Σειρές Συναρτήσεων

5 Απριλίου 2022

Εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα Συνέχειας, Ολοκλήρωσης και Παραγώγισης στις σειρές συναρτήσεων έχουμε :

Αν η ακολουθία συναρτήσεων $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, και για κάθε n οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους το οποίο υποθέτουμε ότι είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ τότε και η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.
Αν οι f_n είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε και η f είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν η s_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Ισχύει ότι

$$\int_a^b s_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx,$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο.
Αν η ακολουθία συναρτήσεων $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, τότε αν οι f_n είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ τότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει ότι $s'_n(x) \to f'(x)$.