

Ασκήσεις στην έννοια του μέτρο -γινόμενο

Έστω f, g : συναρτήσεις, τέτοιες ώστε

$$f: X \rightarrow R, g: Y \rightarrow R, h: X \times Y \rightarrow R, h(x, y) = f(x)g(y)$$

και X, Y : κλειστά διαστήματα του R .

1. Να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue της h είναι ίσο με το γινόμενο των ολοκληρωμάτων Lebesgue των f, g , αν οι f, g είναι **απλές**.
2. Αν για κάθε x , η συνάρτηση $h_x(y): Y \rightarrow R$ είναι το **ομοιόμορφο** όριο μιας ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο Y και είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue τότε και η h που είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $X \times Y$.

Έστω $f: X \rightarrow R, g: Y \rightarrow R, h: X \times Y \rightarrow R$,

και X, Y : κλειστά διαστήματα του R .

- 3) Να δείξετε ότι αν οι τροχιές $h_x(y): Y \rightarrow R$ για κάθε x είναι **συνεχείς** συναρτήσεις, τότε είναι ολοκληρώσιμες ως προς το μέτρο Lebesgue του Y .