

03/03/2021

# ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ
2. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
3. ΣΥΝΘΕΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΩΝ
4. ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΑΝ ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ
5. ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΟΒΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ
6. ΟΡΘΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ
7. ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ
8. ΘΕΩΡΗΜΑ Euler – D' Alembert
9. ΑΠΟΛΥΤΗ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
10. ΘΕΩΡΗΜΑ CORIOLIS
11. ΑΠΟΛΥΤΗ, ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ (CORIOLIS) ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

## ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

2.1

- Στερεό σώμα: Ένα σύστημα υλικών σφαιρών των οποίων οι σχετικές αποστάσεις παραμένουν αμετάβλητες καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης
- Καθορισμός θέσης: - Γίνεται με χρήση ενός συστήματος αναφοράς συνήθως καρτεσιανό, θέση της διαμορφωτικής ακτίνας  $OA = r(t) = r$ .

- Αν γνωρίζουμε ότι  $t$  χρονικά στιγμή τις θέσεις 3 σφαιρών  $A_1, A_2, A_3$  που δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία  $\Rightarrow$  καθορίζουμε την θέση του στερεού  $\Rightarrow$  9 παράμετροι

Επειδή  $\exists$  σχέσεις μεταξύ των 9 παραμέτρων που επιβάλλουν την σταθερότητα των αποστάσεων ανά δύο των σφαιρών

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$$

$$\begin{cases} (r_2 - r_1)^2 = (A_1 A_2)^2 = \sigma_{12} \\ (r_3 - r_2)^2 = (A_2 A_3)^2 = \sigma_{23} \\ (r_3 - r_1)^2 = (A_1 A_3)^2 = \sigma_{13} \end{cases} \parallel \rightarrow \begin{array}{l} \text{Μειώνεται} \\ \text{επιβάρυνση} \\ \text{αριθμού} \end{array} \quad (1)$$

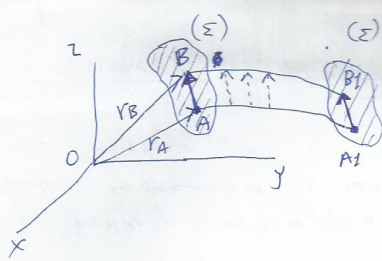
$$r = r(x, y, z)$$

Από 9 παραμ  $\rightarrow$  6 παραμ + σχέσεις  
 $\downarrow$   
 γίνονται βαθμ. οι εξισώσεις

2.2

Μιγαδική ή μεταφορική κίνηση

- Όταν κινείται έτσι ώστε οποιαδήποτε διαμόρφωσή του να διατηρείται ίση (ίδιο  $U$  και  $\mathcal{R}$ )
- Δεν πρέπει να συγχέεται με την ευθύγραμμη



$$v_B = v_A + \omega \times r_{AB} \quad (2)$$

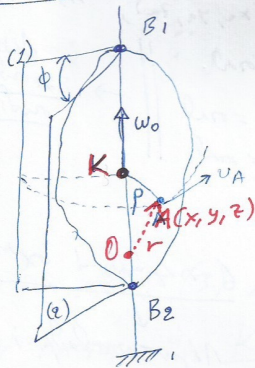
Οι τροχιές των A, B είναι οι αψίδες και οφείλονται στον τριγωνισμό που υπάρχει ανάμεσα τους.

Από (2)  $\Rightarrow v_B = v_A + \omega \times r_{AB}$   
 $\gamma_B = \gamma_A + \omega \times r_{AB}$

Καθώς τα A, B είναι τυχαία σημεία  $\Rightarrow \vec{v}, \vec{\gamma}$  είναι ομογενή  $\forall t$ .

Επομένως η μεταβατική κίνηση του στερεού σώματος καθορίζεται πλήρως με την κίνηση ενός υλικού σημείου.

### 2.3 Περιστροφική Κίνηση



- Αν 2 σημεία B1, B2 του στερεού σώματος παραμένουν ακίνητα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, το σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα B1B2 (άξονας περιστροφής).

- Ακόμη η απόσταση 2 σημείων ενός στερεού δεν μεταβάλλεται  $\Rightarrow$  όλα τα σημεία του ίδιου στερεού κινούνται ακίνητα. ενώ η τροχιά κάθε άλλου σημείου είναι περιφέρεια κύκλου.

A. Κίνηση του σώματος ως συνόλου.

Θεωρούμε 2 επίπεδα ω(1) = σταθ. το (α) που περιστρέφεται γύρω από το σώμα.

► Η θέση του σώματος  $\forall t$  καθορίζεται πλήρως με την προσεκτικότερη γνώση φ, (γωνία περιστροφής).

$$\phi = \phi(t)$$

Καθότι  $\frac{d\phi}{dt}$  για ταχύτητα

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

(3)

- Θυμάται ότι  $\omega > 0$  όταν η περιστροφή γίνεται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

- Αν θυμάται το βαν. διάνυσμα  $\vec{\omega}_0$  τότε:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0 = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Το διάνυσμα  $\vec{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{\omega}_0) = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 = \epsilon \vec{\omega}_0$

Καθότι για επιτάχυνση την στιγμή  $t$ .  
Το μέτρο του διανύσματος  $\epsilon$  δίνεται ποσοδικά από τον τύπο

$$\epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \quad (4)$$

■ Αν  $\omega = \sigma \omega_0 \Rightarrow$  η περιστροφική κίνηση = Ομοιόμορφη (σταθερή) αύξηση.

Αν  $t=0$   $\epsilon = \sigma \omega_0$  έχουμε για  $t=0$ ,  $\phi=0$  και  $\omega = \omega_0$  τότε

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \epsilon \cdot dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \epsilon t$$
$$\phi = \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}$$

■ Αν  $\omega < 0 \Rightarrow$  περιστροφή = Ομοιόμορφη επιβραδυνόμενη.

■ Αν σε χρόνο  $dt$  το σφαιρίδιο κινείται από  $A$  σε  $A + dA$ , δηλαδή κινείται από  $A$  σε  $A + dA$ , δηλαδή κινείται από  $A$  σε  $A + dA$ .

$$dS = \rho \cdot d\phi \quad (5)$$

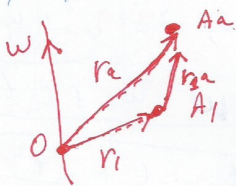
Τότε  $v_A = \frac{dS}{dt} = \rho \frac{d\phi}{dt} = \rho \cdot \omega \Rightarrow v_A = \rho \cdot \omega \quad (6)$

ενώ κεντρομόλος  $\perp$  στο επίπεδο  $(\vec{\omega}, \vec{r}_A = \rho)$

έτσι ώστε το σύστημα  $(\vec{\omega}, \rho, v_A)$  να είναι δεξιόστροφo. Συνεπώς

$$v_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (7)$$

■ Έστω  $A_1, A_2$  2 σφαιρίδια ενός στερεού που περιστρέφεται με γων. ταχύτητα  $\vec{\omega}$ .



Τότε οι ταχύτητες των δύο σφαιριδίων  $A_1, A_2$  σύμφωνα με την (7) θα είναι:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1, \quad \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{12} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{12} \quad (8) \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

λόγος των  $\rho$  βγαίνει ότι η διαφορά  $\boxed{-5-}$   
 των ταχυτήτων εφάρμοξε μόνο στο  $\underline{\underline{\vec{\omega}}}$

Επειδή  $\omega = \eta$  ίδια ή ουσία του αερίου ουσία

$$\Rightarrow \frac{v_1 = \rho_1 \omega}{v_2 = \rho_2 \omega} \Rightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}} \Rightarrow \text{πίεση τα } v$$

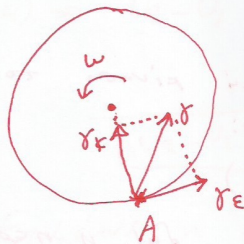
διάρρογο ή  
 αν ανίσταται  
 από τον άξονα  $\rho_1$ .

$$\gamma_E = \dot{v}_A = \rho \dot{\omega} = \rho \epsilon$$

$$\gamma_K = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\rho^2 \omega^2}{\rho} = \rho \omega^2$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2} = \rho (\epsilon^2 + \omega^4)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma = \rho (\epsilon^2 + \omega^4)^{1/2}} \quad (9)$$

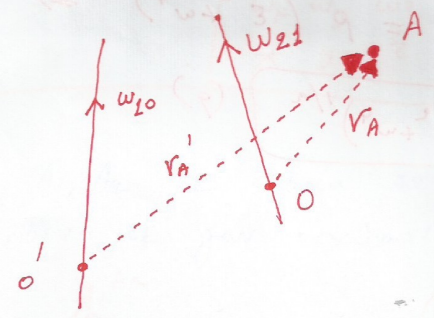


2.4 Σύνδεση Περιστροφών

■ Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα  $\Sigma_2$  που περιστρέφεται ως προς άξονα  $\Sigma_1$  περί άξονα  $\Gamma$  με γων. ταχύτητα  $\omega_{21}$

Καί το σώμα  $\Sigma_1$  συμπαρασύρει και το  $\Sigma_2$  καί των  $\Gamma$  περιστρεφόμενο συγχρόως ως προς σταθερό σώμα  $\Sigma_0$  (σύνθετα άξονα) περί των άξονα  $\Gamma'$  με γων. ταχύτητα  $\omega_{10}$ .

Ζητούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα  $v$  τυχαίου σημείου  $A$  του στερεού  $\Sigma_2$  ως προς το σταθερό σώμα  $\Sigma_0$ .



- Αν  $\exists$  μόνο η περιστροφική κίνηση του  $\Sigma_2$  η ταχύτητα του  $A$  θα ήταν:

$$\omega_{21} \times r_A \quad (2.4.1)$$

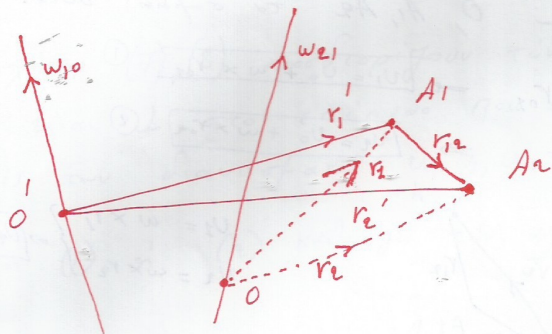
- Αν  $\exists$  μόνο η δεύτερη κίνηση, δηλ. η περιστροφή του  $\Sigma_1$  καί των άξονα  $\Gamma$  ως προς το σταθερό σώμα  $\Sigma_0$  η ταχύτητα του  $A$  θα ήταν

$$\omega_{10} \times r_A' \quad (2.4.2)$$



Επειδή όπως οι συνιστώσες ταχύτητας των  $\underline{\Gamma}$ -  
 επιπέδων  $\lambda$  προκύπτουν διανυσματικά, η ολική ταχύτητα  
 $U$  του  $A$  ως προς το  $\Sigma_0$  είναι

$$U_A = \omega_{21} \times r_A + \omega_{10} \times r'_A \quad (2.4.3)$$



Για 2 επιπέδα  $A_1, A_2$  ισχύουν οι σχέσεις (από 2.4.3)

$$U_1 = \omega_{21} \times r_1 + \omega_{10} \times r'_1 \quad (2.4.4)$$

$$U_2 = \omega_{21} \times r_2 + \omega_{10} \times r'_2$$

$$\text{Από (2.4.4)} \Rightarrow U_2 - U_1 = \omega_{21} \times (r_2 - r_1) + \omega_{10} (r'_2 - r'_1) \\ = \omega_{21} \times r_{12} + \omega_{10} r_{12}$$

$$\boxed{U_2 - U_1 = (\omega_{21} + \omega_{10}) \times r_{12}} \quad (2.4.5)$$

$\omega = \text{γωνιακή ταχύτητα}$

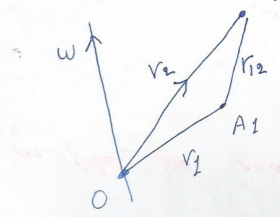
► Επομένως η διαφορά ταχυτήτων 2 επιπέδων  
 είναι ίση με ευέιγη που θα προέκυπτε αν το  
 στερεό σώμα  $\Sigma_2$  περιστρεφόταν περί ενός άξονα  
 με γωνιακή ταχύτητα ίση με το διανυσματικό  
 άθροισμα  $\omega_{21} + \omega_{10}$  των γωνιακών ταχυτήτων  
 των συνιστωσών περιστροφών.

**2.7 ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΑΝ ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ**

■ Η κίνηση ενός στερεού καθορίζεται πλήρως από την κίνηση 3 σημείων που δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Έστω  $O, A_1, A_2$  τα σημεία αυτά. Τότε:

$$v_1 - v_0 = \omega \times r_{01} \Rightarrow v_1 = v_0 + \omega \times r_{01} \quad (1)$$

$$v_2 - v_0 = \omega \times r_{02} \Rightarrow v_2 = v_0 + \omega \times r_{02} \quad (2)$$



$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \omega \times r_1 \\ v_2 &= \omega \times r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_2 - v_1 = \omega \times r_{12}$$

Λόγω της σταθερότητας απόστασης των  $A_1, A_2$  από το  $O$  (σφαιρική κίνηση)

$$\left. \begin{aligned} (r_1 - r_0)^2 &= \sigma^2 \quad (3) \\ (r_2 - r_0)^2 &= \sigma^2 \quad (4) \end{aligned} \right\}$$

Παραγωγίζοντας τις τελευταίες εξισώσεις ως προς  $t$  βρίσκουμε

$$2 \underbrace{(r_1 - r_0)}_{r_{01}} \cdot \underbrace{(\dot{r}_1 - \dot{r}_0)}_{v_1 - v_0} = 0 \Rightarrow (v_1 - v_0) \cdot r_{01} = 0 \quad (5)$$

$$2 \underbrace{(r_2 - r_0)}_{r_{02}} \cdot \underbrace{(\dot{r}_2 - \dot{r}_0)}_{v_2 - v_0} = 0 \Rightarrow (v_2 - v_0) \cdot r_{02} = 0 \quad (6)$$

• Από (1), (2)  $\Rightarrow \left. \begin{aligned} v_1 - v_0 &\perp (\omega, r_{01}) \\ v_2 - v_0 &\perp (\omega, r_{02}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (v_1 - v_0) \cdot \omega &= 0 \quad (7) \\ \text{και} \\ (v_2 - v_0) \cdot \omega &= 0 \quad (8) \end{aligned} \right\}$

• Από (5), (6)  $\Rightarrow \left. \begin{aligned} v_1 - v_0 &\perp r_{01} \\ v_2 - v_0 &\perp r_{02} \end{aligned} \right\}$

νό (1), (2) αφαίρεται τις κατά μέλη  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + \omega \times r_{01} \\ v_2 &= v_0 + \omega \times r_{02} \end{aligned} \quad \parallel \Rightarrow \quad v_2 - v_1 = \omega \times (r_{02} - r_{01}) \rightarrow$$

$$\boxed{v_2 - v_1 = \omega \times r_{12}} \quad (9)$$

Οι σχέσεις (7), (8) προσδιορίζουν την κατεύθυνση του  $\vec{\omega}$  που είναι  $\perp$  στο επίπεδο που ορίζεται από τις άξεις των διανυσμάτων  $v_0, v_1, v_2$

ενώ η (1) ή (2) καθορίζει την αριθμητική τιμή του  $\vec{\omega}$

Για το τυχαίο σημείο  $A$  του σώματος, με σημείο αναφοράς το  $O$ , ισχύει η παρακάτω σχέση

$$v_A - v_O = \omega \times r_{OA} \Rightarrow \boxed{v_A = v_O + \omega \times r_{OA}} \quad (10)$$

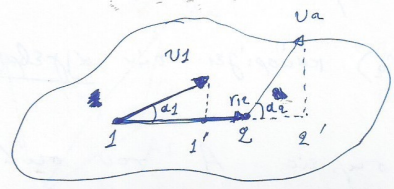
### ΣΥΝΕΠΕΣ

Μετά τον καθορισμό του  $\omega$ , η εξίσωση (10) καθορίζει ότι η κίνηση κάθε σημείου  $A$  του στερεού σώματος, συντίθεται από μια μεταφορά με ταχύτητα  $v_0$  και μια περιστροφή η επί άξονα που διέρχεται από το σημείο  $O$  με γων. ταχύτητα  $\omega$ .

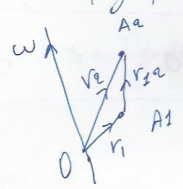
**2.9.2** ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΟΒΟΛΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ  
ΟΡΘΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

► Οι προβολές των ταχυτήτων 2 σημείων της τομής ενός στερεού πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά, είναι ίσες.

— Ας θεωρήσουμε την επίπεδη τομή του στερεού του παρακάτω σχήματος



Γνωρίζουμε ότι:



$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \omega \times r_1 \\ v_2 &= \omega \times r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{v_2 - v_1 = \omega \times r_{12}} \Rightarrow$$

$$(v_2 - v_1) \cdot r_{12} = (\omega \times r_{12}) \cdot r_{12} \Rightarrow$$

$$v_2 \cdot r_{12} = v_1 \cdot r_{12} \Rightarrow$$

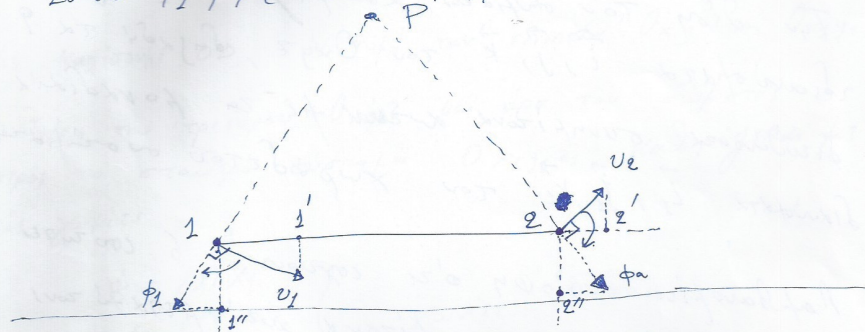
$$\boxed{v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2}$$

■ Με το θεώρημα αυτό μπορούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα κάθε σημείου του σώματος, αν η διεύθυνση της κίνησης του σημείου αυτού και η ταχύτητα ενός άλλου σημείου είναι γνωστές.

- Για την γραμμική γύση προβλημάτων κίνησης γίνεται συνήθως χρήση της γεωμετρίας "ορθής" ή "καθαρής" ταχύτητας.

Έτσι κατά την επίπεδη κίνηση στερεού σώματος είναι χρήσιμο αντί των παραβατικών ταχυτήτων των σημείων να χρησιμοποιούμε τις ταχύτητες που προέρχονται από ομόφορη περιστροφή των παραβατικών κατά γωνία  $\frac{\pi}{2}$ .

Έστω  $\phi_1, \phi_2$  οι εσφαλμένες ταχύτητες των 1, 2 σημείων



Τα τρίγωνα  $\triangle 1\phi_1 1'' = \triangle 1v_1 1'$  και  $\triangle 2\phi_2 2'' = \triangle 2v_2 2'$   $\Rightarrow$   $11'' = 11'$  και  $22'' = 22'$   $\Rightarrow$   $11'' = 22''$

Από το θεώρημα ορθών ταχυτήτων  $11' = 22'$

ΑΡΑ η ευθεία  $\phi_1\phi_2 \parallel 12$

■ Το σημείο (P) τομή των  $1\phi_1$  και  $2\phi_2$  είναι το συνηθισμένο κέντρο περιστροφής.

ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ

► Για την βεβαιότητα της κίνησης <sup>του σώματος</sup> Δευρά τρισορθογώνιο σύστημα Οxyz με αρχή το σημείο αυτό.  
(σφαιρόδεδτο σύστημα)

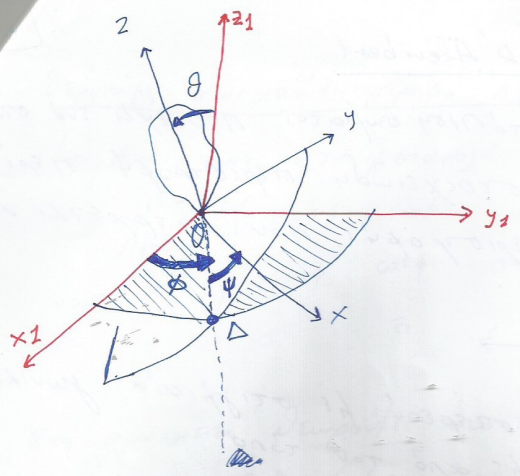
- Την κίνηση του σώματος καθώς και του μαγνητικού σφαιρόδεδτου συστήματος αναγράφουμε σε σταθερά τρισορθογώνιο σύστημα Οx<sub>1</sub>y<sub>1</sub>z<sub>1</sub> (χωρόδεδτο σύστημα)

- Την δίεση του σώματος καθορίζουν τα βασικά διανύσματα  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  του Οxyz, δηλαδή τα 9 διευθετικά συντεταγμένα αξόνων με τα βασικά διανύσματα  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  του χωρόδεδτου συστήματος

- Παράθεση σύνθεσης σημείων 6 σώματων του συστήματος τα συντεταγμένα αξόνων μεταξύ τους είναι 3 ανεξάρτητα παράθετα για να

καθορίσουν την δίεση του σώματος.  $\Rightarrow$  3 βασικοί επιπέδων

► Ο Euler εισήγαγε αν'ευθείας σύνθετα 3 βασικά παράθετα, των "γωνιών Euler"



- Ας καθίσουμε  $O\Delta$  τὴν τομή των επιπέδων  $Oxy$  και  $Ox_1y_1$
- Η θέση του τριέδρου  $Oxyz$  και ἄρα του σφαιροῦ ως πρὸς τὸ σταθερὸ σύστημα  $Ox_1y_1z_1$  καθορίζεται φε τὲς γωνίες

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \Delta O X_1 \\ \psi &= \widehat{x O \Delta} \\ \theta &= \widehat{z_1 O z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{γωνίες Euler}$$

- Μεταβολὴ τῆς γωνίας  $\psi$  σημαίνει: Περιστροφή γερὶ εὐθείᾳ  $Oz$
- -||-  $\phi$  : -||-  $Oz_1$
- -||-  $\theta$  : -||-  $O\Delta$

Για να καθορισθῆ ἡ κίνηση του σφαιροῦ πρέπει να εἶναι γνωστὲς οἱ συναρτήσεις

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(t) \\ \phi &= \phi(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Ἐπίλυση κίνηση του σφαιροῦ πρὸς σταθερὸ σύστημα}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Euler - D'Alembert

Κάθε στοιχειώδη βρετατότητα σώματος που έχει ένα σταθερό σημείο ισοδυναμεί με στοιχειώδη περιστροφή περί συγκεκριμένο άξονα περιστροφής που διερχεται από το σημείο αυτό.



" Την περιστροφή του στερεού με συγκεκριμένα γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  βρίσκουμε από τον τύπο

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \vec{k}_1 + \frac{d\theta}{dt} \vec{s}_0 + \frac{d\psi}{dt} \vec{k}$$

αντιδίεση με βάση τις γωνίες Euler, από

- (i) για περιστροφή περί του άξονα  $\vec{k}_1$  με γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\phi} (= \frac{d\phi}{dt})$
- (ii) -||-  $\vec{s}_0$   $\dot{\theta}$
- (iii) -||-  $\vec{k}$   $\dot{\psi}$

Στο συγκεκριμένο σύστημα  $Oxyz$

$$\omega = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

— Είναι σημαντικό να καθοριστούν οι εξισώσεις που επιγράφουν τις  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  με τις  $\theta, \phi, \psi$  ως  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ .



Οι σχέσεις αυτές δίνονται κινηματικές εξισώσεις Euler.



A. Δεσφύφτε σφωχαιώδη σφροφί ηφί άζονε 0z1

↳ Αυτφσφωφί σε φφισφφί τωφ γωνφε φ

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B. Στη σφνφίενα Δεσφύφτε σφωχαιώδη σφροφί ηφί τον άζονε 0Δ (φφισφφί τωφ θ)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Γ. Σφωχαιώδη σφροφί ηφί ηφί τον άζονε 0z

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΤΟΤΕ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

↑  
Οφ σφνφφφφίφφ  
σφω σφφφφφφφφφφ  
σφσφφφφ

↑  
Οφ σφνφφφφφίφφφφ  
φφφφφφφφφφ σφσφφφφ

$$A = A_3 A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ομοίως

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (A_3 A_2 A_1)^{-1} = A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} = A_1^T A_2^T A_3^T = (A_3 A_2 A_1)^T$$

στο Συστήματα συντεταγμένων

Τότε

$$\omega_x = \sin \psi \sin \vartheta \frac{d\phi}{dt} + \cos \psi \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\omega_y = \sin \vartheta \cos \psi \frac{d\phi}{dt} - \sin \psi \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\omega_z = \cos \vartheta \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}$$

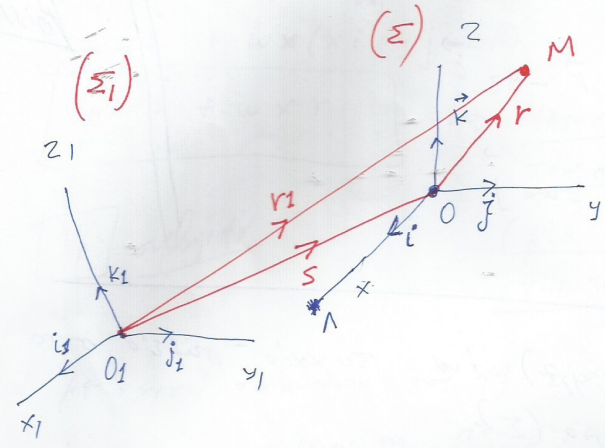
ΤΥΠΟΙ  
ΤΟΥ

EULER

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Coriolis

A. Απόλυτη, σχετική και φαινομενική ταχύτητα



Θεωρούμε το σύστημα  $(\Sigma_1)$  σταθερό και το σύστημα  $(\Sigma)$  κινητό ως και το  $(\Sigma_1)$  ως σημείο νόθο κίνηση

Τότε:

- Μία κίνηση που αναγράφεται στο  $\Sigma_1$  γίνεται απόλυτη
- ενώ η ίδια κίνηση στο  $\Sigma$  -||- σχετική

Τα  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  παρακωλύονται να κινούνται του  $\Sigma$  του οποίου η γωνιακή ταχύτητα προς  $(\Sigma_1)$  είναι  $\omega = \omega(t)$

$$\dot{i} = \omega \wedge i = v_{\perp}$$

Ομοίως  $\frac{dj}{dt} = \omega \wedge j$

$$\frac{di}{dt} = \dot{i} = v_{\perp} = \omega \wedge r_{\perp} = \omega \wedge i$$

$$\frac{dk}{dt} = \omega \wedge k$$

Αν  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  στο κινυτό σύστημα  $(\Sigma)$

τότε

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k}$$

Εξισώσεις  
Poisson

οπότε  $\frac{d\vec{j}}{dt} = \omega_x \vec{k} - \omega_z \vec{i}$

και  $\frac{d\vec{k}}{dt} = \omega_y \vec{i} - \omega_x \vec{j}$

\* Έστω  $M(x, y, z)$  ένα τυχαίο σημείο στο κινυτό σύστημα  $(\Sigma)$ .

Αν  $OM = r$   
 $O_1M = r_1$   
 $O_1O = s$

τότε θα ισχύουν οι εξής (ανυσματικές) εξισώσεις

①  $r_1 = s + r$

②  $\vec{r}_1 = \vec{s} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

③  $\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{s}} + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + 2(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}})$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο  $m$  που στο  $(\Sigma)$  έχει τις ίδιες συντεταγμένες με το  $M$ , αλλά σε αντίθεση με το  $M$  τις διατηρεί αμετακίνητες.

Την ταχύτητα του  $m$  στο σταθερό σύστημα  $(\Sigma)$  την βρίσκουμε με άθρο των  $\odot$

$$V_m = \dot{s} + x \begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{j} \\ \dot{k} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \dot{j} \\ \dot{k} \\ \dot{i} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{i} \\ \dot{j} \end{pmatrix}$$

$$= \dot{s} + \omega \times (xi + yj + zk)$$

$$V_m = \dot{s} + \omega \times r$$

Μεταχική ταχύτητα του M

$$V_M \text{ απόδοσης}$$

(πίε άνω τις συνιστώσες της ταχύτητάς του)

■ Η μεταχική ταχύτητα του M είναι άθρο των ταχύτητα του σημείου m που ανήκουν με το M των δευροβάθμια στιγμή, δυναμική, η ταχύτητα με τις οποίες το M φέρει σαιν κίνηση του  $(\Sigma)$ .

■ Η άλλη συνιστώσα της ταχύτητας  $\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt}$  είναι σχετική ταχύτητα του M και απόδοσης με  $v_s$ .

► Η  $v_s$  οφείλεται αποκλειστικά σαιν μεταβολή της θέσης  $(x, y, z)$  του M ως από το  $(\Sigma)$  με τα  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \sigma$  σταθερά.

Διότι ταχύτητα  $\rightarrow V_a = \dot{r}_i = v_M + v_s$

2.13.9

ΑΜΟΛΥΤΗ, ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΑΙ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ (ή Coriolis) ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Από τιν (3) φαίνεται τιν φυσική επιτάχυνση (όταν  $x, y, z = σταθ$ )

$$\textcircled{3}: \ddot{\mathbf{r}}_s = \underbrace{\ddot{s} + x \ddot{i} + y \ddot{j} + z \ddot{k}}_{\gamma_H} + \underbrace{\dot{x} \dot{i} + \dot{y} \dot{j} + \dot{z} \dot{k}}_{\gamma_C} + 2 \underbrace{(\dot{x} \dot{i} + \dot{y} \dot{j} + \dot{z} \dot{k})}_{\gamma_C}$$

$$\gamma_H = \ddot{s} + x \ddot{i} + y \ddot{j} + z \ddot{k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Αποτελεί τιν συνιστώσα} \\ \text{της επιτάχυνσης με τιν} \\ \text{ομοιά το } M \text{ πληθαίνει στην} \\ \text{κίνηση του } (S) \end{array} \right)$$

$$\gamma_C = \dot{x} \dot{i} + \dot{y} \dot{j} + \dot{z} \dot{k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Αποτελεί τιν συνιστώσα} \\ \text{της επιτάχυνσης που οφείνεται} \\ \text{στην περιστροφή των} \\ \text{αξόνων των } M(x, y, z) \text{ ή από τιν} \\ \text{φύσι σταθμά τα } s, i, j, k \end{array} \right)$$

Από τιν σχέση (3) φαίνεται είν τρίτο όρο που καλείται σφαιρωματική ή Κοριόλις επιτάχυνση του M

$$\gamma_C = 2(\dot{x} \dot{i} + \dot{y} \dot{j} + \dot{z} \dot{k})$$

Με βάση τιν σχέσεις Poisson ή  $\gamma_C$  κατατάξτε

$$\gamma_C = 2[\omega \times (\dot{x} \dot{i} + \dot{y} \dot{j} + \dot{z} \dot{k})] = 2(\omega \times v_C) \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma_C = 2(\omega \times v_C)}$$

## 2.1 Γενικά

Το απολύτως στερεό σώμα ή "στερεό σώμα" αποτελείται από σύστημα υλικών σημείων των οποίων οι σχετικές αποστάσεις παραμένουν αμετάβλητες καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης. Ο καθορισμός της κίνησης ενός στερεού σώματος, και επομένως της θέσης του σε κάθε χρονική στιγμή, γίνεται με την χρήση συστήματος αναφοράς, συνήθως καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$ . Στο σύστημα τούτο καθορίζεται η θέση κάθε σημείου  $A$  του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή μέσω της διανυσματικής ακτίνας  $OA = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$ . Λαμβανομένου υπόψη ότι στο στερεό σώμα οι αποστάσεις των σημείων μεταξύ τους είναι ορισμένες, αρκεί να γνωρίζουμε σε κάθε χρονική στιγμή τις θέσεις τριών σημείων του  $A_1, A_2, A_3$  που δεν κείνται πάνω στην ίδια ευθεία, ούτως ώστε να καθορίσουμε την θέση του. Επομένως, η θέση του στερεού στον χώρο προσδιορίζεται πλήρως από εννέα (9) παραμέτρους (συντεταγμένες των τριών σημείων). Επειδή όμως μεταξύ των εννέα αυτών συντεταγμένων υφίστανται τρεις (3) σχέσεις, που εκφράζουν την σταθερότητα των αποστάσεων ανά δύο των σημείων  $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$ , δηλαδή

$$(r_2 - r_1)^2 = (A_1 A_2)^2 = \text{σταθ.},$$

$$(r_3 - r_2)^2 = (A_2 A_3)^2 = \text{σταθ.},$$

$$(r_3 - r_1)^2 = (A_1 A_3)^2 = \text{σταθ.},$$

(2.1)

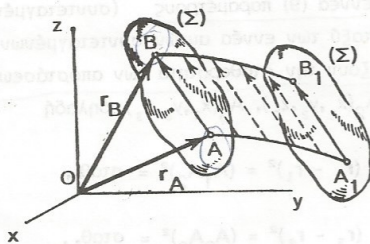
$$\mathbf{r} = (x, y, z),$$

έπεται ότι η θέση του στερεού σώματος καθορίζεται όταν δοθούν έξ (6) μόνο συντεταγμένες ή έξ (6) ανεξάρτητες σχέσεις μεταξύ τους. Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι οι τρεις εξισώσεις (2.1) μειώνουν από εννέα σε έξ τις ανεξάρτητες παραμέτρους οι οποίες καθορίζουν την θέση του στερεού στον χώρο. Οι τρεις εξισώσεις (2.1) λέγονται εξισώσεις συνδέσμων, ενώ οι έξ ανεξάρτητες δυνατότητες κίνησης που έχει το στερεό λέγονται βαθμοί ελευθερίας κίνησης.

## 2.2 Μεταβατική ή Μεταφορική Κίνηση

Λέμε ότι το σώμα έχει μεταβατική κίνηση, όταν κινείται έτσι ώστε οιοδήποτε διάνυσμά του να διατηρείται ίσο. Κατά την μεταβατική κίνηση ευθεία γραμμή του σώματος παραμένει συνεχώς παράλληλη προς εαυτή. Η μεταβατική κίνηση δεν πρέπει να συγχέεται με την ευθύγραμμη. Στην πρώτη όλα τα σημεία του σώματος κινούνται σε ίσες τροχιές (καμπύλες ή ευθείες) και έχουν σε κάθε χρονική στιγμή την αυτή ταχύτητα  $\mathbf{v}$  και την αυτή επιτάχυνση  $\boldsymbol{\gamma}$ . Πράγματι, ας θεωρήσουμε στερεό σώμα  $\Sigma$  (αναφερόμενο σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$ ) και δύο τυχόντα σημεία του  $A$  και  $B$ , που οι θέσεις τους σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  καθορίζονται με τις διανυσματικές ακτίνες  $OA = \mathbf{r}_A$  και  $OB = \mathbf{r}_B$  (Σχ. 2.1). Τότε είναι

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{AB}. \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.1: Μεταβατική κίνηση στερεού στον χώρο.

Το μήκος  $AB$  είναι σταθερό λόγω του στερεού σώματος, αλλά και η διεύθυνση



AB είναι σταθερή λόγω της μεταβατικής κίνησης. Έτσι, οι τροχιές των A και B είναι οι αυτές και συμπίπτουν όταν τεθεί η μία πάνω στην άλλη. Από τις εξισώσεις (2.2) παίρνουμε

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{v}_A, \quad \boldsymbol{\gamma}_B = \dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A = \boldsymbol{\gamma}_A. \quad (2.3)$$

Καθώς τα A και B είναι τυχόντα σημεία προκύπτει ότι οι τροχιές, ταχύτητες και επιταχύνσεις όλων των σημείων του σώματος είναι οι ίδιες σε κάθε χρονική στιγμή. Επομένως, η μεταβατική κίνηση του στερεού σώματος καθορίζεται πλήρως με την κίνηση ενός υλικού σημείου. Η κοινή ταχύτητα  $\mathbf{v}$  και επιτάχυνση  $\boldsymbol{\gamma}$  όλων των σημείων του σώματος καλούνται στην μεταβατική κίνηση **μεταβατική ταχύτητα** και **μεταβατική επιτάχυνση** αντίστοιχα.

### 2.3 Περιστροφική Κίνηση

Αν δύο σημεία  $B_1$  και  $B_2$  του στερεού σώματος του σχήματος 2.2 παραμένουν ακίνητα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, η κίνηση λέγεται ως προς το σύστημα τούτο περιστροφική περί την ευθεία γραμμή  $B_1B_2$  ( άξονας περιστροφής ).

*Επίσημα*

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow d\phi = \omega \cdot dt$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha \cdot dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha \cdot dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow d\phi = (\omega_0 + \alpha t) dt \Rightarrow \phi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Σχήμα 2.2: Περιστροφική κίνηση στερεού περί άξονα.

$v_A = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\phi}{dt} = r \cdot \omega$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Αφού η απόσταση δύο σημείων του στερεού δεν μεταβάλλεται, είναι προφανές ότι στην περιστροφική κίνηση όλα τα σημεία του άξονα περιστροφής είναι

ακίνητα, ενώ η τροχιά κάθε άλλου από τα υπόλοιπα σημεία είναι περιφέρεια κύκλου, του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα και το κέντρο Κ κείται πάνω σ' αυτόν. Θα εξετάσουμε πρώτα την κίνηση του σώματος ως συνόλου και ύστερα την κίνηση καθενός σημείου του.

Γιά να καθορίσουμε την θέση ενός περιστρεφόμενου σώματος θεωρούμε δύο επίπεδα διερχόμενα από τον άξονα περιστροφής, το επίπεδο (1) που είναι σταθερό, και το επίπεδο (2) που περνάει από το σώμα και περιστρέφεται μαζί του. Η θέση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται πλήρως με την προσημασμένη γωνία  $\phi$  των δύο επιπέδων, που λέγεται γωνία περιστροφής του σώματος και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου από την σχέση

$$\phi = \phi(t) \quad (2.4)$$

Καλούμε μέτρο της γωνιακής ταχύτητας την χρονική στιγμή  $t$  τον λόγο

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad (2.5)$$

Το πρόσημο της  $\omega$  καθορίζει την διεύθυνση της περιστροφής και είναι  $\omega > 0$  όταν, για παρατηρητή πάνω στον άξονα  $B_1 B_2$  και παρατηρούντα από το  $B_1$ , η περιστροφή γίνεται αντίθετα των δεικτών του ωρολογίου (δεξιόστροφη φορά). Γιά να περιλάβουμε σε μία έκφραση στοιχείο που να προσδιορίζει συγχρόνως την θέση, την διεύθυνση και την φορά του άξονα περιστροφής, εισάγουμε το συγγραμμικό προς τον άξονα μοναδιαίο διάνυσμα  $\omega_0$ , κατευθυνόμενο όπως στο σχήμα 2.2. Τότε ορίζουμε γωνιακή ταχύτητα το διάνυσμα  $\omega$

$$\omega = \omega \omega_0 = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad (2.6)$$

όπου  $\omega$  παριστάνει το προαναφερθέν μέτρο. Σύμφωνα με τα παραπάνω η φορά της στροφής και το μοναδιαίο διάνυσμα  $\omega_0$  αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα. Το διάνυσμα

$$d\omega = \epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \omega_0) = \frac{d\omega}{dt} \omega_0 = \epsilon \omega_0 \quad (2.7)$$

καλεϊται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος την χρονική στιγμή  $t$ . Το μέτρο του διανύσματος  $\epsilon$  δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$\ddot{\phi} = \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \quad (2.8)$$

Αν η γωνιακή ταχύτητα αυξάνει, η περιστροφή είναι επιταχυνόμενη· άλλως, είναι επιβραδυνόμενη. Είναι εύκολο να δούμε ότι η περιστροφή είναι επιταχυνόμενη όταν τα  $\varepsilon$  και  $\omega$  είναι ομόσημα και επιβραδυνόμενη όταν είναι ετερόσημα. Αν  $\omega = \text{σταθ.}$ , η περιστροφική κίνηση λέγεται ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη. Έστω τώρα ότι με  $\varepsilon = \text{σταθερό}$  έχουμε για

$$t = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{και} \quad \omega = \omega_0$$

( $\omega_0$  παριστάνει την αρχική γωνιακή ταχύτητα). Τότε, αντί των (2.8), παίρνουμε

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt \rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t \rightarrow \phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (2.9)$$

Αν  $\omega > 0$  η περιστροφή είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη, άλλως ομοιόμορφα επιβραδυνόμενη.

Κατά την περιστροφή του σώματος το τυχόν σημείο A διατηρεί σταθερή απόσταση από τον άξονα περιστροφής και διαγράφει πάνω σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα περιφέρεια κύκλου ακτίνας  $\rho$  και κέντρου K (πάνω στον άξονα). Αν στον χρόνο  $dt$  το σώμα εκτελεί μία απειροστή στροφή  $d\phi$ , το A θα κάμει απειροστή μετακίνηση  $ds = \rho d\phi$  κατά μήκος της τροχιάς του (Σχ. 2.2).

Η ταχύτητα  $v_A$  του σημείου A έχει μέτρο

$$v_A = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\phi}{dt} = \rho \omega, \quad (2.10)$$

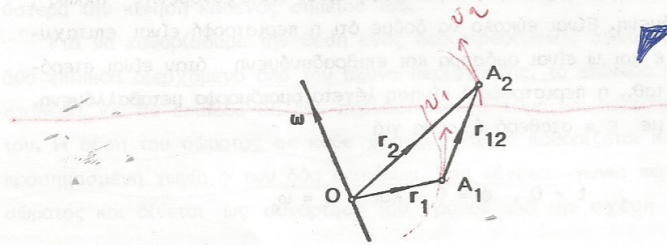
ενώ η κατεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο ( $\omega_0, \mathbf{KA} = \rho_A$ ) έτσι ώστε το σύστημα ( $\omega_0, \rho_A, v_A$ ) να είναι δεξιόστροφο. Συνεπώς, θέτουμε

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad (2.11)$$

όπου  $\vec{r}_A$  είναι η διανυσματική ακτίνα από το τυχαίο σημείο O του άξονα  $B_1B_2$  και  $x, y, z$  παριστούν τις συντεταγμένες του A στο απόλυτο σύστημα αναφοράς Oxyz. Η ταχύτητα  $v_A$  λέγεται γραμμική ή κυκλική ταχύτητα του A. Η εξίσωση (2.11) καθορίζει την ταχύτητα του σημείου A ως την στατική ροπή προς αυτό της  $\omega$ .

• Ας είναι τώρα δύο σημεία  $A_1$  και  $A_2$  του περιστρεφόμενου περί άξονα

στερεού με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  (Σχ. 2.3). Οι ταχύτητες  $u_1$  και  $u_2$  των δύο σημείων, σύμφωνα με την (2.11) και το σχήμα 2.3, είναι



Σχήμα 2.3: Συχετισμός δύο υλικών σημείων του εκ περιστροφής στερεού περί άξονα.

$$\vec{u}_1 = \omega \times \vec{r}_1, \quad \vec{u}_2 = \omega \times \vec{r}_2 \quad (2.12)$$

και συνεπώς δι' αφαιρέσεως κατά μέλη

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \omega \times \vec{r}_{12} \quad (2.13)$$

ή ισοδύναμα

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \omega \times \vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.14)$$

Από την σχέση (2.13) βλέπουμε ότι η διαφορά των ταχυτήτων δεν εξαρτάται από την ορισμένη θέση του άξονα περιστροφής, αλλά μόνο από το ελεύθερο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$ . Λαμβανομένου τώρα υπ' όψη ότι η  $\omega$  είναι η αυτή για όλα τα σημεία του σώματος σε μιά χρονική στιγμή  $t$ , προκύπτει, με βάση την (2.10), ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου είναι ανάλογο προς την απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή

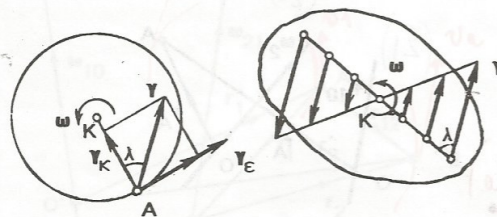
$$u_1 = \rho_1 \omega, \quad u_2 = \rho_2 \omega \rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (2.15)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου A καθορίζεται με βάση τις σχέσεις (1.20), (1.20a) και (2.10) ως εξής:

$$\gamma_{\epsilon} = \dot{v}_A = \rho \dot{\omega} = \rho \epsilon, \quad \gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\rho^2 \omega^2}{\rho} = \rho \omega^2, \quad (2.16)$$

$$\gamma = \rho (\epsilon^2 + \omega^4)^{\frac{1}{2}},$$

όπου  $\gamma_{\epsilon}$  είναι η εφαπτόμενη στην τροχιά επιτάχυνση (κατά την διεύθυνση της περιστροφής γιά επιταχυνόμενη κίνηση και αντίστροφα γιά επιβραδυνόμενη), η δε  $\gamma_{\kappa}$  είναι η κάθετη επιτάχυνση διευθυνόμενη πάντοτε κατά μήκος της ακτίνας  $\rho$  προς τον άξονα περιστροφής (Σχ. 2.4).



Σχήμα 2.4: Εφαπτομενική και κάθετη επιτάχυνση σημείου περιστρεφόμενου στερεού σώματος περί άξονα.

Η κλίση τώρα του διανύσματος  $\gamma$  προς την ακτίνα  $\rho$  της περιφέρειας που διαγράφει το A καθορίζεται μέσω της γωνίας

$$\lambda = \arctan \frac{|\gamma_{\epsilon}|}{\gamma_{\kappa}}, \quad (2.17)$$

ή, βάσει των (2.16)

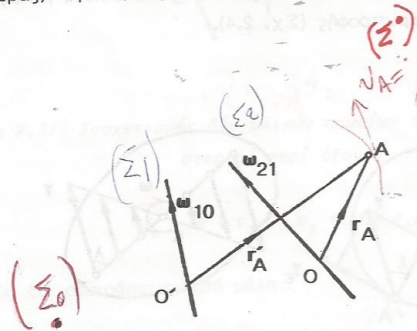
$$\lambda = \arctan \frac{|\epsilon|}{\omega^2}. \quad (2.18)$$

Επειδή σε κάθε χρονική στιγμή τα  $\epsilon$  και  $\omega$  είναι τα αυτά γιά όλα τα σημεία του σώματος, από τις (2.16) και (2.17) προκύπτει ότι οι επιταχύνσεις όλων των

σημείων του περιστρεφόμενου σώματος είναι ανάλογοι προς τις αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής και σχηματίζουν γωνία  $\lambda$  με τις ακτίνες των διαγραφόμενων από αυτά περιφερειών.

#### 2.4 Σύνθεση Περιστροφών

Θεωρήσουμε στερεό σώμα  $\Sigma_2$  περιστρεφόμενο ως προς άλλο  $\Sigma_1$  περί άξονα  $\Gamma$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_{21}$ , και το σώμα  $\Sigma_1$  συμπαρασύρον και το  $\Sigma_2$  και τον άξονα  $\Gamma$  περιστρεφόμενο συγχρόνως ως προς το σταθερό σώμα  $\Sigma_0$  (σύστημα αναφοράς) περί τον άξονα  $\Gamma'$  με μία μετοχική γωνιακή ταχύτητα  $\omega_{10}$  (Σχ. 2.5).



Σχήμα 2.5: Σύνθεση περιστροφών.

Ζητούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα  $v$  τυχόντος σημείου  $A$  του στερεού  $\Sigma_2$  ως προς το σταθερό στερεό  $\Sigma_0$ . Αν υπήρχε μόνο η περιστροφική κίνηση του  $\Sigma_2$ , η ταχύτητα του  $A$  θα ήταν

$$\omega_{21} \times r_A,$$

αν ~~δεν~~ υπήρχε μόνο η δεύτερη κίνηση, δηλαδή η περιστροφή του  $\Sigma_1$  (μαζί με το  $\Sigma_2$  και τον άξονα  $\Gamma$ ) ως προς το σταθερό σώμα  $\Sigma_0$  (έπαινε η σχετική κίνηση ως προς το  $\Sigma_1$ ), η ταχύτητα του  $A$  θα ήταν

$$\omega_{10} \times r_A.$$

Επειδή όμως οι συνιστώσες ταχύτητες των σημείων αθροίζονται διανυσματικά, η ολική ταχύτητα  $v$  του  $A$  ως προς το  $\Sigma_0$  είναι

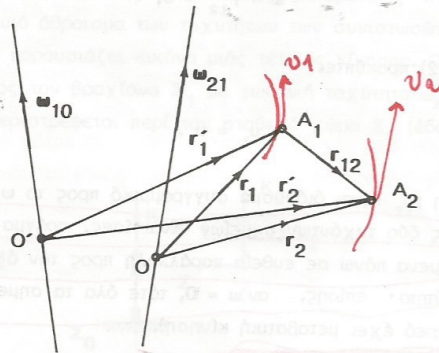
$$v_A = \omega_{21} \times r_A + \omega_{10} \times r'_A \quad (2.19)$$

Για δύο σημεία  $A_1, A_2$  (Σχ. 2.6) προφανώς ισχύουν

*μηνά να φέρει  
σε σφαιρικό*

$$v_1 = \omega_{21} \times r_1 + \omega_{10} \times r'_1 \quad (2.20)$$

$$v_2 = \omega_{21} \times r_2 + \omega_{10} \times r'_2$$



Σχήμα 2.6: Συσχετισμός δύο ολικών σημείων στερεού κατά την σύνθεση περιστροφών.

Από την εξίσωση (2.20) συνάγουμε

$$v_2 - v_1 = \omega_{21} \times (r_2 - r_1) + \omega_{10} \times (r'_2 - r'_1) = (\omega_{21} + \omega_{10}) \times r_{12} \quad (2.21)$$

Προκύπτει επομένως ότι η διαφορά ταχυτήτων δύο σημείων είναι ίση με εκείνη που θα προέκυπτε αν το στερεό σώμα  $\Sigma_2$  περιστρεφόταν περί ένα άξονα με γωνιακή ταχύτητα ίση προς το διανυσματικό άθροισμα  $\omega_{21} + \omega_{10}$  των γωνιακών ταχυτήτων των συνιστωσών περιστροφών.

Γενικότερα, για  $k$  συνεχείς περιστροφές του σώματος  $\Sigma_k$  προς  $\Sigma_{k-1}$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_{k,k-1}$ , του  $\Sigma_{k-1}$  προς το  $\Sigma_{k-2}$  με  $\omega_{k-1,k-2}, \dots$ , και του  $\Sigma_1$

προς το  $\Sigma_0$  με  $\omega_{10}$ , παίρνουμε

$$v_2 - v_1 = \omega \times r_{12} \quad (2.22)$$

όπου

$$\omega = \omega_{10} + \omega_{21} + \omega_{32} + \dots + \omega_{k,k-1}. \quad (2.23)$$

Το ελεύθερο διάνυσμα  $\omega$  λέγεται γωνιακή ταχύτητα του στερεού  $\Sigma_k$ . Παρατηρούμε ότι αν ισχύει

$$\omega \times r_{12} = 0,$$

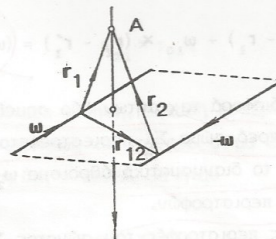
τότε από την (2.22) προκύπτει

$$v_1 = v_2. \quad (2.24)$$

Επομένως, όταν η  $r_{12}$  είναι διάνυσμα συγγραμμικό προς το  $\omega$  ή όταν  $\omega = 0$ , τότε οι ταχύτητες δύο τυχόντων σημείων είναι ίσες, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία τα κείμενα πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής έχουν την ίδια ταχύτητα. επίσης, αν  $\omega = 0$ , τότε όλα τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα (το στερεό έχει μεταβατική κίνηση).

### 2.5 Επίπεδο Ζεύγος Περιστροφών

Περιστροφές ίσης έντασης και αντίρροπες,  $\omega$  και  $-\omega$ , περί άξονες παράλληλους αποτελούν το επίπεδο ζεύγος περιστροφών (ΣΧ. 2.7).



Σχήμα 2.7: Επίπεδο ζεύγος περιστροφών.



κινήσεων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο εν λόγω δίσκος θα παραμένει παράλληλος προς την αρχική του θέση. Το τμήμα λ.χ. (AB) θα βρεθεί στην θέση (A''B'') κινούμενο διαρκώς προς παράλληλη θέση.

## 2.6 Σύνθεση Περιστροφών περί Τεμνόμενους Άξονες

Θεωρήσουμε δύο περιστροφές περί άξονες που τέμνονται στο σημείο O, με γωνιακές ταχύτητες  $\omega_1, \omega_2$  αντίστοιχα. Για κάθε σημείο A του στερεού η ταχύτητα προκύπτει

$$v_A = v_1 + v_2 = \omega_1 \times r_{OA} + \omega_2 \times r_{OA} = (\omega_1 + \omega_2) \times r_{OA} = \omega \times r_{OA} \quad (2.26)$$

Επομένως, η συνισταμένη κίνηση είναι περιστροφική περί άξονα διερχόμενο από το O με γωνιακή ταχύτητα  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι περιστροφικές κινήσεις συντίθενται ως ολισθαίνοντα διανύσματα (που σημαίνει ότι γενικά η περιστροφική κίνηση είναι ολισθαίνον διάνυσμα καθοριζόμενο πλήρως από τον άξονα και την πάνω σ' αυτόν γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ ). Έτσι, κάθε σύνθεση ή ανάλυση περιστροφών γίνεται όπως η σύνθεση ή ανάλυση των ολισθαίνόντων διανυσμάτων (π.χ., η ανάλυση μίας περιστροφής κατά τρεις μη συνεπίπεδους άξονες που συναντώνται σε σημείο του άξονα περιστροφής, ή η ανάλυση μίας περιστροφής κατά δύο συνεπίπεδες ευθείες τεμνόμενες σε σημείο του άξονα).

## 2.7 Η Κίνηση Στερεού ως Σύνθεση μίας Μεταφοράς και μίας Περιστροφής

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, η θέση ενός στερεού σώματος στον χώρο των τριών διαστάσεων ορίζεται πλήρως από τις θέσεις τριών σημείων του που δεν κείνται πάνω στην ίδια ευθεία\* επομένως, και η κίνηση του στερεού καθορίζεται από την κίνηση των σημείων του. Θεωρήσουμε τώρα στερεό σώμα και τρία σημεία του O, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> των οποίων οι ταχύτητες είναι  $v_0, v_1, v_2$ . Έστω, ακόμη, ότι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι  $\omega$ . Θεωρούμε το σημείο O ως σημείο αναφοράς (σημείο συσχέτισης)\* με βάση τις σχέσεις (2.13) και (2.14) για τα σημεία A<sub>1</sub> και A<sub>2</sub> έχουμε

$$v_1 - v_0 = \omega \times r_{01} \rightarrow v_1 = v_0 + \omega \times r_{01} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{02} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{02}. \quad (2.28)$$

Λόγω, όμως, της σταθερής απόστασης των  $A_1, A_2$  από το  $O$  και αφού το σώμα είναι απολύτως στερεό ισχύουν

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2 = \text{σταθ.}, \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)^2 = \text{σταθ.} \quad (2.30)$$

Παραγωγίζοντας τις τελευταίες εξισώσεις προς  $t$  ευρίσκουμε:

$$2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0) = 0 \rightarrow (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{r}_{01} = 0, \quad (2.31)$$

$$2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_0) = 0 \rightarrow (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{r}_{02} = 0. \quad (2.32)$$

Από τις σχέσεις (2.27) και (2.28) συνάγεται ότι τα διανύσματα  $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)$  και  $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)$  είναι κάθετα στα επίπεδα των  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{01})$  και  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{02})$  αντίστοιχα. Από την άλλη μεριά, οι σχέσεις (2.31) και (2.32) υπαγορεύουν την συνθήκη ότι τα διανύσματα  $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)$  και  $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)$  είναι κάθετα προς τα  $\mathbf{r}_{01}$  και  $\mathbf{r}_{02}$  αντίστοιχα. Τα δύο παραπάνω συμπεράσματα οδηγούν στις εξισώσεις

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (2.33)$$

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (2.34)$$

Εξ άλλου, από τις σχέσεις (2.27) και (2.28) δι' αφαιρέσεως κατά μέλη παίρνουμε την εξίσωση

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12} \quad (2.35)$$

Οι (2.33) και (2.34) προσδιορίζουν την κατεύθυνση του διανύσματος  $\boldsymbol{\omega}$ , που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τις αιχμές των διανυσμάτων  $-\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  ενώ η εξίσωση (2.27) ή (2.28) καθορίζει την αλγεβρική τιμή του διανύσματος  $\boldsymbol{\omega}$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο το  $\boldsymbol{\omega}$  καθορίζεται πλήρως. Για το τυχαίο σημείο  $A$  του σώματος, με σημείο αναφοράς το  $O$ , ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OA} \implies \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OA}. \quad (2.36)$$

Συνεπώς, μετά τον καθορισμό του  $\boldsymbol{\omega}$ , η εξίσωση (2.36) καθορίζει ότι η κίνηση κάθε σημείου A του στερεού σώματος συντίθεται από μία μεταφορά με ταχύτητα  $\mathbf{v}_O$  και μία περιστροφή περί άξονα διερχόμενο από το σημείο O με γωνιακή ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}$ . Για ένα άλλο σημείο αναφοράς με την υπόθεση ότι η  $\boldsymbol{\omega}$  γίνεται  $\boldsymbol{\omega}'$  θα είχαμε

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{O'} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{O'A}. \quad (2.37)$$

Ισχύει όμως ως προς το O

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OO'}. \quad (2.38)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (2.36) και (2.38) ευρίσκουμε

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{O'} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{OA} - \mathbf{r}_{OO'}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O'A}. \quad (2.39)$$

Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των (2.37) και (2.39) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}, \quad (2.40)$$

δηλαδή ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι η αυτή για οποιοδήποτε σημείο αναφοράς. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει τελικά ότι η κίνηση στερεού σώματος στον χώρο των τριών διαστάσεων συντίθεται από μία μεταβατική κίνηση (μεταφορά) με ταχύτητα αυτή του εκλεγέντος σημείου αναφοράς, και μία περιστροφή περί άξονα που διέρχεται από το σημείο αυτό με ορισμένη γωνιακή ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}$ . Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα αποτελεί πόρισμα γενικότερου θεωρήματος του Euler, που θα δούμε παρακάτω, και φέρεται αποδιδόμενο στον Chasles.

## 2.8 Κεντρικός Άξονας της Κίνησης Στερεού

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας  $\boldsymbol{\omega}$  είναι το αυτό για οποιοδήποτε σημείο αναφοράς. Θα δείξουμε

Εξ άλλου, το διάνυσμα  $(\omega \times \mathbf{u}_{A\Delta})$  βάσει της  $\mathbf{u}_{A\Delta}$  όπως έχει ορισθεί στο σχήμα 2.12, είναι κάθετο προς το  $\mathbf{u}_{A\Delta\varepsilon}$  και επομένως κείται πάντοτε επί της  $(A\Delta)$ . Συμβολίζουμε τούτο με  $\mathbf{u}_{A\Delta\kappa}$  και το καλούμε **κάθετη επιτάχυνση**. Το μέτρο του είναι

$$\mathbf{u}_{A\Delta\kappa} = |\omega \times \mathbf{u}_{A\Delta}| = |\omega \times \omega (A\Delta) \mathbf{e}_0| = \omega^2 (A\Delta), \quad (2.56)$$

όπου  $\mathbf{e}_0$  παριστάνει το μοναδιαίο κάθετο προς την  $(A\Delta)$  διάνυσμα. Έτσι ο τύπος (2.54) γράφεται

$$\mathbf{u}_\Delta = \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_{A\Delta}, \quad \mathbf{u}_{A\Delta} = \mathbf{u}_{A\Delta\varepsilon} + \mathbf{u}_{A\Delta\kappa} \quad (2.57)$$

όπου

$$\mathbf{u}_{A\Delta\varepsilon} = (A\Delta) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{u}_{A\Delta\kappa} = \omega^2 (A\Delta).$$

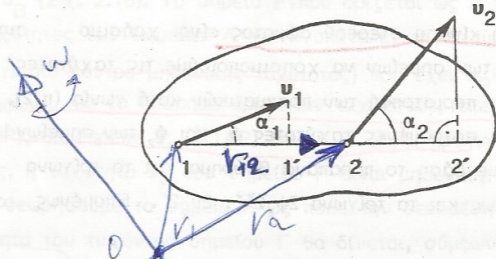
Είναι τώρα σαφές ότι το μέτρο της επιτάχυνσης  $\mathbf{u}_{A\Delta}$  προκύπτει

$$u_{A\Delta} = (A\Delta) (\varepsilon^2 + \omega^4)^{\frac{1}{2}} \quad (2.57a)$$

που συμπίπτει με την τρίτη των σχέσεων (2.16).

**2.9.2 Το θεώρημα προβολών ταχυτήτων. Ορθές ταχύτητες**

Θα αποδείξουμε ότι οι προβολές των ταχυτήτων δύο σημείων της τομής (T) ενός στερεού πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά είναι ίσες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα σημεία 1 και 2 μιάς επίπεδης τομής του στερεού (Σχ. 2.14)



Σχήμα 2.14: Ταχύτητες δύο σημείων επίπεδης τομής στερεού.

$$v_2 - v_1 = \omega \times r_{12} \Rightarrow (v_2 - v_1) \cdot r_{12} = (\omega \times r_{12}) \cdot r_{12}$$

Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της (2.13) εσωτερικά με  $r_{12}$ , ευρίσκουμε

$$v_2 \cdot r_{12} = v_1 \cdot r_{12} = (11') = (22') \quad (2.58)$$

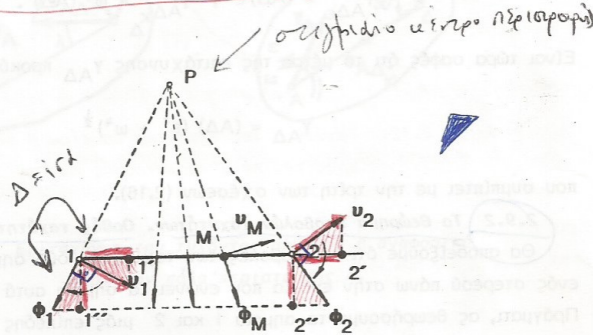
ή, ισοδύναμα,

$$v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2 \quad (2.58a)$$

Με το θεώρημα αυτό μπορούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα κάθε σημείου του σώματος αν η διεύθυνση της κίνησης του σημείου αυτού και η ταχύτητα ενός άλλου σημείου είναι γνωστές.

Για την γραφική λύση προβλημάτων κίνησης γίνεται συνήθως χρήση της λεγόμενης "ορθής" ή "κάθετης" ταχύτητας (Σχ. 2.15).

**ΕΠΙΠΕΔΗ  
ΚΙΝΗΣΗ  
ΣΤΕΡΕΟΥ  
ΣΩΜΑΤΟΣ**



Σχήμα 2.15: Ορθές ή κάθετες ταχύτητες.

Έτσι, κατά την επίπεδη κίνηση στερεού σώματος είναι χρήσιμο αντί των πραγματικών ταχυτήτων των σημείων να χρησιμοποιούμε τις ταχύτητες που προέρχονται με ομόμορφη περιστροφή των πραγματικών κατά γωνία  $(\pi/2)$ . Στο σχήμα 2.15 φαίνονται οι εστραμμένες ταχύτητες  $\phi_1$  και  $\phi_2$  των σημείων 1 και 2. Εύκολα αποδεικνύεται, με βάση το παραπάνω θεώρημα, ότι τα τρίγωνα  $1\phi_1 1''$  και  $1v_1 1'$  είναι ισα, όπως και τα τρίγωνα  $2\phi_2 2''$ ,  $2v_2 2'$ . Επομένως ισχύουν οι ιδιότητες

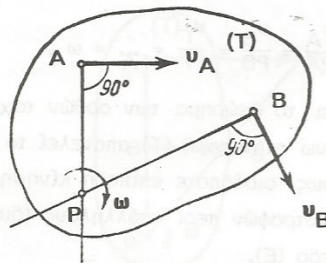
$$\left. \begin{aligned} (11'') &= (11') ; (22'') = (22') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_1 \parallel \phi_2 \parallel v_1 \parallel v_2$$

Όμοιας θ. ορθών ταχ.:  $11'' = 22'' \Rightarrow \phi_1 \parallel \phi_2$

Από την παρατήρηση αυτή συνάγεται ότι η ευθεία  $\phi_1\phi_2$  είναι παράλληλη προς την (12). Το σημείο τομής P των  $1\phi_1$  και  $2\phi_2$ , όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, είναι το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής και επίσης το τυχόν σημείο M της (12) έχει ταχύτητα την  $\mathbf{u}_M$ .

**2.9.3 Η επίπεδη κίνηση ως διαδοχή περιστροφών περί επάλληλους στιγμιαίους άξονας. Κέντρο μηδενικής ταχύτητας**

Σε κάθε χρονική στιγμή υπάρχει πάνω στην τομή (T) ένα σημείο (P) ακίνητο, που καλείται "στιγμιαίο κέντρο περιστροφής" ή "κέντρο μηδενικής ταχύτητας" ή μονολεκτικά "πόλος".



Σχήμα 2.16: Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής ή κέντρο μηδενικής ταχύτητας.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο σημεία A και B της επίπεδης τομής (T) του στερεού, τα οποία στην χρονική στιγμή t έχουν τις μη παράλληλες ταχύτητες  $\mathbf{u}_A$  και  $\mathbf{u}_B$  (Σχ. 2.16). Το σημείο P, που ορίζεται ως η τομή των καθέτων πάνω στις ταχύτητες των σημείων A και B, αποτελεί το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (στιγμιαίο κέντρο μηδενικής ταχύτητας) που έχει  $\mathbf{u}_P=0$ . Έστω  $\mathbf{u}_P \neq 0$ . Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα προβολών ταχυτήτων, επειδή  $\mathbf{u}_A \perp (AP)$  και  $\mathbf{u}_B \perp (BP)$ , θα έπρεπε  $\mathbf{u}_P \perp (AP)$  και  $\mathbf{u}_P \perp (BP)$ , πράγμα που είναι αδύνατον. Συνεπώς, η ταχύτητα  $\mathbf{u}_P$  του σημείου P είναι μηδενική.

Αν θεωρήσουμε το σημείο P ως πόλο την δεδομένη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα του τυχόντος σημείου Γ θα δίνεται, σύμφωνα με τον τύπο (2.51), από

$$\gamma_O = \gamma_A - \gamma_{AO} = 0 \quad (2.66)$$

Έτσι, αν το σημείο O ληφθεί ως σημείο αναφοράς, τότε  $\gamma_O = 0$  και η επιτάχυνση κάθε άλλου σημείου Δ της διατομής του στερεού προκύπτει

$$\gamma_{\Delta} = \gamma_O + \gamma_{O\Delta} = 0 + \gamma_{O\Delta} = \gamma_{O\Delta}$$

με μέτρο

$$\gamma_{O\Delta} = (O\Delta) (\epsilon^2 + \omega^4)^{\frac{1}{2}}$$

## 2.10 Η Μέθοδος των Ορθών Ταχυτήτων για τον Κινηματικό Έλεγχο της Χαλαρότητας - Στερεότητας Επιπέδων Φορέων

Την κινηματική μέθοδο, που βασίζεται στην έννοια της "κινηματικής αλυσού", χρησιμοποιούμε για την διακρίβωση της γεωμετρικής αοριστίας επίπεδου σχηματισμού.

Κινηματική αλυσος είναι ο επίπεδος σχηματισμός, γεωμετρικά παραμορφώσιμος, που προκύπτει από ένα στερεό επίπεδο σχηματισμό μετά από αφαίρεση μιάς απλής δεσμικής ράβδου\* επομένως, η κινηματική αλυσος έχει ένα βαθμό ελευθερίας κίνησης, δηλαδή είναι χαλαρός σχηματισμός.

Γεωμετρικά ορισμένος είναι ο στερεός φορέας. Διακρίνουμε τον ελεύθερο φορέα και τον πλήρη φορέα που σχηματίζεται από τον ελεύθερο και τις στηρίξεις με τον σταθερό χώρο (το έδαφος). Είναι δυνατό ο πλήρης φορέας να είναι γεωμετρικά ορισμένος, ενώ ο ελεύθερος να είναι αδριστος. Μας ενδιαφέρει βέβαια η στερεότητα του πλήρους φορέα. Στην στατική ευρίσκουμε ότι για να είναι ένας ελεύθερος ή πλήρης φορέας γεωμετρικά ορισμένος, πρέπει να πληρούνται η συνθήκη

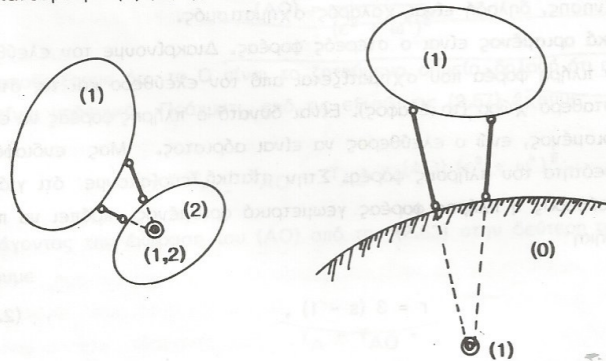
$$r = 3(s - 1), \quad (2.67)$$

όπου  $r$  παριστάνει τον αριθμό των δεσμικών ράβδων και  $s$  τον αριθμό των δίσκων. Για τον πλήρη φορέα στον αριθμό  $s$  περιλαμβάνεται και ο δίσκος του εδάφους. Η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή για την γεωμετρική στερεότητα του φορέα, γιατί μας εξασφαλίζει από άποψη αριθμητικής επί-

κειας των δεσμικών ράβδων αλλά όχι και από άποψη καταλληλότητας διάταξής τους (π.χ. από το ενδεχόμενο της τυχόν σύμπτωσης των διευθύνσεων δύο ράβδων που συνδέουν ένα προστιθέμενο κόμβο). Έτσι, υπάρχουν φορείς όπου η διακρίβωση της γεωμετρικής στερεότητας τους, παρ' όλο το γεγονός ότι παρουσιάζουν αριθμητική επάρκεια δεσμικών στοιχείων, δεν είναι εποπτικά δυνατή ή δεν είναι δυνατή με ασφάλεια. Στην περίπτωση αυτή προσφεύγουμε στην παρακάτω μέθοδο της κινηματικής αλύσου.

Η κινηματική αλυσος αποτελείται από στερεούς δίσκους συνδεδεμένους κατά τέτοιο τρόπο, που επιτρέπει σχετική, έστω απειροστική, γεωμετρική παραμόρφωση. Αν λοιπόν τηρήσουμε τον ένα δίσκο σταθερό και δόσουμε σε κάποιο σημείο ενός άλλου δίσκου της αλύσου μία μετακίνηση συμβιβαζόμενη με την δυνατότητα σχετικής γεωμετρικής κίνησης των δύο δίσκων, κάθε άλλο σημείο θα εκτελέσει καθορισμένο δρόμο οι δε μεταξύ τους λόγοι των δρόμων αυτών θα είναι σταθεροί (ανεξάρτητοι του μεγέθους των δρόμων). Στο εξής περιοριζόμαστε σε απειροστικές μετακινήσεις και επομένως σε στιγμιαίες σχετικές κινήσεις των μελών της αλύσου, δηλαδή σε σχετικές στροφές των δίσκων της περί στιγμιαίους ή απόλυτους πόλους των δίσκων.

Δύο δίσκοι (1) και (2) της αλύσου που συνδέονται με δύο δεσμικές ράβδους των οποίων οι διευθύνσεις τέμνονται σε πραγματικό ή ιδεατό σημείο Π (την λεγόμενη άρθρωση), έχουν σχετικό στιγμιαίο πόλο το σημείο αυτό Π, που παριστάνουμε με (1,2) (Σχ. 2.20)



Σχήμα 2.20: Σχετικός στιγμιαίος πόλος περιστροφής δύο δίσκων.

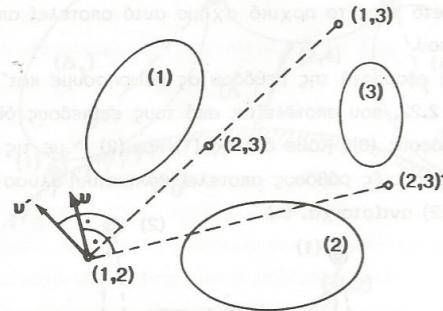
Αν ο ένας δίσκος, π.χ. ο (2) είναι το έδαφος (ακίνητος δίσκος), τότε ο πόλος Π καλείται απόλυτος πόλος του δίσκου (1) και παριστάνεται με (1) (Σχ. 2.20).



Συνεπώς, ο (1) είναι και ο σχετικός πόλος (1,0) του δίσκου (1) και του εδάφους (0). Στην κινηματική αλυσο η στιγμιαία κίνηση δίσκου στο επίπεδο του είναι στροφή αυτού περί ένα στιγμιαίο πόλο Π. Επομένως, και η σχετική στιγμιαία κίνηση δύο δίσκων είναι η σχετική στροφή αυτών περί τον στιγμιαίο σχετικό τους πόλο. Βέβαια, κατά την στιγμιαία αυτή στροφή ο σχετικός πόλος θεωρείται ως κοινό σημείο των δύο δίσκων.

Την ανεύρεση των σχετικών και απολύτων πόλων των δίσκων μιάς αλυσού διευκολύνει πολύ το θεώρημα των πόλων, σύμφωνα με το οποίο: **Οι σχετικοί πόλοι τριών δίσκων της κινηματικής αλυσού κείνται πάνω σε ευθεία.**

Πράγματι, θεωρούμε τρεις δίσκους (1), (2), (3) της κινηματικής αλυσού και τους τρεις σχετικούς πόλους αυτών (1,2), (1,3) και (2,3)' μη κείμενους επ' ευθείας (Σχ. 2.21).



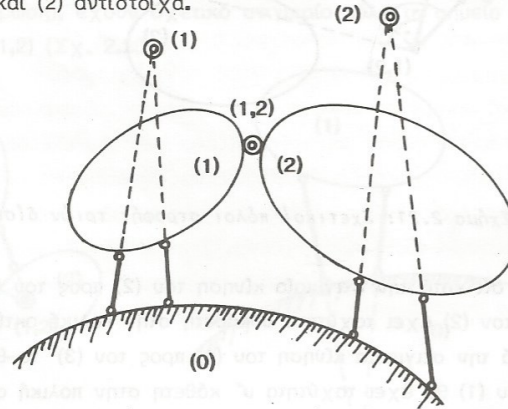
Σχήμα 2.21: Σχετικοί πόλοι στροφής τριών δίσκων

Παρατηρούμε ότι κατά την στιγμιαία κίνηση του (2) προς τον (3) το σημείο (1,2) ως ανήκον στον (2) έχει ταχύτητα  $v$  κάθετη στην πολική ακτίνα (1,2) - (2,3)' αλλά και κατά την στιγμιαία κίνηση του (1) προς τον (3) το ίδιο σημείο (1,2) ως σημείο του (1) θα έχει ταχύτητα  $v'$  κάθετη στην πολική ακτίνα (1,2)-(1,3). Σύμφωνα όμως με τον ορισμό της κινηματικής αλυσού το σημείο (1,2) θα πρέπει να έχει εντελώς καθορισμένη τροχιά και ταχύτητα και επομένως θα πρέπει οι ταχύτητες  $v$  και  $v'$  να συμπέσουν σε μία και μόνη. Συνεπώς, πρέπει ο (2,3)' να κείται πάνω στην ευθεία (1,2) - (1,3). Άρα οι τρεις σχετικοί πόλοι κείνται επ' ευθείας.

Μετά τον προσδιορισμό των σχετικών και απολύτων πόλων των δίσκων της κινηματικής αλύσου είναι εύκολο να χαράξουμε τα διαγράμματα ορθών ταχυτήτων με βάση αυτά που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο. Σημειώνουμε ακόμη εδώ, ότι το διάγραμμα ορθών ταχυτήτων των σημείων ενός δίσκου της κινηματικής αλύσου που προκύπτει με ένωση των άκρων των ορθών ταχυτήτων είναι σχήμα όμοιο προς το αρχικό σχήμα των σημείων του δίσκου και ομοιόθετο προς αυτό με κέντρο ομοιοθεσίας τον στιγμιαίο πόλο περιστροφής. Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, η εξακρίβωση της τυχόν γεωμετρικής αοριστίας ενός επιπέδου σχηματισμού γίνεται εύκολα ως εξής:

- Μετά τον καθορισμό των πόλων των δίσκων του φορέα ελέγχουμε αν οι πόλοι τριών δίσκων κείνται πάνω σε ευθεία, πράγμα που αποδεικνύει την ύπαρξη κινηματικής αλύσου, ή
- Κατασκευάζουμε το διάγραμμα των ορθών ταχυτήτων οπότε αν τούτο προκύψει όμοιο και ομοιόθετο προς το αρχικό σχήμα αυτό αποτελεί απόδειξη ύπαρξης κινηματικής αλύσου.

Γιά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου ας θεωρήσουμε κατ' αρχή τον φορέα του σχήματος 2.22, που αποτελείται από τους επίπεδους δίσκους (1), (2) και τον δίσκο του εδάφους (0). Κάθε δίσκος (1) και (2) με τις συνδέουσες αυτόν με το έδαφος δεσμικές ράβδους αποτελεί κινηματική άλυσσο με απόλυτους πόλους τους (1) και (2) αντίστοιχα.

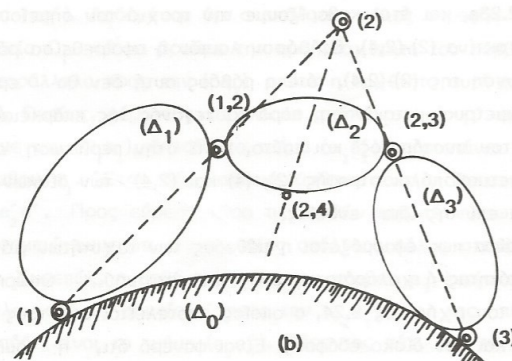
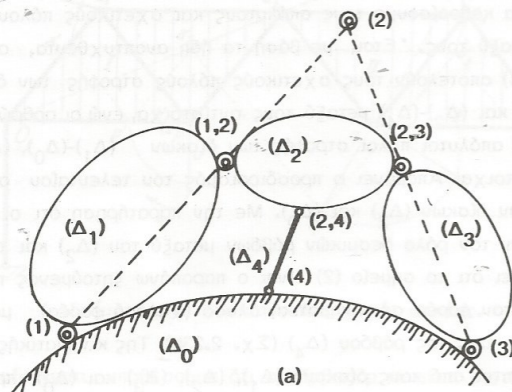


Σχήμα 2.22: Επίπεδος σχηματισμός από δύο δίσκους ανωδομής και τον δίσκο εδάφους.

Αν οι δύο αυτές άλυσσοι συνδεθούν με μία άρθρωση μεταξύ τους που αποτελεί τον σχετικό πόλο (1,2), τότε όλος ο σχηματισμός είναι γεωμετρικά ορισμένος,

γιατί οι απόλυτοι πόλοι (1), (2) και ο σχετικός πόλος (1,2) σχηματίζουν τρίγωνο και συνεπώς δεν κείνται επί της αυτής ευθείας. Ο στερεός αυτός σχηματισμός αποτελεί τριαρθρωτό τξο. Αν οι τρεις παραπάνω πόλοι έκειντο επί της αυτής ευθείας, τότε ο σχηματισμός θα ήταν κινηματική άλυσος (χαλαρός) με δυνατότητα απειροστικής μετακίνησης.

Θεωρήσουμε τώρα το σύνθετο φορέα του σχήματος 2.23α, που αποτελείται από τους τρεις δίσκους ανωδομής ( $\Delta_1$ ), ( $\Delta_2$ ), ( $\Delta_3$ ), τον δίσκο εδάφους ( $\Delta_0$ ) και την δεσμική ράβδο (δίσκο) ( $\Delta_4$ ) που συνδέει τον ( $\Delta_2$ ) με το έδαφος.



Σχήμα 2.23: (α) Επίπεδος σχηματισμός από τέσσερεις δίσκους ανωδομής και τον δίσκο εδάφους.

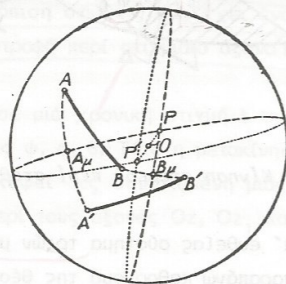
(β) Ισοδύναμο σύστημα μετά την αφαίρεση της δεσμικής ράβδου ( $\Delta_4$ ).

κόμβου  $b$ . Κατά τον τρόπον αυτόν, ενώνοντας τις αιχμές των ορθών ταχυτήτων των κόμβων του δίσκου (II) κατασκευάζουμε το ομοιόθετο προς τον δίσκο αυτόν σχήμα  $a_2' a_3' b' q'$ . Κέντρα ομοιοθεσίας είναι προφανώς τα  $O_1$  και  $O_{II}$ , όπου συναντώνται προεκτεινόμενες οι ορθές ταχύτητες. Ο λόγος, φυσικά, των αντίστοιχων πλευρών των σχημάτων  $O_1 a_1' a_2' p'$  και (I) δεν ταυτίζεται προς τον λόγον αντίστοιχων πλευρών των σχημάτων  $a_2' a_3' b' q'$  και (II) και, συνεπώς, το όλο σχήμα  $O_1 a_1' a_2' p' q' b' a_3' a_2'$  δεν είναι όμοιο προς το  $O_1 a_1 a_2 p q b a_3 a_2$ . Τούτο σημαίνει το εξής: Αν υποθέσουμε ότι στο αρχικό σχήμα υπήρχε και η ράβδος  $(pq)$ , τότε, εφ' όσον συνδέθουν δι' ευθείας τα σημεία  $p'$  και  $q'$ , η προκύπτουσα πλευρά  $(p'q')$  δεν είναι παράλληλος προς την  $(pq)$ . Τι θα εσήμαινε όμως αν οι  $(p'q')$  και  $(pq)$  ήσαν παράλληλοι; Σύμφωνα με τα ήδη αναπτυχθέντα, τούτο θα εσήμαινε ότι η κίνηση των σημείων  $p$  και  $q$  του φορέα θα ήταν κατά την θεωρούμενη χρονική στιγμή η ίδια ως εάν αυτά ανήκαν σε ένα απολύτως στερεό άξονα. Επομένως η παρεμβολή της στερεάς ράβδου  $(pq)$  δεν θα παρεμπόδιζε την μετακίνηση των σημείων  $p$  και  $q$ , και συνεπώς το όλο δικτύωμα θα ήταν χαλαρό. Εν προκειμένω, όπως ήδη παρατηρούμε, συμβαίνει το αντίθετον. Δηλαδή, οι ταχύτητες των σημείων  $p$  και  $q$  προβαλλόμενες επί της  $(pq)$  δίνουν μεγέθη που διαφέρουν μεταξύ τους και συνεπώς η απόσταση  $(pq)$  των σημείων  $p$  και  $q$  του χαλαρού δικτυώματος μεταβάλλεται κατ' απειροστό της ίδιας τάξης προς τις μεταθέσεις των σημείων. Επομένως, η παρεμβολή στερεάς ράβδου  $(pq)$  αφρεί την κινητικότητα του χαλαρού αρχικά δικτυώματος και δημιουργεί στερεό δικτύωμα. Συμπερασματικά λοιπόν έχουμε ότι, αν στο αρχικό δικτύωμα δεν υπάρχει η ράβδος  $(pq)$ , τότε τούτο είναι χαλαρό. Η προσθήκη βέβαια της  $(pq)$  παρέχει στερεό δικτύωμα.

### 2.11 Κίνηση Στερεού Σώματος περί Σταθερό Σημείο

Κατά την κίνηση στερεού συνεχιζόμενη περί σταθερό σημείο  $O$  τα σημεία του στερεού διαγράφουν τροχιές επί ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών με κέντρο το  $O$ . Κάθε τόξο  $(AB)$  μέγιστου κύκλου μιάς τέτοιας σφαιρικής επιφάνειας, που συνδέει σημεία  $A$  και  $B$  του στερεού, μπορεί να αχθεί γενικά στην νέα του θέση  $A'B'$  με περιστροφή περί την διάμετρο  $PP'$  (Σχ.2.25), όπου  $P$  και  $P'$  είναι τα σημεία που συναντώνται οι μέγιστοι κύκλοι, οι οποίοι τέμνουν καθέτως στο μέσον τα τόξα  $AA'$  και  $BB'$ . Αν παρατηρήσουμε αρκετά μικρές μετακινήσεις του  $AB$  από της αρχικής του θέσεως σε θέσεις πολύ κοντινές  $A'B, A'B''$  κλπ., είναι εύκολο να δείξουμε ότι η κίνηση πραγματοποιείται ως μία περιστροφή

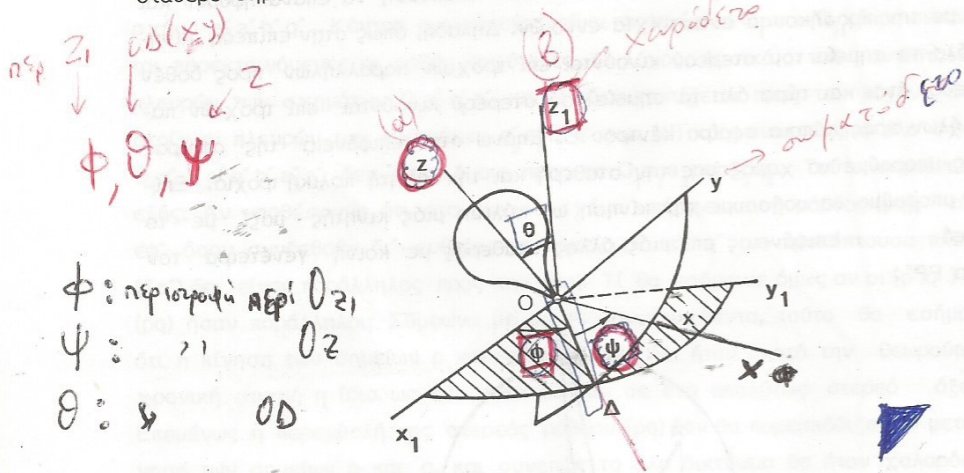
περί διαδοχικές διαμέτρους ως η  $PP'$ . Επομένως, όσα έχουν ήδη αναφερθεί στην επίπεδη κίνηση του στερεού, μπορεί κατ' επέκταση να επαναληφθούν και εδώ με την προσηκουσα αντιστοιχία εννοιών. Δηλαδή, όπως στην επίπεδη κίνηση όλα τα σημεία του στερεού κινούνται επί τροχιών παραλλήλων προς δοθέν επίπεδο, έτσι και τώρα όλα τα σημεία του στερεού κινούνται επί τροχιών παραλλήλων προς κάποια σφαίρα κέντρου  $O$ . Επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας αυτής μπορούμε να χαράξουμε την σταθερή και την κινητή πολική τροχιά. Επίσης, μπορούμε να νοήσουμε την κίνηση ως κύλιση μιάς κινητής μαζί με το στερεό επιφάνειας επί μιάς άλλης σταθεράς με κοινή γενέτειρα τον άξονα  $PP'$ .



Σχήμα 2.25: Αλλαγή θέσης σημείων στερεού κατά την περιστροφή του περί σταθερό σημείο.

Με βάση την παραπάνω γεωμετρική παρουσίαση κίνησης του στερεού, γιά να προσδιορίσουμε την θέση του κατά την κίνηση του περί σταθερό σημείο  $O$ , θεωρούμε τρισσορθογώνιο σύστημα  $Oxyz$  με αρχή το σημείο τούτο και στερεά συνδεδεμένο με το κινούμενο σώμα (Σχ. 2.26). Την κίνηση του σώματος και του μαζί με αυτό συνδεδεμένου όπως προηγούμενα συστήματος (σωματόδετο σύστημα) αναφέρουμε σε σταθερό τρισσορθογώνιο σύστημα  $Ox_1y_1z_1$  (χωρόδετο σύστημα). Την θέση του σώματος καθορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα  $i, j, k$  του  $Oxyz$ , δηλαδή τα εννέα διευθύνοντα συνημίτονα τούτων με τα μοναδιαία διανύσματα  $i_1, j_1, k_1$  του χωρόδετου συστήματος. Λαμβανομένου όμως υπόψη ότι ισχύουν έξι ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους τα συνημίτονα αυτά, παραμένουν τρεις ανεξάρτητες παράμετροι γιά τον καθορισμό της θέσης του σώματος,

πράγμα που σημαίνει ότι τούτο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας κίνησης περί σταθερό σημείο.



Σχήμα 2.26: Κίνηση στερεού περί σταθερό σημείο.

Ο Euler εισήγαγε απ' ευθείας σύστημα τριών μόνον παραμέτρων, των "γωνιών Euler" για τον παραπάνω καθορισμό της θέσης του σώματος. Ας καλέσουμε  $OD$  (με μοναδιαίο διάνυσμα  $s_0$ ) την τομή των επιπέδων  $Oxy$  και  $Ox_1y_1$ . Η θέση του τριέδρου  $Oxyz$  και επομένως του σώματος ως προς το σταθερό σύστημα  $Ox_1y_1z_1$  καθορίζεται με τις γωνίες:

$$\phi = \angle \Delta Ox_1, \quad \psi = \angle xO\Delta, \quad \theta = \angle z_1 Oz,$$

που καλούνται "γωνίες Euler" με θετική φορά αυτή που καθορίζεται στο σχήμα 2.26.

Μεταβολή της γωνίας  $\psi$  σημαίνει στροφή του σώματος περί τον άξονα  $Oz$ , μεταβολή της γωνίας  $\phi$  σημαίνει στροφή περί τον άξονα  $Oz_1$  και μεταβολή της γωνίας  $\theta$  σημαίνει στροφή περί την γραμμή  $OD$ . Για να καθορισθεί η κίνηση του σώματος πρέπει να είναι γνωστή η θέση του ως προς το σύστημα  $Ox_1y_1z_1$ , δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  πρέπει να είναι γνωστές οι συναρτήσεις

$$\psi = \psi(t), \quad \phi = \phi(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (2.68)$$

$(xy)$   $(yz)$   $(xz)$   
 $\phi, \theta, \psi$

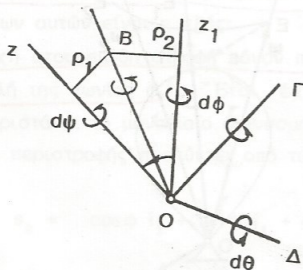
Οι εξισώσεις (2.68) καλούνται εξισώσεις κίνησης του στερεού περί σταθερό σημείο.

Πράγματι, οι γωνίες  $\psi, \phi, \theta$  καθορίζουν την θέση του τριέδρου  $Oxyz$  και επομένως του στερεού σώματος ως προς το τριέδρο  $Ox_1y_1z_1$ . Προς τούτο φέρουμε στο επίπεδο  $Ox_1y_1$  την  $OD$  που σχηματίζει με τον άξονα  $Ox_1$  την γωνία  $\phi$ . Στην συνέχεια φέρουμε από τον  $Oz_1$  επίπεδο κάθετο πάνω στην  $OD$  και παίρνουμε στο επίπεδο αυτό την γωνία  $z_1Oz = \theta$  και έτσι ευρισκουμε την θέση του άξονα  $Oz$  του κινητού συστήματος. Τέλος, φέρουμε από την  $OD$  επίπεδο κάθετο στον  $Oz$ , στο οποίο κείται οι άξονες  $Ox, Oy$ . Ο άξονας  $Ox$  καθορίζεται με την γωνία  $\Delta Ox = \psi$  και ο άξονας  $Oy$  κάθετος στον  $Ox$ .

Θα αποδείξουμε τώρα το παρακάτω θεώρημα των Euler - D'Alembert:

**Κάθε στοιχειώδης μετατόπιση σώματος που έχει ένα σταθερό σημείο ισοδυναμεί με στοιχειώδη περιστροφή περί στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο αυτό.**

**Απόδειξη:** Θεωρήσουμε σε μιά χρονική στιγμή  $t$  την θέση του σώματος, που καθορίζεται με τις γωνίες  $\psi, \phi, \theta$ . Τότε η μετακίνησή του σε ένα στοιχειώδη χρόνο  $dt$  μπορεί να προκύψει ως συνισταμένη μιάς σειράς περιστροφών κατά τις γωνίες  $d\psi, d\phi, d\theta$  περί τους άξονες  $Oz, Oz_1$  και  $OD$  αντίστοιχα (Σχ. 2.27).



Σχήμα 2.27: Στοιχειώδης περιστροφή περί τους άξονες  $Oz$  και  $Oz_1$ .

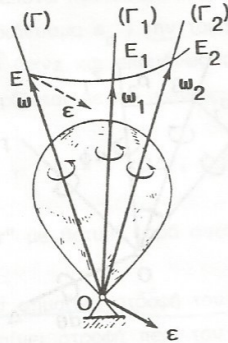
Σύμφωνα με το σχήμα αυτό θεωρούμε πρώτα σημείο  $B$  μέσα στην γωνία  $zOz_1$  πάνω στο επίπεδο  $zOz_1$ . Μιά περιστροφή περί τον άξονα  $z$  κατά γωνία  $d\psi$  προκαλεί στοιχειώδη μετακίνηση του  $B$  κάθετη στο επίπεδο αυτό, της οποίας η αλγεβρική τιμή είναι  $r_1 d\psi$ . Συγχρόνως, κατά την περιστροφή περί τον άξονα  $z_1$

κατά  $d\phi$  το Β, θα μετακινηθεί στην αντίθετη διεύθυνση κατά  $\rho_2 d\phi$  και πάλι κάθετα προς το επίπεδο  $zOz_1$ . Συνεπώς, υπάρχει σημείο Β για το οποίο ισχύει:

$$\rho_1 d\psi = \rho_2 d\phi \quad (2.69)$$

και του οποίου η μετατόπιση είναι μηδενική.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η στοιχειώδης μετατόπιση του σώματος από τις δύο αυτές περιστροφές είναι η ίδια με την προκύπτουσα από την στοιχειώδη περιστροφή του σώματος περί τον άξονα ΟΒ, του οποίου τα σημεία Ο και Β είναι ακίνητα. Με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι οι στοιχειώδεις στροφές περί τους άξονες ΟΒ και ΟΔ είναι ισοδύναμες προς μία στοιχειώδη περιστροφή του σώματος περί ένα άξονα ΟΓ, διερχόμενο από το Ο. αυτό αποδεικνύει και το θεώρημα. Ο άξονας ΟΒ λέγεται **στιγμιαίος άξονας περιστροφής**. Η περιστροφή περί τον ΟΒ φέρει το σώμα σε απείρως γειτονική θέση και στην συνέχεια ακολουθεί νέα περιστροφή περί τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής ΟΓ κ.ο.κ. Έτσι, η κίνηση ενός στερεού σώματος περί σταθερό σημείο νοείται συντιθέμενη από μία σειρά διαδοχικών στοιχειωδών περιστροφών περί στιγμιαίους άξονες περιστροφής διερχόμενους από το σημείο, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.28.



Σχήμα 2.28: Σειρά διαδοχικών στοιχειωδών περιστροφών περί στιγμιαίους άξονες περιστροφής διά του Ο.

Η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  με την οποία το σώμα εκτελεί στοιχειώδη περιστροφή περί τον στιγμιαίο άξονα ΟΒ λέγεται **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του σώματος**. Η φορά του διανύσματος  $\omega$  καθορίζεται έτσι ώστε η φορά περιστροφής και το



διάνυσμα να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα. Καθώς η διεύθυνση του άξονα OB μεταβάλλεται συνεχώς, το διάνυσμα  $\omega$  μεταβάλλεται συνεχώς συναρτήσει του χρόνου και η κορύφη του E γράφει καμπύλη στον χώρο που καλείται **οδογράφος** του διανύσματος  $\omega$  (Σχ. 2.28).

Την περιστροφή του στερεού με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  ευρίσκουμε από τον τύπο

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} k_1 + \frac{d\theta}{dt} s_0 + \frac{d\psi}{dt} k, \quad (2.70)$$

συντιθεμένη, με βάση τις παραμέτρους (γωνίες) Euler του Σχ. 2.26, από μία περιστροφή περί τον άξονα  $k_1$  με γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ , άλλη περί τον άξονα OΔ με γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  και μία τρίτη περί τον άξονα  $k$  με γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$ . Αυτά επειδή στα επόμενα θα απαιτηθεί η ανάλυση της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  κατά τις διευθύνσεις των **σωματοπαγών αξόνων** Oxyz σύμφωνα με τον τύπο

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k. \quad (2.71)$$

Είναι σημαντικό να καθορισθούν οι εξισώσεις που εκφράζουν τις συνιστώσες  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  με τις γωνίες  $\phi, \theta, \psi$  και τις γωνιακές ταχύτητες  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  και  $\dot{\psi}$ . Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **κινηματικές εξισώσεις Euler**. Η λογική για τον καθορισμό των σχέσεων αυτών είναι η εξής:

1: Θεωρούμε κατ' αρχή στοιχειώδη στροφή μόνον περί τον άξονα Oz<sub>1</sub>, αντιστοιχούσα σε μεταβολή της γωνίας  $\phi$ . Έτσι έχουμε την παράσταση του σχήματος 2.29 ( $a_0$  παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα OE, κάθετο στο  $k$  και  $s_0$ ). Το μητρώο περιστροφής προκύπτει από τις διανυσματικές εξισώσεις

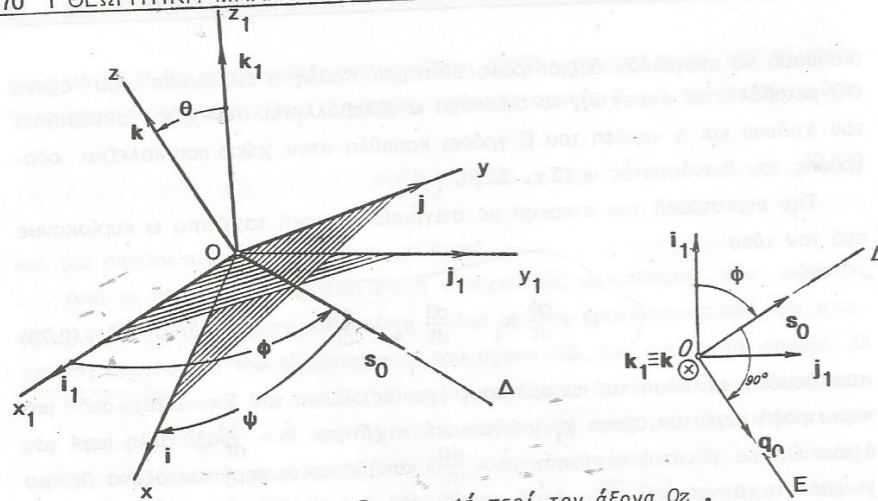
$$s_0 = \cos\phi i_1 + \sin\phi j_1 + 0 k_1,$$

$$a_0 = -\sin\phi i_1 + \cos\phi j_1 + 0 k_1,$$

$$k = 0 i_1 + 0 j_1 + 1 k_1,$$

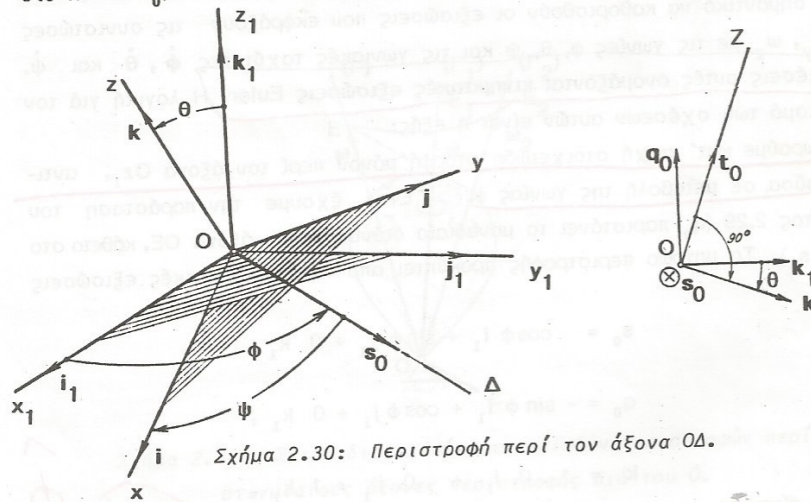
δηλαδή, είναι το

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$



Σχήμα 2.29: Περιστροφή περί τον άξονα  $Oz_1$ .

2: Στην συνέχεια θεωρούμε μόνον στοιχειώδη στροφή περί τον άξονα  $OD$ , αντιστοιχούσα σε μεταβολή της γωνίας  $\theta$ . Παίρνουμε επομένως την παράσταση του σχήματος 2.30 ( $t_0$  παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα  $OZ$ , κάθετο στο  $k$  και  $s_0$ ). Το μητρώο περιστροφής εδώ προκύπτει από τις διανυσματικές εξισώσεις



Σχήμα 2.30: Περιστροφή περί τον άξονα  $OD$ .

$$s_0 = 1 \cdot s_0 + 0 \cdot q_0 + 0 \cdot k_1,$$

$$t_0 = 0 \cdot s_0 + \cos\theta \cdot q_0 + \sin\theta \cdot k_1,$$

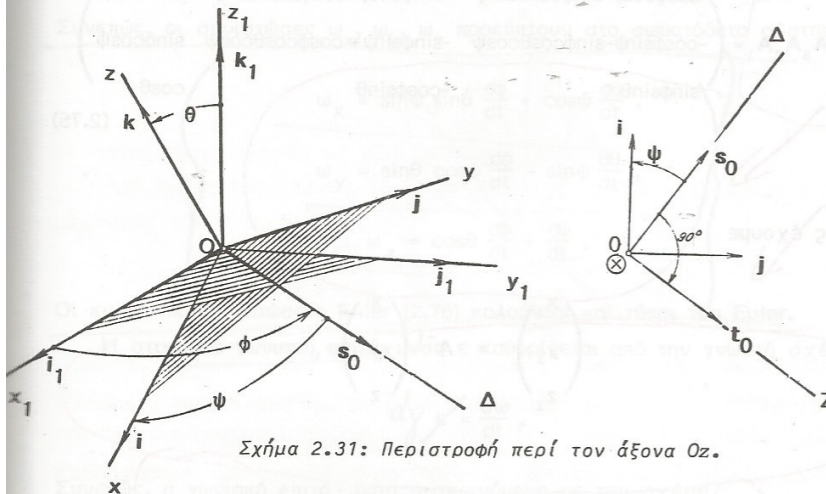
$$k = 0 \cdot s_0 - \sin\theta \cdot q_0 + \cos\theta \cdot k_1$$

δηλαδή, είναι το

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

3: Τέλος, θεωρούμε μόνον στοιχειώδη στροφή περί τον άξονα Oz, αντιστοιχούσα σε μεταβολή της γωνίας ψ. Έχουμε επομένως την παράσταση του σχήματος 2.31.

Το μητρώο περιστροφής προκύπτει από τις διανυσματικές εξισώσεις



Σχήμα 2.31: Περιστροφή περί τον άξονα Oz.

$$\begin{aligned} i &= \cos\psi s_0 + \sin\psi t_0 + 0 k, \\ j &= -\sin\psi s_0 + \cos\psi t_0 + 0 k, \\ k &= 0 \cdot s_0 + 0 \cdot t_0 + 1 k, \end{aligned}$$

και συνεπώς είναι το

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η περιστροφή γίνεται συγχρόνως περί τους άξονες Oz<sub>1</sub>, OΔ και Oz, οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο σωματόδετο σύστημα

προκύπτουν ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων του ίδιου διανύσματος στο χωρδδο σύστημα από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

όπου το μητρώο  $A$  καλείται μητρώο περιστροφής και δίνεται από τον τύπο:

$$A = A_3 A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Ομοίως έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

όπου:

$$A^{-1} = (A_3 A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} = A_1^T A_2^T A_3^T = (A_3 A_2 A_1)^T$$

λόγω της δομής των πινάκων  $A_1, A_2, A_3$

Είναι τώρα εύκολο να υπολογίσουμε τις συνιστώσες  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  συναρτήσει των  $\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ . Πράγματι, από την εξίσωση (2.70) παίρνουμε τα εξής εσωτερικά γινόμενα:

$$\omega \cdot i = \omega_x = \dot{\phi} (k_1 \cdot i) + \dot{\theta} (s_0 \cdot i) + \dot{\psi} (k \cdot i),$$

$$\omega \cdot j = \omega_y = \dot{\phi} (k_1 \cdot j) + \dot{\theta} (s_0 \cdot j) + \dot{\psi} (k \cdot j),$$

$$\omega \cdot k = \omega_z = \dot{\phi} (k_1 \cdot k) + \dot{\theta} (s_0 \cdot k) + \dot{\psi} (k \cdot k).$$

Είναι όμως

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_0 = 0, \quad \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{i} = \cos\psi, \quad \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{j} = -\sin\psi, \quad \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{k}_1 \cdot (\cos\psi \mathbf{s}_0 + \sin\psi \mathbf{t}_0) = \cos\psi \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{s}_0 + \sin\psi \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{t}_0 = \\ &= \cos\psi \mathbf{k}_1 \cdot (\cos\phi \mathbf{i}_1 + \sin\phi \mathbf{j}_1) + \sin\psi \mathbf{k}_1 \cdot (\cos\theta \mathbf{a}_0 + \sin\theta \mathbf{k}_1) = \\ &= \sin\psi \cos\theta \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a}_0 + \sin\psi \sin\theta = \sin\psi \cos\theta \mathbf{k}_1 \cdot (-\sin\phi \mathbf{i}_1 + \cos\phi \mathbf{j}_1) + \sin\psi \sin\theta = \\ &= \sin\psi \sin\theta, \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j} &= \sin\theta \cos\psi, \quad \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k} = \cos\theta. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι συνιστώσες  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  προκύπτουν στο σωματόκετρο σύστημα:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sin\psi \sin\theta \frac{d\phi}{dt} + \cos\psi \frac{d\theta}{dt}, \\ \omega_y &= \sin\theta \cos\psi \frac{d\phi}{dt} - \sin\psi \frac{d\theta}{dt}, \\ \omega_z &= \cos\theta \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Οι κινηματικές εξισώσεις Euler (2.76) καλούνται και τύποι του Euler.

Η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση  $\epsilon$  καθορίζεται από την γνωστή σχέση

$$d\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (2.77)$$

Συνεπώς, η γωνιακή επιτάχυνση συγκρινόμενη με την σχέση

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.78)$$

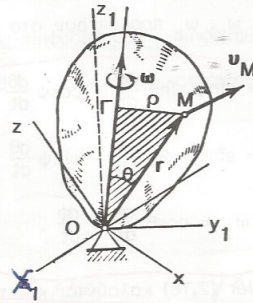
μπορεί να υπολογισθεί ως ταχύτητα της κορυφής του διανύσματος  $\boldsymbol{\omega}$  κινούμενου κατά μήκος της καμπύλης  $EE_3$  (Σχ. 2.28). Η διεύθυνση της  $\epsilon$  συμπίπτει με την διεύθυνση της εφαπτόμενης της καμπύλης στο εν λόγω σημείο. Η διεύθυνση του  $\epsilon$ , με εξαίρεση την περίπτωση της περιστροφής περί σταθερό άξονα, δεν συμπίπτει με αυτή του  $\boldsymbol{\omega}$ .

Τα διανύσματα  $\boldsymbol{\omega}$  και  $\epsilon$  είναι τα βασικά κινηματικά μεγέθη της κίνησης σώματος περί σταθερό σημείο και καθορίζονται με βάση τις εξισώσεις κίνησης (2.77), (2.76) και επομένως τις (2.68).

Η ταχύτητα ενός σημείου  $M$  του σώματος κατά την χρονική στιγμή της περιστροφής του σώματος περί τον στιγμιαίο άξονα  $OG$  καθορίζεται από την σχέση

$$v = \omega \rho, \quad (2.79)$$

όπου  $\omega$  η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του σώματος και  $\rho$  η απόσταση του  $M$  από τον  $OΓ$  (Σχ. 2.32).



Σχήμα 2.32: Το διάνυσμα ταχύτητας σημείου κατά την περιστροφή στερεού.

Το διάνυσμα  $v$  είναι κάθετο στο επίπεδο  $MOG$  με διεύθυνση της περιστροφής του σώματος. Επειδή είναι  $\rho = \rho(t)$ , η εξίσωση (2.79), εκτός της περίπτωσης όπου η  $\rho$  είναι σταθερά, δεν προσφέρεται πάντοτε γιά τον καθορισμό της  $v$ . Προς τούτο θεωρούμε το εξωτερικό γινόμενο  $\omega \times r$ , όπου  $r$  είναι η διάνυσματική ακτίνα του  $M$ , με μέτρο

$$|\omega \times r| = \omega r \sin\theta = \omega \rho, \quad (2.80)$$

οπότε

$$v = \omega \times r. \quad (2.81)$$

Αναλυτικά η ταχύτητα  $v$  καθορίζεται από τις συντεταγμένες  $v_x, v_y, v_z$  στο

σωματόδετο σύστημα  $Oxyz$ , ως προς το οποίο το  $M$  έχει σταθερές συντεταγμένες  $M(x,y,z)$ . Έτσι, από την (2.81) ευρίσκουμε

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (2.82)$$

εκ της οποίας προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \quad (2.83)$$

οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις του Euler.

Από τις σχέσεις (2.81), (2.78) και (2.77) προκύπτει το διάνυσμα  $\boldsymbol{\gamma}$  της επιτάχυνσης του  $M$  ως εξής:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2, \quad (2.84)$$

όπου  $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$  παριστάνει την περιστροφική συνιστώσα της επιτάχυνσης του  $M$  και  $\boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  την συνιστώσα της επιτάχυνσης του  $M$  με διεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής. Το διάνυσμα  $\boldsymbol{\gamma}_1$  είναι κάθετο στο επίπεδο  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r})$  και έχει αλγεβρική τιμή

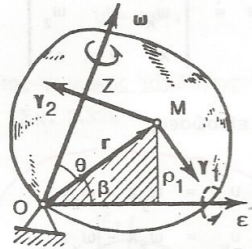
$$\gamma_1 = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon \rho_1, \quad (2.85)$$

όπου  $\rho_1$  δηλώνει την απόσταση του σημείου  $M$  από το διάνυσμα  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (Σχ. 2.33). Το διάνυσμα  $\boldsymbol{\gamma}_2$  είναι κάθετο στα  $\mathbf{v}$  και  $\boldsymbol{\omega}$ , διευθύνεται κατά μήκος της  $MZ$ , και έχει αλγεβρική τιμή

$$\gamma_2 = \omega v \sin \frac{\pi}{2} = \omega^2 \rho. \quad (2.86)$$

Όπως είναι ήδη γνωστό, οι εξισώσεις (2.85) και (2.86) ισχύουν για ένα σώμα περιστρεφόμενο περί σταθερό άξονα, όπου τα  $\boldsymbol{\omega}$  και  $\boldsymbol{\varepsilon}$  διευθύνονται κατά μήκος

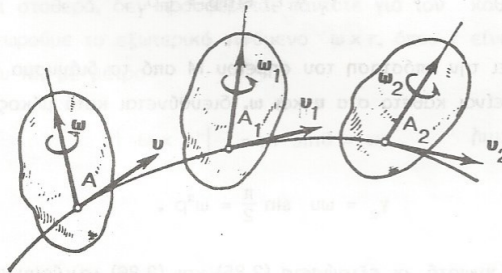
του άξονα περιστροφής.



Σχήμα 2.33: Το διάνυσμα επιτάχυνσης σημείου κατά την περιστροφή στερεού.

## 2.12 Η Γενική Κίνηση του Στερεού Σώματος

Η γενικότερη κίνηση ενός ελευθέρου στερεού σώματος συντίθεται από μία μεταφορά του σώματος, κατά την οποία όλα τα σημεία του κινούνται με την ίδια ταχύτητα  $\mathbf{u}_A$  και ίδια τροχιά του εκλεγέντος τυχόντος πόλου A, και μία σειρά διαδοχικών απειροστών περιστροφών  $\omega$  περί στιγμιαίους άξονες περιστροφής που διέρχονται από τον εκάστοτε πόλο A (Σχ. 2.34).



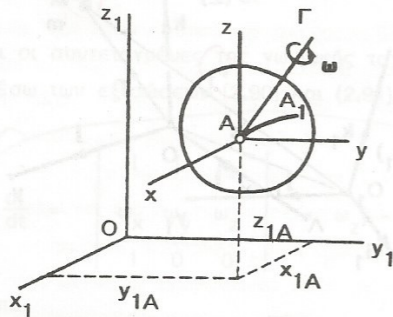
Σχήμα 2.34: Γενική κίνηση στερεού.



Τα βασικά κινηματικά χαρακτηριστικά της κίνησης είναι η ταχύτητα  $\mathbf{v}_A$  και η επιτάχυνση  $\mathbf{\gamma}_A$  του πόλου, που καθορίζουν την ταχύτητα και επιτάχυνση της συνιστώσας της μεταβατικής κίνησης, και η γωνιακή ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}$  και επιτάχυνση  $\boldsymbol{\epsilon}$  της περιστροφής περί τον πόλο. Τα παραπάνω μεγέθη καθορίζονται σε κάθε στιγμή από τις εξισώσεις της κίνησης του ελεύθερου στερεού σώματος ως προς το σταθερό σύστημα αναφοράς  $Ox_1y_1z_1$  (Σχ. 2.35), δηλαδή από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_{1A} &= x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad z_{1A} = z_{1A}(t), \\ \phi &= \phi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \end{aligned} \quad (2.87)$$

όπου  $x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}$  είναι οι συντεταγμένες του πόλου A ως προς το  $Ox_1y_1z_1$  και  $\phi, \psi, \theta$  είναι οι γωνίες Euler, που καθορίζουν την θέση του σώματος σε σχέση προς το δεδομένο σύστημα αναφοράς  $Ox_1y_1z_1$ .



Σχήμα 2.35: Κίνηση του πόλου A.

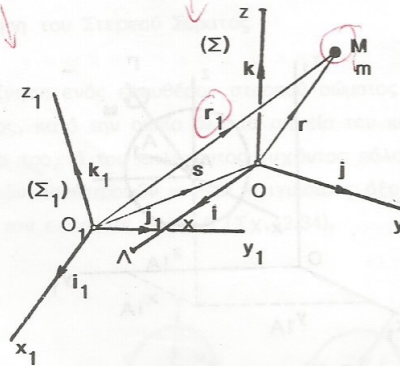
Η επίπεδη κίνηση του ελεύθερου σώματος προκύπτει ως ειδική περίπτωση κατά την οποία το διάνυσμα  $\boldsymbol{\omega}$  παραμένει συνεχώς κάθετο στο επίπεδο της κίνησης. Εδώ τονίζεται ότι τόσο στην γενική κίνηση όσο και στην επίπεδη κίνηση του στερεού σώματος η περιστροφική συνιστώσα της κίνησης είναι ανεξάρτητη της εκλογής του πόλου A.

2.13 Απόλυτη και Σχετική Κίνηση - Θεώρημα Coriolis2.13.1 Απόλυτη, σχετική και μετοχική ταχύτητα

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει την κίνηση υλικού σημείου ή στερεού σώματος ως προς χωρόδετο σύστημα αναφοράς  $Ox_1y_1z_1$  ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων, το οποίο στα παρακάτω θα καλούμε συντόμως σύστημα ή σώμα  $\Sigma_1$ . Η κίνηση ενός σημείου  $M(x_1, y_1, z_1)$  καθορίζεται πλήρως στο σύστημα αυτό εφόσον είναι γνωστή η εξίσωση της κίνησης

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t) = (x_1, y_1, z_1), \quad (2.88)$$

όπου  $x_1(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $z_1(t)$  παριστάνουν τις συντεταγμένες της διανυσματικής ακτίνας  $\mathbf{r}_1(t)$  ως προς το  $Ox_1y_1z_1$ -σύστημα με μοναδιαία διανύσματα  $i_1, j_1, k_1$  (Σχ. 2.36).



Σχήμα 2.36: Κίνηση σημείου στερεού ως προς χωρόδετο σωματόδετο σύστημα αναφοράς.

Από την εξίσωση (2.88) προκύπτουν

$$\mathbf{u} = \dot{x}_1 i_1 + \dot{y}_1 j_1 + \dot{z}_1 k_1, \quad (2.89)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \ddot{x}_1 i_1 + \ddot{y}_1 j_1 + \ddot{z}_1 k_1.$$

Σε άλλο σύστημα αναφοράς  $Oxyz$ , επίσης σταθερό, το  $\Sigma$ , οι μεν παράμετροι  $x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1$  θα μεταβληθούν, αλλά τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}$  θα παραμείνουν αμετάβλητα. Θεωρούμε στο εξής το σύστημα  $\Sigma$  κινητό προς το σταθερό  $\Sigma_1$  (με ορισμένο νόμο κίνησης) με μοναδιαία διανύσματα τα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Το σύστημα  $\Sigma_1$  καλείται σταθερό, ενώ το  $\Sigma$  κινητό. Μία κίνηση που αναφέρεται στο  $\Sigma_1$  θα καλείται απόλυτη, ενώ η ίδια κίνηση στο  $\Sigma$  θα καλείται σχετική.

Τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  παρακολουθούν την κίνηση του  $\Sigma$  του οποίου η γωνιακή ταχύτητα προς  $\Sigma_1$  είναι  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ . Συνεπώς, τα διανύσματα αυτά μεταβάλλουν διεύθυνση συναρτήσει του χρόνου. Ας καλέσουμε με  $\Lambda$  το άκρο του μοναδιαίου διανύσματος  $\mathbf{i}$  πάνω στον  $Ox$ , δηλαδή  $\mathbf{i} = O\Lambda = \mathbf{r}_\Lambda$ . Τότε με βάση αυτά που έχουν ήδη αναπτυχθεί ισχύει

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_\Lambda = \mathbf{u}_\Lambda = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\Lambda = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \quad (2.90)$$

και ανάλογα

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}. \quad (2.91)$$

Αν  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  είναι οι συντεταγμένες της γωνιακής ταχύτητας  $\boldsymbol{\omega}$  στο κινητό σύστημα  $\Sigma$ , τότε μέσω των εξισώσεων (2.90) και (2.91), εξάγουμε

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \mathbf{j} - \omega_y \mathbf{k} \quad (2.92)$$

και καθ' όμοιο τρόπο

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega_x \mathbf{k} - \omega_z \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega_y \mathbf{i} - \omega_x \mathbf{j}. \quad (2.93)$$

Οι εξισώσεις (2.92) και (2.93) είναι γνωστές ως εξισώσεις Poisson.

Έστω  $M(x,y,z)$  τυχόν σημείο αναφερόμενο στο κινητό σύστημα  $\Sigma$ . Αν καλέσουμε με

$$OM = \mathbf{r}, \quad O_1M = \mathbf{r}_1, \quad O_1O = \mathbf{s},$$

τότε ισχύουν οι εξής διανυσματικές εξισώσεις:

$$\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{s} + \mathbf{r}, \quad (2.94)$$

*Handwritten:  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$*

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{s}} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (2.95)$$

*Handwritten:  $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{s}} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$*

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{s}} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + 2(\dot{x}\dot{y}\mathbf{j} + \dot{y}\dot{z}\mathbf{k} + \dot{z}\dot{x}\mathbf{i}), \quad (2.96)$$

*Handwritten:  $\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{s}} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + 2(\dot{x}\dot{y}\mathbf{j} + \dot{y}\dot{z}\mathbf{k} + \dot{z}\dot{x}\mathbf{i})$*

Γιά να αντιληφθούμε την σημασία των σχέσεων αυτών θα παρακολουθήσουμε στο εξής, εκτός του κινητού σημείου M, και ένα σημείο m στερεά συνδεδεμένο με το σύστημα Σ με το οποίο το κινούμενο σημείο M συμπίπτει κατά την θεωρούμενη στιγμή t. Το σημείο m έχει στο σύστημα Σ τις ίδιες συντεταγμένες με το M, αλλά σε αντίθεση με το M τις διατηρεί αμετάβλητες. Την ταχύτητα του m στο σταθερό σύστημα Σ<sub>1</sub> ευρίσκουμε με βάση την εξίσωση (2.95) όπως παρακάτω:

$$\mathbf{v}_m = \dot{\mathbf{s}} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.97)$$

Αυτή η ταχύτητα καλείται **μετοχική ταχύτητα** του M και αποτελεί την μιά από τις συνιστώσες της ταχύτητάς του. Η μετοχική ταχύτητα του M είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου m του στερεού Σ, με το οποίο το M συμπίπτει κατά την θεωρούμενη χρονική στιγμή\* είναι επομένως η ταχύτητα με την οποία το M μετέχει στην κίνηση του Σ και συμβολίζεται με  $\mathbf{v}_\mu$ .

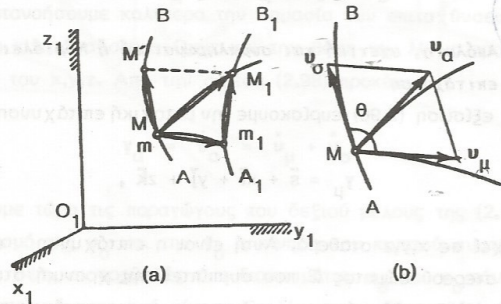
Η άλλη συνιστώσα της ταχύτητας  $\dot{\mathbf{r}}_1 = (d\mathbf{r}_1 / dt)$  καλείται **σχετική ταχύτητα** του M και συμβολίζεται με  $\mathbf{v}_\sigma$ . Η  $\mathbf{v}_\sigma$  οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της θέσης (x,y,z) του M ως προς το σύστημα Σ με τα s, i, j, k σταθερά. Με βάση τις εξισώσεις (2.95) και (2.97) ευρίσκουμε

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_\mu + \mathbf{v}_\sigma, \quad (2.98)$$

όπου η  $\mathbf{v}_a$ , που αναφέρεται στο στάθερο σύστημα, είναι η **απόλυτη ταχύτητα**. Επομένως συμπεραίνουμε ότι η απόλυτη ταχύτητα του M είναι το διανυσματικό άθροισμα της σχετικής ταχύτητας και της μετοχικής.

Γιά να αντιληφθούμε καλύτερα την σημασία των παραπάνω ως θεωρήσουμε σε μιά χρονική στιγμή t το κινητό σημείο M όπως στο σχήμα 2.37. Έστω ότι στο χρονικό διάστημα Δt η σχετική μετακίνηση του M επί της τροχιάς του AB

ως προς το κινητό σύστημα  $\Sigma$  (που δεν παριστάνεται στο σχήμα 2.37) καθορίζεται με το διάνυσμα  $\mathbf{MM}^*$ . Στο ίδιο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  η καμπύλη (AB) έχει κινηθεί μαζί με το κινητό σύστημα  $Oxyz$  στην νέα θέση  $A_1B_1$ . Συγχρόνως, το σημείο  $m$  στην καμπύλη AB (με το οποίο την χρονική στιγμή  $t$  συμπίπτει το M) εκτελεί μία μετοχική μετακίνηση  $\mathbf{mm}_1 = \mathbf{Mm}_1$  (Σχ. 2.37a). Έτσι,



(Σχήμα 2.37(a,b): Σχετική μετακίνηση σημείου κινούμενου στερεού σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

με την συνισταμένη των μετακινήσεων το σημείο M θα μετακινηθεί στην νέα θέση  $M_1$ , όπου το διάνυσμα  $\mathbf{MM}_1$  είναι η απόλυτη μετακίνηση στο διάστημα  $\Delta t$ . Είναι όμως

$$\mathbf{MM}_1 = \mathbf{Mm}_1 + \mathbf{m}_1M_1$$

και

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{MM}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Mm}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}_1M_1}{\Delta t}$$

δηλαδή

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\sigma + \mathbf{v}_\mu .$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{v}_\alpha$ ,  $\mathbf{v}_\sigma$ ,  $\mathbf{v}_\mu$  είναι εφαπτομενικά στις αντίστοιχες τροχιές (Σχ. 2.37b). Με βάση το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων του σχήματος 2.37b ευρίσκουμε το μέτρο της απόλυτης ταχύτητας  $v_\alpha$  όταν γνωρίζουμε την γωνία  $\theta$ , δηλαδή

$$v_\alpha = (v_\sigma^2 + v_\mu^2 + 2v_\sigma v_\mu \cos\theta)^{\frac{1}{2}} .$$

### 2.13.2 Απόλυτη, σχετική και συμπληρωματική ή Κοριόλειος (Coriolis) επιτάχυνση

Από την εξίσωση (2.96) ευρίσκουμε την μετοχική επιτάχυνση του σημείου M

$$\boldsymbol{\gamma}_\mu = \ddot{\mathbf{s}} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} , \quad (2.99)$$

που αντιστοιχεί σε  $x, y, z$  σταθερά. Αυτή είναι η επιτάχυνση ενός σημείου  $m(x, y, z)$  του στερεού σώματος  $\Sigma$  που συμπύπτει την χρονική στιγμή  $t$  με το κινητό σημείο  $M'$  δηλαδή, είναι η επιτάχυνση με την οποία το σημείο M μετέχει στην κίνηση του  $\Sigma$ . Επίσης, από την εξίσωση (2.96) ευρίσκουμε την σχετική επιτάχυνση του M

$$\boldsymbol{\gamma}_\sigma = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (2.100)$$

η οποία αποτελεί την συνιστώσα της επιτάχυνσης την οφειλόμενη αποκλειστικά στην μεταβολή της θέσης του  $M(x, y, z)$  ως προς  $\Sigma$  με σταθερά τα  $\mathbf{s}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Από την (2.96) ευρίσκουμε ένα τρίτο όρο, που καλείται **συμπληρωματική ή κοριόλειος επιτάχυνση** του M, ο οποίος είναι

$$\boldsymbol{\gamma}_C = 2(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) . \quad (2.101)$$

Η τελευταία εξίσωση με βάση τις σχέσεις Poisson καταλήγει

$$\boldsymbol{\gamma}_C = 2[\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})] = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\sigma) . \quad (2.102)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε την απόλυτη επιτάχυνση  $\gamma_a$  του  $M$  ως διανυσματικό άθροισμα των τριών επιταχύνσεων (σχετικής, μετοχικής και κοριόλειου):

$$\gamma_a = \gamma_\sigma + \gamma_\mu + \gamma_c . \quad (2.103)$$

Το θεώρημα Coriolis καθορίζει (βάσει της (2.102)) ότι η κοριόλειος επιτάχυνση  $\gamma_c$  ισούται προς το διπλάσιο του εξωτερικού γινομένου της γωνιακής ταχύτητας του κινητού συστήματος  $\Sigma$  επί την σχετική ταχύτητα του κινητού ως προς αυτό το σύστημα.

Γιά να κατανοήσουμε καλύτερα την σημασία των επιταχύνσεων αυτών ας θεωρήσουμε το κινητό σύστημα  $Oxyz$  και την θέση του  $M$  ως προς αυτό με τις συντεταγμένες του  $x, y, z$ . Από την σχέση (2.98) προκύπτει

$$\gamma_a = \ddot{u}_a = \ddot{u}_\mu + \ddot{u}_\sigma . \quad (2.104)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τις παραγώγους του δεξιού μέλους της (2.102). Αφού για τον καθορισμό της  $u_\sigma$  και την  $\gamma_\sigma$  η κίνηση του κινητού συστήματος  $\Sigma$  δεν λαμβάνεται υπ' όψη, οι προβολές των διανυσμάτων  $u_\sigma$  και  $\gamma_\sigma$  πάνω στους άξονες του  $Oxyz$  σε μία μετοχική κίνηση θα δίνονται από τις εξής διανυσματικές εξισώσεις:

$$u_\sigma = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k , \quad \gamma_\sigma = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k . \quad (2.105)$$

Ο περαιτέρω υπολογισμός εξαρτάται από το είδος της μετοχικής κίνησης. Έτσι, π.χ., αν η μετοχική κίνηση είναι μία μεταφορά σχετικά με το σύστημα  $Ox_1y_1z_1$ , τότε προφανώς σε κάθε θέση του  $M$  θα ισχύουν

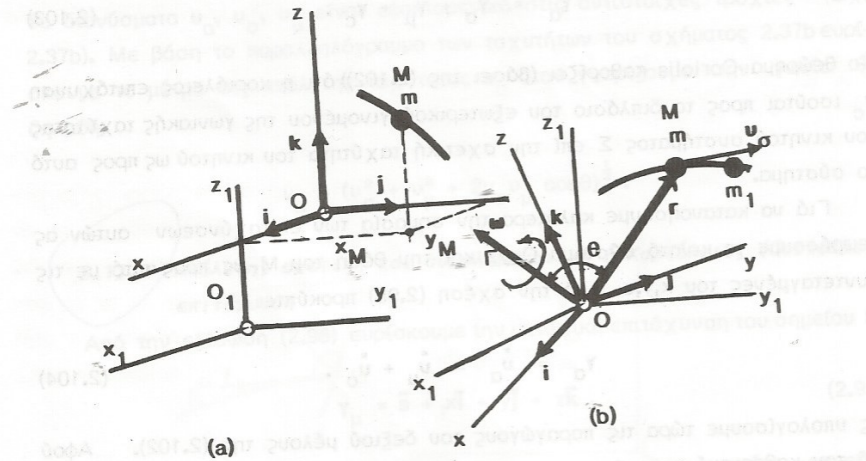
$$u_\mu = u_0 , \quad \gamma_\mu = \gamma_0 , \quad (2.106)$$

όπου  $u_0$  και  $\gamma_0$  είναι η ταχύτητα και επιτάχυνση του  $O$  (Σχ. 2.38a). Αλλά κατά την μεταβατική κίνηση του  $Oxyz$  τα  $i, j, k$  παραμένουν σταθερά και τότε προκύπτουν

$$\ddot{u}_\sigma = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k = \gamma_\sigma , \quad \dot{u}_\mu = \dot{u}_0 = \gamma_0 = \gamma_\mu ,$$

οπότε η σχέση (2.103) παίρνει την μορφή

$$\gamma_a = \gamma_\mu + \gamma_\sigma \quad (2.107)$$



Σχήμα 2.38(a,b): Γενική περίπτωση σχετικής κίνησης στερεού.

Θεωρήσουμε τώρα την γενική περίπτωση κατά την οποία η μετοχική κίνηση, δηλαδή η κίνηση του  $\Sigma$ , είναι περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  περί τον στιγμιαίο άξονα  $OG$  (Σχ. 2.38b). Στην περίπτωση αυτή τα μοναδιαία διανύσματα  $i, j, k$  δεν είναι πλέον σταθερά, αλλά μεταβάλλουν διευθύνσεις. Επομένως, από τις ισχύουσες για κάθε μετοχική κίνηση σχέσεις (2.105) προκύπτουν:

$$\dot{\mathbf{u}}_\sigma = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) = \gamma_\sigma + \gamma_{\mathbf{i}} \quad (2.108)$$

Ο όρος  $\gamma_{\mathbf{i}}$ , με βάση τις σχέσεις Poisson, παίρνει την μορφή

$$\gamma_{\mathbf{i}} = \omega \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) = \omega \times \mathbf{u}_\sigma, \quad (2.109)$$

δηλαδή τελικά ευρίσκουμε την διανυσματική σχέση



$$\dot{\mathbf{u}}_{\sigma} = \boldsymbol{\gamma}_{\sigma} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{\sigma} \quad (2.110)$$

Στην τελευταία εξίσωση η  $\boldsymbol{\gamma}_{\sigma}$  παριστάνει την μεταβολή του  $\mathbf{u}_{\sigma}$  μόνο στην σχετική κίνηση του M και η  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{\sigma}$  την μεταβολή του  $\mathbf{u}_{\sigma}$  κατά την περιστροφή του με το σύστημα Oxyz περί τον ΟΓ, δηλαδή στην μετοχική κίνηση (Σχ. 2.38b).

Κατά την περιστροφική κίνηση, η ταχύτητα και επιτάχυνση ενός σημείου m, σταθερού ως προς το σύστημα Oxyz, καθορίζονται από τις σχέσεις (2.81) και (2.84), δηλαδή:

$$\mathbf{u}_{\mu} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\mu} = \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{\mu} \quad (2.111)$$

όπου  $\boldsymbol{\Gamma}$  είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου m, που την χρονική στιγμή t συμπύπτει με την διανυσματική ακτίνα του σημείου M. Από την πρώτη των (2.111) προκύπτει

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mu} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\Gamma}} \quad (2.112)$$

Παρατηρούμε όμως ότι η  $\dot{\mathbf{u}}_{\mu}$  είναι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (2.104) που καθορίζει την απόλυτη επιτάχυνση του M στο σύστημα  $Ox_1y_1z_1$ . επομένως, το  $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$  στην (2.112) παριστάνει την ταχύτητα του M στο ίδιο σύστημα, δηλαδή την απόλυτη ταχύτητα του M

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{v}_a = \mathbf{u}_{\mu} + \mathbf{u}_{\sigma}$$

Επειδή ισχύει

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\epsilon},$$

η σχέση (2.112) καταλήγει στην

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mu} = \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{\mu} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{\sigma} \quad (2.113)$$

Η εξίσωση (2.113) με βάση τις (2.111) παίρνει την μορφή

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mu} = \boldsymbol{\gamma}_{\mu} + \boldsymbol{\gamma}_2, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{\sigma} \quad (2.114)$$

Η  $\gamma_{\mu}$  δίνει την μεταβολή της  $u_{\mu}$  μόνο στην μετοχική κίνηση, γιατί υπολογίσθηκε ως επιτάχυνση του  $m$  σταθερά συνδεδεμένου με το Oxyz- σύστημα. Η  $\gamma_2$  παρέχει την μεταβολή της  $u_{\mu}$  στην σχετική κίνηση του  $M$  από την θέση  $m$  στην θέση  $m_1$ , όπου η  $u_{\mu}$  είναι διαφορετική. Στην ακόμη γενικώτερη περίπτωση της μετοχικής κίνησης, δηλαδή της γενικής κίνησης του ελεύθερου σώματος, οι (2.108) και (2.114) παραμένουν οι ίδιες με την διαφορά ότι στην (2.114) η  $\gamma_{\mu}$  θα υπολογισθεί βάσει της (2.96). Η εξίσωση (2.104) με βάση τις (2.108), (2.114) και (2.109) γίνεται

$$\gamma_a = \gamma_{\mu} + \gamma_{\sigma} + \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_{\mu} + \gamma_{\sigma} + \gamma_C, \quad (2.115)$$

όπου

$$\gamma_C = \gamma_1 + \gamma_2 = 2(\omega \times u_{\sigma}). \quad (2.116)$$

Η  $\gamma_C$ , που χαρακτηρίζει την μεταβολή του διανύσματος  $u_{\sigma}$  στην μετοχική κίνηση και την μεταβολή του διανύσματος  $u_{\mu}$  στην σχετική κίνηση, είναι η συμπληρωματική ή κοριόλειος επιτάχυνση του  $M$ . Ειδικά στην περίπτωση που η μετοχική κίνηση είναι μεταφορά ισχύει  $\omega = 0$  και επομένως  $\gamma_C = 0$ . Γιά τον υπολογισμό της  $\gamma_{\sigma}$  η κίνηση του κινητού συστήματος Oxyz μπορεί να ληφθεί υπ' όψη και επομένως η  $\gamma_{\sigma}$  υπολογίζεται με βάση την θεωρία της κινηματικής του υλικού σημείου. Γιά τον υπολογισμό της  $\gamma_{\mu}$  η σχετική κίνηση του  $M$  μπορεί να ληφθεί υπ' όψη και επομένως η  $\gamma_{\mu}$  υπολογίζεται ως επιτάχυνση σημείου στερεού σώματος σταθερά συνδεδεμένου με το Oxyz και κινούμενου μαζί του, δηλαδή με βάση την θεωρία της κινηματικής του στερεού σώματος. Η κοριόλειος επιτάχυνση υπολογίζεται ως το διπλάσιο του εξωτερικού γινομένου της γωνιακής ταχύτητας της μετοχικής κίνησης και της σχετικής ταχύτητας του σημείου. Με βάση το σχήμα 2.38b η αλγεβρική τιμή της  $\gamma_C$  προκύπτει

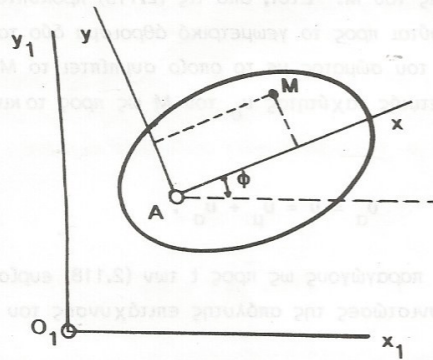
$$\gamma_C = 2\omega^2 r \sin\theta. \quad (2.117)$$

Το διάνυσμα  $\gamma_C$  έχει την ίδια φορά με το  $\omega \times u_{\sigma}$ , δηλαδή είναι κάθετο προς το επίπεδο των  $\omega, u_{\sigma}$  με φορά τέτοια ώστε το σύστημα  $\omega, u_{\sigma}, \gamma_C$  να είναι δεξιόστροφο (Σχ. 2.38). Από την σχέση (2.117) παρατηρούμε ότι η  $\gamma_C$  μηδενίζεται όταν:

- α)  $\omega = 0$ , δηλαδή όταν η μετοχική κίνηση είναι μεταβατική ή όταν η  $\omega$  της περιστροφής σε κάποια χρονική στιγμή μηδενίζεται.
- β)  $v_O = 0$ , δηλαδή όταν δεν υπάρχει σχετική κίνηση ή όταν η  $v_O$  γίνεται μηδέν σε κάποια χρονική στιγμή, και
- γ)  $\theta = 0$  ή  $\theta = \pi$ , δηλαδή όταν η σχετική κίνηση είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής της μετοχικής κίνησης ή όταν η  $v_O$  είναι παράλληλη στον άξονα αυτόν σε κάποια χρονική στιγμή.

**2.13.3 Επίπεδη κίνηση**

Ειδικά στην επίπεδη κίνηση, δηλαδή στην κίνηση σώματος παράλληλα προς σταθερό επίπεδο  $Ox_1y_1$  (Σχ. 2.39), η κίνηση του σώματος είναι ως γνωστό πλήρως καθορισμένη με τις συντεταγμένες  $x_{1A}, y_{1A}$  του πόλου και την γωνία  $\phi$  περιστροφής περί τον πόλο. Το κινητό σύστημα  $Axy$  είναι στερεά συνδεδεμένο με το σώμα και κινείται όπως φαίνεται στο σχήμα 2.39.



Σχήμα 2.39: Επίπεδη κίνηση στερεού σώματος.

Αν ένα σημείο  $M$  κινείται στο επίπεδο  $Axy$  η θέση του στο σώμα καθορίζεται με τις σχετικές συντεταγμένες  $x_M, y_M$  που μεταβάλλονται με τον χρόνο. Οι  $\dot{x}_M, \dot{y}_M$  καθορίζουν τις συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας του  $M$  ως προς παρατηρητή κινούμενον με το σώμα. Έτσι, παίρνοντας και τις  $\ddot{x}_M, \ddot{y}_M$  ευρίσκουμε τις συνιστώσες της σχετικής επιτάχυνσης του  $M$ . Οι απόλυτες συντεταγμένες του  $M$  προκύπτουν ως προς το σταθερό σύστημα όπως παρακάτω:

$$x_1 = x_{1A} + x_M \cos\phi - y_M \sin\phi$$

$$y_1 = y_{1A} + y_M \sin\phi + y_M \cos\phi. \quad (2.118)$$

Οι συνιστώσες της απόλυτης ταχύτητας του M προκύπτουν από παραγωγή προς t των (2.118), δηλαδή είναι

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_{1A} - (x_M \sin\phi + y_M \cos\phi) \dot{\phi} + \dot{x}_M \cos\phi - \dot{y}_M \sin\phi, \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_{1A} + (x_M \cos\phi - y_M \sin\phi) \dot{\phi} + \dot{x}_M \sin\phi + \dot{y}_M \cos\phi. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Οι δύο πρώτοι όροι κάθε μιάς από αυτές τις εξισώσεις προκύπτουν θεωρώντας τα  $x_M$  και  $y_M$  ως σταθερές στις διαφοριζόμενες εξισώσεις (2.118) και παριστάνουν τις συνιστώσες της ταχύτητας εκείνου του σημείου του σώματος με το οποίο το κινητό σημείο M συμπίπτει στην θεωρούμενη χρονική στιγμή. Οι δύο τελευταίοι όροι των (2.119) παριστάνουν τις προβολές στους σταθερούς άξονες της σχετικής ταχύτητας του M. Έτσι, από τις (2.119) προκύπτει ότι η απόλυτη ταχύτητα του M ισούται προς το γεωμετρικό άθροισμα δύο ταχυτήτων, της ταχύτητας του σημείου του σώματος με το οποίο συμπίπτει το M (μετοχική ταχύτητα  $v_\mu$ ) και της σχετικής ταχύτητας  $v_\sigma$  του M ως προς το κινούμενο σώμα. Επομένως, ισχύει

$$v_a = v = v_\mu + v_\sigma.$$

Παίρνοντας τις δεύτερες παραγώγους ως προς t των (2.118) ευρίσκουμε στους σταθερούς άξονες τις συνιστώσες της απόλυτης επιτάχυνσης του M ως εξής:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{x}_{1A} - (x_M \sin\phi + y_M \cos\phi) \ddot{\phi} - (x_M \cos\phi - y_M \sin\phi) \dot{\phi}^2 - \\ &\quad - 2(\dot{x}_M \sin\phi + \dot{y}_M \cos\phi) \dot{\phi} + \ddot{x}_M \cos\phi - \ddot{y}_M \sin\phi, \\ \ddot{y}_1 &= \ddot{y}_{1A} - (x_M \cos\phi - y_M \sin\phi) \ddot{\phi} - (x_M \sin\phi + y_M \cos\phi) \dot{\phi}^2 + \\ &\quad + 2(\dot{x}_M \cos\phi - \dot{y}_M \sin\phi) \dot{\phi} + \ddot{x}_M \sin\phi + \ddot{y}_M \cos\phi. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Οι τρεις πρώτοι όροι κάθε μιάς από τις τελευταίες εξισώσεις προκύπτουν θεωρώντας τα  $x_M$  και  $y_M$  ως σταθερές κατά την διαφορίαση. Επομένως, παριστάνουν τις συνιστώσες της επιτάχυνσης εκείνου του σημείου του σώματος με το οποίο το M συμπίπτει στην δεδομένη χρονική στιγμή (μετοχική επιτάχυνση

$\gamma_\mu$ ). Οι δύο τελευταίοι όροι στις (2.120) οφείλονται στην σχετική κίνηση του  $M$  ως προς το σώμα. Μπορούμε να χωρίσουμε αυτούς τους όρους σε δύο ομάδες:

- i) τους όρους που περιέχουν τα  $\ddot{x}_M$  και  $\ddot{y}_M$  και που παριστάνουν τις προβολές στους σταθερούς άξονες της σχετικής επιτάχυνσης  $\gamma_O$  του σημείου, και
- ii) τους όρους που έχουν τον συντελεστή 2 και παριστάνουν την καλούμενη συμπληρωματική ή κοριόλειο επιτάχυνση  $\gamma_C$ .