10/3/22

Σειρές πραγματικών αριθμών

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $\quad n=1, \quad S_1 = x_1$

$n=2, \quad S_2 = x_1 + x_2$

$n=3, \quad S_3 = x_1 + x_2 + x_3$

$\vdots$

$n=n \quad S_n = x_1 + \ldots + x_n$

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n \longrightarrow$ μερικά αθροίσματα

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \longrightarrow$ όροι ακολουθίας

Για σύγκλιση σειράς:

$\lim_{n\to\infty} S_n = l \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$ (συγκλίνει)

$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \nless +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \pm\infty$ (αποκλίνει ή απειρίζεται θετικά ή αρνητικά)

Γεωμετρική:

$\sum_{n=0}^{\infty} r^2 = r^0 + r^1 + r^1 + r^2 + \ldots, \; r \in \mathbb{R}$

- $|r| \leq 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n < +\infty$
- $|r| > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n = +\infty$

$-1 \leq r \leq 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

Scanned with CamScanner

Παραδείγματα:

Συγκλίνει: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, αφού $r = \frac{1}{3} < 1$ ή $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n < +\infty$

Αποκλίνει: $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n = +\infty$, αφού $r = 5 > 1$

Θετικών ακεραίων

$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + \ldots$ ($n \to$ πάντα θετικό)

$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$n=1$, $S_1 = 1$ $\left(\frac{1(1+1)}{2} = 1\right)$

$n=2$, $S_2 = 1+2 = 3$ $\left(\frac{2(2+1)}{2} = 3\right)$

$n=3$, $S_3 = 1+2+3 = 6$

$\vdots$

$n=n$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{n(n+1)}{2} \overset{\text{μεγιστοβάθμιος}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} = +\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} n \not< +\infty = +\infty$

Scanned with CamScanner

Τηλεσκοπική

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{n-1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

P- σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

- Αν $p>1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$
- Αν $p \le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ ή $\not< +\infty$

Πχ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty$ P-σειρά

$P = 4 > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = +\infty$

$P=1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Αρμονική Ρ-σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

Για να συγκλίνει μια σειρά αρκεί η S_n να είναι γνησίως φθίνουσα και άνω φραγμένη.

Μονοτονία

$S_{n+1} < S_n \iff S_{n+1} - S_n > 0$ γνησίως φθίνουσα

Φράγμα

$|S_n| < \varepsilon$ (όχι άνω φραγμένη)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + \dots$

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 - 1 = 0$

$S_2 = \cancel{1} - \cancel{1} + 1 = 1$

$\vdots$

$S_n = \begin{cases} 1, & n = \text{άρτιος } (2K) \\ 0, & n = \text{περιττός } (2K+1) \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ (άρτιος)

$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ (περιττός) $\rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπάρχει

Άρα, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \not\to \infty$

Κριτήρια Σύγκλισης

1. Πρώτο κριτήριο σύγκλισης

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $0 \le a_n \le b_n$

Τότε:

i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

Ασκήσεις:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+k^2}$, $k \in \mathbb{R}$

$a_n = \frac{1}{n^2+k^2}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$0 \le a_n \le b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, αφού p-σειρά με $p = 2 > 1$

Από 1º Θεώρημα σύγκλισης (συγκλίνει) και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$ (από μαθηματική επαγωγή, $n! > 2^n$, $\forall\, n \geq 4$)

$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$

$b_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Γεωμετρική με $r = \frac{1}{2} < 1$, άρα $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$

Άρα από το πρώτο θεώρημα σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$, $a_n = \frac{|\cos n|}{n^3}$, $b_n = \frac{1}{n^3}$, $0 \leq a_n \leq b_n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 2004}{n^2+1}$, $a_n = \frac{10n+2004}{n^2+1}$

$a_n > \frac{10n}{n^2+1} > \frac{10n}{n^2} > \frac{10n}{n^2+n^2} > \frac{\overset{5}{\cancel{10n}}}{\cancel{2}n^{\cancel{2}}} = \frac{5}{n}$

Από 1º θεώρ. σύγκρισης

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

② Κριτήριο σύγκρισης (ή οριακό)

Έστω, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θετικών n πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$

$k \neq 0$ και $k \neq \infty$

Τότε, $\sum a_n$ και $\sum b_n$ θα συγκλίνουν και οι δύο ή θα αποκλίνουν και οι δύο:

- Αν $\boxed{k=0}$ $\sum b_n < +\infty$ τότε και $\sum a_n < +\infty$
- Αν $\boxed{k=+\infty}$ $\sum b_n = \infty$ τότε και $\sum b_n = \infty$
- Αν $\boxed{k=(0,+\infty)}$ αν $\sum b_n < +\infty$ τότε και $\sum a_n < +\infty$

Ασκήσεις:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^2+11}$, $a_n = \frac{5n+2}{n^4+11}$, $b_n = \frac{5n}{n^4} = \frac{5}{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{5n+2}{n^4+11}}{\frac{9}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(5n+2)}{3(n^4+11)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4}{5n^4} = 1 \in (0,+\infty)$$

Και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ρ-σειρά, $\rho = 3 > 1$

$\sum b_n < +\infty$ τότε και $\sum a_n < +\infty$

Scanned with CamScanner

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$, $a_n = \frac{1}{n^2-n+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \in (0,+\infty)$$

<u>και</u> $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$, ρ-σειρά , $\rho = 2 > 1$

Από 2^{o} κριτήριο σύγκρισης και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

③^{o}: Κριτήριο λόγου (D'Alembert)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, θετικών πραγματικών όρων και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

- Αν $\rho < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$
- Αν $\rho > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$
- Αν $\rho = 1$, όχι συμπέρασμα

Scanned with CamScanner

Ασκήσεις

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$, $a_n = \frac{5^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{5^n!}} = \lim \frac{n!(5^{n+1}5)}{(n+1)!\cancel{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1$$

Άρα, από κριτήριο λόγου $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{5^n+6^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}+5^{n+1}}{5^{n+1}+6^{n+1}}}{\frac{4^n+5^n}{5^n+6^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4^{n+1}+5^{n+1})(5^n+6^n)}{(5^{n+1}+6^{n+1})(4^n+5^n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot 5^n + 4^{n+1}\cdot 6^n + 5^{n+1}\cdot 5^n + 5^{n+1}\cdot 6^n}{5^{n+1}\cdot 4^n + 5^{n+1}\cdot 5^n + 6^{n+1}\cdot 4^n + 6^{n+1}\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot 5^n}{4^n\cdot 5^{n+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot 6^n}{5^{n+1}\cdot 5^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot 5^n}{6^{n+1}\cdot 4^n}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot 6^n}{5^n\cdot 6^{n+1}} = \lim \frac{4}{5} + \lim \frac{4^{n+1}\cdot 6^n}{5^{2n+1}} + \lim \frac{5^{2n+1}}{6^{n+1}\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5}\right)^n$$

Scanned with CamScanner

④ Κριτήριο Cauchy (n-ρίζας)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θετικών πραγματικών όρων και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$

⊙ Αν $\rho<1$ ⤳ συγκλίνει

⊙ Αν $\rho>1$ ⤳ αποκλίνει

⊙ Αν $\rho=1$ ⤳ όχι συμπέρασμα

Ασκήσεις

① $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}) - 1 = 1-1 = 0<1$

$\sum a_n < +\infty$

$2\sqrt{x} = x^{1/2}$

$\sqrt[n]{x^n} = x^{n/n} = x$

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

② $\sum_{n=1}^{\infty} n^{11} e^{-n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{11} e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{11}}}{\sqrt[n]{e^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{11}}}{\sqrt[n]{e^{nn}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{11}}}{e^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^{11}}{e^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

$e^0 = 1$

$e^{-\infty} = 0$

$e^{\infty} = \infty$

$0! = 1$

⑤ Κριτήριο Leibniz (για εναλλάσσουσα)

Έστω (a_n) φθίνουσα, θετικών όρων και μηδενική ακολουθία τότε η εναλλάσσουσα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{v+1} a_n < +\infty$$

Ασκήσεις

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{v}$, $a_n = \frac{1}{n}$ → φθίνουσα αφού $a_{n+1} < a_n$
→ θετικών όρων $n \geq 1$
→ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Από Κριτήριο Leibniz η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{v} < +\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Γεωμετρική $r = \frac{1}{4} < 1$

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} < +\infty$

Ως άθροισμα συγκλ. σειρών.

Απόλυτη Σύγκλιση

Θεώρημα:

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

1) Κριτήριο D'Alembert (λόγου)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

- $\rho<1$ (συγκλίνει) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$
- $\rho>1$ (αποκλίνει) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$
- $\rho=1$ όχι συμπέρασμα

2) Κριτήριο Cauchy (ρίζας)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

(Αν βλέπω πολλές δυνάμεις παίρνω το Cauchy)

Ασκήσεις:

Να εξεταστούν ως προς την απόλυτη σύγκλιση οι σειρές:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{2004}}$, $\varepsilon_n = \pm 1$

$a_n = \frac{\varepsilon_n}{n^{2004}}$ $\quad |a_n| = \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^{2004}}\right| = \frac{1}{n^{2004}}$ $\quad$ P-σειρά, $\rho = 2004 > 1$

$\sum_{a_n}^{\infty} |a_n| < +\infty$ $\quad$ Από Θεώρημα αφού $\sum |a_n| < +\infty$ τότε και $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| < +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^4+2}$ (είναι εναλλάσ.)

$|a_n| = \frac{n^2}{n^4+2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^4}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$ $\sum|b_n| = \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} < +\infty$ p-σειρά, $p=2>1$

$0 \leq |a_n| \leq |b_n|$

Από 1ο θεώρ. συγκρ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ και από θεωρ. απόλυτης σύγκλισης

$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| < +\infty$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^e}{n!}$, $|a_n| = \frac{n^e}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^e}{(n+1)!}}{\frac{n^e}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^e}{(n+1)!\,n^e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^e = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \ldots$$

<1

Αφού $P=0<1$ από κριτήριο λόγου:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ και από θεώρημα απόλυτης σύγκλισης

$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| < +\infty$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n + \sin n}{5^n}$ $\qquad |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$

$|a_n| = \left| \frac{\cos n + \sin n}{5^n} \right| = \frac{|\cos n + \sin n|}{5^n} \le \frac{|\cos n| + |\sin n|}{5^n} \le \frac{1}{5^n}$ $\quad |\beta_n|$

Γεωμετρ. $r = \frac{1}{5} < r_i^n$

$\sum |\beta_n| < +\infty$

Από 1 Θεωρ. σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ και από Θεωρ. συγκλ. $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| < +\infty$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)^2 \cdot n!}{(2n)!}$, $|a_n| = \frac{(2n+1)^2 n!}{(2n)!}$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1)+1)^2 (n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{(2n+1)^2 n!}{(2n)!}} = \lim \frac{(2n+3)^2 \cdot n!(n+1)\cdot(2n)!}{(2n+2)!\,(2n+1)^2 \cdot n!} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2 (n+1)(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2 (n+1)}{(2n+1)^3\, 2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{8n^3} = \frac{1}{2} \lim \frac{1}{n} = 0 < 1$

Άσκηση: Να βρεθεί μια ακολουθία η οποία συγκλίνει ενώ η αντίστοιχη σειρά αποκλίνει.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \not< +\infty$ (ως αρμονική) ή (ως P-σειρά με $p=1$)

Ολοκληρώματα

Μέθοδοι υπολογισμού

• $\int (f(x))^{a} \cdot f'(x)\,dx = \int (f(x))^{a}\, d f(x) = \frac{(f(x))^{a+1}}{a+1} + c$

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

1) $\int (x+4)^6 dx = \int (x+4)^6 (x+4)' dx = \int (x+4)^6 \, d(x+4) = \frac{(x+4)^7}{7} + c$

2) $\int (3x+1)^{10} dx = \int (3x+1)^{10} (3x+1)' dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^{10} d(3x+1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{11}}{11} + c$

3) $\int \sqrt{1+4x}\, dx = \int (1+4x)^{1/2} dx = \int (1+4x)^{1/2} (1+4x)' dx = \frac{1}{4}\int (1+4x)^{1/2} d(1+4x) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4x)^{3/2}}{3/2} + c$

2) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

• $\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

εκθετ + πολυων
πολυων + λογαρ
τριγ. + πολυων.

Άσκηση 1

1) $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x-1) + c$

2) $\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = \int (x)' \ln x\, dx = x \ln x - \int x (\ln(x))' dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x\, dx =$

$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$

3) $\int x^2 \ln x\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}(\ln x)'dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^{\cancel{3}2} \frac{1}{\cancel{x}}dx =$

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + c$

4) $\int x^2 (e^x)'dx = x^2e^x - \int 2x e^x dx = x^2e^x - 2\int x(e^x)'dx = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

3) Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Άσκηση:

$I_1 = \int \frac{x^5+2}{x^2-1}dx = \int \frac{x^5+2}{(x+1)(x-1)}dx$

$\frac{x^5+2}{\cancel{(x+1)(x-1)}}(x+1)\cancel{(x-1)} = \frac{A(\cancel{x+1})(x-1)}{x+\cancel{1}} + \frac{B(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

$\Rightarrow x^5+2 = A(x-1)+B(x+1)$

$\Rightarrow x^5+2 = Ax - A + Bx + B$ $\qquad A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \boxed{A=-1}$

$x^5+2 = x(A+B)+(B-A)$ $\qquad B-A=2 \Rightarrow 2B=2 \Rightarrow \boxed{B=1}$

$I = \int -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}dx$

$= \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

$I_2 = \int \frac{5x^2+2x+6}{x^3+2x^2+x}dx - \int \frac{5x^2+2x+6}{x(x^2+2x+1)}dx$ $\qquad \Delta = 4-4\cdot1\cdot1=0 \quad x_{1,2}=-1$

$= \int \frac{5x^2+2x+6}{x(x+1)^2}$

$\frac{5x^2+2x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2}$ ...

$I_3 = \int \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$

Μέθοδος αντικατάστασης (αλλαγή μεταβλητής)

1) $I = \int \frac{1}{\sqrt{3x-10}} dx$ $\quad I = \int \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{2\cancel{t}}{3} dt = \frac{2}{3} \int dt = \frac{2t}{3} = \frac{2\sqrt{3x-10}}{3} + C$

Θέτω $t = \sqrt{3x-10}$

$t^2 = 3x-10$

$\Rightarrow 3x = t^2+10$

$\Rightarrow x = \frac{t^2+10}{3}$

$dx = \frac{2t}{3} dt$

2) $I_2 = \int \frac{1}{2+\sqrt{x}} dx$ $\quad I_2 = \int \frac{1}{2+t} \cdot 2t\,dt = \int \frac{2t}{2+t} dt = 2\int \frac{t+2-2}{2+t} dt = 2\int \frac{\cancel{t+2}}{\cancel{t+2}} dt$

$- \int \frac{4}{2+t} dt = 2t - 4\int \frac{1}{2+t} dt = 2t - 4\ln|2+t| =$

$= 2\sqrt{x} - 4\ln|2+\sqrt{x}| + C$

$t = \sqrt{x}$

$t^2 = x$

$dx = 2t\,dt$

· Κριτήριο Abel

Έστω (a_n) και (b_n) ακολουθίες

Για $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

αν a_n — μονότονη — πραγματικών αριθμών — συγκλίνουσα $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Τότε και $\sum^{\infty} b_n < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty$

Άσκηση: Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n^r}$, $r>1$ $\theta\in(0,1)$ $a_n=\frac{1}{n^r}$, $b_n=\theta^n$

• a_n — μονότονη, πραγματικών αριθμών, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r}=0$. Συγκλίνει

• $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\theta)^n$ Γεωμ. $r=\theta<1$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<+\infty$ Από Abel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n<+\infty$

β' τρόπος

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)^r}}{\frac{\theta^n}{n^r}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^r\theta^{n}\theta}{(n+1)^r\theta^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^r\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\theta$$

μεγιστοβαθ. / βαθμός $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\theta=\theta$. $\theta\in(0,1)<1$

Από κριτήριο λόγου $P=\theta\in(0,1)<1$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^n}{n^r}<+\infty$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n n^4}{n!}$, $a_n = \frac{n^4}{n!}$, $b_n = \theta^n$

• a_n μονότονη πραγματικών αριθμών συγκλίνουσα ακολουθ.

• $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$ γεωμ. $r = \theta \in (0,1) < 1$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^4}{(n+1)!\,n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = 0$$

$P = 0 < 1$ από κριτ. λόγου

$a_n < +\infty$

Από Abel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n n^4}{n!} < +\infty$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n^r}$, $a_n = \frac{1}{n^r}$, $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

• a_n μονότονη πραγματικών αριθμών $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$ συγκλίνουσα

• $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < +\infty$ ως τηλεσκοπική

Από Abel $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n^r} < +\infty$

Ασκήσεις που είχα για το σπίτι:

1) $I = \int \frac{1-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt{3x+4}} dx$

Βήμα 1ο: Θέτω $t = \sqrt{3x+4}$

Βήμα 2: $t^2 = 3x+4$

$\Rightarrow 3x = t^2 - 4$

$\Rightarrow x = \frac{t^2-4}{3}$

Βήμα 3: $1dx = \frac{2t}{3} dt$

Βήμα 4: $I = \int \frac{1-t}{1+t} 2t\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{t-t^2}{1+t}dt = \frac{2}{3}\int \frac{t}{1+t}dt - \frac{2}{3}\int \frac{t^2}{1+t}dt =$

$\frac{2}{3}\int \frac{t+1-1}{t+1}dt - \frac{2}{3}\int \frac{t^2+1-1}{t+1}dt = \frac{2}{3}\int 1dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt - \frac{2}{3}\int \frac{t^2-1}{t+1}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt =$

$= \frac{2t}{3} - \frac{2}{3}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\int \frac{(t-1)(\cancel{t+1})}{\cancel{t+1}}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{2t}{3} - \frac{2\ln|t+1|}{3} - \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}} + \frac{2t}{3} - \frac{2}{3}\ln|t+1|$

$= -\frac{t^2}{3} + \frac{4t}{3} - \frac{4}{3}\ln|t+1|$

$I = \frac{(\sqrt{x+4})^{\cancel{2}}}{3} + \frac{4\sqrt{x+4}}{3} - \frac{4}{3}\ln|\sqrt{x+4}+1| + c$

2) $I_1 = \int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Θέτω $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$t^2 = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow t^2(1+x) = 1-x \Rightarrow t^2 + t^2x = 1-x \Rightarrow t^2x + x = 1-t^2 \Rightarrow x(t^2+1) = 1\cdot t^2 \Rightarrow$

$\boxed{x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$dx = \frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t-2t^3-2t+2t^3}{(1+t^2)^2} = \boxed{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt}$

$I_1 = \int \frac{1}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} t\cdot\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)dt = \int\left(\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}\right)^{2} t\left(\frac{-4}{(1+t^2)^2}\right)dt = \int \frac{1+t^2}{2t^{\cancel{2}}}\cancel{t}\left(-\frac{4}{(1+t^2)^2}\right)dt$

$= \int -\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{4}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{4}{2}\int \frac{1}{t(1+t^2)}dt = -2\int \frac{1}{t(1+t^2)}dt$

$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+\Gamma}{1+t^2} \Rightarrow 1 = A(1+t^2) + (Bt+\Gamma)t \Rightarrow 1 = A + At^2 + Bt^2 + \Gamma t$

$\Rightarrow 1 = t^2(A+B) + t\Gamma + A$

$A+B=0$

$\Gamma=0 \quad A=1 \quad B=-1$

$\rightarrow$

Scanned with CamScanner

$I = -2\int \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\,dt = \underbrace{-2\int \frac{1}{t}\,dt}_{2\ln|t|} + \underbrace{2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt}_{\ln|1+t^2|}$ $\rightarrow : \int \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\,dt = \ln|1+t^2|$.

$= -2\ln|t| + \ln|1+t^2|$

$= -2\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + \ln\left|1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right| + c$

3) $I = \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(a+x)(a-x)}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} \Rightarrow 1 = (a-x)A + (a+x)B \Rightarrow 1 = Aa - Ax + Ba + Bx \Rightarrow 1 = x(B-A) + Aa + Ba$

$B - A = 0 \Rightarrow A = B$

$Aa + Ba = 1 \Rightarrow 2Aa = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a} = B$

$I = \int \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{a+x}\,dx + \int \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{a-x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a+x}\,dx + \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a-x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{2a}\left(\ln|a+x| + \ln|a-x|\right) + c$

Ολοκληρώματα της μορφής:

• $\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx$ ή • $\int \sqrt{a-bx^2}\,dx$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Θέτω } x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot \sin t}$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

Scanned with CamScanner

π.χ. $I = \int \sqrt{7-5x^2}\,dx$, $a=7$, $\beta=5$ Θέτω $x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \sin t$

$dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cos t$

$\Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}} \Rightarrow t = \arcsin \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}$

$$I = \int \sqrt{7-5\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\sin t\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cos t\, dt = \int \sqrt{7-\cancel{5}\cdot\frac{7}{\cancel{5}}\cdot \sin^2 t} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cos t\, dt \Rightarrow$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \int \sqrt{7-7\sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \int \sqrt{7}\sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \int \sqrt{7}\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\, dt$$

$$= \frac{7}{\sqrt{5}} \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\, dt = \frac{7}{\sqrt{5}} \int \cos^2 t\, dt = \frac{7}{\sqrt{5}} \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt$$

$$= \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\int (-\sin 2t)'\, dt = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{7t}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin 2t + C$$

Ολοκληρώματα της μορφής:

- $\int \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}\, dx$ ή $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}\, dx$

- $a>0$ θέτουμε $t \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$
- $a<0$ και $\gamma>0$ θέτουμε $tx \pm \sqrt{\gamma} = \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$
- $\beta^2-4a\gamma>0$ θέτουμε $t(x-\rho) = \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$

$I=\int \sqrt{2x^2-1}\,dx \qquad a=2,\ \beta=0,\ \gamma=-1$

Θέτουμε $\sqrt{2x^2-1}=t-\sqrt{a}\,x \Rightarrow t-\sqrt{2}\,x=\sqrt{2x^2-1} \Rightarrow 2x^2-1=(t-\sqrt{2}x)^2 \Rightarrow$

$2x^2-1=t^2-2\sqrt{2}+x+(\sqrt{2}x)^2 \Rightarrow 2x^2-1=t^2-2\sqrt{2}+x+2x^2 \Rightarrow$

$2x^2+2\sqrt{2}+x-2x^2=t^2+1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{t^2+1}{2\sqrt{2}t}}$

$$dx=\frac{(t^2+1)'(2\sqrt{2}t)-(t^2+1)(2\sqrt{2}t)'}{(2\sqrt{2}t)^2}=\frac{t^2-1}{2\sqrt{2}t^2}\,dt$$

$$I=\int\left(t-\cancel{\sqrt{2}}\frac{t^2+1}{2\cancel{\sqrt{2}}t}\right)\cdot\frac{t^2-1}{2\sqrt{2}t^2}\,dt=\int\left(t-\frac{t^2+1}{2t}\right)\cdot\frac{t^2-1}{2\sqrt{2}t^2}\,dt=\int\frac{2t^2-t^2-1}{2t}\cdot\frac{t^2-1}{2\sqrt{2}t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{t^2-1}{2\sqrt{2}t}\,dt=\int\frac{(t^2-1)(t^2-1)}{4\sqrt{2}t^3}\,dx=\int\frac{t^4-t^2-t^2+1}{4\sqrt{2}t^5}\,dx=\int\frac{t^4-2t^2+1}{4\sqrt{2}t^3}\,dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{t^4-2t^2+1}{t^3}\,dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int\frac{t^4}{t^3}\,dt-2\int\frac{t^2}{t^3}\,dt+\int\frac{1}{t^3}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{2}-2\ln|t|+\int t^{-3}\,dt\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{2}-2\ln|t|-\frac{1}{2t^2}\right)=\dots$$

Να λύσουν:

1) $I=\int x\cos dx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int(x)'\sin x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x\,dx$

2) $I=\int e^x\cdot\cos x\,dx=\int(e^x)'\cdot\cos x\,dx=e^x\cos x-\int e^x(\cos x)'dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx=$

$=e^x\cos x+e^x\sin v-\int e^x(\sin x)'dx=e^x\cos x+e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\cos x\,dx}_{I}$

$$I=e^x\cos x+e^x\sin x-I \Rightarrow 2I=e^x\cos x+e^x\sin v \Rightarrow I=\frac{e^x\cos x+e^x\sin x}{2}$$

Scanned with CamScanner

3) $I = \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx = \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}dx$

$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2} \quad \dots \qquad A=6,\ B=-1,\ \Gamma=9$

$I = 6\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + 9\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = 6\ln|x| - \ln|x+1| + 9\int (x-1)^{-2}(x+1)'dx$

$= 6\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C$

Να λυθούν τα ολοκληρώματα:

$I = \int x^3\sqrt{x-2}\,dx$

Θέτω $t = \sqrt[3]{x-2}\,dx$

$t^3 = x-2$

$x = t^3+2$

$dx = 3t^2dt$

$I = \int (t^3+2)t\,3t^2dt$

$= \int 3t^6+6t^3dt$

$= 3\left[\frac{t^7}{7}\right] + 6\left[\frac{t^4}{4}\right]$

$= 3\frac{t^7}{7} + \frac{3}{2}t^4$

$= \frac{3}{7}(\sqrt[3]{x-2})^7 + \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-2})^4$

Ρητές παραστάσεις του X.

- $\sqrt[n_1]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}$

$n = \text{ΕΚΠ}(n_1, \dots, n_k)$

Θέτουμε $\sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}} = t$

π.χ $I = \int \frac{2x + \sqrt[2]{5x+1}}{\sqrt[3]{5x+1}} dx$, ΕΚΠ $(2,3) = 6$

Θέτω $t = \sqrt[6]{5x+1}$

$t^6 = 5x+1$

$x = \frac{t^6-1}{5}$

$dx = \frac{6t^5}{5} dt$

$I = \int \frac{2\left(\frac{t^6-1}{5}\right) + t^3}{t^2} \cdot \frac{6t^5}{5} dt = \frac{6}{5} \int \frac{2t^6 - 2 + 5t^3}{5} \cdot \frac{t^3}{5} dx =$

$= \frac{6}{25} \int (2t^6 - 2 + 5t^3) t^3 dt = \frac{6}{25} \int 2t^4 - 2t^3 + 5t^6 dt =$

$= \frac{6}{25} \int \left(\cancel{2} \frac{t^{10}}{105} - \frac{2t^{10}}{42} + \frac{5t^7}{7} \right) + C$

Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$

$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

1) $I = \int \sin 7x \cdot \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int \sin(7x-4x) + \sin(7x+4) dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x dx + \frac{1}{2} \int \sin 11x dx =$

$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{-\cos 3x}{3} \right)' dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{-\cos(11x)}{11} \right)' dx = -\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 11x}{22} + C$

2) $I = \int \cos 4x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos(4x-2x) + \cos(4x+2x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int \cos 6x dx =$

$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\sin 6x}{6} \right)' dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 6x}{12} + C$

Ολοκληρώματα με e^x

- $t = e^x$

π.χ. 1) $I = \int \frac{e^x}{\frac{13(e^x - e^{-x})}{2} - \frac{12(e^x + e^{-x})}{2}} = 2\int \frac{e^x}{e^x - 25e^{-x}} dx$ Θέτω $e^x = t \Rightarrow x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t} dt$

$I = 2\int \frac{t}{t - \frac{25}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = 2\int \frac{t}{\frac{t^2-25}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = 2\int \frac{t}{(t+5)(t-5)} dt$ (μετά με A, B, ...)

2) $I = \int \sin^2 x \, dx = \int (\sin x)(\sin x) dx = \frac{1}{2}\int \cos(x-x) - \cos(2x) dx = \frac{1}{2}\int 1 - \cos 2x \, dx =$

$= \frac{1}{2}(x) - \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$

β' τρόπος:

$\int (\sin x)(\sin x) dx = \int (-\cos x)' \sin x \, dx = -\cos x \sin x + \int \cos x (\sin x)' dx =$

$= -\cos x \sin x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx = -\cos x \sin x + \int 1 - \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow I = -\cos x \sin x + x - I \Rightarrow I = \frac{-\cos x \sin x + x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\cos x \sin x}{2} + c$

Ορισμένα ολοκληρώματα

• $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\int f(x) dx = F(x)$

$F'(x) = f(x)$

π.χ 1) $\int_0^1 2xe^x + x^2 e^x dx = \int_0^1 (x^2 e^x)' dx = [x^2 e^x]_0^1 = [e^1 - 0] = e$

2) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \left[\frac{\sin\pi}{\pi} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi/2}\right] = \left[0 - \frac{1}{\pi/2}\right]$

$= -\frac{2}{\pi}$

3) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

$I = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_1^e t^{-1/2} dt$

$= \left[\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$

Θέτω $t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x} dx$

για $x = 1$ (το ένα άκρο) $\rightarrow t = 0$

" $x = e$ (το άλλο) $\rightarrow t = 1$

(Όταν έχουμε ορισμένο θέτουμε το υπόριζο)

4) $\int_0^2 (x^2-|x-1|)\,dx$ $\qquad |x-1|$

$f(x) = |x-1|$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$f(x) = x^2-|x-1| = \begin{cases} x^2+x-1, & x<1 \\ x^2-x+1, & x\geq 1 \end{cases}$$

Άρα το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\int_0^1 x^2+x-1\,dx + \int_1^2 x^2-x+1 = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{4^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)\right] = -\frac{1}{3}$$

) $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_1^2 = \left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_2^1 = \frac{2}{3}\left[2^{3/2}-1\right]$

$= \frac{2}{3}\left[\sqrt[2]{2^3}-1\right]$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$

Θέτω $t = x^2+1$

$dt = 2x\,dx$

για $x=0 \rightarrow t=1$

$x=1 \rightarrow t=2$

Γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους

· Έστω $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ σε μη φραγμένο διάστημα η οποία είναι συνεχής και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,t]$, $t>a$

$\rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b} \int f(x)dx = c\in\mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα συγκλίνει (υπάρχει)

$\lim_{t\to b} \int f(x)dx = \pm\infty$ το ολοκλήρωμα αποκλίνει (δεν υπάρχει)

· $f:(a,b]\to\mathbb{R}$

$[t,b]$

$\int_t^b f(x)dx = \lim_{t\to a} \int f(x)dx$

· $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ Για να συγκλίνει το αρχικό (υπάρχει) πρέπει να υπάρχουν και τα δύο α και β.

$f=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(-\infty,+\infty)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{(-\infty)}^{M} f(x)dx + \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$, $M\in\mathbb{R}$

(β) $\int_{t_1}^{M} f(x)\,dx = \lim_{t_1\to -\infty} \int_{t_1}^{M} f(x)dx$

(α) $\int_M^{t_2} f(x)dx = \lim_{t_2\to\infty} \int_M^{t_2} f(x)dx$

Ασκήσεις:

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα (Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση)

1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=xe^{-x^2}$

συνεχής + ολο/μη στο $[0,t], t>0$

$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_0^t xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx$

$= -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^t = -\frac{1}{2}[e^{-t^2} - e^{0}] = \frac{1}{2} - e^{-t^2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t^2}} = 0$

2) $\int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}dx$

Έστω $f=[1,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=(1-x)e^{-x}$

συνεχής + ολο/μη στο $[1,t], t>1$

$\int_1^{+\infty}(1-x)e^{-x}dx = \int_1^t(-e^{-x})'(1-x)dx = [-e^{-x}(1-x)]_1^t + \int_1^t e^{-x}(1-x)'dx$

$= [-e^{-x}(1-x)]_1^t - \int_1^t e^{-x}dx = [-e^{-x}(1-x)]_1^t + [e^{-x}]_1^t =$

$= [-e^{-t}(1-t)+0] + [e^{-t} - e^{-1}] = -e^{-t} + e^{-t} + e^{-t} + e^{-1}$

$= te^{-t} - \frac{1}{e} = 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$

$\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} \overset{\text{d'Hospital}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0$

3) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

έστω $f[1,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

συνεχής + ολο/μη στο $[1,t], t>1$

$\int_1^t \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_1^t \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}dx = \int_1^t x(1+x^2)^{-1/2}dx =$

$\int_1^t (1+x^2)^{-1/2}(1+x^2)'dx = \frac{1}{2}\int_1^t (1+x^2)^{-1/2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_1^t =$

$\frac{2}{2}[(1+x^2)^{1/2}dx]_1^t = [(1+t^2)^{1/2} - 2^{1/2}] = \sqrt{1+t^2} - \sqrt{2}$

$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{1+t^2} = +\infty$

Άρα το ολοκλήρωμα αποκλίνει (δεν υπάρχει)

4) $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

$f = [1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

συνεχής + ολοκλ/μη στο

$[1,t]$, $t>1$

$I = \int_1^t \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^t \ln x \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{g(x)} dx = \int_1^t \ln x (\ln(x))' dx =$

$= [\ln(x)^2]_1^t - \int_1^t \frac{1}{x}\ln x\,dx \Rightarrow I \Rightarrow$

$2I = [\ln(x)^2]_1^t \Rightarrow 2I = [\ln t^2 - \ln 1] \Rightarrow I = \frac{1}{2}\ln t^2$

$\lim_{t \to +\infty} \ln t^2 = +\infty$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$f(x) = (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \overset{*}{=}$

$f(-\infty,0]$

στο $[t_1,0]$

για $x=-\infty$ τότε $u=0$

$x=0$ $\quad u=1$

$f[0,+\infty)$

στο $[0,t_2]$

$x=0 \to u=1$

$x=+\infty$ $\quad u=+\infty$

Το λύνω σαν αόριστο: $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ θέτω $u=e^x$

$du = e^x dx$

$\int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u$

$\circledast = \int_{t_1}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_0^{t_2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = [\arctan u]_0^1 + [\arctan u]_1^{t_2} =$

$= \cancel{\arctan 1} - \arctan 0 + \arctan t_2 - \cancel{\arctan 1} = 0 - \arctan t_2 = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\arctan 0 = 0$

$\arctan \pm\infty = \pm\frac{\pi}{2}$

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$

$f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^{-x} \sin x$

συνεχ + ολοκλ στο $[0,t], t>0$

$\int_0^t e^{-x} \sin x \, dx = \int_0^t (-e^{-x})' \sin x \, dx = [-e^{-x} \sin x]_0^t + \int_0^t e^{-x} (\sin x)' dx$

για $= [-e^{-x} \sin x]_0^t + \int_0^t e^{-x} \cos x \, dx = [-e^{-x} \sin x]_0^t + \int_0^t (-e^{-x})' \cos x \, dx$

$= [-e^{-x} \sin x]_0^t - [e^{-x} \cos x]_0^t + \int_0^t e^{-x} (\cos x)' dx$

$= [-e^{-x} \sin x]_0^t - [e^{-x} \cos x]_0^t - (\int e^{-x} \sin x \, dx) = I$

$\Rightarrow 2I = [-e^{-t} \sin t + e^0 \sin 0] - [e^{-t} \cos t - e^0 \cos 0]$

$\Rightarrow I = \dfrac{-e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t + 1}{2} = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} (\sin t + \cos t) = 0$ $\quad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ $\quad \cdot \lim_{t \to +\infty} \cos t = [-1, 1]$ $\quad \cdot \lim_{t \to +\infty} \cos t + \sin t = 0$

$\lim_{t \to +\infty} \sin = [-1, 1]$

Γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους

- $f: [a, b) \to \mathbb{R}$

$F(t) = \int_a^t f(x) \, dx$

$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^{b^-} f(x) dx = \int_a^t f(x) \, dx$

$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x) dx$

- $f: (a, b] \to \mathbb{R}$

$F(t) = \int_a^t f(x) dx$

$\int_a^b f(x) dx = \int_{a^+}^b f(x) dx = \int_t^b f(x) dx$

Ασκήσεις

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$f: [0,1) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

συνεχής + ολοκλ/μη

στο $[0,t], t>0$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^t = \arcsin t - \cancel{\arcsin 0} = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{t \to 1^-} \arcsin t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_t^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx - \int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_t^2 (x-1)^1(x-1)^{-1/2}dx - \int_t^2 (x-1)^{-1/2}dx =$$

$$= \int_t^2 (x-1)^{1/2}dx - \int_1^2 (x-1)^{-1/2}dx = \int_t^2 (x-1)^{1/2}(x-1)'dx - \int_t^2 (x-1)^{-1/2}(x-1)'dx =$$

$$\int_t^2 (x-1)^{1/2}d(x-1) - \int_t^2 (x-1)^{-1/2}d(x-1) = \left[\frac{(x-1)^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_t^2 - \left[\frac{(x-1)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_t^2 = \frac{2}{3}\left[(x-1)^{3/2}\right]_t^2 - 2\left[(x-1)^{1/2}\right]_t^2$$

$$= \frac{2}{3}\left[1-(t-1)^{3/2}\right] - 2\left[1-(t+1)^{1/2}\right] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\underbrace{(t-1)^{3/2}}_{0} - 2 + \underbrace{(1-1)^{1/2}}_{0} = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

• $\lim_{t\to 1^+}(t-1)^{3/2}=0$ • $\lim_{t\to 1^+}(t-1)^{1/2}=0$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{(u^2+1)u}2u\,du = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = \left[2\arctan u\right]_0^1 =$$

$f=(1,2]$ $= 2\arctan 1 - 2\arctan 0 = 2\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{1^+}^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int_t^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$$

Θέτω $u=\sqrt{x-1}$ $x=1\to u=0$

$u^2=x-1$ $x=2\to u=1$

$x=u^2+1$

$dx=2u\,du$

Γενικευμένα μικτού τύπου:

$$\int_{a^-}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{\beta^-} f(x)\,dx$$

$f:(a,+\infty)$ $\qquad$ $f:(-\infty,\beta)$

$$= \underbrace{\int_{a}^{\mu} f(x)\,dx}_{\text{β' είδος}} + \underbrace{\int_{\mu}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{α' είδος}}, \quad \mu \in (a,+\infty)$$

$(a,\mu] \cup [\mu,+\infty)$

- $\int_{a^+}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mu} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_{t_1}^{\mu} f(x)\,dx$

- $\int_{\mu}^{t_2} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{t_2} f(x)\,dx = \lim_{t_2\to+\infty} \int_{\mu}^{t_2} f(x)\,dx$

Ασκήσεις

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \qquad , \int^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\qquad$ Θέτουμε $u=\sqrt{x-1}$ $\qquad$ Για $x_1=1 \to u=0$

$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ $\qquad$ $u^2=x-1$ $\qquad$ $x=+\infty \to u=+\infty$

συνεχ. ⊕ ολοκλ. στο $\qquad$ $x=u^2+1$

$[t_1,\mu] \cup [\mu,+2]$ $\qquad$ $dx=2u\,du$

- $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(u^2+1)\cancel{u}} \cdot 2\cancel{u}\,du = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = 2\int_{0^+}^{2} \frac{1}{u^2+1}\,du + 2\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du =$

$f=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$2\int_{t_1}^{2} \frac{1}{u^2+1}\,du + 2\int_{2}^{t_2} \frac{1}{u^2+1}\,du = 2[\arctan]_{t_1}^{2} + 2[\arctan]_{2}^{t_2} =$$

$= 2\arctan 2 - 2\arctan t_1 + 2\arctan t_2 - 2\arctan 2 = \frac{\pi}{2}$

• $\lim_{t_1 \to 0^+} 2\arctan t_1 = 0$ • $\lim_{t_2 \to +\infty} 2\arctan t_2 = \frac{\pi}{2}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

$I = \int_{0^+}^{2} \frac{\ln x}{x} dx + \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{t_1}^{2} \frac{\ln x}{x} dx + \int_2^{t_2} \frac{\ln x}{x} dx$

$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

συνεχ. ⊕ ολοκλ. στο

$[t_1, 6] \cup [6, +\infty]$

• $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int_{0^+} (\ln x)' \cdot \ln x \, dx =$

$= [\ln x^2]_{0^+}^{+\infty} - \int_{0^+}^{+\infty} (\ln x) \frac{1}{x} dx = I$

$I = \frac{[\ln x^2]_{0^+}^{+\infty}}{2} = \frac{[\ln x^2]_{t_1}^{2} + [\ln x^2]_2^{t_2}}{2} =$

$= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln t_1 + \frac{1}{2}\ln t_2 - \frac{1}{2}\ln 4 =$

• $\lim_{t_1 \to 0^+} \ln t_1 = +\infty$

• $\lim_{t_2 \to \infty} \ln t_2 = +\infty$

} Το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει (δεν υπάρχει)

Σειρές συναρτήσεων

Κριτήριο Weistross

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$$

Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων που ορίζεται σε ένα σύνολο D. Υποθέτουμε ότι για κάθε φυσικό ν υπάρχει θετικός αριθμός M_ν τ.ω.:

$$|f_\nu(x)| \leq M_\nu \quad \forall x \in D$$

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} M_\nu < +\infty$ τότε η $f_\nu(x)$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα

Ασκήσεις:

1) Να εξεταστεί η σειρά ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+\sin^3 x}{\nu^5}$$

$$\boxed{|a+b| \leq |a|+|b|}$$

$$f_\nu(x) = \frac{1+\sin^3 x}{\nu^5}$$

$$|f_\nu(x)| = \left|\frac{1+\sin^3 x}{\nu^5}\right| = \frac{|1+\sin^3 x|}{\nu^5} \leq \frac{|1|+|\sin^3 x|}{\nu^5} = \frac{1+|\sin^3 x|}{\nu^5} \leq \boxed{\frac{2}{\nu^5}} = M_\nu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_\nu = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^5} \quad p\text{-σειρά},\ p = 5 > 1$$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\nu^5} < +\infty$

Από Weistrass η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+\sin^3 x}{\nu^5}$ συγκλίνει ομοιόμορφα

2) Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[1,+\infty)$ η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{\nu x}} , \quad f_\nu(x) = \frac{\nu^2}{e^{\nu x}}$$

$$|f_{\nu}(x)| = \left|\frac{\nu^2}{e^{\nu x}}\right| = \frac{\nu^2}{e^{\nu x}} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\nu^2}{e^{\nu}}}}_{M_\nu} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{\nu}}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{M_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\sqrt[\nu]{\nu^2}}{\sqrt[\nu]{e^\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^{2/\nu}}{e^{\nu/\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^{2/\nu}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

Από κριτήριο ρίζας η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{\nu}} < +\infty$ και από Weistrass η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{\nu x}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1,+\infty)$

Δυναμοσειρές

$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$

- Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ (① ρίζας)
  τότε $\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \ell$

- Αν $\ell=0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ $(-\infty,+\infty)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Αν $\ell=+\infty$ ——— | | ——— μόνο για $x=0$
- Αν $\ell\neq 0$ ή $\ell\neq+\infty$ τότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για $x\in\left(-\frac{1}{\ell},\frac{1}{\ell}\right)$ και αποκλίνει για $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\ell}\right)\cup\left(\frac{1}{\ell},+\infty\right)$

Το $\left(-\frac{1}{\ell},\frac{1}{\ell}\right)$ ονομάζεται διάστημα σύγκλισης
Η ακτίνα σύγκλισης $\boxed{R=\frac{1}{\ell}}$

• Έστω $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ (② Κριτήριο λόγου)

τότε $\lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$

(Τα υπόλοιπα είναι ίδια με το προηγούμενο)

Ασκήσεις

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι δυναμοσειρές. (Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, $a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \xrightarrow{\text{μεγιστοβάθμιοι}} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$

β' τρόπος $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1\right)$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για $x \in (-1,1)$ με ακτίνα σύγκλισης $R=1$

Για $x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n = +\infty$ (αποκλίνει από Leibnits)

Για $x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$ (αποκλίνει από θετικών όρων)

β' τρόπος:

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim \frac{n+1}{n} \cdot |x| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x|$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = l$, $|x| = 1 \iff \boxed{x = \pm 1}$

Άσκηση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}, \quad a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$

Από κριτήριο λόγου:

Η δυναμοσειρά συγκλίνει, στο $\mathbb{R}$ για $x \in (-1,1)$ με ακτίνα σύγκλισης $R=1$

- Για $\boxed{x=-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ → φθίνουσα → θετικών αριθ. → $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

- Για $\boxed{x=1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} < +\infty$ (τηλεσκοπική)

Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $[-1,1]$

Άσκηση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+4}} x^n, \quad a_n = \frac{3^n}{2^{n+4}} \qquad \left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+3}}}{\frac{3^n}{2^{n+4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+4}\cdot 3^{n+1}}{2^{n+5}\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Scanned with CamScanner

Από κριτήριο λόγου η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για:

- $x \in \left(-\frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\frac{3}{2}}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ με ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{2}{3}$

Για $X = -\frac{2}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+4}} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Για $X = \frac{2}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+k}} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$ ως αριθμητική δεν συγκλίνει

~~Παραδείγματα~~

Άσκηση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!} x! \quad , \quad a_n = \frac{(2n)!}{(3n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(3(n+1))!}}{\frac{(2n)!}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!\,(3n)!}{(3n+3)!\,(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)\cancel{(3n)!}}{\cancel{(3n)!}\,(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{27n^3} = 0 \quad , \quad l = 0$$

Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ (από κριτήριο λόγου).

Scanned with CamScanner

$n=1$

$\sum_{v=1}^{\infty} f(x)^v a_v$

> (σε αυτήν την περίπτωση το x δεν είναι μόνο τα θα είναι: $(x-1)^v$ ή $(x+5)^v$ κτλ.)

<u>Cauchy - Hadamard</u>

Έστω $\sum_{v=0} a_v x^v$: $R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & 0<\ell<+\infty \\ 0 & \ell=+\infty \\ +\infty & \ell=0 \end{cases}$

Τότε για την $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ ισχύει:

- Συγκλίνει απόλυτα για $|x|<R$ (ακτίνα συγκλ.)
- Αποκλίνει για $|x|>R$

Έστω $A_v = x^v a_v$: $\lim_{v\to\infty} \left|\frac{A_{v+1}}{A_v}\right| = \ell|x|$

- $|\sum a_v| < +\infty \Rightarrow \sum a_v < +\infty$
- $\sum a_v < +\infty \not\Rightarrow |\sum a_v| < +\infty$

Να εξετάσω ξανά σύγκλιση ... $\lim_{\nu\to\alpha} |a_\nu| = 0$. Δεν ισχύει το αντίστροφο

Ασκήσεις

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι δυναμοσειρές (Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς)

1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(x+1)^\nu}{\sqrt{\nu}}$ $\qquad A_\nu = \frac{(x+1)^\nu}{\sqrt{\nu}}$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{\nu+1}}{\sqrt{\nu+1}}}{\frac{(x+1)^\nu}{\sqrt{\nu}}}\right| = \lim_{\nu\to\infty} |x+1|\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} = |x+1|\lim_{\nu\to\infty}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} = |x+1|, \quad l=1$$

$|x+1|<1$

$\Leftrightarrow -1 < x+1 < 1$

$\Leftrightarrow \boxed{-2 < x < 0}$

Για $x=-2$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-2+1)^\nu}{\sqrt{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ (εναλλασσουσα) $\to a_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ — φθίνουσα, πραγματική ακολ. $\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}} = 0$

Άρα συγκλίνει από Leibniz

Για $x=0$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(0+1)^\nu}{\sqrt{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1/2}} = +\infty$ $\quad p=1/2<1$ αποκλίνει

Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $x\in[-2,0)$

2) $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu(x-1)^\nu}{2^\nu(3\nu-1)} \to A_\nu$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)(x-1)^{\nu+1}}{2^{\nu+1}(3\nu+3-1)}\cdot\frac{2^\nu(3\nu-1)}{\nu(x-1)^\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)(3\nu-1)(x-1)}{2(3\nu+2)\cdot\nu}\right| \overset{\text{μεγιστοβ.}}{=} \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{3\nu^2(x-1)}{6\nu^2}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\frac{|x-1|}{2} =$$

$\frac{|x-1|}{2}$, $l=\frac{1}{2}$, $R=2$

$|x-1|<2$

$-2<x-1<2$

$-1<x<3$

Για $x=-1$ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu(-2)^\nu}{2^\nu(3\nu-1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu(-1)^\nu 2^\nu}{2^\nu(3\nu-1)}$

$= \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\nu}{3\nu-1} = +\infty$ αποκλίνει από Leibniz

→ φθίνουσα

→ πραγματ. ακολ.

→ $\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{3\nu-1} = \frac{1}{3} \neq 0$

Για $x=3$ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu 2^\nu}{2^\nu(3\nu-1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{3\nu-1} = +\infty$ |αποκλίνει|

Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσ. είναι το $x\in(-1,3)$

Ομοιόμορφη Σύγκλιση

Κριτήρια

1) Αν η ακολουθία $f_v(x)$ συγκλίνει σημειακά (κατά σημείο) στην f και

$$M_v = \sup_x |f_v(x)-f|$$

Τότε η $f_v(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f ανν $\lim_{v\to\infty} M_v = 0$

2) Έστω $f_v(x)$ και a_n μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών

$$|f_v(x)-f| < a_n$$

τότε η $f_v(x)$ συγκλίνει ομοιόμ. στην f

Ασκήσεις

Να εξεταστεί αν η ακολουθία της $f_v(x)$ που ορίζεται με: $f_v(x) = \frac{1}{vx+1}$, $\forall v\in\mathbb{N}, \forall x\in(0,1)$

1)

Β1) $\lim_{v\to\infty} f_v(x) = \lim_{v\to\infty} \frac{1}{vx+1} = 0$ η $f_v(x)$ συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση $\forall x\in(0,1)$ ($f=0$)

Βήμα 2) $M_v = \sup_{x\in(0,1)} |f_v(x)-f| = \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{vx+1} - 0\right| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{vx+1} = \frac{1}{v0+1} = 1$ $\quad \lim_{v\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

Άρα η $f_v(x)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορ. στην f για $x\in(0,1)$

→ γνησ. φθίνουσα συνάρτηση του x

2) $f_v(x) = \frac{x}{v}$, $x>0$

Β1 $\lim_{v\to\infty} f_v(x) = \lim_{v\to\infty} \frac{x}{v} = 0$ η $f_v(x) < +\infty$ κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση

$M_v = \sup_{x>0} |f_v(x)-f| = \sup_{x>0} \left|\frac{x}{v} - 0\right| = \sup_{x>0} \underbrace{\frac{x}{v}}_{\substack{\text{γν. αύξ.} \\ \text{συνάρτ.} \\ (x\to+\infty)}} = +\infty$ Άρα η $f_v(x)$ δε συγκλίνει ομοιόμορφα στην f για $x>0$

Ασκήσεις

3) Να εξεταστεί αν η ακολουθία της $f_\nu(x)$ που ορίζεται με:

$$f_\nu(x) = x + \frac{1}{n},\ x \in \mathbb{R}$$

Για $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} x + \frac{1}{n} = x$ η f_ν συγκλίνει κατά σημείο στην x ($f(x) = x$)

$M_\nu = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |(x+\frac{1}{n}) - x| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Άρα $f_\nu(x)$ συγκλ. ομοιόμ. στην x για $x \in \mathbb{R}$

4) $f_\nu(x) = x^3 + \frac{x^\nu}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1]$

(α' τρόπος)

1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} x^3 + \frac{x^\nu}{\nu} = x^3$ Η $f_\nu(x)$ συγκλ. κατά σημείο στην x^3 $\forall x \in [0,1]$

Β2) $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_\nu(x) - f| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |(x^3 + \frac{x^\nu}{\nu}) - x^3| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \frac{x^\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu} \to 0$ $\quad \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} = 0$

Άρα η $f_\nu(x)$ συγκλ. ομοιόμ. στην x^3, $\forall x \in [0,1]$

(β' τρόπος)

Β1) ίδιο με τον 1ο τρόπο

Β2) $|f_\nu(x) - f| = |\cancel{x^3} - \frac{x^\nu}{\nu} - \cancel{x^3}| = |\frac{x^\nu}{\nu}| \overset{\text{δεν χρειάζεται το απόλυτο γιατί } x\in[0,1]}{=} \frac{x^\nu}{\nu} \le \underbrace{\frac{1}{\nu}}_{a_\nu}$ $\quad \lim\limits_{\nu\to\infty} a_n = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} = 0$

Άρα η $f_\nu(x)$ ...

Scanned with CamScanner

5) $f_\nu(x) = \frac{1}{x^2+\nu^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{x^2+\nu^2} = 0$

$M_\nu = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x^2+\nu^2}\right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{x^2+\nu^2}}_{\text{φθ. φρ. συναρτ.}} = 0$ $\quad\lim\limits_{\nu\to\infty} 0 = 0$

Άρα η $f_\nu(x)$ συγκλ. ομοιόμ. στη μηδενική συνάρτ. για $x\in\mathbb{R}$

Αν συγκλίνει ομοιόμ. συγκλίνει κατά σημείο το αντίθετο δεν γίνεται

Επαναλ. ασκήσεις (ολοκληρ.)

1) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^{\pi/4} = \arctan\frac{\pi}{4} - \overset{=0}{\arctan 0}$

2) $\int_1^{+\infty} \log x\,dx = \int_1^t 1\cdot\log x\,dx = \int_1^t (x)'\log x = [x\log x]_1^t - \int_1^t x(\log x)'dx = \boxed{[x\log x]_1^t - [x]_1^t} \neq t\log t$

$= t\log t - \overset{=0}{1\log 1} - t + 1 = t\log t - t + 1$

• $\lim\limits_{t\to+\infty} t\log t - t = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\log t}{\frac{1}{t}} - t \overset{D'Hospital}{=}$

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} - t = \lim\limits_{t\to\infty} -\frac{t^2}{t} - t$

$= \lim\limits_{t\to\infty} -2t = (-\infty)$

3) $\int_0^1 \ln x\,dx = \int_{0^+}^1 \ln x\,dx = \int_t^1 \ln x\,dx = \dots$ (προηγ. άσκ.) $\overset{*}{=} [x\ln x]_t^1 - [x]_t^1 =$

$= \cancel{1\ln 1} - t\ln t - 1 + t = t - t\ln t - 1 = -1$

• $\lim\limits_{t\to 0^+} t - t\ln t = \lim\limits_{t\to 0^+} t - \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to 0^+} t - \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \overset{D'Hosp}{=} -\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t} = 0$

Scanned with CamScanner

$\int_0^x \sin 2t\,dt = \int_0^x \left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)' dt = \left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^x = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 0}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\int_0^x \underset{f}{t}\,\underset{g}{\cos t}\,dt = \int_0^x t(\sin t)'\,dt = [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\,dt = [t\sin t]_0^x + [\cos t]_0^x = x\sin x - 0 + \cos x - 1$

$= x\sin x + \cos x - 1$

6) Ν.α.ο $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ p-σειρά (p-αρμον.) με $p=2>1$

6β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$ ($\not< +\infty$) p-σειρά $p=\frac{1}{2}<1$

7) Να βρεθεί μια μηδενική ακολουθία όπου $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ όπου η αντίστοιχη σειρά της να αποκλ. $\sum_{n=1}^{\infty} a \not< +\infty$.

Έστω $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \not< +\infty$ p-σειρά, $p=1$

Διατύπωση κριτηρίου σύγκρ. (1,2) και λόγου

Σειρές

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

Έστω $a_n = \frac{1}{n}$ — φθιν. — θετικών αριθ. — $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Από Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)\frac{1}{n} < +\infty$

(Abel)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$

$x_n = \frac{1}{n}$ φθίνουσα (μονοτονη), πραγματικών αριθμών, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

και $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n$

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^n}} = 1 \in (0,+\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ για $n>1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n^r}, r>1, \theta\in(0,1)$ $\qquad \sum r^n \; r\in\mathbb{R}$

$x_n = \frac{1}{n^r}$ μονοτονη (φθίνουσα), πραγματ. αριθμ., $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$

$y_n = \theta^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$, $\theta\in(0,1)$

γεωμετρική $\quad r = \theta\in(0,1) < 1$

Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n < +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \frac{1}{n^r}, r>1$

$x_n = \frac{1}{n^r}$ φθίνουσα (μονοτ.), θετικών αριθ., $\lim \frac{1}{n^r} = 0$

$y_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}), \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < +\infty$ ως τηλεσκοπική

Από Abel $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) < +\infty$

<u>Δυναμοσειρές</u>: $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \qquad \sum_{v=0}^{\infty} a_v f_v(x)$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \; a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}|$

$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{n}| = \lim_{n\to 0^+} n\sqrt{n} = 1$

διαστ. σύγκλ. $x\in(-1,1)$

$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$

Για $x=-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n = +\infty$ Από Leibnitz

Για $x=1$

$\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$

Άρα το διάστημα σύγκλ. της δυναμ. είναι $x\in(-1,1)$

$$\sum_{v=0}^{v} a_n x^v \qquad R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & 0<\ell<+\infty \\ 0 & \ell=+\infty \\ +\infty & \ell=0 \end{cases}$$

$A_v \ |x|<R$ συγκλ

$|x|>R$ αποκλ

$$\lim_{v\to\infty}\left|\frac{A_{v+1}}{A_v}\right|$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^v}{\sqrt{n}}$

$$A_n = \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}\sqrt{n}}{(x+1)^n\sqrt{n+1}}\right| = \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot|x+1| = |x+1|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1\cdot|x+1| \lim_{v\to\infty}\left|\frac{A_{v+1}}{A_v}\right|$$

$R=1$

$|x+1|<R$

$\Rightarrow |x+1|<1$

$\Rightarrow -1<x+1<1$

$\Rightarrow -2<x<0$

Για $x=-2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} < +\infty, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

φθιν.

θετικών

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Από Leibniz συγκλ.

Για $x=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \not< +\infty \text{ ως } p\text{-σειρά}, \quad p=\frac{1}{2}<1$$

Το διάστ. συγκ. της διαφ. είναι $x\in[-2,0)$

5) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(x-1)^\nu}{\nu^3}$

$\lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{(x-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)^3} \frac{\nu^3}{(x-1)^\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty} |x-1| \frac{\nu^3}{(\nu+1)^3} = |x-1| \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^3}{(\nu+1)^3} = |x-1| \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^3}{\nu^3} = |x-1|$

$\ell = 1,\ R = 1$

$|x-1|<1$
$\Leftrightarrow$
$-1<x-1<1$
$\Leftrightarrow$
$0<x<2$

Για $x=0$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^3} < +\infty$ από Leibniz ($\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu^3} = 0$)

Για $x=2$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} < +\infty$ ως p-σειρά $p=3>1$

Άρα $x \in [0,2]$

Σειρές Taylor

Αν $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ είναι συναρτηση με $R>0$ τότε $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu =$ (ν-οστη παράγωγος)

$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$

ονομάζεται γενικός όρος σειράς Taylor γύρω από το x_0 ($x=x_0$)

Για $x_0=0 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$ Maclaurin σειρά (όπου $x_0=0$)

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin της f με $f(x) = \sin x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$
$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0$
$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$
$\vdots$

$f^{(\nu)}(0) = \begin{cases} 0, & \nu=2k \\ (-1)^k, & \nu=2k+1 \end{cases}$

Αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο: $\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$ (Αναπτυγμα Maclaurin)

$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \dots$

$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

2) Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(x)=e^x$ σε δυνάμεις γύρω από το $(x-x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$

$f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x$

$f''(x)=e^x$

$f^{(n)}(x)=e^x$

Αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο

$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$

$=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+\frac{e^{x_0}}{2!}(x-x_0)^2+\dots$

4) έχουμε $f(x)=e^{2x}$

$f(x)=e^{2x}$

$f'(x)=2e^{2x}$

$f''(x)=4e^{2x}$

$f'''(x)=8e^{2x}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=2^n e^{2x}$

$=e^{2x_0}+2e^{2x_0}(x-x_0)+\frac{4e^{2x_0}}{2!}(x-x_0)^2+\frac{8e^{2x_0}}{3!}(x-x_0)^3+\dots$

5) $f(x)=\ln x$ για $x_0=1$ $\Rightarrow f(1)=\ln 1=0$

$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(1)=1$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1)=-1$

$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1)=2$

$f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{x^4} \Rightarrow f''''(1)=\cancel{-6}\ -2\cdot 3$

$f^{(5)}(x)=\frac{2\cdot3\cdot4}{x^5} \Rightarrow f^{(5)}(1)=2\cdot3\cdot4$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

$\hookrightarrow \dots 0$

$=\cancel{\ln 1}+1\cdot(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\dots$