



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική II

Ενότητα 2: Νόμος Gauss, Κίνηση σε Ηλεκτρικό Πεδίο

Ιωάννης Γκιάλας

Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άσκηση συνολικό φορτίο

εκτρικό φορτίο Q είναι κατανομημένο σε σφαιρικό όγκο ακτίνας R με πυκνότητα φορτίου ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο, δηλαδή $\rho(r) = A \cdot r^2$. Υπολογίστε τη σταθερά A και στη συνέχεια βρείτε την ολική ενέργεια της κατανομής.

ση

συνολικό φορτίο Q στη σφαίρα είναι:

$$Q = \int \rho(r) dV = \int_0^R A r^2 4\pi r^2 dr = \left. \frac{1}{5} 4\pi A r^5 \right]_0^R = \frac{4\pi}{5} A R^5$$

και λύνοντας ως προς A :

$$A = \frac{5Q}{4\pi R^5}$$

Ερώτηση σύνθεση ηλεκτρικών πεδίων

- Τέσσερα ίσα φορτία αλλά διαφορετικού προσήμου τοποθετούνται στις κορυφές τετραγώνου. Πια διεύθυνση των φορτίων θα προκαλέσει ηλεκτρικό πεδίο με την μεγαλύτερη ένταση στο κέντρο του τετραγώνου;
- 1) Και τα τέσσερα φορτία θετικά. 2) Και τα τέσσερα φορτία αρνητικά. 3) Τρία φορτία θετικά και ένα αρνητικό. 4) Δυο φορτία θετικά και δυο αρνητικά. 5) Τρία φορτία αρνητικά και ένα θετικό.

Άσκηση N. Coulomb

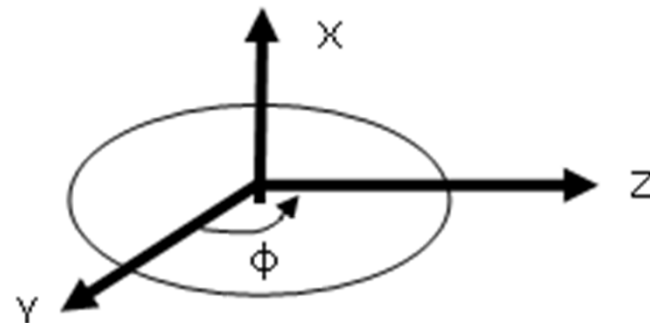
- Το σωματίδιο α είναι ένας πυρήνας ατόμου ηλίου. Αποτελείται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Να συγκριθεί η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο σωματίων α με την βαρυτική έλξη μεταξύ τους. (Η παγκόσμια βαρυτική σταθερά έχει την τιμή $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$).

Άσκηση N. Coulomb

- Δύο σφαίρες από φελιζόλ, μάζας 10 g η καθεμία, κρέμονται με αβαρές νήμα μήκους 120 cm, από το ίδιο σημείο. Οι σφαίρες είναι φορτισμένες με το ίδιο φορτίο q και ισορροπούν σε απόσταση 40 cm μεταξύ τους. Βρείτε το φορτίο

Άσκηση Ηλεκτρικού πεδίου συνεχούς κατανομής φορτίου

- Ένας πολύ λεπτός μονωτικός δακτύλιος ακτίνας R φέρει γραμμική κατανομή φορτίου $\lambda(\phi)$ με πυκνότητα που μεταβάλλεται συναρτήσει της γωνίας ως όπου λ_0 είναι μια θετική σταθερά. Να βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου .



Λύση

- Φορτίο από το ds

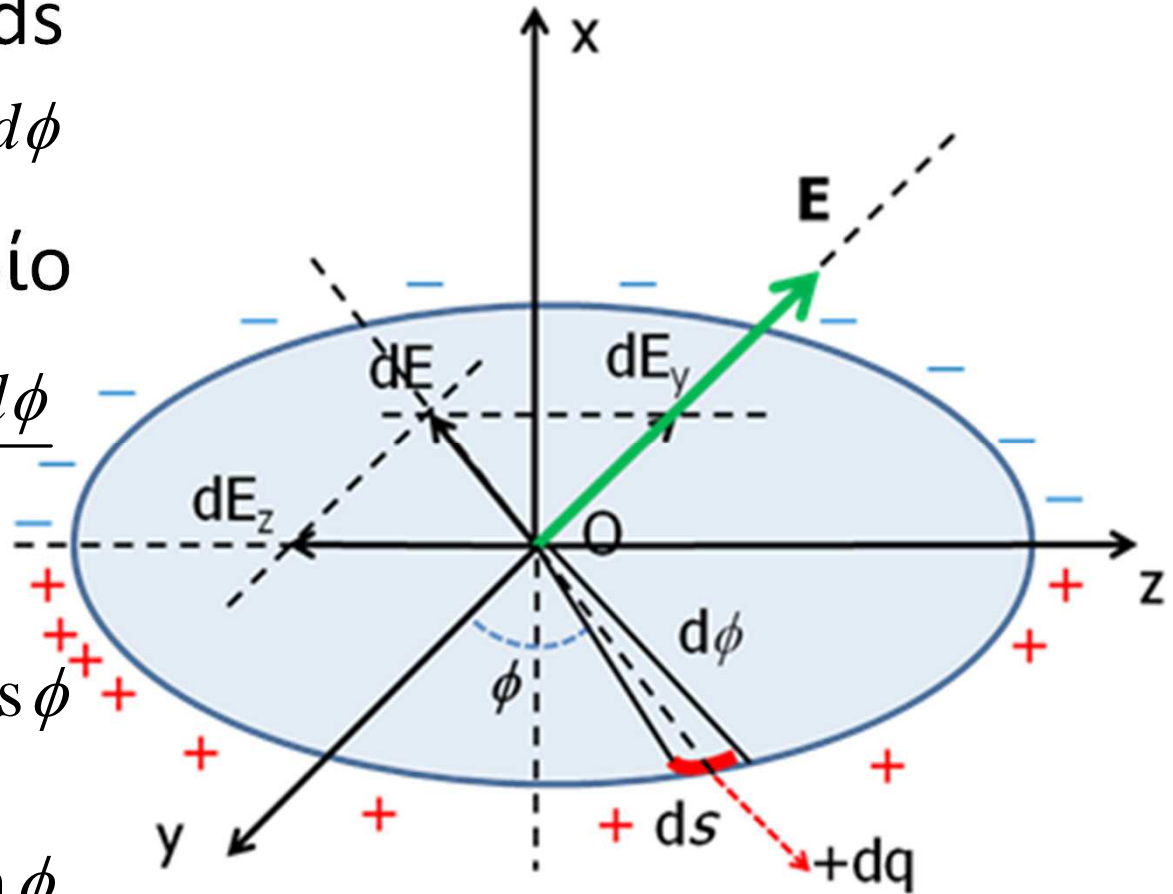
$$dq = \lambda ds = \lambda_0 \cos \phi R d\phi$$

- Δημιουργεί πεδίο

$$dE = k \frac{dq}{R^2} = k \frac{\lambda_0 R \cos \phi d\phi}{R^2}$$

$$dE_y = -k \frac{\lambda_0 \cos \phi d\phi}{R} \cos \phi$$

$$dE_z = -k \frac{\lambda_0 \cos \phi d\phi}{R} \sin \phi$$



- Βρίσκουμε τις x, y συνιστώσες του πεδίου

$$E_y = -k \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = -k \frac{\lambda_0 \pi}{R}$$

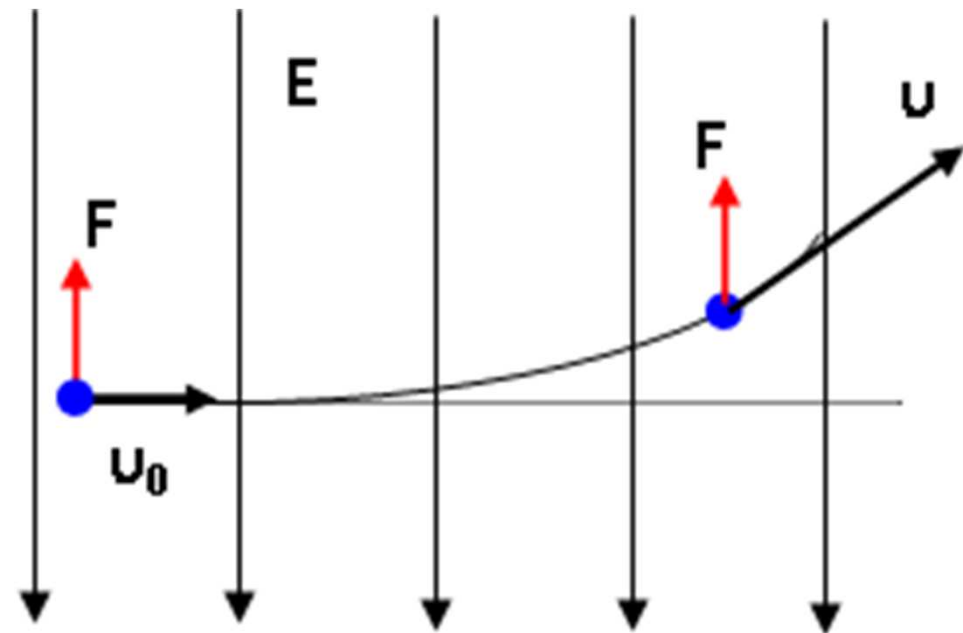
$$E_z = -k \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi = 0$$

- Συνολικά

$$E = k \frac{\lambda_0 \pi}{R} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \hat{j}$$

Άσκηση κίνηση σε ηλεκτρικό πεδίο

- Ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα u_0 μπαίνει σε περιοχή ομοιόμορφου ηλεκτρικού πεδίου E . Να περιγραφεί η κίνηση του αν (α) η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν και (β) αν η αρχική ταχύτητα είναι κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο.



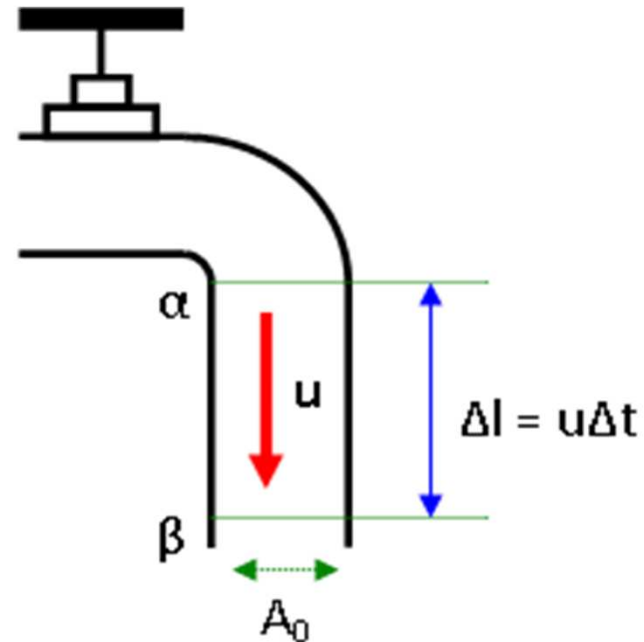
Σχήμα άσκησης 1.7

Άσκηση Φορτίο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο

1. Ποιο φορτίο πρέπει να φέρει σωματίδιο μάζας 0.1 g, έτσι ώστε να παραμένει ακίνητο μέσα στο εργαστήριο, όταν αφεθεί σε ηλεκτρικό πεδίο που έχει φορά προς τα κάτω και ένταση $100 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$;

Ροή διανυσματικού πεδίου

- Διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων
- Ροή νερού από βρύση
- Ροή διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων



Σχήμα 1.6.α Επεξηγηματικό σχήμα για την έννοια της ροής νερού από μία βρύση. Τα σύμβολα επεξηγούνται στο κείμενο

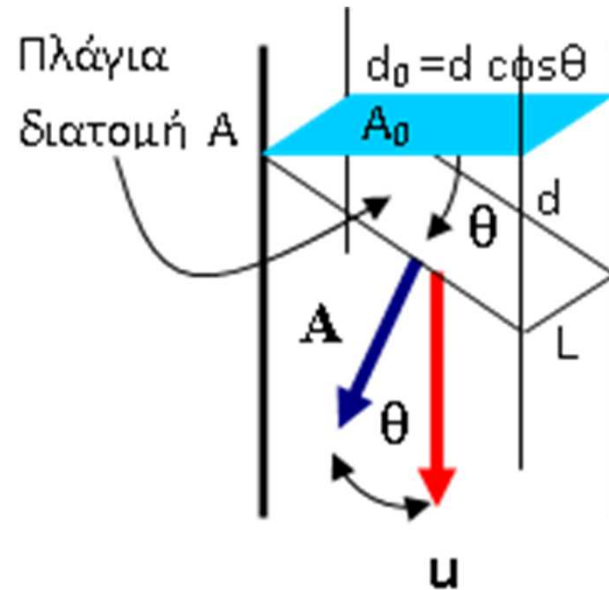
$$\Phi_u = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A_0 \Delta l}{\Delta t} = \frac{A_0 \cdot u \cdot \Delta t}{\Delta t} = A_0 \cdot u$$

Ροή από πλάγια τομή

Περνάει η ίδια ποσότητα νερού σε dt από κάθετη και πλάγια τομή.

- $A_0 = Ld_0 = Ld \cos\theta = A \cos\theta$

$$\Phi_u = A_0 u = A \cos\theta \cdot u = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$



Σχήμα 1.6.β Επεξήγηση της ροής νερού μέσα από πλάγια διατομή του σωλήνα. Τα σύμβολα

Διάνυσμα επιφάνειας

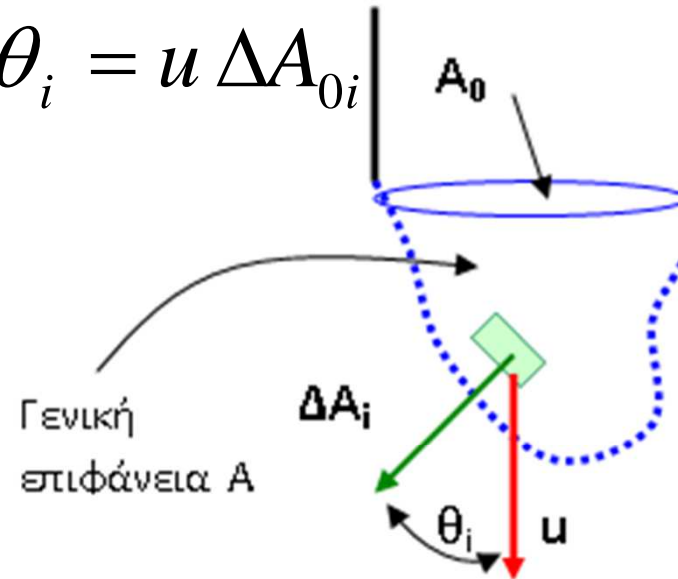
Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα σε μία επίπεδη επιφάνεια. Το διάνυσμα έχει διεύθυνση την κάθετο στην επιφάνεια. Μέτρο το εμβαδόν της επιφάνειας. Η φορά εξαρτάται από τον τύπο του προβλήματος. Για τις δικές μας ανάγκες στον ηλεκτρομαγνητισμό, όταν η επιφάνεια είναι κλειστή, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια ενός μπαλονιού, η φορά του διανύσματος μίας στοιχειώδους επιφάνειας (που είναι επίπεδη) είναι από μέσα προς τα έξω.

Ροή νερού από τυχαία επιφάνεια

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{A}_i = u \Delta A_i \cos \theta_i = u \Delta A_{0i}$$

$$\Phi_u \cong \sum_{i=1}^N \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^N u \Delta A_{0i} =$$

$$u \left(\sum_{i=1}^N \Delta A_{0i} \right) = u A_0$$

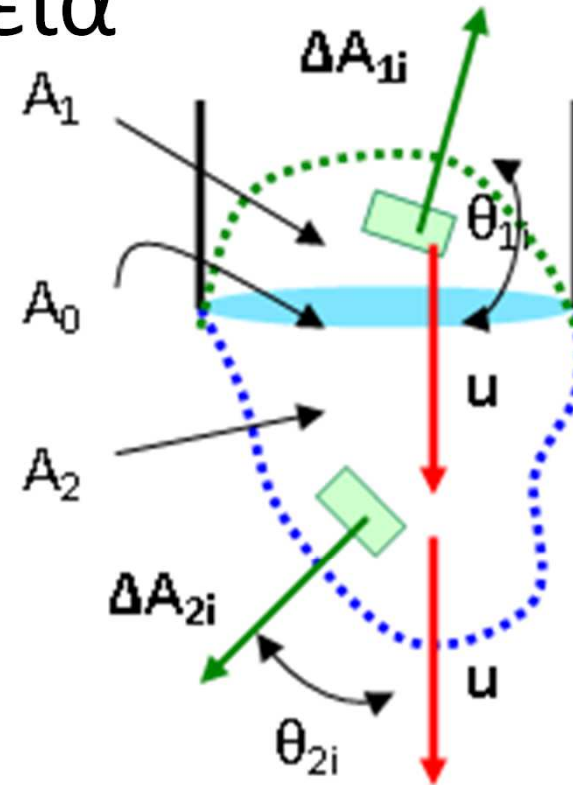


Σχήμα 1.6.γ Η ροή του νερού μέσα από μία γενική επιφάνεια. Τα σύμβολα επεξηγούνται στο κείμενο.

$$\Phi_u = \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{A}_i \right) \equiv \int_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = u \cdot A_0$$

Ροή νερού μέσα από κλειστή επιφάνεια

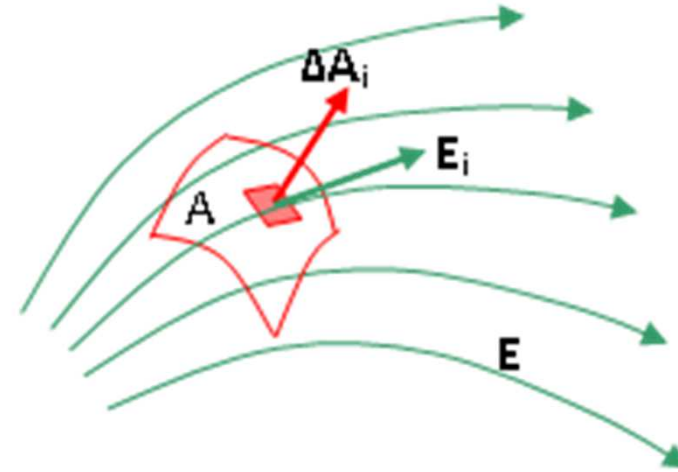
- Όσο νερό περνάει από το ένα «σουρωτήρι» περνάει και από το άλλο.
- Αν ότι μπαίνει είναι αρνητικό και ότι βγαίνει θετικό, τότε το σύνολο της ροής νερού είναι μηδέν.
- Υπάρχει περίπτωση η ροή να μην είναι μηδέν;



Σχήμα 1.6.δ Η ροή του νερού μέσα από μία κλειστή επιφάνεια A που αποτελείται από την ένωση των

Ροή ηλεκτρικού πεδίου

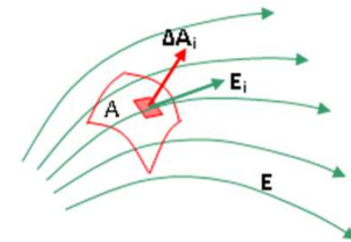
$$\Phi_E \equiv \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i \equiv \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$



Σχήμα 1.7.α Ροή ηλεκτρικού πεδίου
μέσα από επιφάνεια A .

Νόμος Gauss

- Συσχετίζει την ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μία κλειστή επιφάνεια με το συνολικό φορτίο μέσα στην επιφάνεια

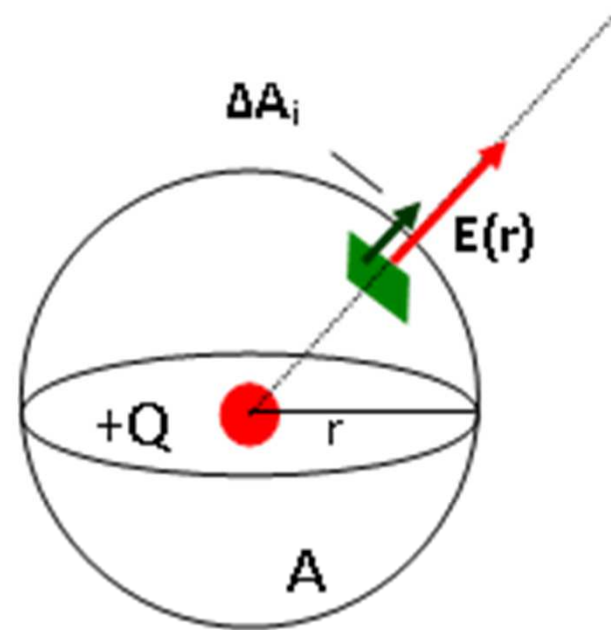


Σχήμα 1.7.α Ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσα από επιφάνεια A.

$$\Phi_E \equiv \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i \right) \equiv \oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Πώς προκύπτει ο Ν. Gauss από τον Ν. Coulomb;

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

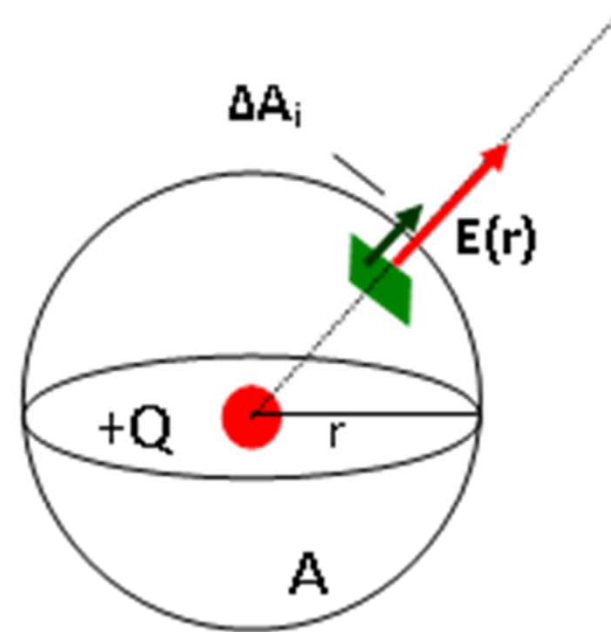


Σχήμα 1.7.β Ροή του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ένα θετικό φορτίο μέσα από μία σφαιρική

$$\Phi_E = \lim_{\substack{\Delta A_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{A}_i \right) = \lim_{\substack{\Delta A_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^N E(r) \Delta A_i \right) =$$

$$E(r) \lim_{\substack{\Delta A_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^N \Delta A_i \right) \Rightarrow$$

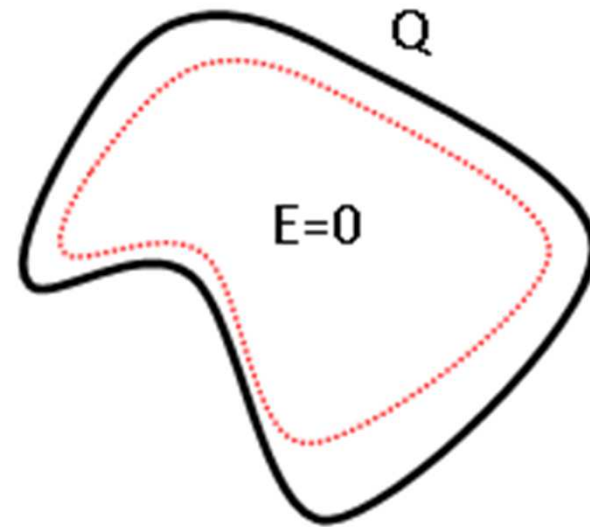
$$\Phi_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Σχήμα 1.7.β Ροή του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ένα θετικό φορτίο μέσα από μία σφαιρική

Ηλεκτρικό πεδίο μέσα σε αγωγό

Σε έναν μονωμένο αγωγό, όλη η περίσσεια φορτίου κατανέμεται στην επιφάνεια του αγωγού. Στο εσωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν.



Σχήμα 1.8 Μονωμένος αγωγός με περίσσεια φορτίου. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι η

Ερωτήσεις

- Αρνητικό φορτίο τοποθετείται στον εσωτερικό χώρο της σφαιρικής κοιλότητας ενός κοίλου μεταλλικού στερεού αντικειμένου. Το εξωτερικό του στερεού γειώνεται, συνδέοντας ένα αγώγιμο σύρμα μεταξύ του στερεού και της γης.
- a) Επάγεται επί πλέον φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του μεταλλικού αντικειμένου; Αν ναι, ποιο είναι το πρόσημο και το μέτρο του;
- b) Υπάρχει επί πλέον φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του μεταλλικού αντικειμένου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- c) Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στην κοιλότητα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- d) Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο έξω από το μεταλλικό αντικείμενο; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
- e) Θα μπορούσε κάποιος να μετρήσει ηλεκτρικό πεδίο, έξω από το μεταλλικό αντικείμενο, που να οφείλεται στο φορτίο; Είναι λογικό να ισχυριστούμε, ότι ο γειωμένος αγωγός έχει την περιοχή από φαινόμενα που οφείλονται στο φορτίο;

Απαντήσεις

- a) Ο νόμος του Gauss επιβάλλει στο εσωτερικό ενός μετάλλου το $E = 0$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει φορτίο $+Q$ να επάγεται στην εσωτερική επιφάνεια ώστε το πεδίο μέσα στο μέταλλο να είναι μηδέν.
- Άλλη λύση: Το δυναμικό στην εξωτερική (γειωμένη) επιφάνεια είναι μηδέν οπότε θα πρέπει το συνολικό φορτίο εντός να είναι μηδέν. Αυτό επιτυγχάνεται με επαγόμενο φορτίο $+Q$ στην εσωτερική επιφάνεια
- b) Η εξωτερική επιφάνεια είναι γειωμένη, οπότε δεν υπάρχει υπερβάλλον φορτίο.
- c) Θεωρούμε Γκαουσιανή σφαίρα με το $-Q$ φορτίο στο κέντρο της και ακτίνα μικρότερη από την εσωτερική ακτίνα της μεταλλικής κοιλότητας. Αυτή η σφαίρα περικλείει συνολικό φορτίο $-Q$ συνεπώς υπάρχει ηλεκτρική ροή στο εσωτερικό της και άρα υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στην κοιλότητα.
- d) Στην ηλεκτροστατική κατάσταση το $E = 0$ εντός αγωγού. Μια γκαουσιανή σφαίρα με φορτίο στο κέντρο της και ακτίνα μεγαλύτερη από την εξωτερική ακτίνα του μεταλλικού αγωγού περικλείει μηδενικό συνολικό φορτίο ($+Q$ στο κέντρο και $-Q$ στην εσωτερική επιφάνεια του μετάλλου) συνεπώς από το νόμο του Gauss η ηλεκτρική ροή θα είναι μηδέν και επομένως και το εκτός του μετάλλου.
- e) Όχι, το $E = 0$ στην περιοχή αυτή. Το φορτίο στο εσωτερικό έχει θωρακιστεί από τον γειωμένο αγωγό.

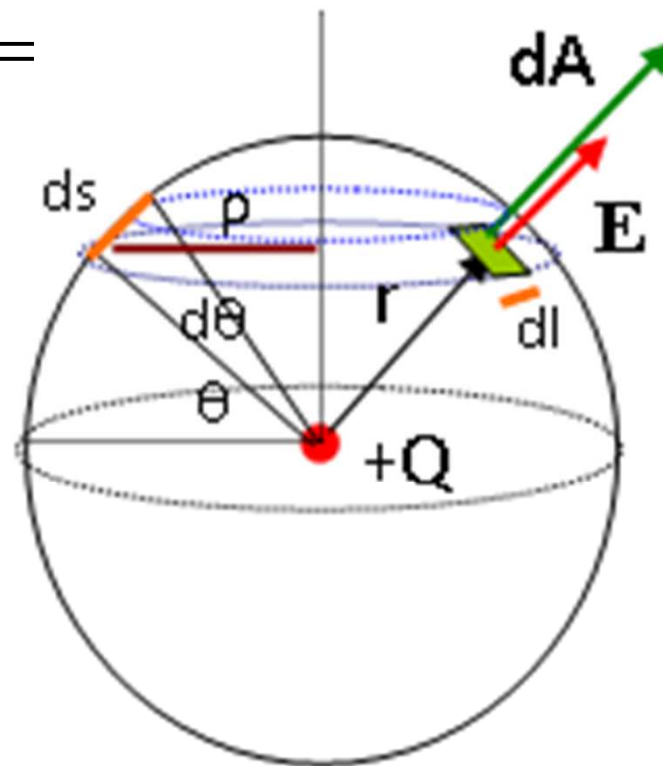
Παράδειγμα: Ξαναυπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss.

$$\Phi_E \cong \sum_{i=1}^N \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^N E \cdot \Delta A_i =$$

$$E \left(\sum_{i=1}^N \Delta A_i \right) \cong$$

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



Σχήμα παραδείγματος 1.4.1

Εφαρμογή νόμου Gauss

Βλέπουμε ότι με ένα πολύ απλό υπολογισμό καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Το κόλπο είναι μόνο να μαντέψουμε την σωστή μορφή της επιφάνειας που χρειαζόμαστε. Με τον υπολογισμό μας φθάσαμε στο μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Την κατεύθυνση την παίρνουμε από τα ποιοτικά επιχειρήματα που αναπτύξαμε στην αρχή.

Ερώτηση N. Gauss

- Σημειακό φορτίο Q είναι στο κέντρο μιας σφαιρικής γκαουσιανής επιφάνειας S . Εάν ένα δεύτερο φορτίο Q τοποθετείται ακριβώς έξω από την επιφάνεια S , η ολική ηλεκτρική ροή μέσω της σφαιρικής επιφάνειας S είναι: 1) αμετάβλητη, 2) διπλάσια, 3) η μισή και 4) καμία από αυτές

Ερώτηση κατανομή φορτίου σε αγωγό

- Ένα φορτίο Q τοποθετείται σε ένα κοίλο μεταλλικό σφαιρικό φλοιό. Πως κατανέμεται το φορτίο αυτό στον μεταλλικό αγωγό;
- 1) Μισό στην εσωτερική επιφάνεια και μισό στην εξωτερική επιφάνεια. 2) Μέρος σε κάθε επιφάνεια κατ' αντίστροφη αναλογία προς τις δυο ακτίνες. 3) Μέρος σε κάθε επιφάνεια κατά μια πιο περιπλοκή εξάρτηση από τις δυο ακτίνες από ότι στην ερώτηση (2). 4) Όλο το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια. 5) Όλο το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια.