

Εργασία στο μάθημα 'Στοχαστική Μοντελοποίηση'

4 Σεπτεμβρίου 2023

1. Να διατυπωθεί το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής κατά Riemann και να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 0, x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$ όπου $x_0 \in [0, 1]$ και $f(x_0) = 1$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f_n(x) = 0, x \in [0, 1] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ και $f(x_i) = 1, x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann, ενώ η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών στο $[0, 1]$ δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, αλλά είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα κατά Lebesgue της χαρακτηριστικής συνάρτησης των αρρήτων στο $[0, 1]$.
3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Ito

$$\int_0^T B_t^4 dB_t, T > 0.$$