Θεώρημα Ολοκλήρωσης

2 Απριλίου 2022

Έστω η συμμετρική διγραμμική συνάρτηση $< f, g > := \int_a^b f(x)g(x)dx$ που ορίζεται στο $R[a,b] \times R[a,b]$ όπου $R[a,b]$ είναι ο διανυσματικός χώρος των κατά Riemman ολοκληρωσίμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι

$$| < f, \mathbf{1} > - < g, \mathbf{1} > | \leq < |f - g|, \mathbf{1} >, \ (1)$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του διαστήματος $[a,b]$.
Θεώρημα Αν η ακολουθία συναρτήσεων f_n του $R[a,b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f τότε $f \in R[a,b]$ -γιατί (;) και $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.

1 Απόδειξη

Αφού $|f_n(x) - f(x)| < \delta = \frac{1}{b-a}\epsilon$, $n \geq n_0(\delta)$ το συμπέρασμα έπεται από την (1). Η απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας της f παραλείπεται.

Αν $f \in R[a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b]$ η συνάρτηση $h(x) = \int_a^x f(t)dt$ έχει την ιδιότητα $h'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει ότι αν η ακολουθία συναρτήσεων f_n του $R[a,b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα και σε κάθε διάστημα $[a,x]$, $x \in [a,b]$ από την ανισότητα (1).