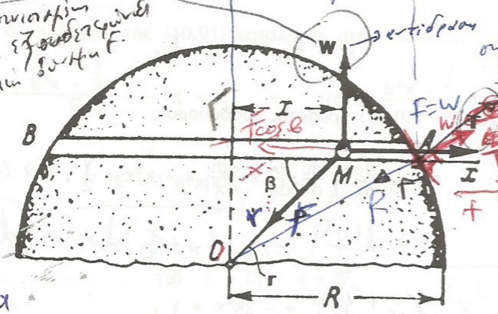
$F = W$

όπου κ είναι συντελεστής, ενώ σε απόσταση (ΓΜ) = x από του μέσου Γ της

Το W λέει πρός τα επάνω
Επειδή σε αντίθετη περίπτωση δεν θα μπορούσε να έχει $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ / $x = \alpha$, $\upsilon = \upsilon_A = 0$

ή αλλοιώς η συνισταμένη των W, T να εξουδετερώνει την κάθετη συνιστώσα F.

σημείο A: $F = cR$
σημείο M: $F = cr$



$AB = 2a$

$\cos\beta = \frac{x}{r}$

Σχήμα 10.22: Κίνηση υλικού σημείου κατά μήκος χορδής κύκλου.

σημείο M: (B) $f = k \cdot r \Rightarrow F = \frac{W}{R} r$

χορδής ΒΑ έχει μέτρο

$F = cR \Rightarrow c = \frac{F}{R}$, $F = cr$, $F = \frac{W r}{R}$

$$P = kr .$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις έπεται η έκφραση

$$P = \frac{Wr}{R} . \qquad (10.87)$$

Επιλέγοντας ως αρχή του άξονα x το σημείο Γ και θετική φορά την ΓΑ ευρίσκουμε ότι οι ενεργούσες πάνω στο σώμα δυνάμεις είναι:

i) Η έλκουσα δύναμη P προς το κέντρο, ii) Η τριβή ολίσθησης T = μW, και iii) Η αντίδραση W.

Συνεπώς, η θεμελειώδης εξίσωση της δυναμικής παίρνει την μορφή

$$- P\cos\beta + T = m\ddot{x} , \qquad m = \frac{W}{g} . \qquad (10.88)$$

$-\frac{Wr}{R}\frac{x}{r} + \mu W = \frac{W}{g}\ddot{x} \rightarrow -W\frac{x}{R} + \mu W = \frac{W}{g}\ddot{x}$

Από την τελευταία εξίσωση, λύνοντας προς $\ddot{x}$ παίρνουμε

$\ddot{x} = -\frac{g}{R}x + \mu g$

$$\ddot{x} = -\frac{gr}{R}\cos\beta + \mu g = -\frac{gx}{R} + \mu g = -k^2 x + \frac{\gamma}{2} , \qquad (10.89)$$

$\ddot{x} = -k^2 x + \frac{\gamma}{2} g$

στην οποία είναι $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$

$\ddot{x} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$

$$k^2 = \frac{g}{R}, \qquad \mu g = \frac{\gamma}{2}.$$

Η διαφορική εξίσωση (10.89) γράφεται ισοδύναμα

$$(\dot{x})^{\cdot} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon d\upsilon}{dx} = -k^2x + \frac{\gamma}{2}, \Rightarrow \upsilon d\upsilon = (-k^2x + \ldots$$

ή ισοδύναμα $\Rightarrow d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = \left(-k^2x + \frac{\gamma}{2}\right)dx \to \int d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = \int(-k^2 \ldots$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2} = -k^2\frac{x^2}{2} + \frac{\gamma}{2}x + c_1 \qquad (\upsilon^2)' = -2k^2x + \gamma, \qquad (10.90)$$

όπου τόνος (') παριστάνει παράγωγο προς x.

Το γενικό ολοκλήρωμα της (10.90) με την αρχική συνθήκη

$AB = 2\alpha$

$$\text{γιά} \quad x = \alpha, \quad \upsilon_A = 0, \quad \Rightarrow 0 = -k^2\alpha^2 + \gamma\alpha + \ldots \quad \Rightarrow c_1 = k^2\alpha^2 - \ldots$$

καταλήγει στην εξής έκφραση του μέτρου της ταχύτητας υ: $\boxed{c_1 = \alpha(k^2\alpha - \ldots}$

$$\upsilon = \pm\left[-k^2x^2 + \gamma x + \alpha(k^2\alpha - \gamma)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Επειδή όμως στην τυχούσα θέση x το διάνυσμα της ταχύτητος διευθύνεται από το Μ στο Γ θα ισχύει το αρνητικό σημείο. Επομένως, τελικά έχουμε

$$\upsilon = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\left[-k^2x^2 + \gamma x + \alpha(k^2\alpha - \gamma)\right]^{\frac{1}{2}}$$

ή

$$\frac{dx}{\left[-k^2x^2 + \gamma x + \alpha(k^2\alpha - \gamma)\right]^{\frac{1}{2}}} = -dt. \qquad (10.91)$$

Επειδή ο παρονομαστής της τελευταίας εξίσωσης είναι τετραγωνική ρίζα τριωνύμου ως προς x, το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της ευρίσκεται από πίνακες μετά την διερεύνηση της διακρίνουσας Δ του τριωνύμου και των συντελεστών του. Επειδή $-k^2 < 0$ και $\frac{\alpha}{R} < \frac{\mu}{2}$ από την υπόθεση, έπεται

$$k^2\alpha < \frac{\gamma}{4} \quad ή \quad k^2\alpha\gamma < \frac{\gamma^2}{4}$$

και επομένως

$$\Delta = -k^2\alpha(k^2\alpha - \gamma) - \frac{\gamma^2}{4} < 0.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της (10.91) καταλήγει στην έκφραση

$$\arcsin \frac{-k^2x + \frac{\gamma}{2}}{E} = -kt + C_2 \quad \rightarrow \quad \arccos \frac{k^2x - \frac{\gamma}{2}}{E} = kt + C$$

όπου

$$E = \left[k^2x(k^2\alpha - \gamma) + \frac{\gamma^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Είναι όμως:

$$\text{γιά} \quad t = 0, \quad x = \alpha$$

και έτσι

$$\arccos \frac{k^2x - \frac{\gamma}{2}}{E} = kt + \arccos \frac{k^2\alpha - \frac{\gamma}{2}}{E}. \tag{10.92}$$

που είναι και η ζητούμενη εξίσωση της κίνησης.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή από ολίσθηση είναι $\mu = 0$, $\gamma = 0$ και η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$\arccos \frac{x}{\alpha} = kt \quad \text{ή} \quad x = \alpha \cos kt$$

που είναι αρμονική ταλάντωση εύρους α.

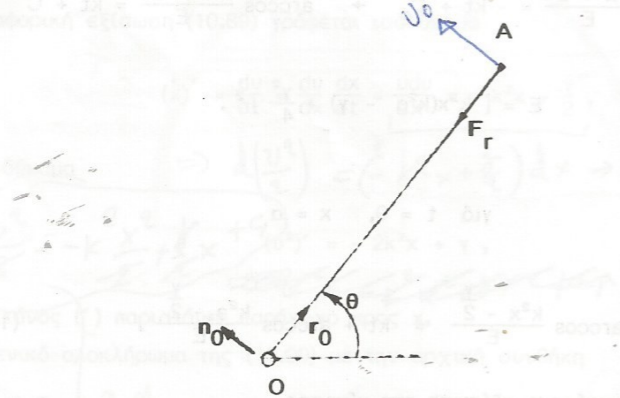
Αν στην (10.92) θέσουμε $x = -\alpha$ ευρίσκουμε τον ζητούμενο χρόνο t_1 που το σώμα διανύει το διάστημα ΒΑ. Επίσης, από τον τύπο της ταχύτητος γιά $x=0$ ευρίσκουμε την υ_{max}.

Εφαρμογή 3.3: Υλικό σημείο Α μάζης m κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου έλκεται από σταθερό σημείο Ο με δύναμη μέτρου $F_r = \frac{mk^2}{r^3}$, όπου r είναι η απόσταση του υλικού σημείου από το Ο. Αν γιά $t = 0$ είναι $r = \alpha$ και το σημείο κινείται καθέτως προς την ΟΑ με ταχύτητα υ_0, υπολογίσατε την απόσταση ΟΑ = r του υλικού σημείου από το Ο συναρτήσει του χρόνου t (Σχ. 10.23).

Λύση: Ορίζουμε το πολικό σύστημα $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0)$ όπως φαίνεται στο σχήμα 10.23. Μέσω των τύπων (1.57) εκφράζουμε τις δύο αναλυτικές εξισώσεις της θεμελειώδους διαφορικής εξίσωσης δυναμικής υπό την μορφή

$$m\gamma_r = -\frac{mk^2}{r^3} \quad \rightarrow \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{mk^2}{r^3}, \tag{10.93}$$

$$m\gamma_\theta = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 . \qquad (10.94)$$



Σχήμα 10.23: Υλικό σημείο ελκόμενο από σταθερό κέντρο Ο.

Από την (10.94) ευρίσκουμε

$$r^2\dot{\theta} = c ,$$

όπου c είναι σταθερά, η οποία, εφ' όσον

$$\text{γιά} \quad t = 0 , \quad r = \alpha , \quad \upsilon = \upsilon_0 = \alpha\dot{\theta}_0 ,$$

παρέχει

$$r^2\dot{\theta} = \alpha\upsilon_0 . \qquad (10.95)$$

Από την (10.93) παίρνουμε

$$\ddot{r} - \frac{\alpha\upsilon_0^2}{r^3} = -\frac{k^2}{r^3}$$

ή

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{\alpha^2\upsilon_0^2 - k^2}{r^3} ,$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί. Πράγματι, γράφουμε

$$\int_0^{\dot r} \dot r d\dot r = \int_0^r \frac{\alpha^2 \upsilon_0^2 - k^2}{r^3} dr$$

ή

$$\dot r^2 = (\alpha^2 \upsilon_0^2 - k^2)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{r^2}\right) \tag{10.96}$$

εφ΄ όσον $k < \alpha\upsilon_0$, που σημαίνει $r > \alpha$.
Από την (10.96) ευρίσκουμε

$$r\dot r = \sqrt{\frac{\alpha^2\upsilon_0^2 - k^2}{\alpha^2}}\sqrt{r^2 - \alpha^2},$$

ή

$$\int_\alpha^r \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} = \int_0^t \sqrt{\frac{\alpha^2\upsilon_0^2 - k^2}{\alpha^2}}\, dt$$

που παρέχει

$$r = r(t) = \sqrt{\alpha^2 + \left(\upsilon_0^2 - \frac{k^2}{\alpha^2}\right) t^2} . \tag{10.97}$$

Παρατηρούμε ότι γιά $k = \upsilon_0\alpha$ προκύπτει $r = \alpha$, δηλαδή η τροχιά είναι κυκλική. Αν $k > \upsilon_0\alpha$ που σημαίνει $\upsilon_0^2 \alpha^2 - k^2 < \alpha$ γιά να είναι η κίνηση που παριστάνεται από την (10.96) δυνατή, πρέπει

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{r^2} < 0$$

που σημαίνει ότι

$$r^2 < \alpha^2$$

ή

$$\dot r < 0 .$$

Τότε, η (10.96) γίνεται

$$r\dot r = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{k^2 - \alpha^2\upsilon_0^2}\sqrt{\alpha^2 - r^2}$$

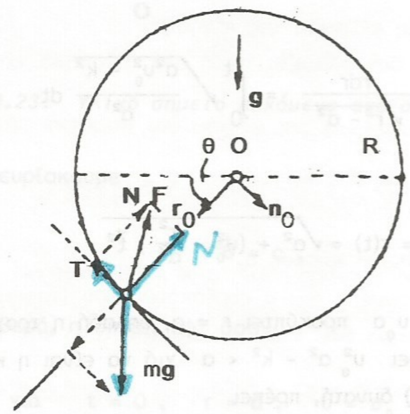
από την οποία παίρνουμε

$$\int_a^r \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{1}{a}\int_0^t \sqrt{k^2 - a^2 u_0^2}\, dt$$

ή

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{k^2}{a^2} - u_0^2\right) t^2}\,. \tag{10.98}$$

Εφαρμογή 3.4: Υλικό σημείο μάζης m αφίεται στο ένα των δύο άκρων της οριζόντιας διαμέτρου κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς ακτίνος R. Συνέπεια του βάρους του το υλικό σημείο αρχίζει να κινείται προς το κατώτατο σημείο της τροχιάς, στο οποίο φθάνει με μηδενική ταχύτητα (Σχ. 10.24). Ποιός ο συντελεστής τριβής μεταξύ σημείου - τροχιάς;



Σχήμα 10.24: Σύστημα υλικού σημείου και κατακορύφου τροχιάς.

Λύση: Με βάση το πολικό σύστημα (r_0, n_0) του σχήματος 10.24 και τον τύπο (1.57) ορίζουμε:

$$\begin{aligned} &\text{Κατεύθυνση } r_0 : \; m\gamma_r = mg\sin\theta - N = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ &\text{Κατεύθυνση } n_0 : \; mb_\theta = mg\cos\theta - T = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{10.99}$$

στις οποίες N παριστάνει την αντίδραση στην τροχιά και T την τριβή. Δεδομένου ότι η τροχιά είναι κυκλική ισχύει η εξίσωση

$$\dot{r} = \dot{R} = 0$$

και συνεπώς οι (10.99) παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} mR\dot{\theta}^2 &= N - mg\sin\theta\,, \\ mR\ddot{\theta} &= mg\cos\theta - \mu N\,. \end{aligned} \tag{10.100}$$

Από τις (10.100) προκύπτει

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,, \tag{10.101}$$

που είναι μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς θ(t) με σταθερούς συντελεστές. Θέτουμε

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= y(\theta)\,, \\ \ddot{\theta} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}y' = yy'\,, \end{aligned} \tag{10.102}$$

όπου τόνος (´) παριστάνει παράγωγο προς θ.
Η (10.102) μετασχηματίζεται τώρα στην

$$yy' + \mu y^2 = \frac{g}{R}(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

ή

$$\frac{1}{2}(y^2)' + \mu y^2 = \frac{g}{R}(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,, \tag{10.103}$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης ως προς y^2. Θέτωντας εκ νέου

$$y^2(\theta) = p(\theta)\,, \tag{10.104}$$

η (10.103) γίνεται

$$\frac{1}{2}p' + \mu p = \frac{g}{R}(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,,$$

το γενικό ολοκλήρωμα της οποίας, σύμφωνα με την θεωρία των γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης, υπολογίζεται

$$p(\theta) = \frac{2g}{R}\,\frac{3\mu\cos\theta + (1 - 2\mu^2)\sin\theta}{1 + 4\mu^2} + Ce^{-2\mu\theta}\,, \tag{10.105}$$

όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Χρησιμοποιώντας τώρα την αρχική συνθήκη

$$\text{γιά} \quad \theta = 0\,, \quad p(\theta{=}0) = y^2(\theta{=}0) = \dot{\theta}(t{=}0) = 0$$

ευρίσκουμε μέσω της (10.105) ότι

$$C = -\frac{6g\mu}{R(1+4\mu^2)}\,. \tag{10.106}$$

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με την υπόθεση, γιά $\theta = \frac{\pi}{2}$ είναι $\upsilon = 0$. Επειδή από τον τύπο (1.53) ισχύει

$$\upsilon = \dot{r}r_0 + r\dot{\theta}n_0$$

και η τροχιά είναι κυκλική, έπεται

$$\upsilon = R\dot{\theta}n_0$$

που σημαίνει ότι

$$\upsilon(\theta{=}\tfrac{\pi}{2}) = \dot{\theta}(t{=}\tau) = y(\theta{=}\tfrac{\pi}{2}) = \sqrt{p(\theta{=}\tfrac{\pi}{2})} = 0.$$

΄Ετσι, μέσω τών (10.105) και (10.106) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$e^{-\pi\mu} = \frac{1-2\mu^2}{3\mu}\,. \tag{10.107}$$

Η σχέση (10.107) είναι υπερβατική εξίσωση από την οποία καθορίζεται ο συντελεστής τριβής μ.

Εφαρμογή 3.5: ΄Ενα σώμα μάζης m κείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και αιφνίδια ωθείται και αποκτά αρχική ταχύτητα υ_0. Η κίνηση του σώματος πάνω στο επίπεδο επιβραδύνεται υπό την ενέργεια σταθερής δύναμης F, παράλληλης προς το οριζόντιο επίπεδο. Να καθορισθεί ο χρόνος t_1 και το διάστημα x_1 που διανύει μέχρι της ηρεμίας του.

Λύση: Στην τυχούσα θέση πάνω στο σώμα ενεργεί το βάρος W, η αντίσταση - W και η δύναμη F. Με βάση το θεώρημα τής μεταβολής της ποσότητας κίνησης (τύπος (3.37)) ισχύει

$$\boxed{m\upsilon_1 - m\upsilon_0 = \sum_i \Omega_i}\ ,$$

όπου τα μεγέθη ταχυτήτων και η παρόρμηση δεν έχουν σημειωθεί ως διανύσματα δεδομένου ότι είναι συγγραμμικά ως προς οριζόντιο άξονα.

Στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$\upsilon_1 = 0\ , \quad \sum_i \Omega_i = -\int_0^{t_1} P dt = -Pt_1\ .$$

Συνεπώς, ευρίσκουμε

$$-m\upsilon_0 = -Pt_1 \ \rightarrow \ t_1 = \frac{m\upsilon_0}{P}\ . \tag{10.108}$$

Εξ άλλου, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε το αποτέλεσμα $\Delta K = W_F$

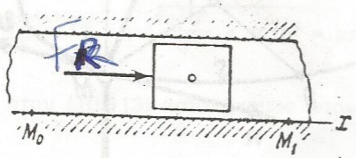
$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = A_{01} = -Px_1$$

ή

$$-\frac{m\upsilon_0^2}{2} = -Px_1 \ \rightarrow \ x_1 = \frac{m\upsilon_0^2}{2P} \tag{10.109}$$

Εφαρμογή 3.6: Η συνισταμένη δύναμη όλων των δυνάμεων που ενεργούν επί του εμβόλου που σχήματος 10.25 μεταβάλλεται με τον νόμο $R = W(\alpha + \beta t^{\mu})$, όπου W είναι το βάρος, α, β είναι σταθεροί συντελεστές και μ ακέραιος. Να καθορισθεί η ταχύτητα και το διάστημα x_1 συναρτήσει του χρόνου t αν γιά $t = 0$ είναι $\upsilon_0 = 0$.

$v(t) =$
$x_1(t) =$



Σχήμα 10.25: Συνισταμένη δύναμη επί εμβόλου.

Λύση: Με βάση το θεώρημα της μεταβολής της ποσότητας κίνησης (τύπος (3.36)) προκύπτει

$$m\upsilon - m\upsilon_0 = \int_0^t W(\alpha + \beta t^{\mu})dt = W(\alpha t + \frac{\beta t^{\mu+1}}{\mu+1}) \quad + C_1 = 0$$

και επειδή $\upsilon_0 = 0$ έπεται

$$\boxed{\upsilon = gt(\alpha + \frac{\beta t^{\mu}}{\mu+1})} \ . \tag{10.110}$$

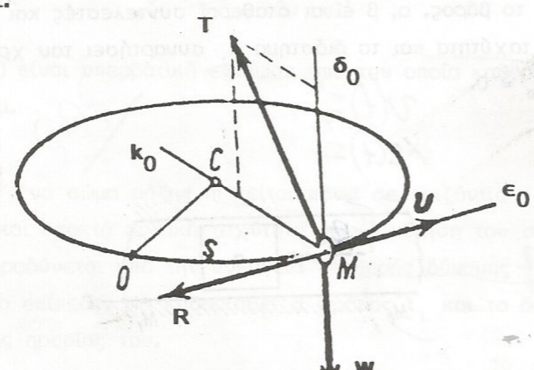
Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow dx = g(\alpha t + \frac{\beta t^{\mu+1}}{\mu+1})dt \ .$$

Παίρνοντας την οριακή συνθήκη γιά $t = 0$, $x = 0$, υπολογίζουμε

$$\boxed{x = g\left[\frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\beta t^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right]} \ . \quad + C_2 = 0 \tag{10.111}$$

Εφαρμογή 3.7: Ένας δακτύλιος Δ βάρους **W** ολισθαίνει σε οριζόντια κυκλική λεπτή ράβδο (οδηγό)ακτίνας α με μιά αρχική ταχύτητα υ_0 εφαπτόμενη στον κύκλο (Σχ. 10.26). Επάνω στον δακτύλιο ενεργεί η δύναμη τριβής $R = \mu T$, όπου T παριστάνει την αντίδραση και μ τον σταθερό συντελεστή τριβής. Ζητούνται να καθορισθούν: i) Η εξίσωση κίνησης, ii) Η εξίσωση ταχύτητας, iii) Η αντίδραση, και iv) Ο χρόνος και το διάστημα που θα διανύσει ο δακτύλιος μέχρις ότου σταματήσει.



Σχήμα 10.26: Δακτύλιος ολισθαίνων σε οριζόντιο κυκλικό οδηγό.

Λύση: Ορίζουμε το τοπικό σύστημα Frénet ε_0, k_0, δ_0 στην τυχούσα θέση Δ(s). Επί του δακτυλίου ενεργούν οι παρακάτω δυνάμεις: α) Το βάρος **W**, β) Η αντίδραση **T**, κάθετη στον κυκλικό οδηγό κείμενη πάνω στο επίπεδο $(\delta_0 \Delta k_0)$, και γ) Η τριβή **R** = μ**T**.

Προφανώς ισχύουν οι εξισώσεις

$$T = T_k + T_\delta \,, \quad T_\varepsilon = 0 \,.$$

Οι εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου Δ πάνω στην δεδομένη κυκλική τροχιά δίνονται από τις σχέσεις (3.64), δηλαδή

$$m\frac{du}{dt} = \sum_i F_\varepsilon^{\epsilon\xi.} \,, \quad \frac{mu^2}{\alpha} = \sum_i F_\kappa^{\epsilon\xi.} + T_\kappa \,, \qquad (10.112)$$
$$T_\delta = W = mg \,,$$

στις οποίες η πρώτη παριστάνει την επιτρόχια συνιστώσα και η δεύτερη την κεντρομόλο. Οι τρεις αυτές εξισώσεις γράφονται αντίστοιχα

$$m\dot{u} = - R \,, \qquad (10.113)$$
$$\frac{mu^2}{\alpha} = T_\kappa \,, \qquad (10.114)$$
$$T_\delta = mg \,. \qquad (10.115)$$

Από την διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{R} = \mu \mathbf{T}$$

έπεται ότι το μέτρο R γράφεται

$$R = \mu T = \mu\sqrt{T_\kappa^2 + T_\delta^2} = \mu\sqrt{\frac{m^2u^4}{\alpha^2} + m^2g^2} = \mu m\sqrt{g^2 + \frac{u^4}{\alpha^2}} \,. \qquad (10.116)$$

Εισάγοντας την (10.116) στην (10.113) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha^2g^2 + u^4}} = -\frac{\mu}{\alpha}\,dt \,.$$

Θέτουμε

$$\upsilon = kz\ , \qquad k = \sqrt{Rg}$$

και μετασχηματίζουμε την τελευταία εξίσωση στην

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = -\frac{\mu k}{a}\,dt\ ,$$

από την οποία προκύπτει

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = -\frac{\mu k}{a}\,t + C\ , \qquad (10.117)$$

όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Οι ρίζες της υπόριζης ποσότητας είναι φανταστικές και έτσι το ολοκλήρωμα είναι ελλειπτικής μορφής (με πολυώνυμο της υπόριζης ποσότητας τετάρτου βαθμού).

Αν υποθέσουμε ότι κατά κάποιο τρόπο υπολογίσαμε την συνάρτηση

$$z = f(t) + C$$

ή, μέσω της παραπάνω αντικατάστασης,

$$\upsilon = \frac{1}{k}\,[\,f(t) + C\,]$$

και κάνουμε χρήση της αρχικής συνθήκης γιά $t = 0\ ,\ \upsilon = \upsilon_0$, καθορίζουμε το μέτρο της ταχύτητας υ συναρτήσει του χρόνου t. Γιά τον υπολογισμό του ζητούμενου διανύσματος s συναρτήσει της υ επιτυγχάνεται μέσω της σχέσης

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\,\frac{d\upsilon}{ds} = -\frac{\mu}{a}\sqrt{k^4 + \upsilon^4}\ .$$

Πράγματι, από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{d\upsilon^2}{ds} = -\frac{2\mu}{a}\sqrt{k^4 + \upsilon^4}$$

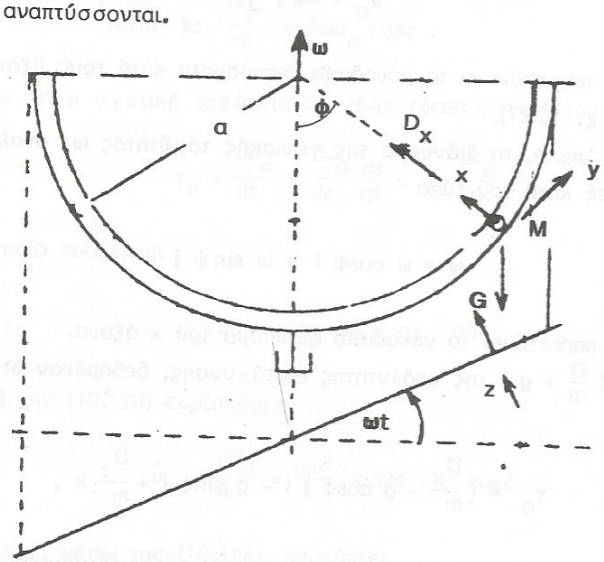
$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon^2}{\sqrt{k^4 + \upsilon^4}} = -\frac{2\mu}{\alpha}\int_0^s ds ,$$

δηλαδή

$$s = \frac{\alpha}{2\mu} \ln \frac{\upsilon_0^2 + \sqrt{k^4 + \upsilon_0^4}}{\upsilon^2 + \sqrt{k^4 + \upsilon^4}} . \qquad (10.118)$$

Έχοντας ήδη καθορίσει την ταχύτητα υ ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε βάσει της τελευταίας εξίσωσης να καθορίσουμε και το διάστημα συναρτήσει του χρόνου. Τέλος, από την σχέση που δίνει την T καθορίζουμε αυτή συναρτήσει του χρόνου.

Εφαρμογή 3.8: Κυκλική αύλακα ακτίνος α περιστρέφεται περί κατακόρυφο διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (Σχ. 10.27). Ζητούνται: i) Η αλγεβρική τιμή της ω έτσι ώστε υλικό σημείο μάζης m κείμενο εντός της αύλακας να ισορροπεί στην θέση όπου η ακτίνα κλίνει κατά 60° ως προς τον άξονα περιστροφής, και ii) Το μέγεθος των αντιδράσεων των τοιχωμάτων της αύλακας. Τριβές δεν αναπτύσσονται.



Σχήμα 10.27: Κυκλική αύλακα περιστρεφόμενη περί κατακόρυφη δάμετρό της.

Λύση: Έστω Mxyz κινητό σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα 10.27. Δεδομένου ότι δεν αναπτύσσονται τριβές οι προβολές της αντιδράσεως **D** είναι οι D_x, D_y. Αν **G** παριστάνει το βάρος του υλικού σημείου μάζης m, τότε τούτο εκτελεί κίνηση λόγω του **G** και κίνηση λόγω της περιστροφής **ω**. Συνεπώς, η απόλυτη ταχύτητά του και η απόλυτη επιτάχυνσή του δίνονται κατά τα γνωστά από τις διανυσματικές εξισώσεις

$$\upsilon_\alpha = \upsilon_\sigma + \upsilon_\mu ,$$

$$\gamma_\alpha = \frac{D}{m} + g = \gamma_\sigma + \gamma_\mu + \gamma_c ,$$

όπου g παριστάνει την επιτάχυνση βαρύτητος.

Το διάνυσμα της μετοχικής ταχύτητος υ_μ είναι

$$\upsilon_\mu = \alpha\omega \sin\phi \, k , \qquad (10.119)$$

ενώ το αντίστοιχο διάνυσμα της σχετικής ταχύτητος είναι

$$\upsilon_\sigma = \alpha\dot{\phi} \, j , \qquad (10.120)$$

όπου **k** και **j** παριστάνουν τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες z και y αντίστοιχα (Σχ. 10.27).

Από την άλλη μεριά, το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητος **ω** αναλύεται στους x και y άξονες κατά τον τύπο

$$\omega = \omega \cos\phi \, i + \omega \sin\phi \, j , \qquad (10.121)$$

στον οποίο **i** παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του x άξονα.

Ο όρος $(\frac{D}{m} + g)$ της απόλυτης επιτάχυνσης, δεδομένου ότι $D_y = 0$, γράφεται

$$\gamma_\alpha = (\frac{D_x}{m} - g \cos\phi) \, i - g \sin\phi \, j + \frac{D_z}{m} \, k , \qquad (10.122)$$

ενώ οι όροι γ_σ και γ_μ της σχετικής και μετοχικής επιτάχυνσης γράφονται αντίστοιχα

$$\gamma_\sigma = \frac{\upsilon_\sigma^2}{\alpha}\,\mathbf{i} + \dot{\upsilon}_\sigma\,\mathbf{j} \;, \quad \gamma_\mu = \omega^2\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\mathbf{i} - \omega^2\rho\cos\phi\,\mathbf{j} =$$

$$= \omega^2\alpha\,\sin^2\phi\,\mathbf{i} - \omega^2\alpha\,\sin\phi\,\cos\phi\,\mathbf{j}\;. \qquad (10.123)$$

Τέλος, η κοριόλειος επιτάχυνση γ_C, με βάση τις (10.121) και (10.120), γράφεται

$$\gamma_C = 2(\omega\times\upsilon_\sigma) = 2\left\{(\omega\cos\phi\,\mathbf{i} + \omega\sin\phi\,\mathbf{j})\times\alpha\dot{\phi}\,\mathbf{j}\right\} =$$

$$= 2\omega\alpha\dot{\phi}\cos\phi\,\mathbf{k} = 2\omega\upsilon_\sigma\cos\phi\,\mathbf{k}\;. \qquad (10.124)$$

Συνεπώς, η διανυσματική εξίσωση της απόλυτης επιτάχυνσης έχει τις εξής τρεις αναλυτικές εξισώσεις κατά τους άξονες x, y, z:

$$\text{Κατά } \mathbf{i}: \quad \frac{D_x}{m} - g\cos\phi = \alpha\omega^2\sin^2\phi + \frac{\upsilon_\sigma^2}{\alpha}\;, \qquad (10.125)$$

$$\text{Κατά } \mathbf{j}: \quad -g\sin\phi = -\frac{\alpha\omega^2}{2}\sin^2\phi + \dot{\upsilon}_\sigma\;, \qquad (10.126)$$

$$\text{Κατά } \mathbf{k}: \quad \frac{D_z}{m} = 2\omega\upsilon_\sigma\cos\phi\;. \qquad (10.127)$$

Δεδομένου ότι η σχετική ταχύτητα υ_σ είναι εφαπτομενική του κύκλου, γράφουμε

$$\gamma_\sigma = \frac{d\upsilon_\sigma}{dt} = \frac{d\upsilon_\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon_\sigma\frac{d\upsilon_\sigma}{ds}\;, \qquad (10.128)$$

από την οποία προκύπτει

$$\upsilon_\sigma\,d\upsilon_\sigma = \gamma_\sigma\,ds = \alpha\gamma_\sigma\,d\phi\;. \qquad (10.129)$$

Έτσι, από την (10.126) ευρίσκουμε

$$\dot{\upsilon}_\sigma = \frac{d\upsilon_\sigma}{dt} = \frac{\alpha\omega^2}{2}\sin2\phi - g\cos\phi$$

εκ της οποίας, μέσω της (10.128), προκύπτει

$$\gamma_\sigma\,ds = \upsilon_\sigma\,d\upsilon_\sigma = \left(\frac{\alpha\omega^2}{2}\sin2\phi - g\cos\phi\right)ds\;.$$

Κάνοντας τώρα χρήση της εξίσωσης (10.129) μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$\upsilon_\sigma \, d\upsilon_\sigma = \alpha \left(\frac{\alpha\omega^2}{2} \sin 2\phi - g \sin\phi \right) d\phi ,$$

από την ολοκλήρωση της οποίας υπολογίζουμε

$$\frac{\upsilon_\sigma^2}{2} = - \frac{\alpha^2\omega^2}{4} \cos 2\phi + \alpha g \cos\phi + C , \qquad (10.130)$$

όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Μέσω της αρχικής συνθήκης γιά $\phi = 0$, $\upsilon_\sigma = 0$ έχουμε

$$C = \frac{\alpha\omega^2}{4} - \alpha g ,$$

οπότε η υ_σ προκύπτει

$$\upsilon_\sigma = 2\alpha\omega \sin\frac{\phi}{2} \sqrt{\cos^2\frac{\phi}{2} - \frac{g}{\alpha\omega^2}} . \qquad (10.131)$$

Αλλά από την υπόθεση γιά $\phi = 60°$, $\upsilon_\sigma = 0$ οπότε

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3\alpha}} .$$

Από τις (10.125) και (10.127), γνωρίζοντας την ω, υπολογίζουμε τις D_x, D_z από τους τύπους

D'Alembert

$$D_x = \frac{3G}{2} , \quad D_z = 0 . \qquad (10.132)$$

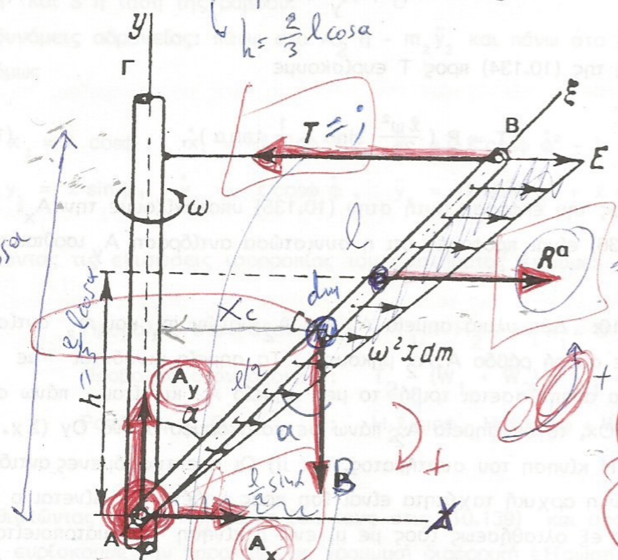
Εφαρμογή 3.9: Μιά ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ και βάρους B αρθρούται στο σημείο Α με κατακόρυφο στέλεχος περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα ω (Σχ. 10.28). Να καθορισθεί η τάση στο οριζόντιο νήμα που σταθεροποιεί την ράβδο υπό γωνία α με το στέλεχος, καθώς επίσης να υπολογισθούν και οι αντιδράσεις A_x και A_y.

Λύση: Οι ενεργούσες εξωτερικές δυνάμεις πάνω στην ΑΒ είναι το βάρος P, B η τάση T, οι αντιδράσεις A_x και A_y και οι δυνάμεις αδρανείας. Σε κάθε σημείο της ράβδου Δm η ενεργούσα φυγόκεντρη δύναμη αδρανείας είναι η $\Delta m\omega^2 x$,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r$$

όπου x παριστάνει την απόσταση του στοιχείου της ράβδου από τον άξονα περιστροφής. Η συνισταμένη των αδρανειακών δυνάμεων, που είναι κατά ευθύγραμμο νόμο διανεμημένες, διέρχεται από το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΕ, συνεπώς σε μιά απόσταση $2\ell\cos\alpha/3$ από τον άξονα x.

$h = \frac{2}{3}\ell\cos\alpha$



$\Sigma M = 0$

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

Σχήμα 10.28: Ομογενής ράβδος περιστρεφόμενη περί κατακόρυφο στέλεχος.

Έτσι, η συνισταμένη R^a των δυνάμεων αυτών προκύπτει

$$R^a = M\gamma_C = M\omega^2 x_C\ i = \frac{B}{g}\,\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\alpha\ i\ , \tag{10.133}$$

όπου x_C παριστάνει την τετμημένη του κέντρου βάρους της ράβδου και M την συνολική της μάζα.

Το άθροισμα των ροπών όλων των εξωτερικών δυνάμεων καθώς και των αδρανειακών δυνάμεων ως προς το σημείο A είναι ίσο προς μηδέν. Η εξίσωση αυτή καθώς και οι προβολές των εξωτερικών δυνάμεων προς τους άξονες x, y καταλήγουν στις εξής αναλυτικές εξισώσεις:

A

$\Sigma M = 0 \Rightarrow$

$$-\,T\ell\cos\alpha + B\frac{\ell}{2}\sin\alpha + R^a\frac{2}{3}\ell\cos\alpha = 0\ , \tag{10.134}$$

T = ... όπου $R^a = \frac{(dm)v^2}{r} = \frac{(dm)\omega^2 r^2}{r} = (dm)\omega^2 x = \left(\frac{B}{g}\right)\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\alpha$

$$- T + R^{\alpha} + A_x = 0 \ , \tag{10.135}$$

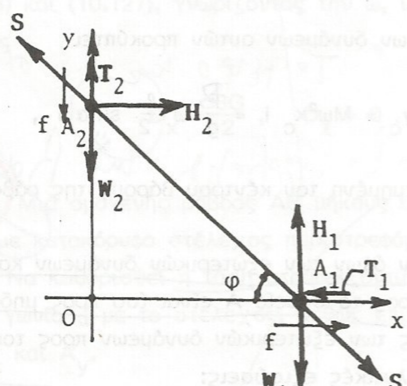
$$- P + A_y = 0 \ . \tag{10.136}$$

Από την λύση της (10.134) προς T ευρίσκουμε

$$T = P\left(\frac{\ell\omega^2}{3g} \sin\alpha + \frac{1}{2} \tan\alpha \right) , \tag{10.137}$$

ενώ εισάγοντας την έκφραση αυτή στην (10.135) υπολογίζουμε την A_x. Τέλος, από την (10.136) είναι προφανές ότι η συνιστώσα-αντίδραση A_y ισούται προς P.

Εφαρμογή 3.10: Δύο υλικά σημεία A_1 και A_2 μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα, συνδέονται με αβαρή ράβδο A_1A_2 μήκους ℓ. Τα σημεία κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπτύσσεται τριβή το μεν σημείο A_1 κινείται πάνω σε οριζόντιο άξονα Ox, το δε σημείο A_2 πάνω σε κατακόρυφο άξονα Oy (Σχ. 10.29). Ζητούνται: i) Η κίνηση του συστήματος, και ii) Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις και τάσεις, αν η αρχική ταχύτητα είναι ίση προς μηδέν. Δίνεται ο συντελεστής τριβής εξ ολισθήσεως ίσος με μ, ενώ η κίνηση πραγματοποιείται κατά την διεύθυνση των βελών f όπως φαίνεται στο σχήμα 10.29.



Σχήμα 10.29: Κίνηση δύο υλικών σημείων από περιορισμούς.

Λύση: Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο σύστημα των δύο σημείων είναι:

α) **Εξωτερικές δυνάμεις:** πάνω στο A_2 οι W_2, T_2, H_2 και S ενώ πάνω στο A_1 οι W_1, T_1, H_1 και S, όπου είναι $T_1 = \mu H_1$, $T_2 = \mu H_2$ οι τριβές, W_1, W_2 τα βάρη και S η τάση της ράβδου.

β) **Οι δυνάμεις αδρανείας:** πάνω στο A_2 η $-m_2\ddot{y}_2$ και πάνω στο A_1 η $-m_1\ddot{x}_1$. Είναι όμως

$$x_1 = \ell\cos\phi\,, \quad \dot{x}_1 = -\ell\sin\phi\,\dot{\phi}\,, \quad \ddot{x}_1 = -\ell\cos\phi\,\dot{\phi}^2 - \ell\sin\phi\,\ddot{\phi}$$
$$y_2 = \ell\sin\phi\,, \quad \dot{y}_2 = \ell\cos\phi\,\dot{\phi}\,, \quad \ddot{y}_2 = -\ell\sin\phi\,\dot{\phi}^2 + \ell\cos\phi\,\ddot{\phi}. \tag{10.138}$$

Λαμβάνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος έχουμε:

$$\text{Προβολές στον άξονα x:} \quad -T_1 + H_2 - m_1\ddot{x}_1 = 0$$
$$\text{Προβολές στον άξονα y:} \quad T_2 - (W_1 + W_2) + H_1 + m_2\ddot{y}_2 = 0$$
$$\text{Ροπές προς O} \quad : \quad H_2\ell\sin\phi - H_1\ell\cos\phi + W_1\ell\cos\phi = 0 \tag{10.139}$$

Αντικαθιστώντας τα T_1, T_2 με τα ίσα τους στις (10.139) και απαλείφοντας τα H_1, H_2 ευρίσκουμε την παρακάτω μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$C_1\dot{\phi}^2 + C_2\ddot{\phi} + C_3 = 0 \tag{10.140}$$

όπου

$$C_1 = m_1(\tan\phi + \mu)\cos\phi - m_2(1 - \mu\tan\phi)\sin\phi$$
$$C_2 = m_1(\tan\phi + \mu)\sin\phi + m_2(1 - \mu\tan\phi)\cos\phi$$
$$C_3 = \frac{g}{\ell}[(1 - \mu\tan\phi)(m_1 + m_2) - m_1(1 + \mu^2)]$$

Η εξίσωση (10.140) αποτελεί την διαφορική εξίσωση της κίνησης του συστήματος. Η θέση του συστήματος είναι τελείως ορισμένη από την γωνία $\phi = \phi(t)$. Γιά $\mu = 0$, δηλαδή στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή, η εξίσωση (10.140) παίρνει την μορφή

$$(m_1 - m_2)\sin\phi\cos\phi\,\dot{\phi}^2 + (m_1\sin^2\phi + m_2\cos^2\phi)\,\ddot{\phi} + m_2\frac{g}{\ell}\cos\phi = 0\,.$$

με αρχικές συνθήκες του προβλήματος που είναι γιά $t = 0$, $\phi = \phi_0$ και $\dot{\phi} = 0$.

Όταν καθορισθεί η συνάρτηση $\phi = \phi(t)$ από την λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης, τότε οι H_1, H_2 ευρίσκονται από τους παρακάτω τύπους

$$H_1 = \frac{-\mu m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{y}_2 + (m_1+m_2)g}{1+\mu^2}, \quad H_2 = \frac{m_1\ddot{x}_1 + \mu m_2\ddot{y}_2 + \mu(m_1+m_2)g}{1+\mu^2}. \tag{10.141}$$

Τώρα, γιά την τάση S εξετάζουμε την ισορροπία ενός μόνο σημείου, πχ. του A_1, δηλαδή

$$-T_1 + S\cos\phi - m_1\ddot{x}_1 = 0, \tag{10.142}$$

από την οποία προκύπτει αμέσως η ζητούμενη τάση.

Γιά την ολοκλήρωση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης, πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της με $2\dot{\phi}$ και, μετά την εκτέλεση πράξεων, ευρίσκουμε

$$[(m_1\sin\phi + m_2\cos\phi)\dot{\phi}^2]^{\cdot} + 2m_2\frac{g}{\ell}\frac{d}{dt}\sin\phi = 0,$$

ή με βάση τις αρχικές συνθήκες

$$(m_1\sin^2\phi + m_2\cos^2\phi)\dot{\phi}^2 + 2m_2\frac{g}{\ell}\sin\phi = 2m_2\frac{g}{\ell}\sin\phi_0$$

Επειδή γιά $dt > 0$ είναι $d\phi < 0$ έχουμε

$$dt = -\left(\frac{\ell}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{m_1\sin^2\phi + m_2\cos^2\phi}{m_2(\sin\phi_0 - \sin\phi)}\right\}^{\frac{1}{2}} d\phi. \tag{10.143}$$

Η (10.143) είναι υπερελλειπτικό ολοκλήρωμα και μπορεί να υπολογισθεί βάσει πινάκων.