

# Εργασία στο μάθημα 'Στοχαστική Μοντελοποίηση'

24 Ιανουαρίου 2023

1. Να δείξετε ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue των ρητών αριθμών είναι μηδέν.
2. Σε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών τους πραγματικούς αριθμούς της οποίας τον τύπο θα επιλέξετε έτσι ώστε το σύνολο σημείων ουσιαδώς ασυνέχειας να είναι το σύνολο των ρητών αριθμών, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Lebesgue της συνάρτησης αυτής.
3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^T B_t^2 dB_t$ , όπου  $T > 0$  και  $(B_t)$ ,  $t \in [0, T]$  είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown στην οποία η τυχαία μεταβλητή  $B_0$  λαμβάνει την τιμή 0.
4. Να οριστεί το μέτρο πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και να οριστεί μέσω αυτού η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της.
5. Να οριστεί το ολοκλήρωμα μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ως προς ένα μη ατομικό μέτρο πιθανότητας  $P$ .